

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Розв'язування математичних та технічних задач операційним методом

Виконав: студент II курсу, групи ММ-21
Спеціальності 014 Середня освіта(Математика)
Ажнюк Тарас Борисович
Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Демчик С.П.

Рецензент _____

Рівне-2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ I. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ.....	6
1.1. Оригінал та зображення.	6
1.2. Обернене перетворення Лапласа.	9
1.3. Властивості перетворення Лапласа.....	12
1.4. Зображення періодичного оригіналу.	24
1.5. Зображення оригіналу, заданого різними способами в області визначення.	26
1.6. Зображення деяких функцій.	27
РОЗДІЛ II. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ	30
2.1. Операційний метод розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.....	30
2.2. Операційний метод розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.	32
2.3. Операційний метод розв'язування лінійних диференціальних..... рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Метод подібності.	35
2.4. Застосування операційного методу до розв'язування систем лінійних рівнянь.	42
2.5. Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.	45

РОЗДІЛ III. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ЕКОНОМІКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.....	53
3.1. Розв'язування задач на порівняння фінансових проектів на певному відрізку часу.....	54
3.2. Розв'язування задач на знаходження значення струму в електричному контурі за допомогою перетворення Лапласа.....	56
3.3. Задача на розподіл температури в напівобмеженому стержні.	59
3.4. Задача на знаходження передаточної функції та матриці для елементарних моделей багатовимірної системи автоматичного управління.....	60
3.5. Розв'язування задачі механіки на знаходження руху системи.	62
3.6. Розв'язування задачі на визначення відхилення $u(x, t)$ точок струни в будь-який момент часу.	63
ВИСНОВКИ.....	66
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	67
ДОДАТКИ.....	71

ВСТУП

В дев'ятнадцятому столітті переважна більшість математиків як правило, віддалися вивченню так званого символічного числення. В основі цього розділу математики покладена побудова математичного аналізу, як системи формальних операцій над символом $p = \frac{d}{dt}$ (t - незалежна змінна).

Виявилось, що символічне числення є доволі зручним методом для розв'язування задач, що пов'язані з лінійними диференціальними рівняннями. Його популяризації посприяв англійський інженер О. Хевісайд, котрий успішно використовував символічне числення в своїх електротехнічних розрахунках.

Проте Хевісайда не турбував аспект обґрунтування методів виявилось і доволі часто він отримував хибні результати. Обґрунтування символічного чи, як тепер його називають, операційного методу, було дано в двадцятих роках минулого століття, які змогли пов'язати цей метод з методом інтегральних перетворень. Операційне числення успішно використовували багато видатних математики.

Актуальність теми дослідження визначається кількома групами взаємопов'язаних чинників:

- 1) зростаючою роллю математичних наук у сучасному світі;
- 2) операційний метод застосовують в різних областях сучасного природознавства, математичної фізики, у теорії спеціальних функцій;
- 3) важливе значення це перетворення має у сучасних галузях науки техніки таких як автоматика і телемеханіка, теорія систем, теорія регулювання та успішно застосовується при розв'язанні задач механіки, електротехніки, радіотехніки, теплопередачі та ін.;
- 4) практичною значимістю для вирішення конфліктів і суперечностей, які направлені на вироблення максимально оптимізованої і ефективною концепції програмного забезпечення, чия потужність вже давно здатна оброблювати подібні данні;

Метою роботи є вивчення, аналіз та застосування основних понять та властивостей операційного методу до розв'язування диференціальних рівнянь і систем, а також застосування цього методу до розв'язання прикладних задач.

Об'єктом роботи є прикладні задачі та системи диференціальних рівнянь при розв'язуванні яких застосовується операційний метод.

Предметом роботи є демонстрація застосування операційного методу безпосередньо на прикладних задачах та системах диференціальних рівнянь.

Структура роботи зумовлена її метою та завданнями. Дипломна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

Апробація:

Матеріали магістерської роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів та співробітників РДГУ 26 травня 2020 року.

Матеріали магістерської роботи були публіковані в Збірнику наукових матеріалів XLVI Міжнародної науково-практичної інтернет – конференції «СУЧАСНИЙ РУХ НАУКИ» – м. Хмельницький, 05 червня 2020 року.

РОЗДІЛ I. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1. Оригінал та зображення.

Оригіналом або ж просто функцією-оригіналом називають будь-яку комплексно значну функцію $f(t)$ дійсного аргументу t , яка задовольняє наступні умови:

Перша умова. Функція $f(t)$ задовольняє умову Гьольдера при $t \in R$, за окрім окремих точок, де дана функція має розриви першого роду, при тому на кожному скінченному інтервалі таких точок скінченна кількість. Це означає, що для кожного t (за виключенням вище вказаних виключених точок) існують додатні сталі $A > 0$, $\alpha \leq 1$ та h_0 такі, що

$$|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha \quad (1.1.1)$$

при всіх значеннях $h \in R$, $|h| \leq h_0$.

Друга умова. $f(t) = 0$ при всіх від'ємних t .

Третя умова. $f(t)$ зростає при $t \rightarrow +\infty$ не швидше деякої показникової функції, тобто існують такі сталі $M > 0$, $s_0 \geq 0$, що для всіх t виконується умова

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t} \quad (1.1.2)$$

Число s_0 називають показником зростання $f(t)$; для обмежених оригіналів можна, очевидно, взяти $s_0 = 0$.

Зауваження 1.2. Легко бачити, що при *першій умові* задовольняє кожна кусково диференційовна на $(-\infty; +\infty)$ функція $f(t)$.

З точки зору фізичних застосувань *першої* та *третьої умов* не потребують пояснень – очевидно, що вони виконуються для більшості із функцій $f(t)$, які описують різні фізичні процеси (змінна t , в цьому випадку, інтерпретується як час). *Друга умова* на перший погляд здається дещо

штучною. Однак слід брати до уваги, що операційний метод котрий ми застосували до задач, які приводять до розв'язування диференціальних рівнянь за даними початковими умовами. В задачах такого типу вся інформація про хід процесу до початку моменту спостережень, за котрий, звісно, можна взяти момент $t = 0$, знаходиться в початкових умовах. Отже, і друга умова цілком обгрунтована.

Найпростішою функцією-оригіналом є так звана одинична функція

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Очевидно, множення функції $\varphi(t)$ на $\sigma(t)$ „погашує” цю функцію для всіх $t < 0$ та залишає без змін для $t \geq 0$: якщо функція $\varphi(t)$ задовольняє першій та третій умовам і не задовольняє другій умові, то добуток

$$f(t) = \sigma(t)\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varphi(t), & t > 0 \end{cases}$$

задовольнятиме і другу умову, тобто, буде оригіналом (наприклад, $\sigma(t) \sin \beta t$, $\sigma(t)t^n$, $\sigma(t)e^{\alpha t}$ і т.д.). Для зручності запису упускають, як правило, множник $\eta(t)$, прийнявши, що всі функції, які розглядаються, рівні нулю для від'ємних значень t (наприклад, замість $\sigma(t)$ писатимемо 1, замість $\sigma(t) \sin \beta t$ - просто $\sin \beta t$ і т. д.).

Означення. Зображенням оригіналу $f(t)$ називається функція комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яку визначають співвідношенням

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (1.1.3)$$

Інтеграл виду(1.1.3) називається перетворенням Лапласа, тому його ще позначають $L\{f(t)\}$.

Фразу “оригінал $f(t)$ має своїм зображенням $F(p)$ ” чи “ $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$ ” записуватимемо у символічному вигляді:

$$F(t) \doteq f(p) \quad \text{або} \quad F(p) \doteq f(t)$$

Теорема 1.1. Для кожного оригіналу $f(t)$ зображення $F(p)$ визначає в півплощині $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > s_0\}$, де s_0 показник зростання $f(t)$ і є в цій півплощині аналітичною функцією.

Доведення. При $\operatorname{Re} p = s > s_0$ інтеграл (1.1.3) абсолютно збігається, бо за нерівністю (1.1.2) він мажорується збіжним інтегралом

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t) e^{-pt}| dt \leq \int_0^{+\infty} M e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}. \quad (1.1.4)$$

Окрім того, в будь-якій напівплощині $\operatorname{Re} p = s \geq s_1 > s_0$ інтеграл, котрий ми дістаємо з інтеграла (1.1.4) диференціюванням по змінній p , збігається рівномірно, бо також мажорується за збіжним інтегралом, не залежним від p :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) t e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} M t e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{(s-s_0)^2}. \quad (1.1.5)$$

Таким чином, в кожній точці напівплощини $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > s_0\}$ функція $F(p)$ має похідну, тому вона є аналітичною. Теорема доведена.

Зауваження 1.3. Перетворення Лапласа (1.1.3), в загальному, визначає зображення $F(p)$ тільки в напівплощині $\operatorname{Re} p > s_0$. Крім того, з тим в переважній більшості практичних задач область визначення зображення значно ширша від цієї напівплощини.

Зауваження 1.4. Якщо точка p прямує до нескінченності таким чином, що $\operatorname{Re} p = s$ необмежено зростає, то $F(p)$ прямує до нуля:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(p) = 0. \quad (1.1.6)$$

Це твердження напівпряму виходить з нерівності (1.1.4).

З (1.1.6) випливає, що $F(p) \rightarrow 0$, якщо $p \rightarrow \infty$, знаходячись всередині довільного кута $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg p < \frac{\pi}{2} - \delta$, де $\delta > 0$ як завгодно мале, причому ця збіжність є рівномірною відносно $\arg p$. Якщо, зокрема, $F(p)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці, то $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ по довільному шляху, тобто $F(p)$ має нуль в нескінченності.

1.2. Обернене перетворення Лапласа.

Розглянемо інтеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp, \quad (1.2.1)$$

взятий впродовж прямої $Re p = a > 0$, яка пролягає знизу вгору.

Позначимо ще через Γ_R та Γ'_R частини кола

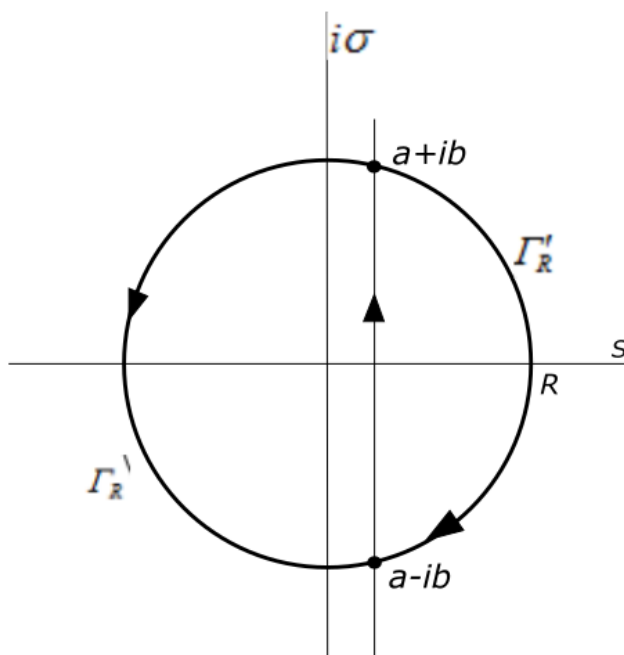


Рис. 1.2.

$|p| = R$, які розташовуються відповідно по праву та ліву сторони від прямої $Re p = a$, а через $a - ib$ та $a + ib$ - кінці Γ_R та Γ'_R (Рис. 1.2.1.).

Нехай $t > 0$; оскільки $\frac{1}{p} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$ рівномірно відносно $\arg p$, то за лемою Жордана (вводимо заміну в лемі iz на p), маємо:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0.$$

Тому з теореми Коші про лишки, згідно з якою

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 2\pi i \operatorname{res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p} = 2\pi i,$$

при $R \rightarrow +\infty$ дістанемо

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1 (t > 0).$$

Якщо $t < 0$, то за тією ж лемою Жордана (вводимо заміну тепер в лемі iz на $-p$), маємо:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma'_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

а за теоремою Коші

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{\Gamma'_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

звідки при $R \rightarrow +\infty$ дістаємо

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 (t < 0).$$

Отже, інтеграл виду (1.2.1) являє собою одиничну функцію. Зрозуміло, що, якщо ввести заміну t на $t - \tau$, де τ - фіксоване число, то отримаємо функцію виду:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} dp = \eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Виконуючи підстановку в (1.2.2) $\tau = \tau_1$, а потім $\tau = \tau_2 > \tau_1$ та віднявши отриманий другий інтеграл від першого інтегралу, отримаємо представлення ступінчастої функції

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p} dp = \begin{cases} 0, & t < \tau_1, \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2, \\ 0, & t > \tau_2. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Нехай $f(t)$ - довільний оригінал. Зафіксуємо деяке $u > 0$ і поділимо на частини з допомогою точок τ_k : $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = u$ відрізок

$[0; u]$. Розглянемо ступінчасту функцію виду $h(t)$, визначимо її наступним чином:

$h(t) = 0$, якщо $t \notin [0; u]$; $h(t) = f(\tau_k)$, якщо $\tau_k < t < \tau_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Позначимо ще $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Скориставшись представленням (1.2.3), функцію виду $h(t)$ можемо представити її у інтегральному виді

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) e^{-p\tau_k} \Delta'\tau_k \right) dp, \quad (1.2.4)$$

$$\text{де } \Delta'\tau_k = \frac{1 - e^{-p\Delta\tau_k}}{p} = \Delta\tau_k - \frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!} p + \frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!} p^2 - \dots$$

Якщо число n збільшувати таким чином, щоб значення $\max \Delta\tau_k$ прямувало до нуля, то $\Delta'\tau_k$ буде величиною нескінченно малою, еквівалентною $\Delta\tau_k$, і сума в дужках у формулі (1.10), яка майже не відрізняється від інтегральної для функції $f(\tau)e^{-p\tau}$ на проміжку $[0; u]$, перейде в інтеграл. Тому природно очікувати, що ми отримаємо інтегральне представлення функції $f(t)$ на інтервалі $(0; u)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left(\int_0^u f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) dp.$$

Спрямувавши u до $+\infty$, отримаємо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left(\int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) dp.$$

проте інтеграл, що міститься в дужках є перетворенням Лапласа функції $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (1.2.5)$$

Тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (1.2.6)$$

Формула (1.2.6) називається оберненим перетворенням Лапласа.

1.3. Властивості перетворення Лапласа

Розглянемо ряд фундаментальних властивостей, котрі лежать в основі операційного числення та його практичних застосувань.

Надалі завжди введемо позначення де $f(t)$, $g(t)$, ... оригінали, а $F(p)$, $G(p)$, ... - їх зображення.

Властивість лінійності

Для деяких довільних комплексних сталих \tilde{n}_1 та \tilde{n}_2 функція $\tilde{n}_1 f(t) + \tilde{n}_2 g(t)$ буде оригіналом і при тому

$$\tilde{n}_1 f(t) + \tilde{n}_2 g(t) \doteq \tilde{n}_1 F(p) + \tilde{n}_2 G(p) \quad (1.3.1)$$

Справді,

$$\begin{aligned} L\{\tilde{n}_1 f(t) + \tilde{n}_2 g(t)\} &= \int_0^{+\infty} (\tilde{n}_1 f(t) + \tilde{n}_2 g(t)) e^{-pt} dt = \\ &= \tilde{n}_1 \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \tilde{n}_2 \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt = \tilde{n}_1 F(p) + \tilde{n}_2 G(p) \end{aligned}$$

Приклад. Для деякого довільного α , яке може мати комплексні значення, відшукаємо

$$\begin{aligned} L\{e^{\alpha t}\} &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \left. \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-p} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-p)t} - e^0 \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha-p} (0 - 1) = \frac{1}{p-\alpha}, \end{aligned}$$

бо $Re(\alpha - p) < 0$. Отже,

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha} \quad (1.3.2)$$

Як частковий випадок, при $\alpha = 0$ маємо

$$1 \doteq \frac{1}{p} \quad (1.3.3)$$

Використавши властивість лінійності та співвідношення (1.3.2), маємо

$$L\{\sin t\} = L\left\{\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{p^2+1},$$

тобто

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1} \quad (1.3.4)$$

Таким же чином, використовуючи формули

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \text{sh } t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}, \quad \text{ch } t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2},$$

отримаємо

$$\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}, \quad \text{sh } t \doteq \frac{1}{p^2-1}, \quad \text{ch } t \doteq \frac{p}{p^2-1} \quad (1.3.5)$$

Приклад. Знайти зображення функцій $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ (ω — будь-яке число), c ($const$), $ch \omega t$, $sh \omega t$.

Користаючись властивістю лінійності, знаходимо:

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

Аналогічно отримаємо формулу $\cos \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Далі $c = c \cdot \eta \doteq c \cdot \frac{1}{p}$ тобто

$$c \doteq \frac{c}{p}.$$

Нарешті,

$$ch \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+\omega} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$\text{тобто } ch \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

Аналогічно отримаємо формулу $sh \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$

Теорема подібності

Для деякої довільної сталої $\alpha > 0$ функція виду $f(\alpha t)$ буде оригіналом і при цьому матиме місце наступне співвідношення

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (1.3.6)$$

Дійсно, легко бачити, що при $\alpha > 0$ функція $f(\alpha t)$ буде відповідати тим же умовам 1^o - 3^o, що і $f(t)$, тобто оригіналом. Підставивши $\alpha t = \tau$, бачимо, що $dt = \frac{d\tau}{\alpha}$ і $0 < \tau < +\infty$ при $0 < t < +\infty$. Тому

$$\begin{aligned} L\{f(\alpha t)\} &= \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\frac{\tau}{\alpha}} \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Приклад. Використавши теорему подібності до співвідношення (1.3.4), отримаємо

$$L\{\sin \beta t\} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\beta \left(\frac{p}{\beta}\right)^2 + 1} = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}, \quad \beta > 0$$

тобто

$$\sin \beta \doteq \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}. \quad (1.3.7)$$

Аналогічно до співвідношень (1.3.5), отримаємо

$$\cos \beta t \doteq \frac{p}{p^2 + \beta^2}, \quad sh \beta t \doteq \frac{\beta}{p^2 - \beta^2}, \quad ch \beta t \doteq \frac{p}{p^2 - \beta^2}. \quad (1.3.8)$$

Теорема про диференціювання оригіналу

У випадку якщо функція виду $f(t)$ є неперервною при $t \geq 0$ і $f'(t)$ являється оригіналом то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0) \quad (1.3.9)$$

Справді, переходячи до зображень та інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} d(f(t)) = (f(t)e^{-pt}) \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Оскільки $Re p = s > s_0$, то $|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{-(s-s_0)t}$ і виконавши підстановку $t = +\infty$ в перший доданок, отримаємо нуль, виконавши підстановку $t = 0$ отримаємо, $-f(0)$; другий доданок рівний $pF(p)$, таким чином співвідношення (1.3.9) доведене.

Відзначимо, зокрема, що, якщо $f(0) = 0$, то

$$f'(t) \doteq pF(p) \quad (1.3.10)$$

Теорема про диференціювання зображення

Диференціювання зображення зводиться до множення на t оригіналу:

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t). \quad (1.3.12)$$

Дійсно, оскільки $F(p)$ є в напівплощині $Re p > s_0$ аналітичною функцією, то її диференціювання можна виконувати скільки завгодно раз і ми отримаємо:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} (f(t)e^{-pt})'_p dt = \int_0^{+\infty} (-tf(t))e^{-pt} dt ,$$

$$F''(p) = \int_0^{+\infty} (-tf(t)e^{-pt})'_p dt = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt} dt ,$$

.....

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt} dt ,$$

що рівносильне до співвідношення (1.3.12).

В якості прикладу застосування даної властивості зауважимо, що зі співвідношень (1.3.3) та (1.3.2) маємо

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad t^n e^{\alpha t} \doteq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad (1.3.13)$$

а зі співвідношень (1.3.7) та (1.3.8) випливає

$$t \sin \beta t \doteq \frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}, \quad t \cos \beta t \doteq \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}, \quad (1.3.14)$$

$$t \operatorname{sh} \beta t \doteq \frac{2\beta p}{(p^2 - \beta^2)^2}, \quad t \cos \beta t \doteq \frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}, \quad (1.3.15)$$

Теорема зміщення

Для будь-якого комплексного α має місце співвідношення:

$$F(p - \alpha) \doteq e^{\alpha t} f(t) \quad (1.3.16)$$

Маємо:

$$L\{e^{\alpha t} f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p - \alpha),$$

що й потрібно було довести.

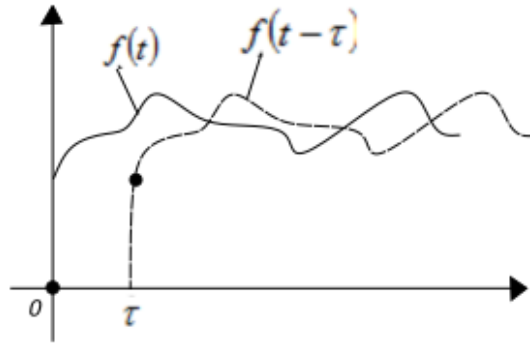
Теорема зміщення дає змогу за відомими зображеннями функцій відшукати зображення тих же функцій, помножених на експоненту. Наприклад, із (1.3.7) та (1.3.8) отримаємо:

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \sin \beta t &\doteq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}, \\ e^{\alpha t} \cos \beta t &\doteq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Теорема запізнення

Для будь-якого додатного τ виконується

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p). \quad (1.3.18)$$



(включення оригіналу з запізненням на τ (Рис. 1.3.1.) рівносильне множенню зображення на $e^{-p\tau}$).

Справді, оскільки $f(t - \tau) = 0$ при $t < \tau$, то

$$\begin{aligned} L\{f(t - \tau)\} &= \int_0^{+\infty} f(t - \tau)e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{\tau} 0 \cdot e^{-pt} dt + \int_{\tau}^{+\infty} f(t - \tau)e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{+\infty} f(t - \tau)e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Ввівши заміну змінної інтегрування $t - \tau = u$, отримаємо

$$\begin{aligned} L\{f(t - \tau)\} &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+\tau)} dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}e^{-p\tau} dt = \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu} dt = e^{-p\tau} F(p), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Теорему запізнення зручно використовувати для знаходження зображень функцій, які на різних ділянках задаються різними аналітичними виразами.

Теорема про інтегрування оригіналу

Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на p :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p} \quad (1.3.19)$$

Легко впевнитися, що функція $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ разом з функцією $f(t)$ є оригіналом, тобто відповідно задовольняє умовам $1^0 - 3^0$ п. 1.2. Тоді користуючись формулою (1.3.10) маємо:

$$f(t) = g'(t) \doteq pG(p)$$

Таким чином, для зображення оригінала $f(t)$ виконується $F(p) = pG(p)$, звідки $G(p) = \frac{F(p)}{p}$, що й потрібно було довести.

Інтегрування зображення

Якщо інтеграл виду $\int_p^{+\infty} F(z) dz$ є збіжним, то він являється зображенням для функції $f(t)/t$:

$$\int_p^{+\infty} F(z) dz \doteq \frac{f(t)}{t} \quad (1.3.20)$$

Враховуючи (1.1.3), маємо

$$\int_p^{\infty} F(z) dz = \int_p^{\infty} dz \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt. \quad (1.3.21)$$

Вважаючи, що шлях інтегрування (p, ∞) повністю знаходиться в напівплощині $Re \geq \alpha > s_0$, маємо оцінку внутрішнього інтеграла

$$\left| \int_p^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-s_0)t} dt,$$

з якої стає зрозумілою його рівномірна збіжність відносно z . Грунтуючись на цьому ми можемо в формулі (1.3.21) ввести зміни в порядок інтегрування:

$$\int_p^{\infty} F(z) dz = \int_p^{+\infty} f(t) dt \int_p^{+\infty} e^{-zt} dz = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-zt} dt.$$

Отримана рівність є рівносильною формулі (1.3.20).

Приклад. Знайти зображення функції $\frac{\sin t}{t}$; знайти зображення інтегрального синуса $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Так як

$$\sin t = \frac{1}{p^2 + 1},$$

то

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{1}{p^2 + 1} dp = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

тобто

$$\frac{\sin t}{t} \div \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

Застосовуючи властивість інтегрування оригіналу, отримаємо

$$\int_0^e \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \div \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}.$$

Теорема про згортку або множення зображень

Добуток двох зображень $F(p)$ та $G(p)$ також буде зображенням, причому

$$F(p)G(p) \equiv \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (1.3.25)$$

В першу чергу переконаємось, що інтеграл в правій частині співвідношення (1.3.25) є оригіналом. Дійсно, умови 1⁰ та 2⁰ є очевидними, а для доведення 3⁰, якщо позначити найбільший з показників зростання $f(t)$ та $g(t)$ через s_0 , то отримаємо:

$$\left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| \leq M \left| \int_0^t e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} d\tau \right| = Mte^{s_0t}$$

З цього слідує, що інтеграл в (1.3.25) не перевищує деякої сталої, помноженої на $Me^{(s_0+\varepsilon)t}$, де ε - довільне мале додатне число.

Розглянемо тепер зображення інтеграла в співвідношенні (1.3.25):

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Праворуч тут стоїть повторний інтеграл, який поширюється на сектор (S) площини (t, τ) , бо при фіксованому $t > 0$ інтегрування по τ виконується в межах від 0 до $\tau = t$, а далі t змінюється від 0 до $+\infty$. Оскільки, цей подвійний інтеграл при $Re p > s_0$ абсолютно збігається, то в ньому можна змінити порядок інтегрування, і ми дістанемо (заміняючи ще $t - \tau = u$):

$$\begin{aligned} & \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \doteq \\ & \doteq \int_0^t f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} g(t-\tau)dt = \\ & = \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p(u+\tau)} g(u)du = \\ & = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pu} g(u)du = F(p)G(p). \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Наслідок. Розглянемо

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + (pF(p) - f(0))G(p)$$

Користуючись правилом диференціювання оригіналу (формула (1.3.9)) та теоремою множення, отримаємо інтеграл Дюамеля:

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (1.3.28)$$

Використавши властивість симетрії згортки, цей інтеграл можемо подати в такому вигляді:

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau. \quad (1.3.29)$$

Зміна функцій $F(p)$ на $G(p)$ і навпаки приводить до формул

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) \doteq g(0)f(t) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau &= g(0)f(t) + \\ &+ \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Сформулюємо без доведення властивість (1.3.25).

Нехай нам дано два оригінали $f(t)$ та $g(t)$ з показниками росту s_1 та s_2 . Їх добуток також є оригіналом, причому

$$f(t)g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(q)G(p-q)dq,$$

де $\alpha > s_1, \operatorname{Re} p > s_2 + \alpha$.

Приклад. Знайти оригінал функцій

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \quad \text{і} \quad F(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

Так як

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{(p^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{(p^2 + \omega^2)}, \quad \text{і} \quad \frac{1}{p^2 + \omega^2} \doteq \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t, \\ F(p) &\doteq \int_0^t \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega \tau \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2\omega^2} \cdot \int_0^t (\cos \omega(2\tau-t) - \cos \omega t)d\tau = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{2\omega} \cdot \sin \omega(2\tau-t) \Big|_0^t - \cos \omega t \cdot \tau \Big|_0^t \right) = \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t \right) = \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t), \end{aligned}$$

Тобто

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \div \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t).$$

Аналогічно отримаємо

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \div \frac{1}{2\omega} \cdot t \cdot \sin \omega t.$$

Теорема розкладу

На практиці доволі часто необхідно знаходити оригінал за його зображенням. Для цього можна використовувати відому нам формулою (1.2.6). Проте обчислення за цією формулою можуть бути доволі складними. Сформулюємо два способи, які полегшують знаходження оригіналу і стосуються розкладу в ряди оригіналів чи зображень.

Перша теорема розкладу. Якщо $F(p)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці і має в її околі $|p| \geq R$ розклад в ряд Лорана

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{p^k},$$

то оригіналом для $F(p)$ буде (помножена на $\eta(t)$) функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

При цьому $f(t)$ є цілою функцією.

Приклад. Знайти оригінал $f(t)$, якщо

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin \frac{1}{p}; \quad F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Маємо

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{p^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{p^5} - \dots \right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{p^4} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{p^6} - \dots$$

Отже, на підставі теореми розкладу

$$f(t) = t - \frac{1}{3!} \frac{t^3}{3!} + \frac{1}{5!} \frac{t^5}{5!} - \dots, T > 0.$$

Запишемо розкладання функції за Лораном $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$ в околиці точки

$p = \infty$:

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2(1+\frac{1}{p^2})} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{p^2})} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \dots \right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \dots,$$

де $\left| \frac{1}{p^2} \right| < 1$, тобто $|p| > 1$. Отже, $f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$, тобто $f(t) = \cos t$, $t > 0$

Теорема про граничні співвідношення

Теорема 1. Нехай $f(t) \doteq F(p)$ і $f'(t)$ - оригінал, тоді

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \doteq \lim_{t \rightarrow +0} f(t) \quad (1.3.32).$$

Доведення. Згідно до теореми про диференціювання оригіналів маємо

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0).$$

Необхідною умовою для існування зображення є прямування його до нуля при $p \rightarrow \infty$, тому

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p) - f(+0)] = 0.$$

Звідси випливає рівність (1.3.32).

Теорема 2. Нехай $f(t) \doteq F(p)$ і $f'(t)$ - оригінал; тоді, якщо існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad \text{то} \quad \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \doteq \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Доведення. За теоремою про диференціювання оригіналу

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = pF(p) - f(+0).$$

Спрямувавши у цій рівності p до нуля, дістанемо

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p) - f(+0)]. \quad (1.3.33)$$

Невласний інтеграл запишемо у вигляді

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} f'(t) dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) - f(+0). \quad (1.3.34)$$

Повертаючись у рівності (1.3.34) від η до t , подамо (1.3.33) таким чином:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(+0) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(+0)$$

або

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (1.3.35)$$

Одержані формули (1.3.32) і (1.3.35) дають змогу скласти уявлення про процес, що досліджується на його початку і на нескінченності.

1.4. Зображення періодичного оригіналу.

Розглянемо функцію-оригінал $f(t)$, визначену на обмеженому проміжку $\langle 0, a \rangle$. Припустимо, що $f(t) = 0$ всюди поза $\langle 0, a \rangle$. Тоді

$$Lf(t) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^a f(t)e^{-pt} dt.$$

Побудуємо періодичну функцію $\psi(t)$ з періодом $T = a$, що збігається на $(0, a)$ з $f(t)$. Отже,

$$\psi(t) = \psi(t + a) = \psi(t + 2a) = \dots = \psi(t + na) = f(t). \quad (1.4.1)$$

Знайдемо зображення $\Phi(p)$ періодичної функції $\psi(t)$. Введемо змінну $u = t + na$. Очевидно, у кожному з інтервалів $(na, (n + 1)a)$ змінна u має різні значення. Тому формально записаний ряд Лапласа

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pu} \psi(u) du$$

треба записати через суму:

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pu} \psi(u) du = \int_0^a e^{-pu} \psi(u) du + \int_a^{2a} e^{-pu} \psi(u) du + \dots + \\ &+ \int_{na}^{(n+1)a} e^{-pu} \psi(u) du + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} e^{-pu} \psi(u) du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a e^{-p(t+na)} \psi(t+na) dt. \end{aligned}$$

Враховуючи умову періодичності оригіналу (1.4.1), останній вираз можна записати у вигляді

$$\Phi(p) = \int_0^a e^{-pt} f(t) dt \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pna}.$$

Розглянемо множник

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pna} = 1 + e^{-pa} + e^{-2pa} + \dots + e^{-pna} + \dots.$$

Цей вираз є збіжною геометричною прогресією. Дійсно $Re p > s_0 > 0$, тоді $|e^{-pa}| < 1$ і

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pna} = \frac{1}{1 - e^{-pa}}.$$

Нагадаємо, що

$$\int_0^a e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p).$$

Тоді періодичний оригінал, визначений всюди при $t > 0$, має зображення

$$\psi(t) \doteq F(p) \frac{1}{1 - e^{-pa}}. \quad (1.4.2)$$

яке можна записати таким чином:

$$L\psi(t) = \Phi(p) = \frac{1}{1 - e^{-pa}} \int_0^a e^{-pt} f(t) dt.$$

1.5. Зображення оригіналу, заданого різними способами в області визначення.

У застосуванні часто зустрічаються оригінали, область визначення яких розбивається на декілька інтервалів, і в кожному з них використовуються різні функціональні залежності. Як приклад розглянемо функцію (рис 1.5.)

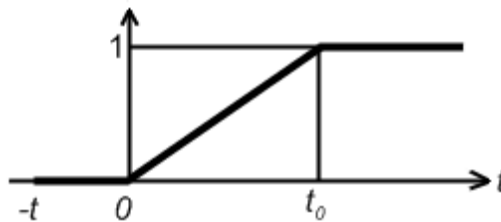


Рис 1.5.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ kt & \text{при } 0 < t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0, \quad k = \text{const.} \end{cases}$$

Запишемо тепер дану функцію у вигляді однієї формули, скориставшись одиничною функцією:

$$f(t) = kt - k(t - t_0)\sigma(t - t_0),$$

де

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Застосуємо тепер до здобутого виразу перетворення Лапласа:

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} kt e^{-pt} dt - \int_0^{\infty} k(t - t_0)\sigma(t - t_0) e^{-pt} dt.$$

Кожен з інтегралів у правій частині легко обчислюється. Слід звернути увагу на те, що у другому інтегралі нижню межу інтегрування треба взяти рівною t_0 . Крім того, з означення функції $f(t)$ випливає, що $k = \frac{1}{t_0}$. Тому

$$f(t) \doteq \frac{1 - e^{-pt_0}}{t_0 p^2}.$$

1.6. Зображення деяких функцій.

Одинична функція Хевісайда

Функція

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

називається **функцією Хевісайда**. Графік її наведено на рис. 1.6. Застосуємо до неї перетворення Лапласа.

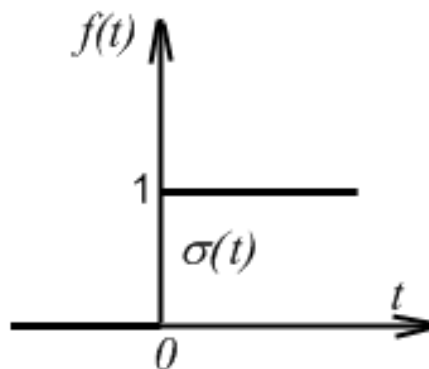


Рис. 1.6

Зауваження. Питання про визначення функції Хевісайда у точці 0 залишається відкритим, оскільки для обчислення інтеграла Лапласа не має значення, чому дорівнює $\sigma(0)$. Приймають $\sigma(t) = 0, \frac{1}{2}, 1$. Далі вважатимемо, що $\sigma(0) = 1$.

Розглянемо тепер функцію $\Phi(t)$, яка задовольняє умови 1) і 3) оригіналу, а умова 2) не виконується. Наприклад, маємо функції $1, \sin t, e^t, t^n$ і т.д. Домноживши $\Phi(t)$ на $\sigma(t)$, дістанемо $\Phi(t)\sigma(t) = 0$ при $t < 0$, тобто $\Phi(t)\sigma(t)$ тепер є оригіналом. Введення функції $\sigma(t)$ розширює клас оригіналів. Надалі

заради стислості викладу оригінали $\Phi(t)\sigma(t)$ запишуватимемо без множника $\sigma(t)$.

Введемо, як це прийнято, позначення оператора Лапласа L . Тоді зображення деякого оригіналу $f(t)$ запишемо у вигляді $Lf(t)$. Символічній рівності

$$f(t) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

відповідатиме звичайна рівність

$$Lf(t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Тепер

$$\begin{aligned} L\sigma(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sigma(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^{+\eta} e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right] \Big|_0^{\eta} = -\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{e^{-p\eta}}{p} + \frac{1}{p}. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Якщо $Re p = \alpha > 0$, то $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{e^{-p\eta}}{p} = 0$.

Отже, зображенням одиничної функції є

$$L\sigma(t) = \frac{1}{p}, \quad \sigma(t) \doteq \frac{1}{p}. \quad (1.6.2)$$

Оскільки $s = 0$, то зображення $\frac{1}{p}$ існує, якщо $Re p > 0$. Зображення сталої C

$$LC = LC\sigma(t) = CL\sigma(t) = \frac{C}{p}; \quad LC = \frac{C}{p}.$$

Показникова функція $f(t) = e^{qt}$

Як наслідок застосування перетворення Лапласа маємо

$$Le^{qt} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{qt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(q-p)t} dt = \frac{e^{(q-p)t}}{q-p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-q}, \quad (1.6.3)$$

якщо $Re p > Re q$.

У випадку $f(t) = e^{-qt}$

$$Le^{-qt} = \frac{1}{p + q}, \quad (1.6.4)$$

якщо $Re p + Re q > 0$.

РОЗДІЛ II. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

2.1. Операційний метод розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Операційний метод зручно застосовувати при розв'язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Нехай дано диференціальне рівняння

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t), \quad (2.1.1)$$

де $a_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots, n$, з початковими умовами

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \quad (2.1.2)$$

Вважатимемо, що $a_0 \neq 0$, а функція $f(t)$ і розв'язок $x(t)$ з його похідними до n -го порядку є оригіналами. Введемо позначення $X(p)$, $x(t)$, $F(p)$, $f(t)$. Відповідно до правила диференціювання оригіналу (формули (1.3.10) та (1.3.11)) та властивості лінійності замість диференціального рівняння (2.1.1) з початковими умовами (2.1.2) отримаємо операторне рівняння

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = F(p) + x_0 (a_0 p^{n-1} + \\ & + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + x_1 (a_0 p^{n-2} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0 \end{aligned}$$

або

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p), \quad (2.1.3)$$

де $A(p)$ та $B(p)$ - відомі многочлени. З цього рівняння знаходимо операторний розв'язок:

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \quad (2.1.4)$$

Якщо рівняння (2.1.1) з початковими умовами (2.1.2) має розв'язок $x(t)$, що задовольняє умовам, накладеним на оригінали (такий розв'язок в прийнятих умовах існує завжди), то цей розв'язок є оригіналом для $X(p)$.

Розглянемо приклади.

Приклад. Розв'язати задачу Коші

$$x^{IV} + 2x'' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Операторне рівняння отримаємо у вигляді $(p^4 + 2p^2 + 1)X(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$,

звідки дістаємо його розв'язок:

$$X(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^3}.$$

Очевидно, що розв'язок є аналітичною функцією в усій комплексній площині, за винятком точок $p_{1,2} = \pm i$, які є полюсами третього порядку. Тому, за другою теоремою розкладу, маємо:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{res}_{p=i} \left(\frac{1}{(p^2 + 1)^3} e^{pt} \right) + \operatorname{res}_{p=-i} \left(\frac{1}{(p^2 + 1)^3} e^{pt} \right) = \\ &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^3} (p - i)^3 \right) \Bigg|_{p=i} + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt} (p + i)^3}{(p^2 + 1)^3} \right) \Bigg|_{p=-i} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt}}{(p + i)^3} \right) \Bigg|_{p=i} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt}}{(p - i)^3} \right) \Bigg|_{p=-i} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 (p + i)^2 - 6t(p + i) - 12}{(p + i)^5} e^{pt} \right) \Bigg|_{p=i} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 (p - i)^2 - 6t(p - i) - 12}{(p - i)^5} e^{pt} \right) \Bigg|_{p=-i} = \\ &= \frac{1}{8} (3 - t^2) \sin t - \frac{3}{8} t \cos t. \end{aligned}$$

Приклад. Вирішити операційним методом диференціальне рівняння $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$ при умовах $y(0) = 2, y'(0) = 6$.

Нехай

$$y(t) \div Y(p) = Y.$$

Тоді

$$y'(t) \div pY - y(0) = pY - 2,$$

$$y''(t) \div p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 6, \text{ і } e^{3t} \div \frac{1}{p-3}.$$

Підставляючи ці вираження в диференціальне рівняння, отримаємо операторне рівняння:

$$p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12 \frac{1}{p-3}.$$

звідси

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Знаходимо $y(t)$. Можна розбити дріб на суму $\left(Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3} \right)$, але так як корені знаменника ($p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$) прості, то зручно скористатися другою теоремою розкладання

$$A(p) = 2p^2 - 6p + 12,$$

$$B'(p) = (p-2)(p-3) + (p-1)(p-3) + (p-1)(p-2).$$

Отримаємо:

$$y(t) = \frac{8}{(-1) \cdot (-2)} e^{1 \cdot t} + \frac{8}{1 \cdot (-1)} e^{2 \cdot t} + \frac{12}{2 \cdot 1} e^{3 \cdot t} = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}.$$

2.2. Операційний метод розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

Нехай задано рівняння наступного вигляду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \text{і} \quad y(0) = y_0 \neq 0; \quad y'(0) = y'_0 \neq 0.$$

Вимагатимемо, щоб розв'язок був оригіналом і $y(t) \doteq Y(p)$. Тоді відповідне рівняння у зображеннях можна подати у вигляді

$$Y(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = p y_0 + y'_0 + a_1 y_0.$$

Розв'язком відповідного рівняння у зображеннях буде

$$Y(p) = \frac{y_0(p + a_1) + y'_0}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Випадок 1. Виконується умова

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0,$$

тоді знаменник $p^2 + a_1 p + a_2$ можна подати у вигляді $(p - \alpha_1)(p - \alpha_2)$, де корені α_1 і α_2 - дійсні і різні. Отже,

$$\frac{y_0(p + a_1) + y'_0}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2};$$

тому оригінал можна записати у наступному вигляді

$$y(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Випадок 2. Виконуються умови

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2;$$

тоді $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -\frac{a_1}{2}$.

Розв'язок відповідного рівняння у зображеннях можна подати у вигляді суми двох дробів:

$$Y(p) = \frac{A_1}{(p - \alpha)^2} + \frac{A_2}{p - \alpha}.$$

Перехід до простору оригіналів приводить до виразу

$$y(t) = A_1 t e^{\alpha t} + A_2 e^{\alpha t} = e^{\alpha t} (A_1 t + A_2) = e^{-\frac{a_1}{2} t} (A_1 t + A_2).$$

Випадок 3. Виконується умова

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0.$$

Тепер корені α_1 і α_2 є комплексними. Розв'язок задачі такого типу можна знайти за методом показаним у першому випадку, скориставшись потім формулою Ейлера:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = -\frac{a_1}{2} \pm j \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} = b_1 \pm j b_2,$$

де

$$b_1 = -\frac{a_1}{2}; \quad b_2 = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

За своїм утворенням невизначені коефіцієнти A_1 і A_2 будуть також комплексно-спряженими

$$A_1 = \frac{y_0}{2} + j \frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}; \quad A_2 = \frac{y_0}{2} - j \frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}$$

або

$$A_{1,2} = m_1 \pm j m_2,$$

де

$$m_1 = \frac{y_0}{2}; \quad m_2 = \frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}.$$

Згідно першого випадку маємо

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} = (m_1 + j m_2) e^{(b_1 + j b_2)t} + (m_1 - j m_2) e^{(b_1 - j b_2)t} = \\ &= e^{b_1 t} [(m_1 + j m_2)(\cos b_2 t + j \sin b_2 t) + (m_1 - j m_2)(\cos b_2 t - j \sin b_2 t)], \\ y(t) &= e^{b_1 t} (2m_1 \cos b_2 t - 2m_2 \sin b_2 t) = 2e^{b_1 t} (m_1 \cos b_2 t - m_2 \sin b_2 t). \end{aligned}$$

Такий ж результат можна дістати іншим способом. Маємо

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{y_0(p + a_1) + y_0'}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{y_0 p + y_0 a_1 + y_0'}{p^2 + 2\frac{a_1}{2}p + \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_2} = \\ &= \frac{y_0 p + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} = \frac{y_0(p - b_1) + y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{y_0(p - b_1)}{(p - b_1)^2 + b_2^2} + \frac{y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Величини b_1 і b_2 мають той самий зміст, що і раніше, а $B = y_0 a_1 + y_0'$.

Знаходимо оригінали

$$\frac{y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} \doteq \frac{1}{b_2} (y_0 b_1 + B) e^{b_1 t} \sin b_2 t = -2m_2 \sin b_2 t;$$

$$\frac{y_0 (p - b_1)}{(p - b_1)^2 + b_2^2} \doteq y_0 e^{b_1 t} \cos b_2 t = 2m_1 e^{b_1 t} \cos b_2 t.$$

Знову розв'язок дістаємо у наступному вигляді

$$y(t) = 2e^{b_1 t} (m_1 \cos b_2 t - m_2 \sin b_2 t).$$

2.3. Операційний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Метод подібності.

Вище було розглянуто розв'язування операційним методом лінійних рівнянь і систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Однак перетворення Лапласа дає змогу розв'язувати деякі лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Нехай маємо коефіцієнтами рівняння $a_k(t)$ є многочлен відносно незалежної змінної. У рівнянні

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_k(t)y^{(k)} + \dots + a_n(t) = q(t) \quad (2.3.1)$$

з початковими умовами

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \quad (2.3.2)$$

Коефіцієнти a_k є многочленами від t :

$$a_k(t) = b_{0k}t^m + b_{1k}t^{m-1} + b_{2k}t^{m-2} + \dots + b_{mk},$$

$$b_{ik} = \text{const}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.3.3)$$

Тобто, ліва частина рівняння (2.4.1) є лінійною комбінацією виразів виду

$$t^r y^{(k)}(t), \quad (2.3.4)$$

де r і k - цілі додатні числа.

Користуючись перетворенням Лапласа у виразі виду (2.3.4) і використовуючи дві теореми про диференціювання (див. п. 1.3), маємо

$$y^{(k)}(t) \doteq p^k Y(p) - p^{k-1} y_0 -$$

$$- p^{k-2} y'_0 - \dots - p y_0^{(k-2)} - y_0^{(k-1)} = F_k(p); \quad (2.3.5)$$

$$t^r y^{(k)}(t) \doteq (-1)^r \frac{d^r F_k(p)}{dp^r}. \quad (2.3.6)$$

Виконавши перетворення для кожного доданку із рівняння (2.3.1), отримаємо зображувальне рівняння, яке у цьому випадку буде диференціальним рівнянням. Легко побачити, що порядок диференціального рівняння у зображеннях буде рівний показнику найвищого степеня r многочленів (2.3.3). Звідси слідує, що застосування операційного методу до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами виду (2.3.3) за певних умов може привести до пониження порядку рівнянь.

Метод подібності. В інженерній практиці часто можна зустріти рівняння зі змінними коефіцієнтами більш загального вигляду, ніж розглянуті нами вище. Такі рівняння шляхом індивідуальних у кожному випадку перетворень зводяться до рівнянь з відомими розв'язками.

Припустимо, що задане лінійне рівняння другого порядку

$$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0. \quad (2.3.7)$$

де $P_1(x)$ - неперервно диференційовна функція; $P_2(x)$ – неперервна функція.

Заміною шуканої функції співвідношенням

$$y(x) = u(x)Y(x), \quad (2.3.8)$$

де $u(x)$ - коефіцієнт подібності, рівняння (2.3.7) зі змінними коефіцієнтами можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами a_1 і a_2 :

$$Y''(x) + a_1 Y'(x) + a_2 Y(x) = 0. \quad (2.3.9)$$

Після виконання підстановки отримаємо рівняння

$$uY'' + (2u' + P_1u)Y' + (u'' + P_1u' + P_2u)Y = 0,$$

яке шляхом нескладних перетворень зводиться до вигляду

$$uY'' + \frac{2u' + P_1u}{a_1} a_1 Y' + \frac{u'' + P_1u' + P_2u}{a_2} a_2 Y = 0. \quad (2.3.10)$$

Для остаточного переходу до рівняння (2.4.9) необхідно, щоб виконувалися рівності

$$u = \frac{2u' + P_1u}{a_1} = \frac{u'' + P_1u' + P_2u}{a_2}. \quad (2.3.11)$$

Одержані умови (2.3.12) є необхідними і достатніми. Припускаючи, що a_1 відоме, розв'яжемо перше рівняння системи (2.4.11):

$$u = \exp \left[\frac{1}{2} \int [a_1 - P_1(x)] dx \right]. \quad (2.3.12)$$

Якщо підстановка (2.3.12) перетворює друге рівняння системи (2.3.11)

$$u = \frac{u'' + P_1 u' + P_2 u}{a_2} \quad (2.3.13)$$

на тотожність, то задача перетворення рівняння (2.3.7) на (2.3.9) є розв'язаною. Щоб виконати цю підстановку, знаходимо похідні

$$u' = \frac{1}{2} [a_1 - P_1(x)] \exp \left[\frac{1}{2} \int [a_1 - P_1(x)] dx \right]; \quad (2.3.14)$$

$$u'' = \left\{ -\frac{1}{2} \left(P_1'(x) + \frac{1}{4} [a_1 - P_1(x)]^2 \right) \right\} \exp \left[\frac{1}{2} \int [a_1 - P_1(x)] dx \right].$$

Підставляючи (2.3.12) і (2.3.14) в (2.3.13) і скорочуючи на експоненту, дістаємо

$$a_2 = -\frac{1}{2} P_1'(x) + \frac{1}{4} [a_1 - P_1(x)]^2 + \frac{1}{2} [a_1 - P_1(x)] P_1(x) + P_2(x).$$

Після спрощень маємо

$$\frac{1}{2} P_1'(x) + \frac{1}{4} P_1^2(x) - P_2(x) = \frac{1}{4} a_1^2 - a_2 = \text{const.} \quad (2.3.15)$$

Отже, необхідною і достатньою умовою перетворення вихідного рівняння (2.3.7) на рівняння (2.3.9) зі сталими коефіцієнтами є інваріант, що складається з коефіцієнтів вихідного рівняння:

$$I(x) = \frac{1}{2} P_1'(x) + \left[\frac{1}{2} P_1(x) \right]^2 - P_2(x) = \alpha = \text{const.} \quad (2.3.16)$$

Звідси випливає умова, що дає змогу вибрати коефіцієнти:

$$\frac{1}{4} a_1^2 - a_2 = \alpha. \quad (2.3.17)$$

Залишаючи a_1 довільним, дістаємо

$$a_2 = \frac{1}{4} a_1^2 - \alpha. \quad (2.3.18)$$

Тому

$$Y''(x) + a_1 Y'(x) + \left(\frac{1}{4} a_1^2 - \alpha \right) Y(x) = 0. \quad (2.3.19)$$

Загальна схема переходу від рівняння зі змінними коефіцієнтами до рівняння зі сталими коефіцієнтами є такою:

а) складаємо вираз інваріанта $I(x)$ за формулою (2.3.16) і знаходимо величину α ;

б) вибираємо значення коефіцієнта a_1 і обчислюємо значення коефіцієнта a_2 за формулою (2.3.20).

Загальний розв'язок рівняння (2.3.19) можна знайти операційним методом. Перехід до розв'язання вихідного рівняння (2.3.7) здійснюємо за формулою (2.3.8). Якщо рівняння (2.3.7) було доповнено початковими умовами $y(0) = y_0$; $y(0) = y_0$; $y'(0) = y'_0$, то рівняння (2.3.19) треба розв'язувати за таких початкових умов:

$$Y(0) = \frac{y_0}{u_0}; \quad Y'(0) = \frac{y'_0 u_0 - y_0 u'_0}{u_0^2},$$

де $u_0 = u(0)$, $u'_0 = u'(0)$ обчислюють за формулою (2.3.14) при $x = 0$.

Покажемо, як і за яких умов здійснюється заміна незалежної змінної. Нехай дано лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0, \quad (2.3.20)$$

де $P_1(x)$ - неперервна, а $P_2(x)$ - неперервно диференційована функція у деякій області.

Здійснюємо перехід від незалежної змінної x до аргументу ξ за формулою

$$x = \eta(\xi)\xi \quad (2.3.21)$$

таким чином, щоб рівняння (2.4.21) перейшло у рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$Y''(\xi) + a_1 Y'(\xi) + a_2 Y(\xi) = 0, \quad (2.3.22)$$

де $\eta(\xi)$ - коефіцієнт подібності для незалежної змінної, а $Y(\xi) = y(x)$. Перетворимо похідні:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}} \frac{dy}{d\xi}; \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{dy}{d\xi}. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Підставивши (2.3.23) у (2.3.20), дістанемо

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \left[\frac{P_1(x)}{\frac{dx}{d\xi}} - \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2} \right] \frac{dy(\xi)}{d\xi} + P_2(x)y(\xi) = 0. \quad (2.3.24)$$

Домноживши другий і третій доданки відповідно на $\frac{a_1}{a_1}$ і $\frac{a_2}{a_2}$, дістанемо умови, за яких рівняння (2.3.24) переходить у (2.3.22):

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} = \frac{P_1(x)}{a_1 \frac{dx}{d\xi}} - \frac{1}{a_1 \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2} = \frac{P_2(x)}{a_2}. \quad (2.3.25)$$

Із двох рівнянь системи (2.3.25) вибираємо одне:

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} = \frac{P_2(x)}{a_2}. \quad (2.3.26)$$

Його розв'язок неважко знайти, оскільки змінні відокремлюються:

$$d\xi = \sqrt{\frac{P_2(x)}{a_2}} dx; \quad \xi = \int \sqrt{\frac{P_2(x)}{a_2}} dx. \quad (2.3.27)$$

Задача перетворення рівняння (2.3.20) на (2.3.22) буде розв'язана, якщо вираз (2.3.27) задовольняє і друге рівняння системи (2.3.25):

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} = \frac{P_1(x)}{a_1 \frac{dx}{d\xi}} - \frac{1}{a_1 \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2}. \quad (2.3.28)$$

Отже, підставивши (2.3.27) в (2.3.28), дістанемо умови перетворення рівняння. Із (2.3.27) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}}; \quad \frac{d^2 x}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dx}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}} \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}} \right) \frac{dx}{d\xi} = -\frac{a_2 P_2'(x)}{2P_2^2(x)}. \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Підставивши (2.3.29) у (2.3.28), отримаємо

$$\frac{P_2(x)}{a_2} = \frac{P_1(x)\sqrt{P_2(x)}}{a_1\sqrt{a_2}} + \frac{P_2'(x)}{2a_1\sqrt{a_2}\sqrt{P_2(x)}}.$$

Після перетворення знову дістанемо інваріант, який позначимо через β :

$$I(x) = \frac{P_1(x)}{\sqrt{P_2(x)}} + \frac{P_2'(x)}{2\sqrt{P_2^3(x)}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_2}} = \beta. \quad (2.3.29)$$

Здобутий інваріант дає можливість визначити клас рівнянь, що відповідає вигляду (2.3.20), які можна перетворити на множину рівнянь типу (2.3.22) зі сталими коефіцієнтами, оскільки умова (2.3.30) є необхідною і достатньою.

Виконуючи розв'язок (2.3.30) відносно першого коефіцієнта $P_1(x)$, маємо

$$P_1(x) = \beta\sqrt{P_2(x)} - \frac{P_2'(x)}{2P_2(x)}. \quad (2.3.31)$$

Звідси робимо висновок, що рівняння виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\beta\sqrt{P(x)} - \frac{P'(x)}{2P(x)} \right] \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (2.3.32)$$

підстановкою

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \sqrt{P(x)} dx \quad (2.3.33)$$

можна перетворити на рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} + \beta\sqrt{a} \frac{dY}{d\xi} + aY = 0. \quad (2.3.34)$$

У формулах (2.3.32) і (2.3.34) коефіцієнти не мають індексів, оскільки вони всюди однакові. Якщо інваріант (2.3.30) рівний нулю ($\beta = 0$) перетворене рівняння набуває наступного вигляду

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} + aY = 0. \quad (2.3.35)$$

Приклад. Розглянемо рівняння Бесселя

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - n^2)x(t) = 0 \quad (t > 0, n \in Z)$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Розв'язок.

Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$. Тоді $x'(t) \rightarrow pX(p) - x_0$, $x''(t) \rightarrow p^2X(p) - px_0 - x_1$.

Далі відповідно за теоремою диференціювання зображень отримаємо

$$tx'(t) \rightarrow -\frac{d}{dp} [pX(p) - x_0] = -\frac{d}{dp} [pX(p)],$$

$$tx''(t) \rightarrow \frac{d^2}{dp^2} [p^2X(p) - px_0 - x_1] = \frac{d^2}{dp^2} [p^2X(p)],$$

Тоді рівняння Бесселя в зображеннях прийме наступний вигляд:

$$\frac{d^2}{dp^2} [p^2X(p)] - \frac{d}{dp} [pX(p)] + \frac{d^2X(p)}{dp^2} - n^2X(p) = 0$$

або

$$(1 + p^2) \frac{d^2X(p)}{dp^2} + 3p \frac{dX(p)}{dp} + (1 - n^2)X(p) = 0. \quad (2.3.36)$$

Для розв'язування рівняння (2.3.36) введемо нову змінну і нову шукану функцію формулами

$$p = \operatorname{sh} u, \quad X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u}$$

Рівняння (2.3.36) перейде при цьому в наступне

$$z''(u) - n^2z(u) = 0$$

Загальний розв'язок якого має вигляд

$$z(u) = C_1 e^{nu} + C_2 e^{-nu}$$

Оскільки $p = \operatorname{sh} u$, то отримаємо $\operatorname{ch} u = \sqrt{p^2 + 1}$. Беручи до уваги вирази для $\operatorname{sh} u$ і $\operatorname{ch} u$ через показникові функції, знаходимо

$$e^u = \sqrt{p^2 + 1} + p, \quad e^{-u} = \sqrt{p^2 + 1} - p,$$

Так що

$$z(u) = C_1 (\sqrt{p^2 + 1} + p)^2 + C_2 (\sqrt{p^2 + 1} - p)^n.$$

Отже, для $X(p)$ отримуємо

$$X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u} = \frac{C_1 (\sqrt{p^2 + 1} + p)^n + C_2 (\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Знайдемо сталі інтегрування C_1 і C_2 . Взевши $n = 0$ і $n = 1$, відповідно маємо

$$X(p) = \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{p^2 + 1}} \rightarrow J_0(t) \quad \text{і} \quad X(p) = C_1 + C_2 + \frac{p(C_1 - C_2)}{\sqrt{p^2 + 1}} \rightarrow J_1(t).$$

Користуючись граничною теоремою і враховуючи, що $J_0(0) = 1$ і $J_1(0) = 0$, маємо

$$C_1 + C_2 = 1, \quad C_1 + C_2 + C_1 - C_2 = 0.$$

Звідси $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Тоді

$$X(p) = \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Таким чином, $x(t) = J_n(t)$.

2.4. Застосування операційного методу до розв'язування систем лінійних рівнянь.

Дані, що були викладені стосовно операційного методу розв'язування лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку, можна майже повністю застосувати до розв'язування систем лінійних рівнянь. Незначна відмінність лише полягає в тому, що невідомих функцій декілька, а замість одного зображувального рівняння отримують систему рівнянь. Як приклад методу розглянемо систему трьох рівнянь першого порядку.

Нехай дано систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + a_{13}z(t) + q_1(t); \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + a_{23}z(t) + q_2(t); \\ \dot{z}(t) = a_{31}x(t) + a_{32}y(t) + a_{33}z(t) + q_3(t) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

і початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \quad (2.4.2)$$

Припустимо, що кожна із шуканих функцій є оригіналом і

$$x(t) \doteq X(p), \quad y(t) \doteq Y(p), \quad z(t) \doteq Z(p),$$

а також

$$q_1(t) \doteq Q_1(p), \quad q_2(t) \doteq Q_2(p), \quad q_3(t) \doteq Q_3(p).$$

Застосовуючи перетворення Лапласа до кожного з рівнянь системи (2.4.1), з урахуванням теореми про диференціювання оригіналу дістаємо

$$\begin{cases} pX(p) - x_0 = a_{11}X(p) + a_{12}Y(p) + a_{13}Z(p) + Q_1(p); \\ pY(p) - y_0 = a_{21}X(p) + a_{22}Y(p) + a_{23}Z(p) + Q_2(p); \\ pZ(p) - z_0 = a_{31}X(p) + a_{32}Y(p) + a_{33}Z(p) + Q_3(p), \end{cases}$$

або після перетворень

$$\begin{cases} (p - a_{11})X(p) - a_{12}Y(p) - a_{13}Z(p) = Q_1(p) + x_0; \\ -a_{21}X(p) + (p - a_{22})Y(p) - a_{23}Z(p) = Q_2(p) + y_0; \\ -a_{31}X(p) - a_{32}Y(p) + (p - a_{33})Z(p) = Q_3(p) + z_0. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Назвемо систему (2.4.3) системою в зображеннях. Це система алгебраїчних рівнянь. Її розв'язок $X(p); Y(p); Z(p)$ подамо за відомими формулами Крамера. Для цього складемо визначник системи

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & p - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & p - a_{33} \end{vmatrix}$$

і відповідні визначники

$$\Delta_{X(p)} = \begin{vmatrix} Q_1(p) + x_0 & -a_{12} & -a_{13} \\ Q_2(p) + y_0 & p - a_{22} & -a_{23} \\ Q_3(p) + z_0 & -a_{32} & p - a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{Y(p)} = \begin{vmatrix} p - a_{11} & Q_1(p) + x_0 & -a_{13} \\ -a_{21} & Q_2(p) + y_0 & -a_{23} \\ -a_{31} & Q_3(p) + z_0 & p - a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{Z(p)} = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & Q_1(p) + x_0 \\ -a_{21} & p - a_{22} & Q_2(p) + y_0 \\ -a_{31} & -a_{32} & Q_3(p) + z_0 \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$X(p) = \frac{\Delta_{X(p)}}{\Delta(p)}; \quad Y(p) = \frac{\Delta_{Y(p)}}{\Delta(p)}; \quad Z(p) = \frac{\Delta_{Z(p)}}{\Delta(p)}. \quad (3.1.4)$$

Розглянемо докладніше один з розв'язків (2.4.4), наприклад $Z(p)$. Визначник $\Delta_{Z(p)}$ за відомою властивістю визначників запишемо у вигляді суми:

$$\Delta_{Z(p)} = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & Q_1(p) \\ -a_{21} & p - a_{22} & Q_2(p) \\ -a_{31} & -a_{32} & Q_3(p) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & x_0 \\ -a_{21} & p - a_{22} & y_0 \\ -a_{31} & -a_{32} & z_0 \end{vmatrix}.$$

Перший доданок правої частини здобутої рівності можна розписати за

елементами останнього стовпця:

$$Q_1(p) \begin{vmatrix} -a_{21} & p - a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix} - Q_2(p) \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix} + Q_3(p) \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p - a_{22} \end{vmatrix}.$$

Тепер розв'язок $Z(p)$ можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} Z(p) = & Q_1(p) \frac{\begin{vmatrix} -a_{21} & p - a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix}}{\Delta(p)} - Q_2(p) \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix}}{\Delta(p)} + \\ & + Q_3(p) \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p - a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta(p)} + \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & x_0 \\ -a_{21} & p - a_{22} & y_0 \\ -a_{31} & -a_{32} & z_0 \end{vmatrix}}{\Delta(p)}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Останній доданок правої частини є дробово-раціональною функцією комплексної змінної p . У п. 2.2 було показано, як знаходити для неї оригінал. Другі множники трьох перших доданків також є дробово-раціональними функціями. Знайдемо оригінали цих функцій. Тепер для знаходження оригіналів кожного з перших трьох доданків застосуємо теорему про згортку, оскільки оригінали для зображень $Q_1(p), Q_2(p), Q_3(p)$ і дробово-раціональних функцій відомі. Аналогічні міркування можна повторити і для зображень $X(p)$ та $Y(p)$. У випадку однорідної системи рівнянь (2.3.1) у розв'язку залишаються лише останні доданки:

$$\bar{X}(p) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & -a_{12} & -a_{13} \\ y_0 & p - a_{22} & -a_{23} \\ z_0 & -a_{32} & p - a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta(p)};$$

$$\bar{Y}(p) = \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & x_0 & -a_{13} \\ -a_{21} & y_0 & -a_{23} \\ -a_{31} & z_0 & p - a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta(p)}; \quad (2.4.6)$$

$$\bar{Z}(p) = \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & x_0 \\ -a_{21} & p - a_{22} & y_0 \\ -a_{31} & -a_{32} & z_0 \end{vmatrix}}{\Delta(p)},$$

де $\bar{X}(p); \bar{Y}(p); \bar{Z}(p)$ – розв'язки у просторі зображень однорідної системи диференціальних рівнянь.

2.5. Розв'язування систем лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Цілком аналогічно застосовується операційний метод і до розв'язування систем лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Нехай, наприклад, потрібно розв'язати систему диференційних рівнянь другого порядку

$$L_k[x] = \sum_{j=1}^n \left(a_{kj} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + b_{kj} \frac{dx_j}{dt} + c_{kj} x_j \right) = f_k(t), \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.5.1)$$

при заданих початкових умовах

$$x_j(0) = \alpha_j, \quad x'_j(0) = \beta_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.2)$$

Якщо вважати $x_j(t)$ та $f_k(t)$ оригіналами і позначити через $X_j(p)$ та $F_k(p)$ їх зображення, то система (2.5.1) з початковими умовами (2.5.2) заміниться операторною системою

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (a_{kj} p^2 + b_{kj} p + c_{kj}) X_j(p) = \\ & = F_k(p) + \sum_{j=1}^n ((a_{kj} p + b_{kj}) \alpha_j + a_{kj} \beta_j), \quad k = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Розв'язуючи її як алгебраїчну систему лінійних рівнянь, знаходимо $X_j(p)$, а потім і їхні оригінали $x_j(t)$.

Відзначимо, що для системи диференційних рівнянь першого порядку викладки спрощуються.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t, & \text{якщо } 0 \leq t < 2, \\ 3 - t, & \text{якщо } 2 \leq t < 3, \\ 0, & \text{якщо } t < 0, t \geq 3 \end{cases}$$

за умови $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

За допомогою одиничної функції праву частину даного диференціального рівняння можна записати одним аналітичним вираженням:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}t \cdot l(t) - \frac{1}{2}t \cdot l(t-2) + (3-t) \cdot l(t-2) - (3-t) \cdot l(t-3) = \\ &= \frac{1}{2}t \cdot l(t) - \frac{1}{2}(t-2+2) \cdot l(t-2) - (t-2-1) \cdot l(t-2) + (t-3) \cdot l(t-3) = \\ &= \frac{1}{2}t \cdot l(t) - \frac{1}{2}(t-2) \cdot l(t-2) - l(t-2) - (t-2) \cdot l(t-2) + l(t-2) + (t-3) \cdot l(t-3) = \\ &= \frac{1}{2}t \cdot l(t) - \frac{3}{2}(t-2) \cdot l(t-2) + (t-3) \cdot l(t-3). \end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$y'' + 4y = \frac{1}{2}t \cdot l(t) - \frac{3}{2}(t-2) \cdot l(t-2) + (t-3) \cdot l(t-3).$$

Операторне рівняння, при нульових початкових умовах має вигляд

$$p^2 Y + 4Y = \frac{1}{2} \frac{1}{p^3} - \frac{3}{2} \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-3p}.$$

Звідси

$$Y(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2(p^2+4)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p^2(p^2+4)} e^{-2p} + \frac{1}{p^2(p^2+4)} e^{-3p}.$$

Так як

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2+2^2} \right) \div \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right),$$

тоді по теоремі запізнювання знаходимо:

$$y(t) = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) - \frac{3}{8} \left(t - 2 - \frac{1}{2} \sin 2(t-2) \right) \cdot l(t-2) + \\ + \frac{1}{4} \left(t - 3 - \frac{1}{2} \sin 2(t-3) \right) \cdot l(t-3).$$

Аналогічно застосовується операційний метод для Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Покажемо це на конкретному прикладі.

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3.$$

Нехай

$$x = x(t) \div X(t) = X; \quad y = y(t) \div Y(t) = Y; \quad z = z(t) \div Z(t) = Z.$$

Знаходимо, що

$$x' \div pX - 1; \quad y' \div pY - 2; \quad z' \div pZ - 3.$$

Система операторних рівнянь приймає вигляд

$$\begin{cases} pX - Y + Z = 1, \\ X - (p-1)Y = -2, \\ X + (1-p)Z = -3. \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему алгебраїчних рівнянь, знаходимо:

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)},$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2},$$

$$Z(p) = \frac{3p^3 - 2p - 2}{p(p-1)^2}.$$

Переходячи від зображень до оригіналів, отримаємо шукані розв'язки:

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)} = \frac{2p-2-p}{p(p-1)} = \frac{2(p-1)}{p(p-1)} - \frac{p}{p(p-1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1} \div 2 - e^t = x(t),$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \div -2 + 4e^t - te^t = y(t),$$

$$Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \div -2 + 5e^t - te^t = z(t).$$

Відповідь: $x(t) = 2 - e^t$, $y(t) = -2 + 4e^t - te^t$, $z(t) = -2 + 5e^t - te^t$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -8x + 3y + 5e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = -18x + 7y + 12e^{-t} \end{cases}$$

Знайти розв'язки, що задовольняють умовам $y(0) = -3$; $x(0) = 0$.

Розв'язок. Продиференціюємо ліву та праву частини першого рівняння по змінній t .

Маємо,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} - 5e^{-t}.$$

Ввівши заміну в отриманому рівнянні $\frac{dy}{dt}$ на праву частину другого рівняння системи отримаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8\frac{dx}{dt} + 3(-18x + 7y + 12e^{-t}) - 5e^{-t}$$

або ж

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8\frac{dx}{dt} - 54x + 21y + 31e^{-t}.$$

Із першого рівняння знаходимо y .

$$y = \frac{1}{3} \left(\frac{dx}{dt} + 8x - 5e^{-t} \right).$$

Підставивши в рівняння з заміною замість y праву частину попереднього рівняння і звівши подібні члени, отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 4e^{-t}.$$

Розв'яжемо однорідне рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

Оскільки характеристичне рівняння $f^2 + f - 2 = 0$ має корені $f_1 = -2$ і $f_2 = 1$,

то

$$x_{\text{одн}} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t.$$

Нехай

$$\bar{x} = Ae^{-t}; \text{ тоді } \bar{x}' = -Ae^{-t}; \bar{x}'' = Ae^{-t}.$$

Підставивши ці значення в наше рівняння, знаходимо, що $A = 2$ і відповідно $\bar{x} = 2e^{-t}$

Тоді

$$x_{\text{неодн}} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + 2e^{-t}.$$

Щоб знайти y , спочатку знаходимо $\frac{dx}{dt}$ з попереднього рівняння.

$$\frac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t - 2e^{-t}.$$

Користуючись двома попередніми рівняннями заходимо у:

$$y = 2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^t + 3e^{-t}.$$

Використовуючи початкові умови, визначаємо значення довільних C_1 і C_2 .

Оскільки, $x(0) = 0$, то з рівняння неоднорідного x маємо $0 = C_1 + C_2 + 2$.

Оскільки, $y(0) = -3$, то з рівняння останньої підстановки маємо $-32 = 2C_1 + 3C_2 + 3$.

З отриманої системи випливає, що $C_1 = 0$ і $C_2 = -2$

Відповідно $x = -2e^t + 2e^{-t}$ і $y = -6e^t + 3e^{-t}$ є розв'язками заданої системи, що задовольняють початковим умовам.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$$

Розв'язок даної системи можна звести до розв'язку одного лінійного однорідного диференційного рівняння третього порядку. Проведемо диференціювання обох частини першого рівняння за аргументом t .

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}.$$

Замінімо в отриманому рівнянні $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dz}{dt}$ відповідно правими частинами рівнянь заданої системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(-x + y + z) + (x - y + z) + (x + y + z)$$

або ж

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3x - y + z. \quad (*)$$

В отриманому рівнянні знову виконаємо диференціювання за аргументом t .

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}.$$

Замінімо похідні $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dz}{dt}$ їхніми виразами з заданої системи.

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 3(-x + y + z) - (x - y + z) + (x + y + z)$$

або

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -3x + 5y + 3z. \quad (**)$$

Розв'язуючи сумісно систему диференціальних рівнянь другого і третього порядку, виразимо y і z через функцію x із рівняння другого порядку маємо

$$y - z = 3x - \frac{d^2x}{dt^2}.$$

З рівняння третього порядку маємо

$$5y + 3z = \frac{d^3x}{dt^3} + 3x.$$

Розв'язуючи ці два рівняння, отримаємо:

$$y = \frac{1}{8} \left(\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 12x \right); \quad z = \frac{1}{8} \left(\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} - 12x \right).$$

Знайдені вирази для y і z підставляємо в перше рівняння заданої системи:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{1}{8} \left(\frac{d^3x}{dt^3} - 3 \frac{d^2x}{dt^2} + 12x \right) + z = \frac{1}{8} \left(\frac{d^3x}{dt^3} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} - 12x \right).$$

Після зведення подібних членів, отримаємо рівняння третього порядку відносно шуканої функції $x(t)$

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} - 4x = 0.$$

Характеристичне рівняння $f^3 + f^2 - 4f - 4 = 0$ має корені $f_1 = -1, f_2 = -2, i f_3 = 2$.

Відповідно

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}.$$

Щоб знайти функції z і y , знайдемо попередньо $\frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{2t};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} + 4C_3 e^{2t};$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -C_1 e^{-t} - 8C_2 e^{-2t} + 8C_3 e^{2t}.$$

Підставивши $\frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}$ у вираз для функції y і z , отримаємо

$$y = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}; \quad z = -C_1 e^{-t} + 2C_3 e^{2t}.$$

За допомогою операційного числення можна також знаходити Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з перемінними коефіцієнтами, рівнянь у частинних похідних, рівнянь у кінцевих різницях (різницевих рівнянь); робити підсумовування рядів; обчислювати інтеграли. При цьому Розв'язування цих і інших задач значно спрощується.

РОЗДІЛ III. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ЕКОНОМІКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

3.1. Розв'язування задач на порівняння фінансових проектів на певному відрізку часу.

Розглянемо елементарну задачу. Що краще: 300 грн. сьогодні, чи 500 грн. через 5 років? Узагальнимо це питання: як порівнювати економічні результати, отримані в різні моменти часу. Перейдемо до більш загальної постановки: як привести до одного часового горизонту різні варіанти потоків прибутків і витрат.

Віддамо гроші в банк і подивимось, що відбудеться та зобразимо результати на Рис.1. Задамо λ (норма відсотку)=18% і визначимо через років яким стане вклад 300 грн. в банку.

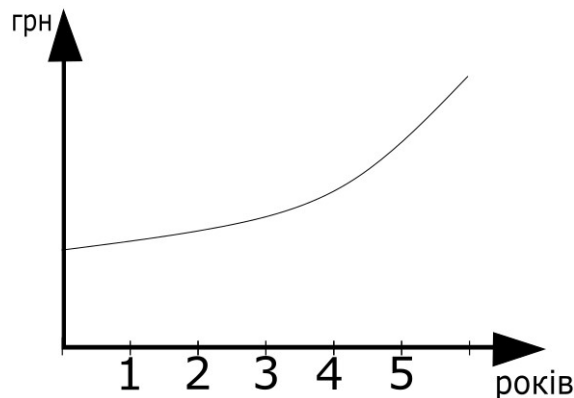


Рис.3.1.1. Графік зміни фінансових активів.

Таким чином при ставці відсотка в 18% через 7 років ми будемо мати 570.15 грн., що більше ніж 500 грн. Тобто в цьому випадку краще 300 грн. сьогодні. Узагальнимо цю задачу.

Порівняємо два довільних проекти А та В, які на початку затратні, але потім дають віддачу Рис.2.

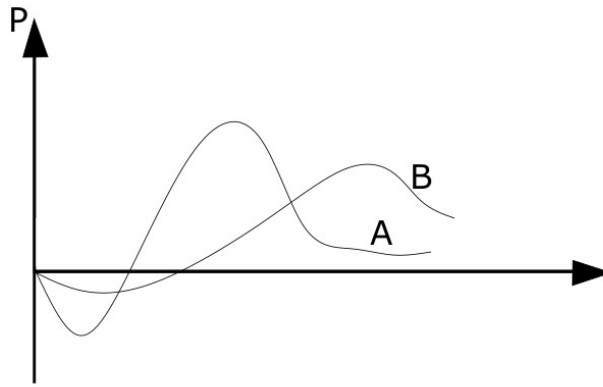
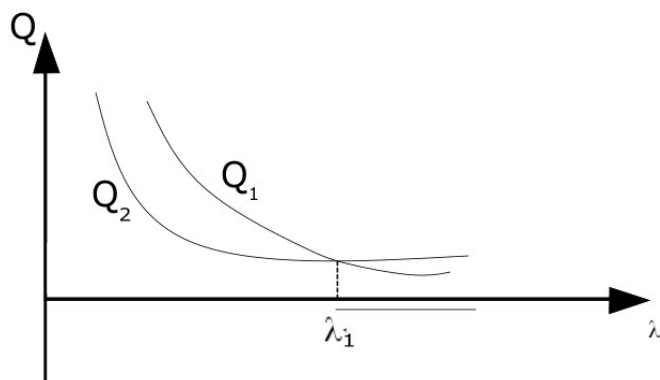


Рис3.1.2. Проекти А ти В.

Кожну точку ми помножимо на експоненту і ці ординати додамо. При зведенні до деякого моменту часу T сумарні витрати-прибутки будуть відповідати формулі:

$$\begin{cases} Q_1(\lambda) = \int_0^T P_1(t) * e^{\lambda * T} dt \\ Q_{21}(\lambda) = \int_0^T P_2(t) * e^{\lambda * T} dt \end{cases}$$

Ця формула показує сумарний (дисконтний) прибуток. Вибір фінансового проекту слід зробити після порівняння Q_1 та Q_2 Рис.3.1.3.

Рис3.1.3. Порівняння Q_1 та Q_2 .

Вищеописана операція є давно відомою в бухгалтерській та банківській справах та іменується дисконтуванням.

Але проведемо порівняння формул перетворення Лапласа і дисконтування – вони структурно еквівалентні:

$$\lambda \leftrightarrow s; \quad P(t) \leftrightarrow x(t)$$

Використання перетворення Лапласа дозволяє спростити процедуру прогнозування та вибору фінансових проектів на певному відрізку часу, при цьому маючи потужне математичне підґрунтя.

3.2. Розв'язування задач на знаходження значення струму в електричному контурі за допомогою перетворення Лапласа.

Розглянемо електричний контур, наведений на Рис. 3.2.1., нехай має опір R , індуктивність L і ємність C . На ці послідовно ввімкнені елементи діє електрорухома сила $E = E_0 \sin \omega t$. Початкове значення струму рівне $i(0) = i_0$.

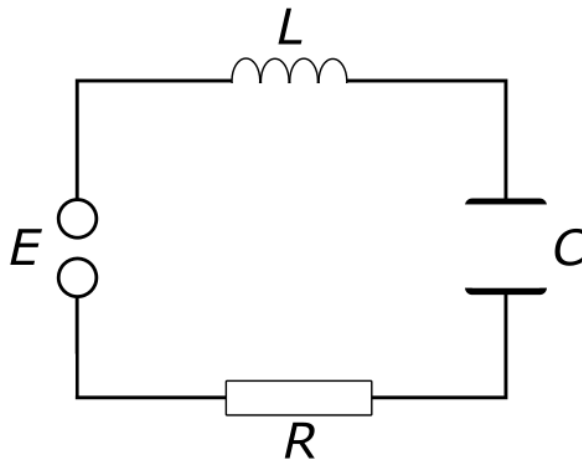


Рис. 3.2.1.

Початкове значення заряду конденсатора $q(t)$ рівне $q(0) = q_0$. Необхідно знайти струм $i(t)$.

Розв'язання.

Опираючись на закони Кірхгофа струм електричного ланцюга $i(t)$ визначається з інтегрально - диференціального рівняння:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \left[q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = E_0 \sin \omega t.$$

Операторне зображення матиме наступний вигляд:

$$Lp[\bar{i}(p) - i_0] + R\bar{i}(p) + \frac{1}{C} \left[q_0 + \frac{1}{p} \bar{i}(p) \right] = \frac{E_0 \omega p}{p^2 + \omega^2},$$

звідки,

$$\bar{i}(p) = \frac{E_0 \omega p^2}{(p^2 + \omega^2)(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})} + \frac{Li_0 p^2}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} - \frac{q_0 p}{C(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})}. \quad (3.2.1.)$$

Оператори, що містяться в останньому співвідношенні, представлені за допомогою елементарних функцій:

$$\begin{aligned} \frac{Li_0 p^2}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} &= \frac{i_0 p^2}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)} = \\ &= \frac{i_0 \left(p + \frac{R}{2L}\right) p}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} - \frac{i_0 R p}{2L \left[\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2\right]} \end{aligned}$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}.$$

Якщо $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0$, тоді

$$\frac{Li_0 p^2}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = i_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) - \frac{i_0 R}{2L} t \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right).$$

При $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} < 0$, будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{Li_0 p^2}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} &= i_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) ch\left(\sqrt{\frac{R^2}{2L^2} - \frac{1}{LC}}t\right) - \\ &- \frac{i_0 R}{2L \sqrt{\frac{R^2}{2L^2} - \frac{1}{LC}}} \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) sh\left(\sqrt{\frac{R^2}{2L^2} - \frac{1}{LC}}t\right). \end{aligned}$$

При $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$, маємо

$$\frac{Li_0 p^2}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = i_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \cos \omega_0 t - \frac{i_0 R}{2L \omega_0} \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \sin \omega_0 t.$$

Відповідно, вигляд розв'язку залежить від співвідношення між R , L і C . Для останньої складової в правій частині рівняння (3.2.1.) маємо

$$\frac{q_0 p}{C \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} = \frac{q_0}{LC \omega_0} \exp \left(-\frac{R}{2L} t \right) \sin \omega_0 t.$$

Оператор $\frac{E_0 \omega p^2}{(p^2 + \omega^2) \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)}$ обчислимо за допомогою розкладу

$$\frac{E_0 \omega p^2}{(p^2 + \omega^2) \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} = \frac{p(ap + b)}{p^2 + \omega^2} + \frac{p(cp + d)}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}},$$

тоді

$$E_0 \omega p^2 = p(ap + b) \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) + p(cp + d)(p^2 + \omega^2).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p , отримаємо

$$\frac{b}{C} + d\omega^2 = 0; \quad aR + bL + d = 0; \quad \frac{a}{C} + bR + c\omega^2 = E_0 \omega; \quad aL + c = 0,$$

звідки

$$a = -\frac{E_0 X}{R^2 + X^2}, \quad b = \frac{\omega E_0 R}{R^2 + X^2}, \quad c = \frac{E_0 X L}{R^2 + X^2}, \quad d = -\frac{E_0 R}{\omega C (R^2 + X^2)},$$

де

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Нехай

$$Z = R + iX, \quad \theta = \arg Z = \arctg \left(\frac{X}{R} \right),$$

тоді

$$a = -\frac{E_0 \sin \theta}{|Z|}, \quad b = \frac{\omega E_0 \cos \theta}{|Z|}, \quad c = \frac{E_0 L \sin \theta}{|Z|}, \quad d = -\frac{E_0 \cos \theta}{\omega C |Z|}.$$

Відповідно отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{E_0 \omega p^2}{(p^2 + \omega^2) \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} &= \frac{\omega E_0 \cos \theta p}{|Z| (p^2 + \omega^2)} - \frac{p^2 E_0 \sin \theta}{|Z| (p^2 + \omega^2)} + \\ &+ \frac{p^2 E_0 L \sin \theta}{|Z| \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} - \frac{E_0 \cos \theta p}{\omega C |Z| \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} \end{aligned}$$

та

$$\frac{E_0 \omega p^2}{(p^2 + \omega^2) \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} = \frac{E_0}{|Z|} \sin(\omega t - \theta) + \frac{E_0}{|Z|} \sin \theta e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \omega_0 t -$$

$$- \left(\frac{E_0 R \sin \theta}{2L\omega_0 |Z|} + \frac{E_0 \cos \theta}{\omega \omega_0 CL |Z|} \right) e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega_0 t.$$

Шуканий розв'язок інтегрально - диференціального рівняння має вигляд

$$i(t) = \frac{E_0}{|Z|} \sin(\omega t - \theta) + \left(i_0 + \frac{E_0}{|Z|} \sin \theta \right) e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \omega_0 t +$$

$$+ \left(\frac{q_0}{LC\omega_0} - \frac{i_0 R}{2L\omega_0} - \frac{E_0 R \sin \theta}{2L\omega_0 |Z|} - \frac{E_0 \cos \theta}{\omega \omega_0 CL |Z|} \right) e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega_0 t.$$

3.3. Задача на розподіл температури в напівобмеженому стержні.

Знайти розподіл температури в напівобмеженому стержні $0 < x < \infty$, Якщо температура кінця стержня змінюється за законом $u(0, t) = \varphi(t)$, а початкова температура рівна 0.

Розв'язування.

Температура $u(x, t)$ в точці x в момент часу t повинна задовольняти рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

де

$$u = 0 \text{ при } t = 0, x > 0,$$

$$u = \varphi(t) \text{ при } x = 0, t > 0.$$

Операторне зображення задачі буде мати вигляд

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{u} = 0,$$

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\varphi}(p) \text{ при } x = 0,$$

звідки, враховуючи обмеженість $\bar{u}(x, p)$ при $x \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\varphi}(p) e^{-x \sqrt{\frac{p}{a}}}.$$

Маємо операційне відношення

$$e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}} \doteq \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right),$$

Тому

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right) \varphi(\tau) d\tau = \\ &= \operatorname{erfc}(\infty) \varphi(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right) \right\} \varphi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{x}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} d\tau. \end{aligned}$$

Підстановкою

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}$$

рівність набуває вигляду

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4a\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Легко побачити, що

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \varphi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \varphi(t).$$

3.4. Задача на знаходження передаточної функції та матриці для елементарних моделей багатовимірної системи автоматичного управління.

Нехай нам дано $\bar{X} = A * \bar{X} + B * \bar{U}$

Необхідно знайти передаточну функцію та передаточну матрицю для багатовимірної системи управління.

Розв'язання.

Виконаємо перетворення Лапласа

$$s * \bar{X}(s) = A * \bar{X}(s) + B * \bar{U}(s),$$

$$(I * s - A) * \bar{X}(s) = B * \bar{U}(s).$$

Розв'яжемо формально

$$\bar{X}(s) = \underbrace{(I * s - A)^{-1} * B}_{W^u(s)} * \bar{U}(s),$$

де $W^u(s)$ буде передаточною матрицею.

$$\bar{X}(s) = W^u(s) * \bar{U}(s),$$

подамо у скалярному вигляді

$$\begin{Bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_{11}^u(s) \dots W_{1m}^u(s) \\ W_{21}^u(s) \dots W_{2m}^u(s) \\ \dots \\ W_{n1}^u(s) \dots W_{nm}^u(s) \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{Bmatrix}$$

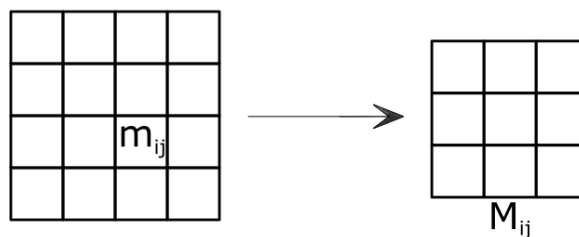
де $W_{ij}^u(s)$ – елементи матриці $(I * s - A)^{-1} * B$

Запишемо обернену матрицю до матриці $M(s)$

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{\det(M(s))} * \begin{Bmatrix} \det(M_{11}) & \dots & \det(M_{1m}) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \det(M_{n1}) & \dots & \det(M_{nm}) \end{Bmatrix}^T$$

де T – знак транспонування;

M_{ij} – алгебраїчне доповнення до елемента m_{ij} .



Елементи передаточної матриці $W^u(s)$ – дробово-раціональні функції від змінної s , вони називаються передаточними функціями для i -ої змінної вектора стану по j -му управляючому впливу, тобто

$$W_{ij}^u(s) = \frac{X_i(s)}{U_j(s)}$$

інші впливи, крім U_j , дорівнюють нулю.

$$X_1(s) = W_{11}^u(s) * U_1(s) + \dots + W_{1m}^u(s) * U_m(s)$$

Для лінійних систем справедливий принцип суперпозиції.

3.5. Розв'язування задачі механіки на знаходження руху системи.

Елементарні частинки з масами $3m, 4m, 3m$ розташовані на однаковій відстані один від одного вздовж невагомої нитки довжиною $4l$ із зафіксованими кінцями, та розтягнутою силою T . В момент часу $t = 0$, до першої частки системи, що знаходиться в стані спокою і положенню рівноваги, прикладений імпульс P в напрямку перпендикулярному до нитки. Визначити рух системи.

Розв'язання.

Нехай x_1, x_2, x_3 – зміщення частинок відносно стану рівновагою. Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$3\ddot{x}_1 + n^2(2x_1 - x_2) = 0,$$

$$4\ddot{x}_2 + n^2(2x_2 - x_1 - x_3) = 0,$$

$$3\ddot{x}_3 + n^2(2x_3 - x_2) = 0.$$

Де

$$n^2 = T/ml.$$

Початкові умови мають вигляд:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0; \dot{x}_1(0) = \frac{P}{3m}, \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0;$$

Відповідні операторні рівняння:

$$(3p^2 + 2n^2)\bar{x}_1 - n^2\bar{x}_2 = \frac{P}{3m},$$

$$-n^2\bar{x}_1 + (4p^2 + 2n^2)\bar{x}_2 - n^2\bar{x}_3 = 0,$$

$$-n^2\bar{x}_2 + (3p^2 + 2n^2)\bar{x}_3 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему отримаємо

$$\bar{x}_1 = \frac{P}{10m} \left(\frac{6}{6p^2 + n^2} + \frac{1}{p^2 + n^2} + \frac{5}{3p^2 + 2n^2} \right),$$

$$\bar{x}_2 = \frac{P}{10m} \left(\frac{6}{6p^2 + n^2} - \frac{1}{p^2 + n^2} \right),$$

$$\bar{x}_3 = \frac{P}{10m} \left(\frac{6}{6p^2 + n^2} + \frac{1}{p^2 + n^2} - \frac{5}{3p^2 + 2n^2} \right).$$

Відповідно,

$$x_1 = \frac{P}{10mn} \left(\frac{4}{\sqrt{6}} \sin \frac{nt}{\sqrt{6}} + \sin nt + \frac{5}{\sqrt{6}} \sin \sqrt{\frac{2}{3}} nt \right),$$

$$x_2 = \frac{P}{10mn} \left(\sqrt{6} \sin \frac{nt}{\sqrt{6}} - \sin nt \right),$$

$$x_3 = \frac{P}{10mn} \left(\frac{4}{\sqrt{6}} \sin \frac{nt}{\sqrt{6}} + \sin nt - \frac{5}{\sqrt{6}} \sin \sqrt{\frac{2}{3}} nt \right).$$

3.6. Розв'язування задачі на визначення відхилення $u(x, t)$ точок струни в будь-який момент часу.

Струна довжини l закріплена на кінцях $x = 0$ і $x = l$. В момент часу $t = 0$ вона відтягнута в точці $x = c$ ($0 < c < l$) на відстань, рівну одиниці, від осі Ox , після чого струна відпущена. Визначити відхилення $u(x, t)$ точок струни для будь-якого моменту часу.

Розв'язання.

Задача зводиться до розв'язку диференціального рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

При початкових умовах:

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & (0 \leq x \leq c), \\ \frac{l-x}{l-c} & (c \leq x \leq l), \end{cases} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

і крайових умовах

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0$$

Застосуємо до рівняння (1) і крайових умов одностороннє перетворення Лапласа відносно змінної t , вважаючи $\bar{u}(x, p) \rightarrow u(x, t)$ Маємо:

$$p^2 \bar{u}(x, p) - pf(x) = a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}(x, p)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\bar{u}(0, p) = 0, \bar{u}(l, p) = 0. \quad (3)$$

Застосувавши до рівняння (2) одностороннє перетворення Лапласа відносно змінної x , вважаючи

$$\bar{\bar{u}}(q, p) \rightarrow \bar{u}(x, p) \text{ і } \bar{\bar{f}}(q) \rightarrow f(x).$$

Маємо

$$a^2 \left(q^2 - \frac{p^2}{a^2} \right) \bar{\bar{u}}(q, p) = a^2 \bar{\bar{u}}'(0, p) - p \bar{\bar{f}}(q) \quad (4)$$

Зображення частково-неперервної функції $f(x)$ запишеться в вигляді

$$\bar{\bar{f}}(q) = \frac{1}{q^2} \left[\frac{1}{c} - \frac{le^{-cq}}{c(l-c)} + \frac{e^{-cq}}{l-c} \right].$$

Із рівняння (4) знаходимо

$$\bar{\bar{u}}(q, p) = \frac{\bar{\bar{u}}'(0, p)}{a^2 \left(q^2 - \frac{p^2}{a^2} \right)} - \frac{p}{a^2 q^2 \left(q^2 - \frac{p^2}{a^2} \right)} \left[\frac{1}{c} - \frac{le^{-cq}}{c(l-c)} + \frac{e^{-cq}}{l-c} \right].$$

При $0 \leq x \leq c$ маємо

$$\bar{u}(x, p) = \frac{\bar{\bar{u}}'(0, p)}{ap} sh \frac{px}{a} - \frac{a}{cp^2} sh \frac{px}{a} + \frac{x}{cp}. \quad (5)$$

При $c \leq x \leq l$ маємо

$$\bar{u}'(x, p) = \frac{\bar{\bar{u}}'(0, p)}{ap} sh \frac{px}{a} - \frac{a}{cp^2} sh \frac{px}{a} + \frac{x}{cp}$$

$$+ \frac{al}{c(l-c)p^2} \operatorname{sh} \frac{p(x-c)}{a} - \frac{l(x-c)}{c(l-c)p} \quad (6)$$

Припускаючи, що в рівнянні (6) $x = l$, знаходимо, що

$$\bar{u}'(0, p) = \frac{a^2}{cp} - \frac{a^2 l \operatorname{sh} \frac{p(l-c)}{a}}{cp(l-c) \operatorname{sh} \frac{pl}{a}} \quad (7)$$

Підставляючи значення (7) в рівняння (5) і (6), знайдемо, що при $0 \leq x \leq c$

$$\bar{u}(x, p) = \frac{x}{cp} - \frac{al \operatorname{sh} \frac{p(l-c)}{a} \operatorname{sh} \frac{px}{a}}{c(l-c)p^2 \operatorname{sh} \frac{pl}{a}}.$$

при $c \leq x \leq l$

$$\bar{u}(x, p) = \frac{l-x}{(l-c)p} + \frac{al \operatorname{sh} \frac{p(l-c)}{a} \operatorname{sh} \frac{pc}{a}}{c(l-c)p^2 \operatorname{sh} \frac{pl}{a}}.$$

Повертаючись до оригіналу, отримаємо

$$\bar{u}(x, p) = \frac{2l^2}{c(l-c)\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{an\pi t}{l}}{n^2}.$$

ВИСНОВКИ

Виникнення операційного числення як самостійної дисципліни можна віднести до кінця XIX ст. Вперше строге обґрунтування операційного числення було сформульовано із допомогою застосування інтегрального перетворення Лапласа, яке перетворює певний клас функцій-оригіналів $f(t)$ дійсної змінної t в функцію-зображення $F(p)$ комплексної змінної p .

Застосування методів, що використовують операційне числення знайшло широке застосування в розв'язанні різноманітних задач електротехніки, гідродинаміки, механіки, радіотехніки, а також і ряду інших областей науки та техніки, тому що воно дозволяє мінімалізувати і спростити обчислення складних задач диференціальних рівнянь, рівнянь в частинних похідних, інтегрально-диференціальних рівнянь типу згортки.

На основі аналізу літературних джерел мною було вивчено та відібрано матеріал по темі магістерської роботи. Було вивчено застосування операційного числення до розв'язування систем диференціальних рівнянь і розв'язано деякі диференціальні рівняння зі сталими та змінними коефіцієнтами. Також у роботі розглянуто прикладні задачі на знаходження струму, знаходження розподілу температур та деякі інші технічні задачі.

Матеріали магістерської роботи може бути використаний студентами при поглибленому вивченні операційного числення та при написанні кваліфікаційних робіт, а також при розв'язуванні прикладних задач, які зводяться до диференціальних рівнянь

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 т. Т.2. : учеб. пособие для вузов / П.Е.Данко, А.Г.Попов. - 2-е изд. - М. : Высш.шк. , 1974. - 464 с.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах : 2-х ч.. Т.Ч.1. : Учебное пособие / П.Е.Данко,А.Г.Попов,Т.Я.Кожевникова - 5-е изд.,испр. . - М. : Высш. шк. , 1997. - 304 с.
3. Дащенко А. Ф. и др. Теоретические основы инженерной механики : учебник / А. Ф. Дащенко, Л. В. Коломиец, Ю. Н. Свиначев - Одеса : ФЛП Бондаренко М. А. , 2015. - 358 с.
4. Демидова - Парфенова Р.М. Задачи и примеры расчетов по электроизмерительной технике : учеб. пособие для вузов / Р.М. Демидова - Панферова, В.Н. Малиновский, Ю.С. Солодов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Энергоатомиздат , 1990. - 190 с.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб.пособие для физ. и мех.-мат. спец. вузов - 10-е изд., испр. - М. : Наука , 1990. - 624 с.
6. Диференціальні рівнення математичної фізики : навч.посібник для вищ.навч.закл. / В.П.Лавренчук, С.Д.Івасишен, В.С.Дронь, Т.І.Готинчан. - 2-е вид.,випр. - Чернівці : Рута , 2005. - 191 с.
7. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для инж. - техн. спец. вузов / Никольский С.М., Бугров Я.С. - 2 . - М. : Наука , 1984. - 431 с.
8. Дубовик В.П. Вища математика. : у 3 т. Т.1. : навч.посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик. - 2-ге вид. - Харків : Веста , 2008. - 196 с.
9. Дубовик В.П. Вища математика : у 3 т. Т.2. : навч.посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик. - 2-ге вид. - Харків : Веста , 2008. - 237 с.
10. Дубовик В.П. Вища математика : у 3 т. Т.3. : навч.посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик. - 2-ге вид. - Харків : Веста , 2008. - 220 с.
11. Дубовик В.П. Вища математика : навч.посібник для вищ.навч.закл. / В.П.Дубовик, І.І.Юрик. - К. : А.С.К. , 2001. - 648 с.

12. Заболоцький М.В. Математичний аналіз : підручник для вищ.навч.закл. / М.В.Заболоцький, О.Г.Сторож, С.І.Тарасюк. - К. : Знання , 2008. - 421 с.
13. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости./ Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. – М.: Наука, 1968. – 574 с.
14. Березанский Ю.М. Функциональный анализ./ Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. – К.: Вища школа, 1990.
15. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного./ Бицадзе А.В. — М., 1972.
16. Владимиров В. С. Уравнения математической физики: Учебник для физ.-тех. спец. вузов./ В. С. Владимиров– М.: Физматлит, 2004. – 327с.
17. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров – М.: Наука, 1988.-512 с.
18. Гольдберг А.А. Аналітичні функції: Навчальний посібник./ Гольдберг А.А., Шеремета М.М. – К.: : УМК ВО, 1991. – 116 с.
19. Горгула В.І. Теорія функцій комплексної змінної і операційне числення: Навчальний посібник./ Горгула В.І., Сікора Б.С., Волковецький С.В. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1998. – 80 с.
20. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. В 2 ч./ Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. – М., Высшая школа, 1986. – Ч. 2. – 478с.
21. Дасюк Я.І.. Функції комплексної змінної. Пертворення Лапласа. / Дасюк Я.І., Каленюк П.І., Костробій П.П та ін - ДУ "Львівська політехніка", 1999, - 270 ст.,
22. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. / Г. Деч - М.:”Наука”, 1971.
23. Диткин В. А. Операционное исчисление. – 2-е изд. / Диткин В. А., Прудников А. П. – М.: Высшая школа, 1975. – 406 с.

24. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление./ Диткин В. А., Прудников А. П. – М.: Гос. Изд-во физ-мат. лит-ры. 1961. — 524с.
25. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексной переменной. / Лаврентьев М.А, Шабат Б.В — М., 1973.
26. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного. / Лаврентьев М.А, Шабат Б.В – М.: Наука, 1987. – 736 с.
27. Лаврик С. Про наближене розв'язування суттєво-просторової задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца у випадку областей з гладкими поверхнями./ Лаврик С – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2006. Вип. 11. С. 60–68.
28. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Лопатинский Я.Б. - К.:Вища школа, 1984.
29. Любін О. Г. Математичні методи у задачах радіоінженерії. / Любін О. Г., Лисова Л. О. – К.: Либідь, 1994.
30. Мантуров О. В. Курс высшей математики: Учебник для втузов./ Мантуров О. В., Матвеев Н. М. – М.: Высшая школа, 1986. – 426с.
31. Марыненко В. С. Операционное счисление: Учеб, пособие. —4-е изд.,перераб. и доп. / Марыненко В. С —К.: Высш. шк.. 1990.—359с.
32. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / Маркушевич А.И. – М.: Наука, 1978. – 416 с.
33. Овчинников П. П. Вища математика: Підручник для студ. вищ. техн. навч. закладів у 2 ч. Ч.2. / Овчинников П. П – К.: Техніка, 2004. – 790с.
34. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики: Підручник для студентів фіз.-мат. та інж. спец. ун-тів./ Перестюк М. О., Маринець В. В – К.: Либідь, 2006. – 419с.
35. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление./ Пискунов Н. С. – М.: Наука, 1985.– 340с.
36. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного./ Привалов И.И. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

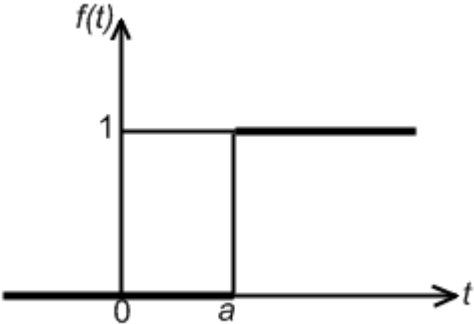
37. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння в прикладах і задачах. / Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. - Київ, Либідь, 1994.
38. Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного. / Сидоров Ю.В. М.В. Федорюк М.И. Шабунин – М.: Наука, 1982. -488с
39. Тальянський І. І. Методи математичної фізики. Тексти лекцій. Львівський державний університет ім. І. Франка. / Тальянський І. І. — Львів, 1996.
40. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. / Тихонов А. Н., Самарский А. А. – М.: «Наука», 2004. – 735с.
41. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. I. Функции одного переменного./ Шабат Б.В. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
42. Atkinson K.E. Quadrature of singular integrands over surfaces. *El. Tran. Numer. Anal.* 2004. Vol. 17. P. 133–150.
43. Chapko R., Kress R. Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations . *J. of Integral Equations and Applications.* 1997. Vol. 9. P. 47–69.
44. Chapko R., Kress R., Yoon J.R. On the numerical solution of an inverse boundary value problem for the heat equation. *Inv. Problems.* 1998. Vol. 14. P. 853–867.
45. Ажнюк Т.Б., Демчик С.П. Використання перетворення Лапласа при порівнянні фінансових проектів на певному відрізку часу. Сучасний рух науки, XLVI Міжнародна науково-практична інтернетконференція. – м. Хмельницький, 05 червня 2020 року. – Ч.5. Хмельницький, 2020. С. 38–41.

ДОДАТКИ

Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
e^{qt}	$\frac{1}{p - q}$
$\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{1 + ap}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p - a)}$
$1 - e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{p(1 + ap)}$
te^{at}	$\frac{1}{(p - a)^2}$
$\frac{1}{a^2} te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1 + ap)^2}$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^2}$
$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{p^2(p - a)}$
$\frac{1}{2}t^2 e^{at}$	$\frac{1}{(p - a)^3}$

$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$
$\frac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at - 1)$	$\frac{1}{p(p^2 - a^2)}$
$(t + \frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^3}$
$\cos^2 at$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
$\operatorname{ch}^2 at$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
$\operatorname{sh}^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at - \sin at)$	$\frac{a^3}{p^4 - a^4}$
$\frac{1}{2}(\operatorname{ch} at - \cos at)$	$\frac{a^2p}{p^4 - a^4}$
$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at + \sin at)$	$\frac{ap^2}{p^4 - a^4}$
$\frac{1}{2}(\operatorname{ch} at + \cos at)$	$\frac{p^3}{p^4 - a^4}$
$\sin at \operatorname{sh} at$	$\frac{2a^2p}{p^4 + 4a^4}$
$\cos at \operatorname{ch} at$	$\frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$
$\sin at \operatorname{ch} at$	$\frac{a(p^2 + 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$
$\cos at \operatorname{sh} at$	$\frac{a(p^2 - 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$
$\frac{1}{2}(\sin at - at \cos at)$	$\frac{a^3}{(p^2 + a^2)^2}$

$\frac{t}{2} \sin at$	$\frac{ap}{(p^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(\sin at + at \cos at)$	$\frac{ap^2}{(p^2 + a^2)^2}$
$\cos at - \frac{at}{2} \sin at$	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$	$\frac{a^3}{(p^2 - a^2)^2}$
$\frac{1}{2}t \operatorname{sh} at$	$\frac{ap}{(p^2 - a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at + at \operatorname{ch} at)$	$\frac{ap^2}{(p^2 - a^2)^2}$
$\operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at$	$\frac{p^3}{(p^2 - a^2)^2}$
$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
$t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$
$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at - t$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 - a^2)}$
$\sin(at + b)$	$\frac{p \sin b + a \cos b}{p^2 + a^2}$
$\cos(at + b)$	$\frac{p \cos b - a \sin b}{p^2 + a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
$\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$

$\frac{1 + 2at}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{p + a}{p\sqrt{p}}$
$\frac{ate^{-at} + e^{-at} - 1}{t^2}$	$p \ln \left(1 + \frac{a}{p}\right) - a$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{p - a} - \sqrt{p - b}$
$\frac{\sin at}{t\sqrt{2\pi t}}$	$\sqrt{\sqrt{p^2 - a^2} - p}$
$\frac{1 - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p - a}{p}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p - a}{p - b}$
$\frac{2\text{sh } at}{t}$	$\ln \frac{p + a}{p - b}$
$\sigma(t - a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$
$\frac{\sin at}{t}$	$\text{arctg } \frac{a}{p}$
$2 \frac{\sin at \cos bt}{t}$	$\text{arctg } \frac{2ap}{p^2 - a^2 + b^2}$
$\frac{e^{at} - 1}{t} \sin bt$	$\text{arctg } \frac{p^2 - ap + b^2}{ab}$
$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{p}} (\ln 4p + C)$
 <p style="text-align: center;">Рис. 1.1.</p>	$\frac{e^{-ap}}{p}$

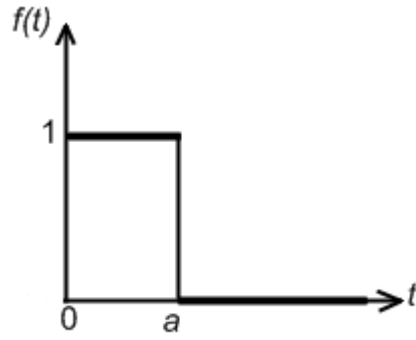


Рис. 1.2.

$$\frac{1 - e^{-ap}}{p}$$

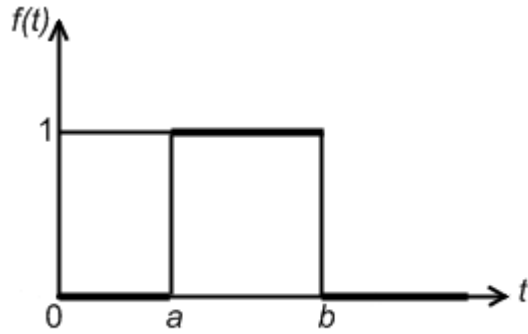


Рис. 1.3.

$$\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$$

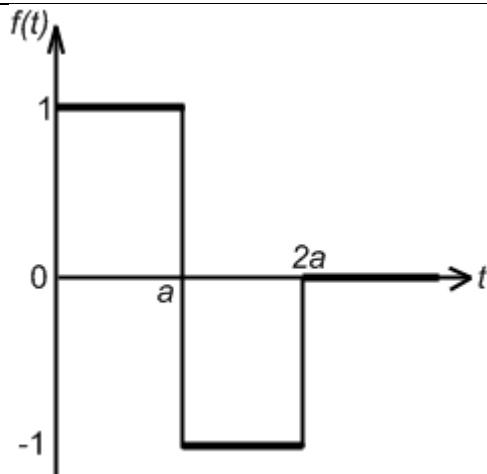


Рис. 1.4.

$$\frac{(1 - e^{-ap})^2}{p}$$

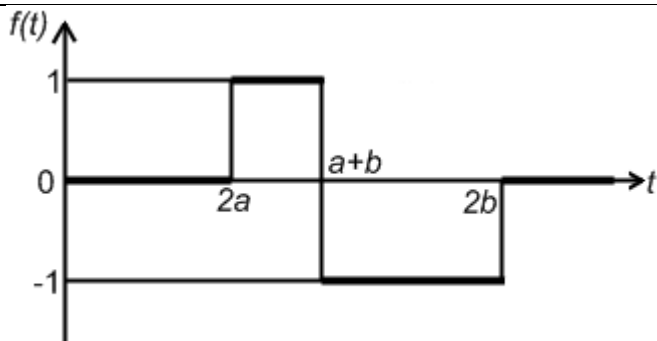


Рис. 1.5.

$$\frac{(e^{-ap} - e^{-bp})^2}{p}$$

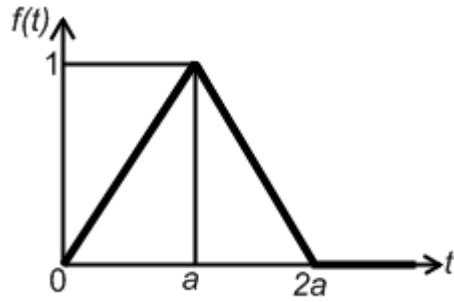


Рис. 1.6.

$$\frac{(1 - e^{-ap})^2}{p^2}$$

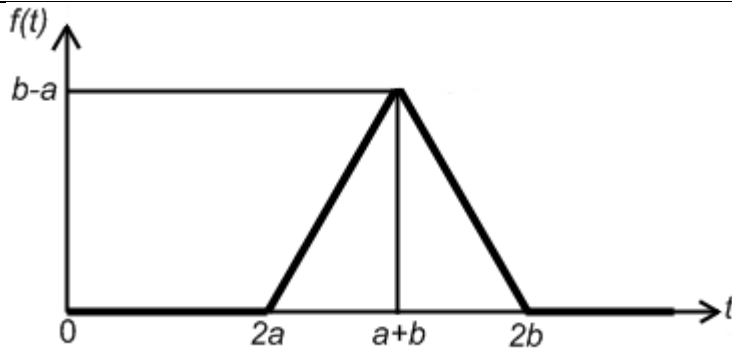


Рис. 1.7.

$$\frac{(e^{-ap} - e^{-bp})^2}{p^2}$$

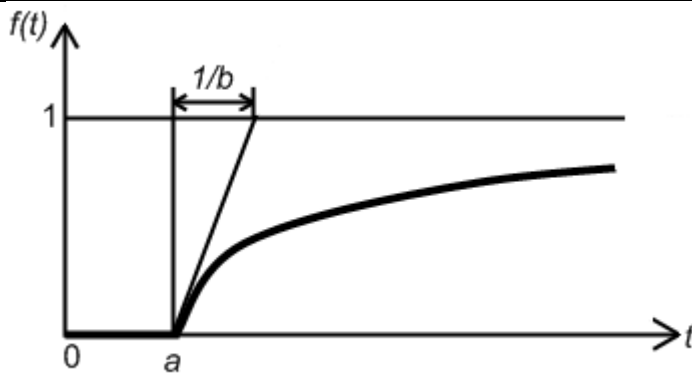


Рис. 1.8.

$$\frac{be^{-ap}}{p(p+b)}$$

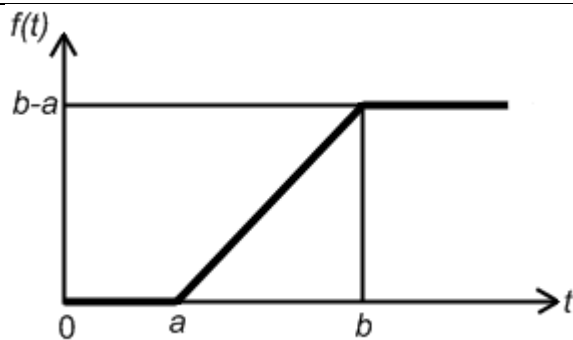


Рис. 1.9.

$$\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p^2}$$

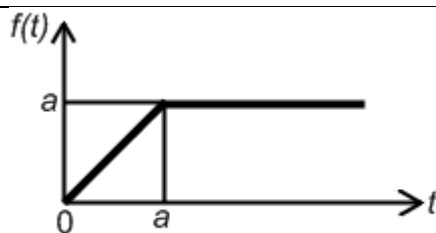


Рис. 1.10.

$$\frac{1 - e^{-ap}}{p^2}$$

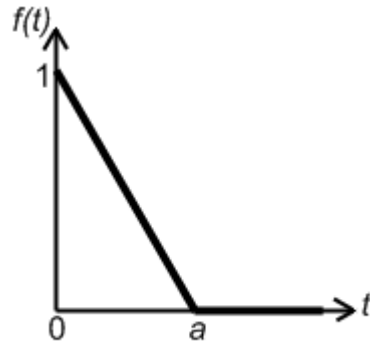


Рис. 1.11.

$$\frac{e^{-ap} + ap - 1}{ap^2}$$

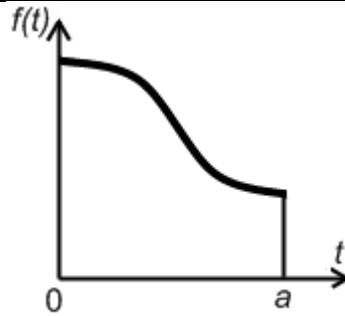


Рис. 1.12.

$$F(p) = \frac{Lf(t)}{1 - e^{-ap}}$$

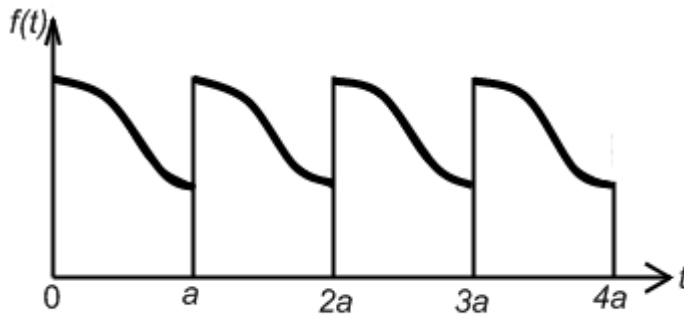


Рис. 1.13.

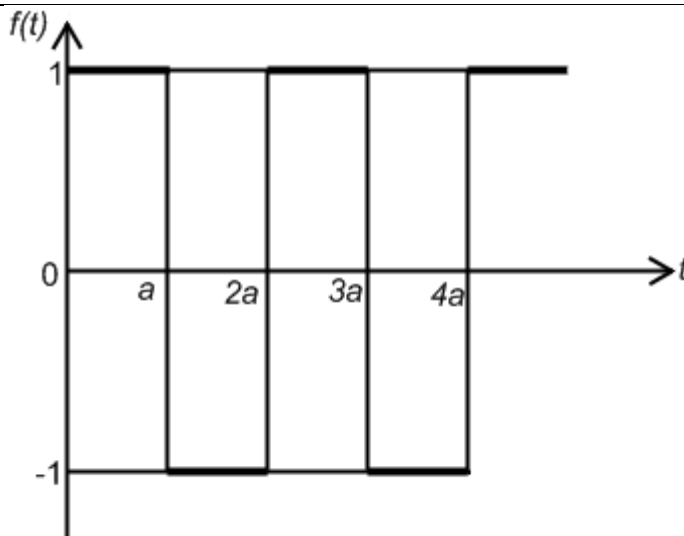

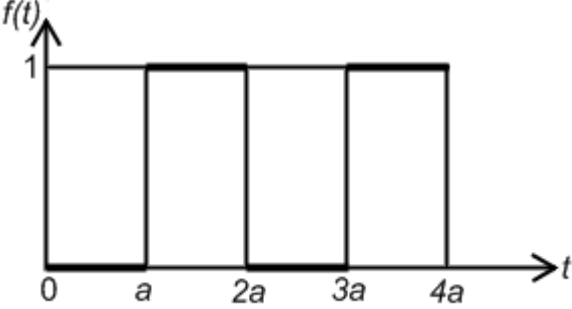


Рис. 1.14.

$$\frac{1 - e^{-ap}}{p(1 + e^{-ap})}$$

 <p style="text-align: center;">Рис. 1.15.</p>	$\frac{1}{p(1 + e^{-ap})}$
 <p style="text-align: center;">Рис. 1.16.</p>	$\frac{1}{p(1 + e^{ap})}$