Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Теорія катастроф та її застосування

Виконав: студент 2 курсу магістратури
групи М-М-61
Спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Басюк Михайло Петрович

Керівник:
канд. фіз.-мат. наук, доц. Сапіліді Тамара Михайлівна

Рецензенти:
канд. фіз.-мат. наук, проф., завідуючий кафедрою інформатики НУВГП Турбал Юрій Васильович
канд. фіз.-мат. наук, доц. Шахрайчук Микола Іович

Рівне-2020 року

Зміст

Вступ

Перші відомості про теорію катастроф з'явилися на початку 70-х років. У масових журналах типу «The Times» і «Newsweek» повідомлялося про переворот в математиці, порівнянному хіба що з винаходом Ньютоном інтегрального та диференціального числення. Журналісти натхненно писали, що нова наука - теорія катастроф - для людства набагато цінніша, ніж класичний математичний аналіз: в той час як ньютонівська теорія дозволяє досліджувати лише плавні, неперервні процеси, теорія катастроф дає універсальний рецепт для дослідження всіх стрибкоподібних переходів, розривів і раптових якісних змін.

Якщо ретельно розглянути різні процеси (в механіці, фізиці, хімії, технології, астрономії, біології, економіці і т.д.), неможливо не помітити, що стабільна рівновага з неперервною зміною параметрів системи може стати нестабільною, а неперервний процес з плином часу може мати розрив. Вивчення таких процесів призвело до створення математичної теорії, яка розглядає деякі загальні риси різних явищ зміни режиму стрибка в системі у відповідь на плавну зміну зовнішніх умов і дозволяє судити про взаємодію різних подій (здавалося б, не пов'язаних). Серед публікацій з теорії катастроф є найекзотичніші, зокрема про психічні розлади і повстаннях ув'язнених, про поведінку біржових гравців і вплив алкоголю на водіїв і навіть про цензуру на еротичну літературу.

Але ця теорія часто представлена таким чином, що численні технічні деталі заважають її сприйняттю не спеціалістами. Навряд чи хто-небудь міг би підготувати сучасний і дуже ясний виклад предмету кваліфіковано, так щоб можна було гаряче рекомендувати кожному читачеві, що цікавиться сучасними досягненнями в науці і техніці (Дж. Лайтхілл) [1], [3], [20], [18], [25].

Актуальність дослідження зумовлена великим інтересом в науці і техніці до вивчення теорії катастроф та можливістю впровадження читання основ цієї теорії в старшій школі, як одного з найсучасніших розділів математики.

Об’єктом дослідження є теорія катастроф, як окремий розділ математики яка отримала гідне визнання серед наук.

Предметом дослідження є розгляд основних напрямків розвитку теорії катастроф в різних галузях.

Метою дослідження є аналіз доступної літератури та розробка факультативних курсів для старшої школи з теорії катастроф.

Згідно мети та загальної гіпотези дослідження визначено **завдання**:

1. Проаналізувати наукову літературу з проблеми дослідження.
2. Розглянути історичний аспект теорії катастроф.
3. Описати різні типи катастроф, які мають місце в природничих та інших видах наук.
4. Розглянути теоретико-методологічні основи проведення факультативних занять.
5. Розробити факультативні заняття для старшої школи.

Структура роботи: робота побудована за логічним принципом і складається зі вступу, основної частини, яка включає в себе два розділи, висновків, списку використаних джерел.

В першому розділі зроблений історичний огляд становлення теорії катастроф як науки; розглянуто фізичні та математичні основи теорії катастроф; сім елементарних катастроф за Рене Томом; застосування теорії катастроф в маневрах, природничих науках (явище надпровідності, астрофізика, рівняння Ван-дер-Ваальса, біологія, соціологія).

В другому розділі розглядається теоретико-методологічні основи проведення факультативних занять; наведено зміст факультативних занять та самі лекції факультативних занять з теорії катастроф.

Теоретичне значення дослідження полягає в застосуванні історичного методу дослідження, де проводиться історичний огляд становлення «Теорії катастроф», як окремого розділу в математиці. В роботі відображено, як вдало французький математик Рене Том, Уїтні Хаслер, об’єднали роботи своїх попередників: І. Ньютона, Джозефа-Луї Лагранжа, Дж. У. Гіббса, Дж. К. Максвела, А.М.Ляпунова, А. Пуанкаре та інш [3], [11]. Розглянуто теоретико-методологічні основи проведення факультативних занять з математики, як основного методу позакласної роботи.

Практичне значення дослідження полягає в розробці лекцій та практичних занять з «Теорії катастроф», які можна використати на факультативних заняттях в класах з поглибленим вивченням математики. Показано, як за допомогою методу моделювання на заняттях можна дослідити окремі випадки «Теорії катастроф». А саме, з допомогою: «Машини Зімана» та качалок.

Апробація роботи:

- Результати роботи доповідались у звітній науковій конференції викладачів та здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету 15 травня 2020 року.

Розділ 1. Основи теорії катастроф та її застосування

1.1 Історія створення теорії катастроф

Необхідно почати з механіки, для повного розуміння становлення теорії катастроф. У 1686 році Ісаак Ньютон представив експериментальне дослідження рухів маятника в повітрі і воді («Математичні початки природної філософії»).

У 1744 році Леонард Ейлер досліджував поведінку стиснутої пружини, колони під навантаженням, де використовував варіаційне числення [11, с. 11].

Джозеф-Луї Лагранж розвинув аналітичний енергетичний метод в механіці («Аналітична механіка», 1788 р.). Ним була встановлена фундаментальна теорема про те, що мінімальна повна потенціальна енергія системи є достатньою для сталого розвитку. Ще один вагомий внесок у аналітичну механіку належить Вільяму Гамільтону. Він зумів описати векторне поле траєкторій фази системою диференціальних рівнянь першого порядку.

Джерелами теорії катастроф є теорія особливостей гладких відображень Уїтні Хаслера та теорія біфуркацій динамічних систем Пуанкаре та Андронова.

Дуже швидке зростання науки і, зокрема, прикладної механіки призвело до спеціалізації та появи різноманітних версій оригінальних класичних результатів [11, с. 13]. Анрі Пуанкаре намалював загальну теорію біфуркації і створив загальну якісну теорію динамічних систем.

Теорія біфуркацій розглядає різноманітні якісні перебудови та метаморфози різних об'єктів (систем) при зміні параметрів, від яких вони залежать. Слово «біфуркація» означає «роздвоєння» та характеризує можливі шляхи подальшого розвитку системи при зміні керуючих параметрів: стрибок – катастрофу чи збереження рівноваги [3, с. 8].

1873 р. Дж. У. Гіббс описав перебудову ізотерм діаграми Ван-дер-Ваальса із застосуванням геометрії особливості типу «збірка». Правило рівних площ, яке використовується для визначення моменту фазового переходу в середовищі сформулював Дж. К. Максвел в 1975р. Одним з прикладів катастрофічних явищ в природі являється фазові переходи в різних середовищах [1, с. 6].

Великий вклад в теорію стійкості вніс А.М.Ляпунов. В 1892 році у своїй докторській дисертації він запропонував до розгляду узагальнення енергетичної функції. Ця функція зараз носить його ім'я [11, с 12].

Ідучи шляхом запропонованим Пуанкаре, Андронов і Понтрягін ввели в 1937 році важливе топологічне поняття структурна стійкість, яке лежить в основі наступних класифікацій Тома, Зімана, Смейла і Арнольда. Сьогодні ці досягнення якісної теорії динамічних систем Пуанкаре зв'язуть між собою топологію, механіку і теорію стійкості.

Наведемо короткий історичний огляд теорії стійкості в класичній механіці (див. табл. 1.1.)

Теорія особливостей – це узагальнення досліджень функцій на максимум та мінімум. Уїтні Хаслер замінив функції відображення наборами функцій декількох змінних.

Основна праця американського математика Уїтні Хаслера «Про відображення площин на площину» надрукована у 1955 р. Вона дала поштовх бурхливому розвитку теорії особливостей, що тепер є однією із центральних галузей математики. Ця теорія пов'язує абстрактні розділи з прикладними.

Вивчивши характер робіт Уїтні Хаслера з теорії особливостей і творів, які передували їм А. Пуанкаре і А. Андронова з теорії біфуркацій, Рене Том зайнявся широкою пропагандою цієї теорії. К. Зіман ввів термін «теорія катастроф», як сукупність теорії особливостей і її застосувань. Р. Том і К. Зіман намалювали «паралелі» між теорією катастроф і дослідженням Ейлера і Лагранжа. [11, с.14].

Перші відомості про теорію катастроф з'явилися у друку в 70-х рр. З тих пір це одна із найвідоміших і найпопулярніших математичних теорій, яка знайшла широке прикладне використання. Теорія катастроф досліджує усі стрибкоподібні переходи, розриви, якісні зміни на відміну від ньютонівської теорії диференціального та інтегрального обчислення, яка застосовується для неперервних процесів.

Таблиця 1.1.

Стійкість станів		Стійкість траєкторій	
Ньютон 1642-1727	Рівняння руху маятника	Ейлер 1707-1783	Еластика
Лагранж 1736-1813	Аналітична механіка Енергетична умова стійкості		
Гамільтон 1805-1865	Система звичайних диференціальних рівнянь (першого порядку)		
Ляпунов 1857-1918	Квазіенергетичні функції	Пуанкаре 1854-1912	Теорія біфуркацій Якісна теорія динамічних систем
Андронов		Структурна стійкість	
Смейл Арнольд Том Зіман		Класифікація структурно-стійких особливостей	

Рене Том зробив огляд додатків теорії катастроф. У 1970-х роках були опубліковані роботи Томпсона і Ханта, які включали в себе теорію катастроф [22, с.12].

Вивчення динамічних систем за допомогою біфуркацій було проведено Л. Д. Ландау, пізніше Е. Хопфом. Пізніше з'явилася маса робіт, що описують на фізичному рівні строгості, перехід від регулярного (ламінарного) руху до хаотичного (турбулентного) руху [9, с. 9].

З відомостями про теорію катастроф можна ознайомитися в Інтернеті, а саме: http://scintific.narod.ru/nlib/books,http://rcd.ru.

Проте це далеко неповний перелік вчених, що внесли вклад в створення і вживання теорії катастроф. Це пов’язано з тим, що сама теорія зв'язана і з теорією коливань і хвиль, і з теорією динамічних систем, і з динамічним хаосом, а так само з економікою, загальною фізикою, біологією, екологією, психологією і ще з рядом наук.

Згідно з теорією катастроф можна пропонувати наступну модель функціонування систем (економічних, екологічних, суспільних, технічних) (див. рис. 1.1.). Будь-яка система, як вказано, проходить у своєму розвитку декілька етапів: етап росту (становлення), етап стабільності існування, етап кризи (вгасання, відмирання, перебудови, модернізації). Криза завершується загибеллю системи або переходом її у новий, якісно вищий, стан. Усе залежить від співвідношення величини «напруги», котрої зазнає система, добротності цієї системи та виникаючих умов її подальшого існування.

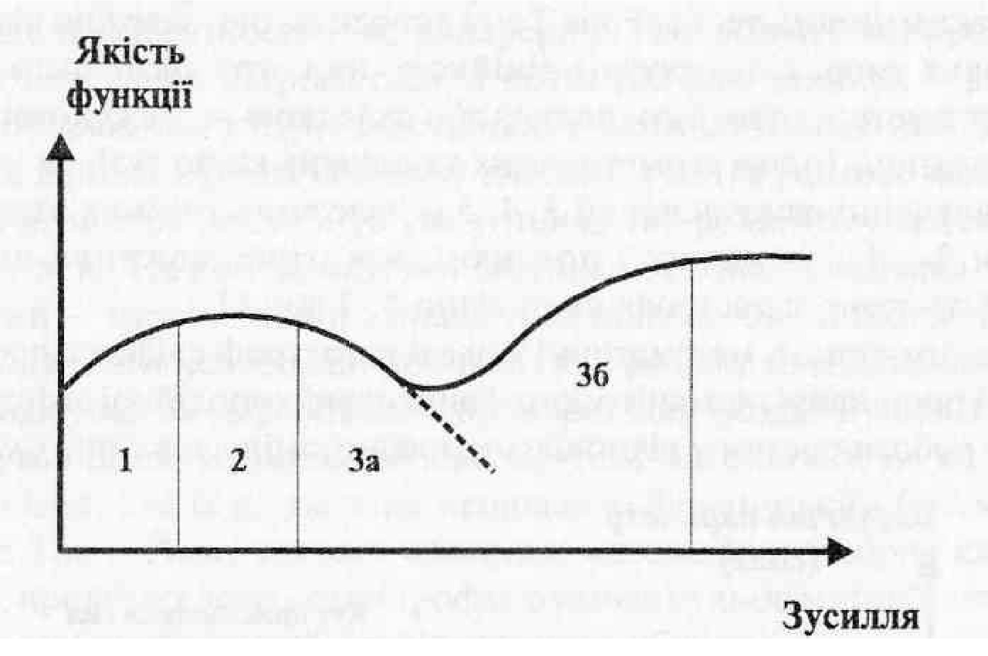


Рис. 1.1. Етапи розвитку системи:

1 — становлення (ріст) системи;

2 — стабільне існування;

3 — криза.

Отже, джерелами теорії катастроф є теорія особливостей гладких відображень Х. Уїтні і теорія стійкості, і біфуркацій динамічних систем А. Пуанкаре, А. Ляпунова і А. Андронова. Обидва ці напрямки злилися завдяки зусиллям французького математика Р. Тома в єдину теорію, яка отримала настільки помітну назву – теорія катастроф [9, с.11].

1.2 Фізичні основи теорії катастрофи

Що спільного між стрибаючим м'ячиком, льодоходом на річці, виверженням вулкана, біологічної популяцією білок в лісі, розподілом речовини у Всесвіті, формуванням поняття? Всі ці об'єкти можуть розглядатися як динамічні системи. А для динамічної системи можна вказати набір величин, які називаються динамічними змінними. Значення динамічних змінних, що характеризують стан системи, з вихідними параметрами змінюються в будь-який момент часу за певним правилом. Це правило задає оператор еволюції [22, с.11]. Наприклад, для м'ячика оператор еволюції визначається законами руху з урахуванням сили тяжіння і силою удару об землю. Миттєвий стан буде задаватися двома величинами - відстанню від землі і часом.

Геометрично миттєвий стан визначається як точка на фазовій площині, де відстань і час будуть осями ординат і абсцис відповідно (рис.1.2.).

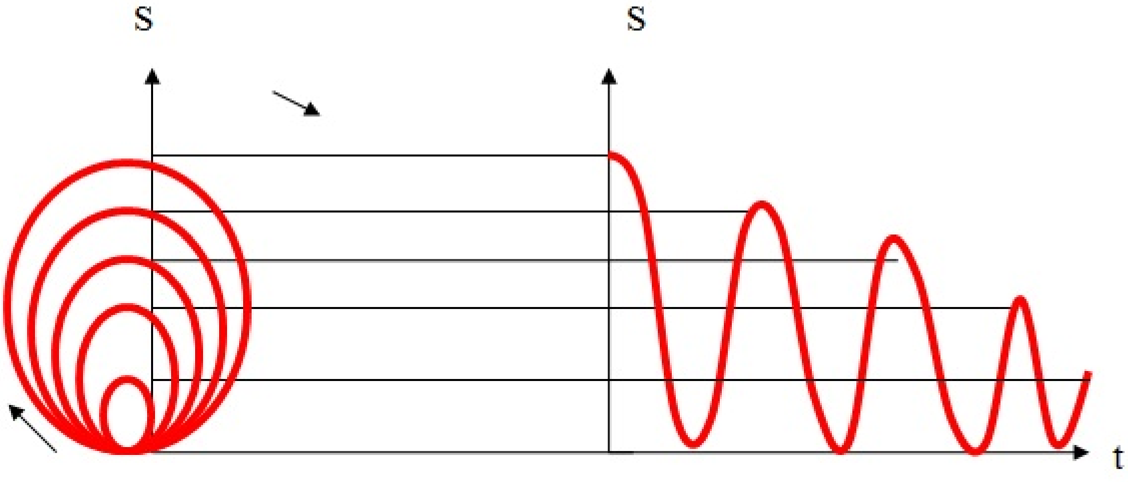


Рис 1.2. Рух м'яча

Стан системи задається набором N значень. Динаміку можна буде представити в N-мірному фазовому просторі (еволюційний процес математично описується векторним полем).

Точка фазового простору задає стан системи. Прикладений в цій точці вектор вказує швидкість зміни стану. В деяких точках вектор може перетворюватися в нуль. Такі точки називаються положеннями рівноваги (стан не змінюється з плином часу). Однак з плином часу в системі встановлюються коливання. Отже, рівноважний стан хиткий.

Криві в фазовому просторі, утворені послідовними станами процесу, називаються фазовими кривими.

Сталі коливання зображуються замкнутою кривою на фазовій площині. Ця крива називається граничним циклом в фазовій площині (рис. 1.3)

Рис. 1.3. Типові фазові портрети в околиці точки рівноваги

Розрізняють два класи динамічних систем: консервативні (режим динаміки визначається початковим станом) і дисипативні (режим динаміки не залежить від початкового стану). В курсі теорії катастроф розглядаються дисипативні динамічні системи.

Безліч точок у фазовому просторі дисипативної динамічної системи в сталому режимі називають аттрактором. [9, с. 9].

Прості приклади аттракторів – стійкий стан рівноваги і граничний цикл, що відповідає режиму періодичних коливань. Тобто, замкнута фазова траєкторія до якої наближаються всі сусідні траєкторії.

Аттрактори, відмінні від станів рівноваг і строго періодичних коливань, називаються дивні атрактори. Передбачуваність стає недосяжною на досить великих інтервалах часу. Навіть незначні неточності в заданні початкового стану системи наростає в часі [3, с.25]. Перехід від стійкого стану рівноваги процесу до дивного аттрактору може відбуватися як стрибком (при жорсткій або катастрофічної втрати стійкості), так і після м'якої втрати стійкості (рис. 1.4.).

Рис. 1.4. Сценарій хаотизації

Всі вище перераховані приклади показують, що стан системи залежить від параметрів системи (динамічних змінних, що характеризують стан системи). Зміна стану системи відбувається при зміні параметрів. Такі параметри називають керуючими параметрами. Система може залежати від одного або декількох параметрів. Можна розглянути простір всіх систем (рис. 1.5).

Неможливо однозначно передбачити кінцевий стан системи за вихідними параметрама. Дуже важко встановити абсолютно всі параметри. Задавати початкові значення параметрів ще складніше, до того ж з плином часу вихідні значення параметрів змінюються.

Теорія катастроф розглядає процеси, в яких плавні зміни параметрів системи перериваються стрибкоподібною зміною (передбачуваним або заздалегідь невідомим). Після чого система виявляється в іншому режимі існування або руйнується. Цей стрибок теорія називає катастрофою. Ударний характер навантаження на замкнуту систему може її пошкодити, зруйнувати або бути неприйнятним з якихось інших причин. Сама теорія катастроф народилася з узагальнюючого аналізу реальних катастроф в їх математичному описі.

Режим, в якому виявляється система після катастрофи, може бути передбачуваний однозначно або непередбачуваний, або в ймовірно-статистичному сенсі.

Таким чином, катастрофами називаються стрибкоподібні зміни, що виникають у вигляді раптової відповіді системи на плавну зміну зовнішніх умов.

1.3 Математичні основи теорії катастроф

Математична теорія катастроф – розділ математики, розроблений на базі математичного моделювання необоротних процесів, що розгортаються в незворотному фізичному часі. Вона включає в себе теорію біфуркацій диференціальних рівнянь (динамічних систем) і теорію особливостей гладких відображень.

Математична сторона теорії вельми непроста. Але ж можна і про найскладніші речі міркувати просто, як то кажуть, пояснюючи на пальцях. Сам Ейнштейн, володів таким способом викладу своїх думок досить добре.

Прикладна математика, фізика, хімія, а також технічні дисципліни часто є результатом застосування нових математичних ідей і методів. Такою і є прикладна математична теорія – теорія катастроф. В поєднанні з сучасними методами системного аналізу вона є корисним і ефективним засобом аналізу різних реальних процесів.

Розглядати в фазовому просторі положення рівноваги, граничні цикли і перебудови системи в цілому (її інваріативної множин і аттракторов) можна здійснювати за допомогою диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння, що описують реальні фізичні системи, завжди містять параметри. Точні значення яких, зазвичай, невідомі. Тому рівняння, що моделює фізичну систему, виявляється структурно не стійким. Рішення такого рівняння може якісно змінюватися при як завгодно малих змінних цих параметрів [5. с.9]. Зміни параметрів, які викликають зміни системи необхідно враховувати при складанні диференціальних рівнянь, що описують фізичні системи. Однак математичні модельні системи можуть виявитися громіздкими через велику кількості вхідних в них змінних При вивченні таких систем частина змінних, які мало змінюються в ході процесу, вважають сталими. В результаті отримують систему з меншою кількістю змінних, яка і досліджується. Зазвичай неможливо врахувати вплив відкинутих членів з вихідної моделі, що розглядаються «індивідуально». В цьому випадку відкинуті члени можна розглядати як збурення.

Теорія катастроф аналізує критичні точки (репетиції) потенціальної функції, тобто точки, де не тільки перша похідна функції дорівнює нулю, а й дорівнюють нулю похідні вищого порядку. Динаміка розвитку таких точок може бути вивчена за допомогою розкладання потенціальної функції в рядах Тейлора за допомогою малих змін вхідних параметрів. Існують точки, як центри для особливих геометричних структур з низьким рівнем катастрофічності, з високим рівнем катастрофічності в оточуючих їх областях фазового простору. Ці точки росту складаються не просто в випадковий шаблон, але формують структуровану область стабільності. Якщо потенційна функція залежить від трьох або менше активних змінних, п'яти або менше активних параметрів, то в цьому випадку існує всього сім узагальнених структур описаних геометрій біфуркацій [25]. Їм можна приписати стандартні форми розкладів в ряди Тейлора, в які можна розкласти репетиції за допомогою дифеоморфізмів (гладкою трансформацією, обертання якої також гладке). Сьогодні ці сім фундаментальних типів катастроф відомі під іменами, які їм дав Рене Том, ми розглянемо їх нижче.

Для прикладу візьмемо катастрофи в градієнтних системах.

Нехай динамічна система описується рівняннями:

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{\partial V(x)}{\partial X} \qquad (1.1)$$

де – динамічні змінні, а *V(X)* — певна потенціальна функція (функція Ляпунова), яка крім динамічних змінних залежить також від певного набору параметрів.

Стаціонарні точки цієї системи знаходяться з рівняннь:

$$\frac{\partial V}{\partial X_i} = 0 \qquad (1.2)$$

а біфуркація виникає, коли визначник

$$det\left|\frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial X_i}\right| = 0 \qquad (1.3)$$

взятий в стаціонарній точці, змінює знак.

При зміні параметрів кількість стаціонарних точок та їхня стійкість можуть змінюватись. Причому розв'язки цього рівняння можуть з’являтися й зникати навіть при неперервній зміні параметра [25].

1.4. Елементарні катастрофи

Існують різні підходи до розгляду елементарних катастроф.

На основі висновків теорії особливостей Арнольд В.І. розглядає прості образи на кшталт складки, збірки, точки повернення і ще кілька образів. Деякі з них отримали власні імена, наприклад – «ластівчин хвіст».

Кузнецов А.П. розглядає приклади систем з катастрофами (катастрофи складки і збірки), при виявленні істотних параметрів, класифікації критичних точок.

Елементарні катастрофи в теорії хаосу як доказ неможливості передбачити постійні нелінійні і нерегулярні складні рухи, що виникають в динамічній системі вводить Найман Е.

Розглянемо основні властивості фундаментальних типів катастроф. Сьогодні ці сім фундаментальних типів відомі під іменами, які їм дав Рене Том [25].

Функції з однією змінною:

- Катастрофа типу Складка $V = x^3 + ax$ (1.4)
- Катастрофа типу Збірка $V = x^4 + ax^2 + bx$ (1.5)
- Катастрофа типу Хвіст ластівки $V = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$ (1.6)
- Катастрофа типу Метелик $V = x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ (1.7)

Потенціальні функції з двома змінними:

- Гіперболічна омбіліка $V = x^3 + y^3 + axy + bx + cy$ (1.8)
- Еліптична омбіліка $V = x^3 / 3 - xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy$ (1.9)
- Параболічна омбіліка $V = yx^2 + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$ (1.10)

Катастрофа типу "Складка"

При від'ємних значеннях параметра *a*, потенціальнайна функція

$$f(C)=C^3+aC \qquad (1.11)$$

має два екстремуми - один стабільний (стійка рівновага) і один нестабільний (нестійка рівновага). Якщо параметр *a* повільно змінюється, система може перебувати в точці стабільного мінімуму. Але при $a=0$, стабільний і нестабільний екстремум зустрічаються і анігілюють. Це – точка біфуркації. При $a>0$ не існує стабільного рішення. Якщо фізична система проходить через точку біфуркації типу «згортка», і тому параметр *a* досягає значення *0*, стабільність рішення при $a<0$ раптово втрачається, і система може здійснити раптовий перехід в нове, дуже відмінне від попереднього стан.

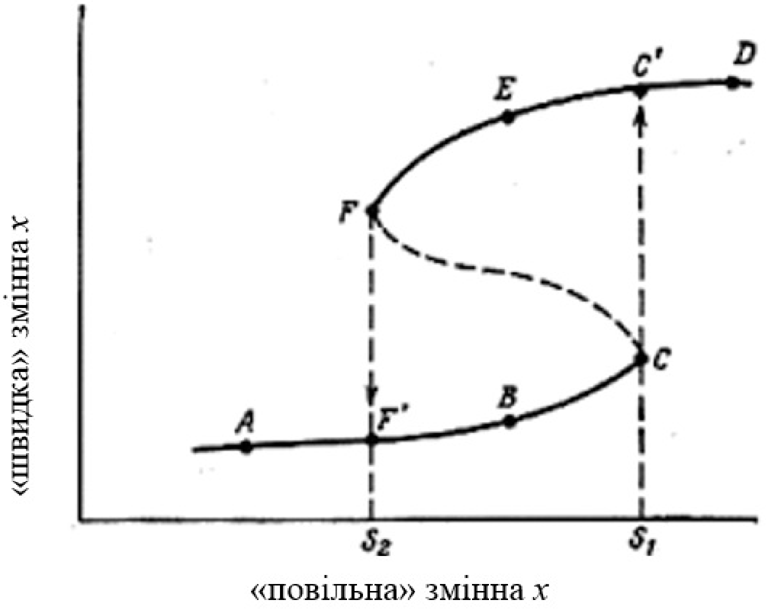
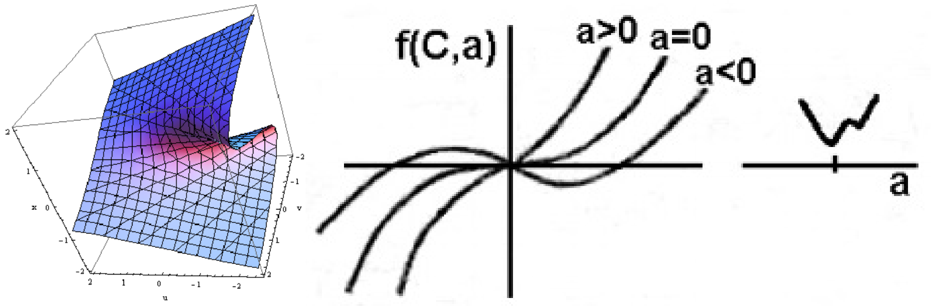


Рис.1.5. Катастрофа типу складка

Проста катастрофа «складка» добре ілюструє властивість бімодульності, представлена двома гілками складчастої кривої, і властивість розривності, представлена різкими стрибками з однієї гілки на іншу, в особливостях S_1 і S_2. Гістерезис ілюструється тим, що траєкторія системи при зменшенні b після перетину особливо відрізняється від траєкторії, по якій рухається система при збільшенні b. Слід мабуть зазначити, що конкретна форма функції $C(a)$ на кривій, не важлива - аби в проекціях C на b зберігалася особливість типу складки.

У катастрофі типу складка система спочатку знаходиться в точці А на нижній гілці складчастої кривої. З ростом змінної b змінна C теж зростає, так що система переходить через точку B і досягає точки C. В даній точці змінна b перетинає особливість S_1, і система робить «катастрофічний» стрибок на верхню гілку графіка в точку C'. Подальше зростання змінної b веде систему далі за точку D. Якщо ж змінна b починає спадати, то система продовжує слідувати уздовж верхньої гілки графіка через точку E до точки F. У цій точці змінна b перетинає особливість S_2, і система робить «катастрофічний» повернення на нижню гілку графіка в точку F', після чого подальші зміни змінної *b* ведуть систему або до точки *A*, або до точки *B* до тих пір, поки вона знов не перетне особливість S_1.



а) б) в)

Рис. 1.6. Катастрофа складки: а - поверхня катастрофи; б - залежність функції катастрофи від змінної стану; в - сепаратриса.

При $a>0$ всі криві якісно подібні - вони не мають критичних точок. Всі криві з $a<0$ також подібні і мають дві критичні точки (рис. 1.6 б). Точка $a=0$ в просторі керуючих параметрів є сепаратрисою (рис.1.6 в).

Катастрофа типу «складки» з'являється в моделях, що описують релаксаційні коливання, «чекають» режими і тригерні системи (параметричне перемикання). Моделі, які мають «складки», використовуються при описі автохвильових процесів і дисипативних структур, в моделях навантажених арок, дисипативних структур, моделях релаксації.

Катастрофа типу "Збірка"

Потенціальна функція - поліном 4-ого степеня:

$$f(C)=C^4+aC^2+bC \qquad (1.12)$$

Похідна від потенціала:

$$\frac{df}{dC} = 4C^3 + 2aC + b \qquad (1.13)$$

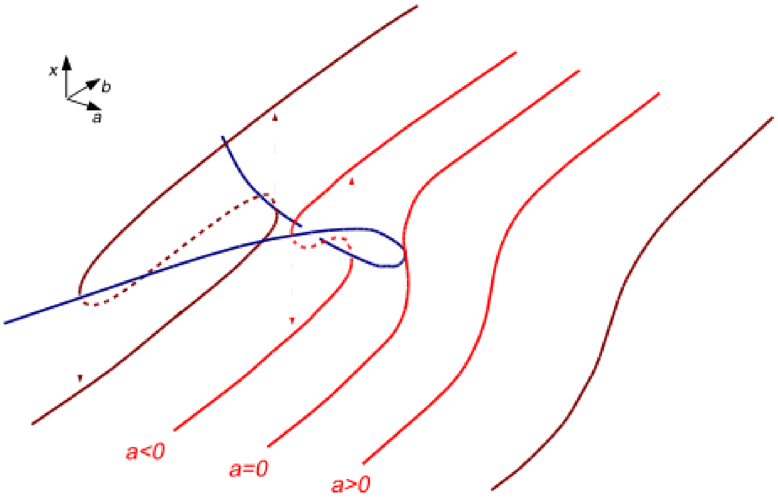


Рис. 1.7. Форма збірка в просторі параметрів (a,b) поблизу точки катастрофи, що показує біфуркацію, яка розділяє області з одним і двома стійкими рішеннями.

Функція катастрофи збірки залежить від однієї змінної стану *C* і двох керуючих параметрів: *a* і *b*. Сепаратриси збірки розділяють площину керуючих параметрів на дві області з одною і трьома критичними точками, її лінії мають двічі вироджені точки, а точка перетину виродилася тричі. Потенціальні функції відповідають деяким точкам на площині керуючих параметрів.

На рис. 1.7. представлена діаграма катастрофи збірки, яка зображена червоними та коричневими кривими для *C*, що задовольняє рівняння:

$$df(C)/dC = 0 \qquad (1.14)$$

і параметрів (*a*, *b*), де параметр *b* змінюється незперервно, а для параметра *a* показані тільки кілька різних значень. За межами збірки (синя лінія) кожній точці (*a*, *b*) в просторі параметрів відповідає тільки одне рішення *C*. Усередині ж збірки існують по два різних значення *C*, що відповідають локальним мінімумам *f(C)* для кожної точки *(a, b)*. В ній точки розділені значенням *C*, які відповідають локальному максимуму.

Катастрофа типу "ластівчин хвіст"

$$f(C)=C^5+aC^3+bC^2+cC \qquad (1.15)$$

Критичні точки визначаються шляхом прирівнювання до нуля похідних.

Критичні точки:

$5C^4 + a + 2bC + 3C^2c = 0.$ (1.16)

Двічі вироджені:

$10C^3 + b + 3C = 0.$ (1.17)

2. Тричі вироджені:

$10C^2 + 1 = 0.$ (1.18)

3. Чотири рази вироджені:

$C = 0.$ (1.19)

Функція $f\,(C;\ 0,0,0)$ має чотири рази вироджену точку $C = 0$.

Керуючий простір в даному типі катастроф є тривимірним. Каскад біфуркацій у фазовому просторі складається з трьох поверхонь біфуркацій типу «згортки». Вони зустрічаються на двох кривих біфуркацій з точками повернення, які в кінцевому підсумку зустрічаються в одній точці, що представляє собою біфуркацію типу «ластівчин хвіст». У міру проходження значень параметрів по поверхнях областей біфуркацій типу «згортка» пропадає один мінімум і один максимум потенціальної функції. В області біфуркацій з точкою повернення два мінімуму і один максимум заміщуються одним мінімумом; за ними біфуркації типу «згортка» зникають. У точці ластівчин хвіст два мінімуму і два максимуми зустрічаються в одному значенні змінної C. Для значень $a>0$ за ластівчин хвіст існує або одна пара (мінімум, максимум), або не існує взагалі ніяких біфуркацій. Це залежить від значень параметрів b і c. Дві поверхні біфуркацій типу «згортка» і дві лінії біфуркацій з точками повернення зустрічаються при $a<0$, а тому зникають в самій точці ластівчин хвіст, замінюючись однією поверхнею біфуркацій типу «згортка».

Рис. 1.8. Поверхня катастрофи «Ластівчин хвіст»

«Ластівчин хвіст» не оминув і живопис, так остання картина Сальвадора Далі під назвою «Ластівчин хвіст» створена під впливом цього типу катастроф (рис. 1.9).

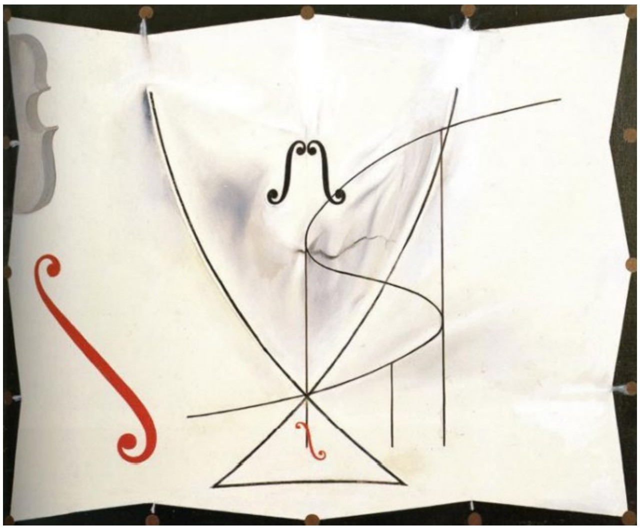


Рис. 1.9. картина Сальвадора Далі під назвою «Ластівчин хвіст»

Катастрофа типу "Метелик"

$$f(C)=C^6+aC^4+bC^3+cC^2+dC \qquad (1.20)$$

Залежно від значень параметрів потенціальна функція може мати три, два або один локальний мінімум, причому всі мінімуми розділені областями з біфуркації типу «згортка». У точці з назвою «метелик» зустрічаються три різні поверхні простору (тривимірних площини) таких біфуркацій типу «згортка», дві поверхні біфуркацій з точками повернення і крива біфуркацій типу «ластівчин хвіст». Всі ці біфуркації пропадають в одній точці і перетворюються в просту структуру з точкою повернення тоді, коли значення параметра *a* стає додатнім.

Перейдемо тепер до потенціальних функцій з двома активними змінними. Омбілічні катастрофи є прикладами катастроф другого порядку. Вони, наприклад, спостерігаються в оптиці при відображенні світла від тривимірних поверхонь. Самі по собі такі катастрофи тісно пов'язані з геометрією майже сферичних поверхонь. Рене Том запропонував розглядати гіперболічну омбілічну катастрофу як руйнування хвилі, а еліптичну омбілічну катастрофу як процес створення структур, схожих на волосяний покрив.

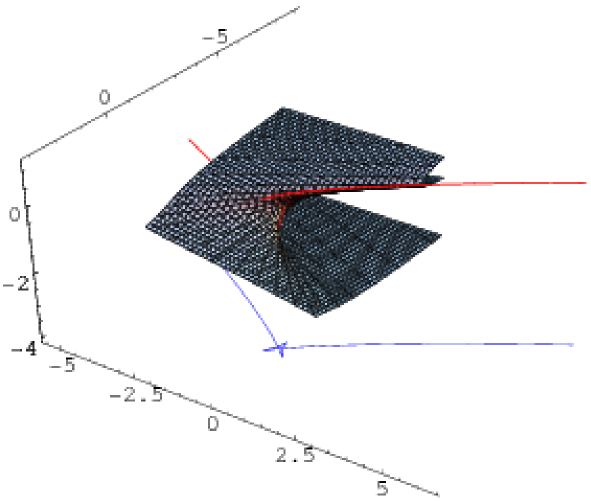


Рис. 1.10. Катастрофа метелик

Омбіліка (омбілічна точка) - локально сферична точка на тривимірній поверхні. У таких точках обидві головні кривизни рівні, і кожен вектор дотичної є основним напрямком. Омбілічні точки зазвичай з'являються у вигляді ізольованих точок в еліптичних областях поверхні, тобто таких, де гауссова кривизна додатня. Сфера є єдиною поверхнею, на якій кожна точка є омбілікою.

Гиперболічна омбіліка

$$f(C_1,C_2)=C_1^3+C_2^3+aC_1C_2+bC_1+C_1C_2 \qquad (1.21)$$

Еліптична омбіліка

$$f(C_1,C_2)=\frac{C_1^3}{3}-C_1C_2^2+a(C_1^2+C_2^2)+bC_1+cC_2 \qquad (1.22)$$

Параболічна омбіліка

$$f(C1,C2)=C_1^3 + C_2^4 + aC_1^2 + bC_2^2 + cC_1 + dC_2 \qquad (1.23)$$

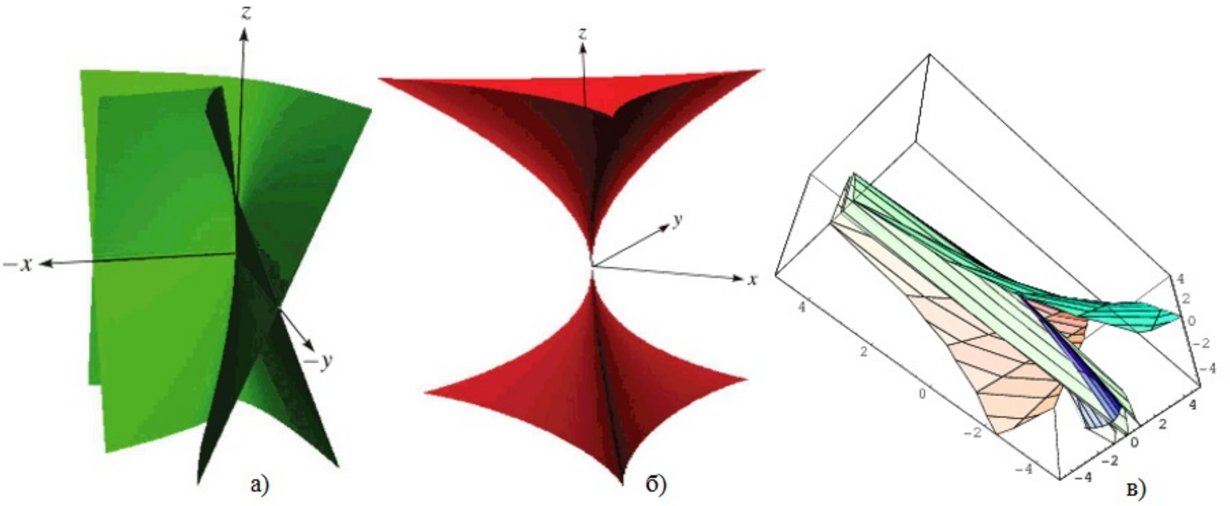


Рис. 1.11. Катастрофи типу омбіліка: а - гіперболічна омбіліка; б – еліптична омбіліка; в -параболічна омбіліка.

1.5. Застосування теорії катастроф.

В теорії катастроф є щось таємниче - це дивовижні збіги зв’язків між далекими на перший погляд предметами теорій.

Теорія катастроф дає універсальний метод дослідження стрибкоподібних переходів, розривів, раптових якісних змін. Існують різні публікації, в яких теорії катастроф застосовується до досліджень биття серця, в геометричній і фізичній оптиці, ембріології, лінгвістиці, психології, економіці, гідродинаміці, геології, пружних конструкцій, термодинаміці і фазофі переходи, геометрії рідини та теорії елементарних частинок. Серед опублікованих робіт з теорії катастроф є дослідження стійкості кораблів, моделювання діяльності мозку і психічних розладів, повстань ув'язнених у в'язницях, поведінки біржових гравців, впливу алкоголю на водіїв транспортних засобів, в лазерній фізиці та дослідженні економічних криз [3, с. 7].

Крім того, явище стійкості представляє величезний інтерес для всіх науковців і інженерів з різних областей науки і техніки. Наприклад, втрата стійкості тонкостінних конструкцій під дією ваги і вітрового навантаження, астрофізика колапсуючої зірки, раптове руйнування кристалічної решітки, фазові переходи в термодинамічних системах, вибуховий розвиток популяцій конкуруючих екологічних видів, виникнення турбулентності в рідинах, які швидко рухаються, хаотичний рух в простих детермінованих моделях, управління станом космічного корабля і нейродинаміка мозку.

Щоб зрозуміти предмет досить глибоко, потрібно деяке знання математики, тільки тоді можна скласти правильне уявлення про сферу застосування теорії катастроф. Загальна точка зору на всі ці різні проблеми стійкості досягається за допомогою теорії катастроф.

1.5.1. Маневри і теорія катастроф

Математична сторона катастроф дозволяє обґрунтувати результати, отримані на практиці (в залежності від ступеня обґрунтованості керуючих параметрів). В теорії ударів пружних конструкцій і в теорії перекидання кораблів передбачені теорії, які повністю підтверджуються експериментом. З іншого боку, в біології, психології та соціальних науках (скажімо, в додатках до теорії поведінки біржових гравців або до вивчення нервових хвороб) як вихідні передумови, так і висновки мають скоріше евристичні значення.

Замкнута система може мати один і більше стійких балансувальних режимів, що належать до скінченної або нескінченної множини. Переведення замкнутої системи з одного балансувального режиму в інший – вид маневру, який найбільш часто зустрічається.

Маневр має сенс при переході системи в кінцевий балансувальний режим, який є стійким режимом для даної замкнутої системи [3, с. 93].

У просторі параметрів, що описують замкнуту систему, маневр - траєкторія переходу від однієї точки (початковий стан вектору) до іншої точки (кінцевий стан вектору) (рис. 1.12.).

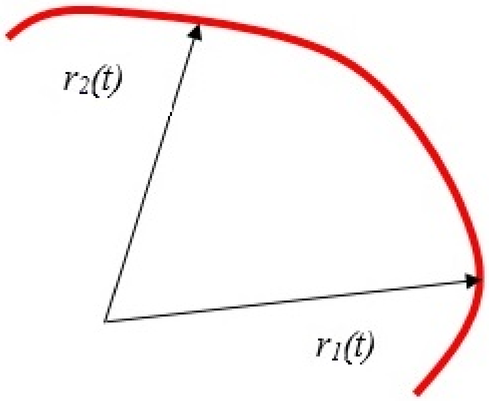


Рис. 1.12. Проектування поверхні на площину

Вектор стану – функція часу, тобто ідеальна траєкторія і хронологічний графік проходження контрольних точок на ній.

Безліч допустимих векторів стану становить межу допустимих відхилень від ідеальної траєкторії. Потрібно врахувати відхилення за часом в проходженні контрольних точок на ідеальній траєкторії.

Маневр може бути умовно стійким, якщо замкнуту систему вдається перевести в кінцевий стан з прийнятною точністю. Впливи, в тому числі конфліктне управління, в процесі маневру погано передбачувані до його початку. Внаслідок цього траєкторія переходу повинна коректуватися в ході маневру з урахуванням реальних відхилень. Маневр може бути завершений за умови, що протягом переходу впливи не перевищать компенсаційних можливостей замкнутої системи [22, с. 367]. Це ж стосується ситуації конфліктного управління одним об'єктом з боку декількох суб'єктів. Прикладом такого роду умовно стійкого маневру є будь-яке плавання епохи вітрильного флоту "з пункту А в пункт Б": допливсти – шанси є, але про аварійність, терміни і маршрут можна говорити тільки в імовірнісному сенсі про майбутнє і в статистичному сенсі - про минуле [3, с. 94]. Стійкий маневр має ймовірність успішного завершення, коли обурення впливу на замкнуту систему в ході маневру дорівнює одиниці. За низької кваліфікації управлінців стійкий маневр може бути зведений і до нульової ймовірності [22, с. 368]. Наочними прикладами успішного і неуспішного завершення маневру є організація діяльності різних підприємств.

Під впливом збурення слід розуміти як зовнішні впливи середовища, включаючи і конфліктність управління, так і внутрішні зміни – поломки і т. п. Коли ми говоримо про стійкість як про обмеженість відхилень в замкнутій системі, то слід розуміти передбачуваність поведінки системи [22, с. 368]. В економіці широко застосовуються моделі реальних процесів, що містять припущення – відхилення від ідеалу. Економіко-математичне моделювання дозволяє проаналізувати конкретний процес. На рис. 1.13. можна побачити точки перетину площин пропозиції S і попиту D на осях Q (обсяг товарів і послуг), P (ціна), E (відхилення), значення яких буде оптимальною ціною PE.

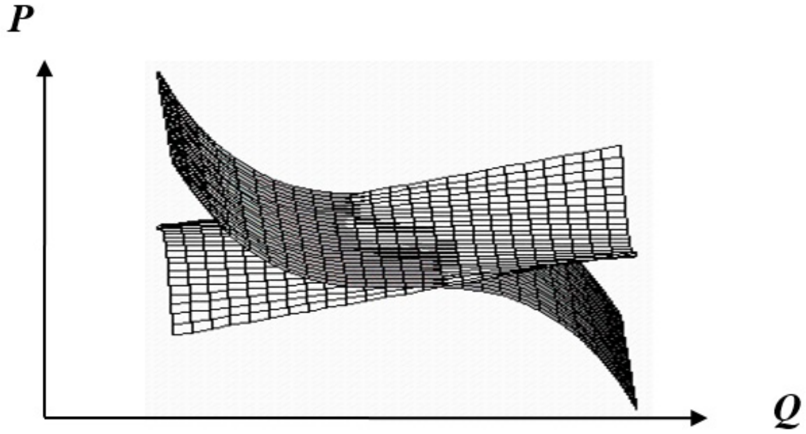


Рис. 1.13. Формування оптимальної ціни

В економіці та інших галузях до маневрів переходу пред'являють різні вимоги, але найбільш часто ставиться вимога плавності. Плавність – відсутність імпульсних (ударних) навантажень на замкнуту систему в процесі її руху по ідеальній траєкторії маневру з допустимими відхиленнями в просторі параметрів.

У математичної інтерпретації ця вимога дворазового диференціювання за вектором часу стану замкнутої системи і накладення обмежень на вектори-похідні «швидкість», «прискорення». Це враховують у всьому просторі коридору допустимих відхилень протягом ідеальної траєкторії. Зняття цієї вимоги – приведе до перенесення завдання управління в область додатків теорії катастроф [9, с. 436].

Інший приклад явища, що вивчається теорією «катастроф» – перехід коливального процесу з однієї потенційної ями в іншу потенційну яму. Наприклад, в шторм корабель зазнає качки щодо одного стійкого вертикального положення. Плавне збільшення амплітудних значень крену при коливанні може привести до раптового перекидання корабля догори днищем. Цей процес буде тривати протягом інтервалу часу меншого напівперіоду качки (секунди) в процесі посилення шторму, обмерзання і т.п. Але і перекинувшись корабель може не відразу ж піти на дно. Він може ще тривалий час залишатися на плаву догори днищем, як і раніше відчуваючи качку щодо свого іншого, також стійкого вертикального положення.

Об'єктивні дані – область потенційно стійкого по передбачуваності управління в просторі параметрів вектору стану по відношенню до конкретної замкнутої системи. У ній лежить множина об'єктивно можливих траєкторій маневрів і множина об'єктивно неможливих. У множині об'єктивно можливих траєкторій можна виділити підмножину траєкторій, на яких лежать точки «катастроф» [9, с. 378]. З математичної точки зору це можуть бути: точки порушення дворазовим диференціюванням за часом вектору стану, точки перевищення обмежень на векторі-похідної, точки на межі між двома потенційними ямами тощо. Розглянемо залізничний транспорт країни. Область потенційно-стійкого управління – вся територія держави. Множина об'єктивно можливих маневрів – існуюча мережа залізниць. Множина об'єктивно неможливих – все, де немає рейок і де неможливо з технічних причин прокласти рейки або побудувати стрілочні переводи для зміни напрямку руху. Точки «катастроф» – несправні шляхи і стрілочні переводи, занадто круті повороти і негабаритні місця, непрохідні для деяких видів рухомого складу і локомотивів тощо – це реальні можливості «катастроф». По відношенню до кожного з видів вантажу залізничні вузли – точки розгалуження їх траєкторій в імовірнісному сенсі. У цьому прикладі самі «катастрофи» теорії катастроф представлені тільки реальними «катастрофами» залізничного транспорту. Причинами ж зривів управління можуть бути найрізноманітніші і можуть лежати на кожному етапі управління. Тому необхідно досліджувати область, передбачуваного маневрування, на предмет її повного включення в область потенційно стійкого управління. Розглянемо якісь фрагменти області, передбачуваного маневрування, що містять в собі точки зриву управління. Вони можуть випадати зі сфери потенційно-стійкого при необхідній якості управління через багатозв'язність області, відсутності її опуклості і т.п. Тому такі зони необхідно виключити і прокласти траєкторії маневрів в обхід них і точок зриву управління зокрема. Саме цим займаються всі кваліфіковані навігатори: при підході до берега, на навігаційній карті вони проводять кордон району, забороненого їм для маневрування через малість в ньому глибин.

1.5.2 Застосування в природничих науках

1. Явище надпровідності.

Вперше надпровідність була відкрита Камерлінг - Оннесом в 1911 році у ртуті при температурі близько 4°К (-269°С) вище абсолютного нуля. За що він в 1913 році отримав Нобелівську премію. Аж до 1986 року надпровідність спостерігалася лише у деяких металів і їх сплавів. При цьому найвищою температурою переходу в надпровідний стан володів сплав ніобію і германію: 23°К (-250°С). Надпровідність виникає тільки при охолодженні матеріалу нижче певної температури, яка називається критичною температурою (*Тк)*. Величина цієї температури у кожного надпровідника своя (рис. 1.14). У цій точці електричний опір стрибком падає до нуля [25].

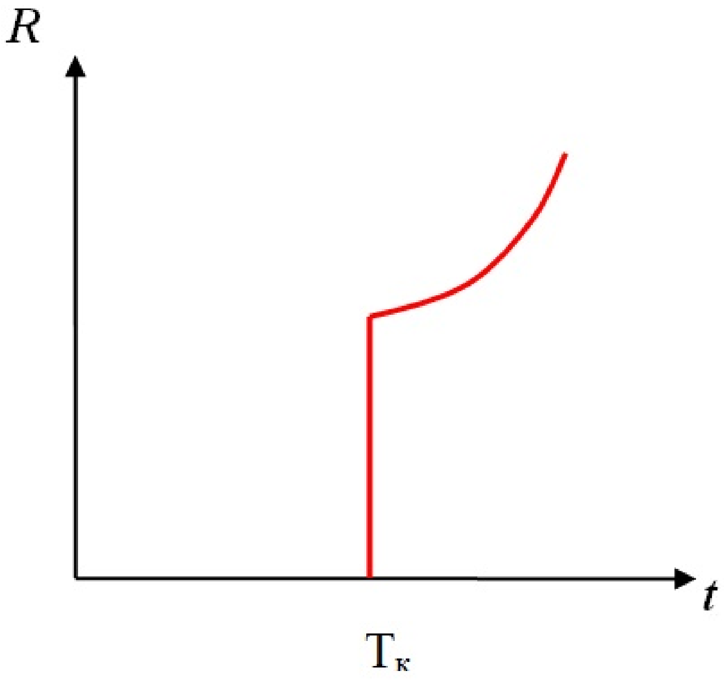


Рис. 1.14. Залежність опору матеріалу від температури

Надпровідність можна спостерігати у гелію ^{4}He. При зниженні температури рідкий He I з нормальними властивостями переходить в надпровідний стан He II. У момент надпровідного переходу теплоємність С гелію різко зростає до величезної величини, а при подальшому охолодженні швидко зменшується. Графік цієї залежності нагадує грецьку букву λ (лямбда) (рис. 1.15.).

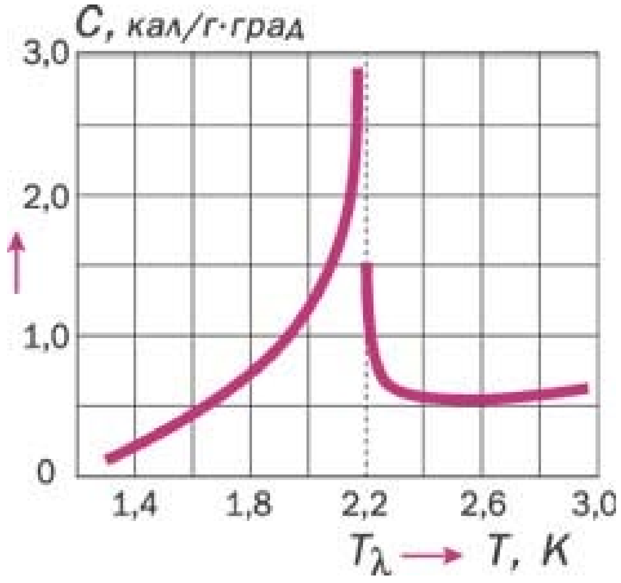


Рис. 1.15. Залежність теплоємності від температури при переході гелію в надпровідний стан

2. Астрофізика.

Багато понять і ідей теорії стійкості історично виникли при вивченні проблем астрофізики зірок і планет. Одна з них це гравітаційний колапс масивної холодної зірки. Гаррісон, Торн, Вакано і Уілер розглядали основні стани системи з А баріонів (нейтронів і протонів), які дійшли до останньої стадії термоядерної еволюції і досягли температури близької до абсолютного нуля. Вони вивчали реальний гравітаційний колапс масивної гарячої зірки з урахуванням кутового моменту кількості руху, магнітних полів [11, с . 80].

Для А = 1 основний стан відповідає атому водню (H),

для А = 4 - атому гелію (He),

для А = 56 - атому заліза (Fe).

При підвищенні значення А до $56 \cdot 10^6$ основний стан одержуваної речовини буде відповідати 10^6 атомів заліза Fe, розташованих в вузлах об'ємно-центрованої кубічної решітки. Коли число баріонів досягне значення порядку $10^{6.6}$-$10^{6.7}$, самогравітація стає настільки великою, що електрони досягають релятивістських енергій і перетворять протони в нейтрони. Ядерний склад змінюється від Fe до більш важких і більш багатих нейтронами ядер [11, с. 80].

Рис. 1.16. Графік залежності маси-енергії від щільності.

На рис. 1.16. наводяться результати дослідження рівноваги і стійкості, в яких маса-енергія представлена як функція щільності в центрі зірки. Тут видно, що можливі тільки дві області стійкості, які відповідають білим карликам і нейтронним зірок. Зі збільшенням числа баріонів і маси-енергії кожна з цих областей досягає критичного становища рівноваги, або катастрофи складки. При якій домінують гравітаційні сили і може початися колапс [11, с. 81].

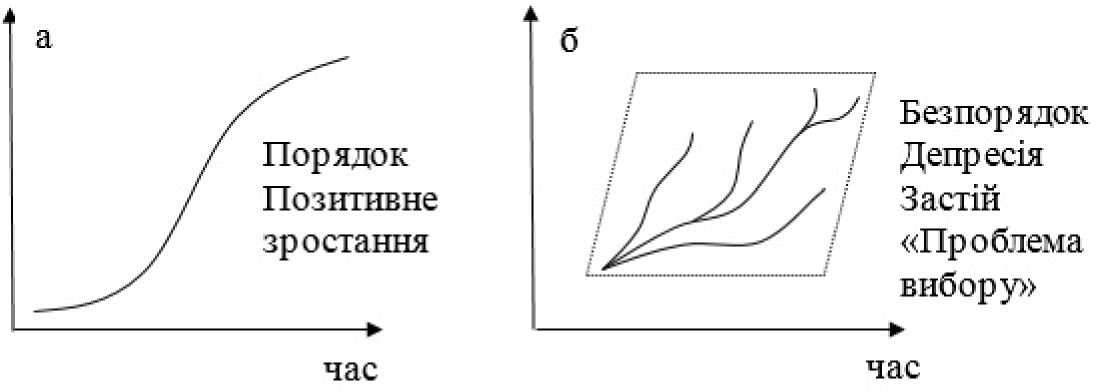
3. Біологія

Історія розвитку тваринного світу на Землі часто інтерпретується, як еволюційний розвиток, що переривається серією катастроф.

Прикладом такого підходу є катастрофізм - система уявлень про зміни живого світу в часі під впливом подій, що призводять до масового вимирання організмів. Теорія катастроф походить від стародавніх міфів про потопи. Ґрунтуючись на зміні видового складу живих організмів. Ж.Кюв'є прийшов до висновку, що в результаті великих катастроф планетного масштабу відбувалося вимирання живого на значній частині земної поверхні. Відновлення флори і фауни відбувалося за рахунок видів, які прийшли з інших невеликих локальностей. Проти ідей Кюв'є в середині XIX виступив Ч. Лайєлла, прихильник еволюційного вчення Ч. Дарвіна. Уявлення про важливу роль катастроф в еволюції живого відродилися пізніше у вигляді неокатастрофізму [8].

Відома ціла група еволюційних теорій, згідно з якими видоутворення відбувається дуже швидко - протягом декількох поколінь (Сальтаціонізм (saltus - стрибок) - група еволюційних теорій. Одним з гіпотетичних механізмів, який стверджують ці теорії, є поява нових особин, що різко відрізняються від наявної в популяції норми й є репродуктивно ізольованими від представників батьківського виду.

Сальтаціонізм дозволяє пояснити такі явища, як неповнота палеонтологічного літопису - відсутність неперервних рядів перехідних форм між видами і над видовими таксонами; різке зниження конкуренто- і життєздатності у перехідних форм в порівнянні з вихідним видом і ін [25].



Мал. 1.17. Ілюстрація до понять «порядку» (а) і «безладу» (б).

Так, вивчаючи успадкування ознак у ослінника Oenothera lamarckiana Хуго де Фриз в 1901 р спостерігав появу нових форм, які морфологічно різко відрізняються від батьківських. Отримавши результати він сформулював мутаційну теорію, основним положенням якої була раптовість появи нових, таких, що раніше не існували видів в ході одиничної мутаційної події. Гольдшмід в середині XX століття сформульовав уявлення про системні мутації. Системна мутація - це особливий тип мутації, що призводить до появи особин, які різко морфологічно відрізняються від вихідних форм і можуть дати початок новим видам. Системні мутації, можливо, пов'язані зі зміною особливих консервативних ділянок геному, відповідальних за регуляцію морфогенезу.

Зазвичай в біології в якості «нормального», «стабільного» стану розглядається стійке зростання (мал 1.17 а), для такого стану системи розроблена «нейтральна теорія еволюції». Однак, недавно молекулярна генетика прояснила роль стресу в еволюційному процесі.

Справа в тому, що жоден стійкий ріст не може тривати вічно. Найпростіше логістичне рівняння описує обмеження зростання, пов'язане з вичерпанням ресурсу, як вихід на стаціонар. На практиці уповільнення зростання в подальшому супроводжується депресією, стагнацією, зменшенням характеристичних показників. У цій стадії система встає перед проблемою вибору іншої стратегії життя (іншого ресурсу). Якщо новий ресурс, нова життєва стратегія, обрані правильно й дійсно можуть забезпечити подальший активний ріст, починається нова стадія «Стійкого зростання» типу А. Обидві стадії А (ароморфоз) і В (ідіоадаптація) є «природними» стадіями в розвитку систем. У несприятливих умовах, на стадії безладу В, у мікроорганізмів різко підвищується швидкість мутаційного процесу. На дрозофілах було показано, що при стресі у еукаріот відбувається стрибкоподібна реалізація раніше накопиченої, але прихованої генетичної мінливості. Одночасно відбувається прискорення процесів мутації.

Модель катастрофи, з обмеженнями, застосовна до області, що має границі, дозволила пояснити, чому бджоли зустрічаються або як види, для яких характерний одиночний спосіб життя. Тут використовується один з основних екологічних принципів: види з меншою ефективністю використання ресурсів серед конкуруючих за ту ж саму їжу витісняються під тиском природного відбору. Якщо бджола збирає мед з невеликого простору, здатна літати з великою швидкістю і переносити велику кількість нектару, то вона вважає за краще жити на самоті або в невеликому колективі. Слабкі бджоли з низькою ефективністю збору нектару, змушені до того ж збирати мед з великих площ, тобто витрачати великий час на перельоти, змушені утворювати великі спільноти (кілька тисяч), які виявляються конкурентоспроможними завдяки розподілу праці у вулику.

4. Механіка конструкцій

Вивчення поведінки статичних конструкцій під навантаженням і їх чутливості до недосконалості тісно пов'язане з теорією катастроф. Глибоке історичне коріння має задача опису поведінки пружної конструкції, під впливом навантаження, що збільшується раптово, стрибкоподібно переходить в інше положення. Було доведено, що напрямок вигину конструкції передбачити неможливо. У 1744 р Л. Ейлер використовував створений ним математичний апарат (варіаційне числення) для визначення рівноважних станів стиснутої пружної колони. У припущенні, що поперечні перерізи достатньо малі, він розглянув стійкість вертикально розташованого лінійно-пружного стержня, стиснутого силою (еластика Ейлера). Ж.Лагранж в 1788 р довів, що мінімум повної потенціальної енергії системи є достатнім для стійкості. Він отримав рішення цього завдання без обмежень на величину поперечних відхилень і показав, що її математичний опис призводить до нелінійного диференціального рівняння [22, с. 51].

Припустимо, що ми загострили кінці пружного стержня довжиною L, який виготовлений з пружного металу або дерева. Потім стискуємо його вздовж осі, використовуючи пристрій для стиснення (рис. 1.18.). При повільному збільшені фіксуючого навантаження P можна виміряти відхилення центральної точки Q і побудувати графік залежності P від Q. Можна використати черв’ячну передачу, щоб фіксувати зменшення довжини стержня.

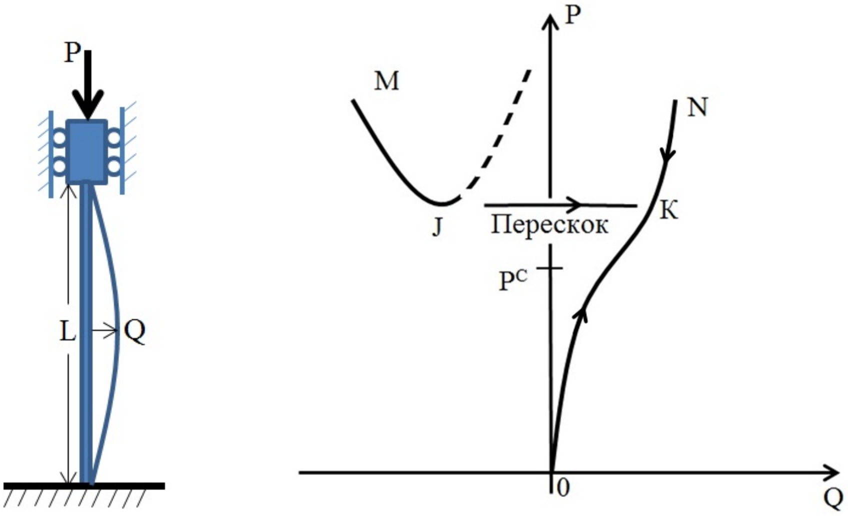


Рис. 1.18. Поведінка стиснутого Ейлерового стержня.

Навантажуючи стержень фіксючим навантаженням ми знайдемо, що дуже малі значення Q будуть фіксуватися до тих пір, доки P не наблизиться до деякого критичного значення P^C. Як показують спостереження поблизу цього навантаження бокові відхилення швидко зростають зі збільшенням навантаження. Відповідна залежність P від Q зображено кривою OKN на рис. 1.18. Збільшення Q пов’язують з втратою стійкості. При подальшому навантаженні Q сповільнюється у зв’язку зі збільшенням жорсткості системи.

Не дивлячи на швидкий ріст переміщення біля точки P^C, траєкторія рівноваги *OKN* стійка. Рух вздовж траєкторії переміщення рівноваги *OKN* гладкий і оборотній, що показано стрілками на рис. 1.18. Стверджуючи це, ми розуміємо, що руйнування матеріалу не відбувається і необоротних деформацій не виникає. Тобто поведінка матеріалу пружна і стержень завжди повертається в початкове положення при знятті навантаження.

Як відомо, очерет може бути сильно зігнутий в будь-якому напрямку, як додатному так і від'ємному *Q*. При великому навантаженні на стиснення його можна привести в другий стійкий стан *M*. Якщо зменшувати навантаження на такий стержень то в точці *J* стержень переплигне назад в стан *K*. При цьому під час швидкого динамічного скачка не змінюється фіксуюче навантаження. Наступне навантаження і розвантаження приведе до початкової гладкої (звичайної) поведінки. Скачок в точці *J* являє собою приклад катастрофи складки.

В даний час великогабаритну технічну конструкцію описують за допомогою потенціальної функції. Стійкий стан такої конструкції визначає мінімальне значення потенціальйної функції. Зі збільшенням навантаження на конструкцію (міст, будівля і т.д.) потенціальнана функція змінюється. Значне навантаження може привести до втрати стійкості конструкції (тобто до її руйнування) внаслідок порушення локально стійкого стану. Рівновага, стійкість і втрата стійкості - основні питання, що розглядаються теорією катастроф. Визначити чутливість критичного, або руйнівного навантаження, як до недосконалості конструкції, так і до динамічного впливу дозволяють методи теорії катастроф. Крім того, вони виявляються ефективними при вивченні складових систем, для яких можливі різні форми руйнування. Результати дослідження технічних конструкцій дуже важливі для їх зведення, експлуатації та руйнування. Теорія катастроф використовується при розгляді систем (складених з декількох конструкційних елементів), здатних до несподіваних форм руйнування і володіють жорсткою чутливістю до недосконалості, якщо між елементами існує сильний зв'язок. Прикладом є руйнування опорного кронштейна.

4. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Класична теорія фазових переходів природним чином укладається в рамки елементарної теорії катастроф.

Як відомо, в термодинамічних системах поблизу точок фазового переходу такі параметри, як тиск, температура, термодинамічні потенціали, питома теплоємність і т. п., відчувають розриви і скачки. В середині самих систем з'являються великомасштабні структури, абсолютно не мислимо далекі від критичних точок. Якщо взяти для простоти фізичний газ в рівноважному стані, то для нього досить трьох макроскопічних величин: температура, тиск і об'єм. Ці величини не є незалежними, тому що їх пов'язують між собою рівнянням стану, яке описує двомірну поверхню в просторі трьох параметрів.

Стрибкоподібна перебудова структури (катастрофа) характерна для всіх фазових переходів. Перехід рідина-пар або рідина-тверда речовина, які демонструють ще одну особливість катастрофи збірки можна взяти для прикладу. Різкий перехід, який описується класичним складанням з петлею гістерезису, можливий і тут. Це можна спостерігати, коли перегріта рідина вибухово випаровується (переохолоджена - миттєво кристалізується), але зазвичай спостерігається поступове випаровування рідини при збереженні сталої температури і тиску до тих пір, поки не буде повністю завершений перехід в новий стан. У першому випадку реалізується принцип максимального зволікання, а в останньому – принцип Максвелла. Принцип Максвела має місце при високому рівні "шуму" (випадкових зовнішніх впливів, що породжують флуктуації), що не дозволяє здійснитися принципом максимального зволікання [11, с. 418].

Рівняння стану реального газу (рівняння Ван-дер-Ваальса, 1873 г.) встановлює зв'язок між тиском, об'ємом і температурою:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = nRT, \qquad (1.25)$$

де де p - тиск, V_m – молярний об'єм, R – універсальна газова стала, T – абсолютна температура, n – кількість речовини.

Це рівняння Ван-дер-Ваальса описує поведінку рідини поблизу її критичної точки. Рівняння було отримано як співвідношення між трьома параметрами V, P, T рідини в околі її критичної точки:

$$pV^3-(RT+pb)V^2+aV-ab=0, \qquad (1.26)$$

де p - тиск, V - об'єм газу, R – універсальна газова стала, T - температура, a і b - сталі для кожного газу величини.

Рівняння Ван-дер-Ваальса описує катастрофу збірки.

Рівняння катастрофи збірки A_{+3}:

$$F(x;a,b) = \pm x^4+ax+bx^2 \qquad (1.27)$$

Розділимо рівняння Ван-дер-Ваальса (13) на p

$$V^3-(RT/p+b)V^2+a/pV-ab/p=0. \qquad (1.28)$$

Перепозначивши коефіцієнти при V в рівнянні (1.28), враховуючи, що p прямопропорційно V, отримаємо:

$$V^4-BV^2+AV-C=0. \qquad (1.29)$$

На мал. 1.4.2.5. зображена крива Ван-дер-Ваальса, функція:

$$F(x;a,b) = \pm x^4+ax+bx^2 \qquad (1.30)$$

на базі якої будується функція, яка визначає стан системи газ-рідина.

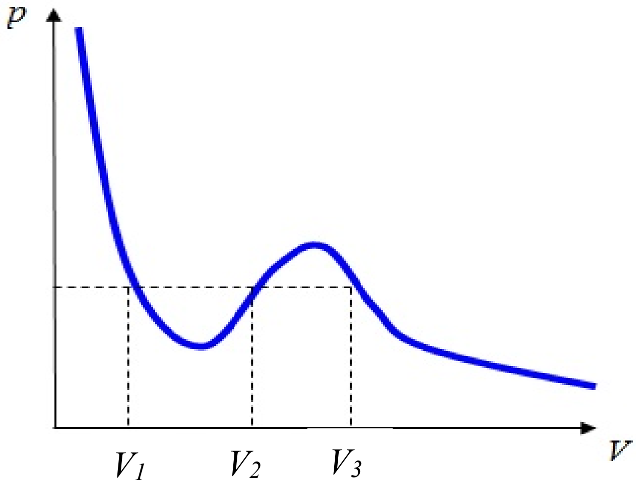


Рис. 1.19. Крива Ван-дер-Ваальса

1.5.3. Застосування в соціології.

У соціальній психології теорію катастроф використовували у вивченні соціальної поведінки, соціальної установки і т.д. Прикладом є дослідження порушень режиму в тюрмі Гартрі в 1972 р, проведене Зіманом. Виявилося, що фактори, що впливають на заворушення, можуть бути розділені на дві в основному незалежні групи:

- Напруженість – почуття розчарування і безвихідності, тяжке становище;
- Роз'єднаність – взаємна відчуженість, відсутність спілкування, розбиття на два табори [22, с. 525].

При плавному погіршенні умов утримання ув'язнених кількість протестуючих акцій і насильницьких дій проти охорони і конвою змінюється нерегулярним і стрибкоподібним чином. Функція, що зв'язує ймовірність бунту з такими величинами, як середня тривалість щоденної прогулянки, калорійність добового раціону, ймовірність укладання в карцер, неперервна і навіть досить гладка. Але у неї є особливості типу збірки, поблизу них і відбуваються «катастрофи».

З ростом напруженості підвищується ймовірність заворушень, а збільшення роз'єднаності веде до того, що хвилювання приймають характер більш раптових і лютих спалахів. Це змушує подумати про катастрофу збірки. Система спочатку "сідає" по вертикалі на різноманіття катастрофи ("швидкий потік"), а потім підпорядковується зворотньому зв`язку ("повільний потік"). З рис. 1.20. видно, що при низьких значеннях роз’єднаності система прагне до стійкого положення помірного хвилювання, але при високому рівні роз'єднаності вона робить коливання всередині біфуркаційного безлічі катастрофи збірки, стрибаючи по черзі з верхнього листа на нижній і назад. Ця картина буде частково змазуватися випадковим шумом, але коливальний характер поведінки, проте, повинен проявитися.

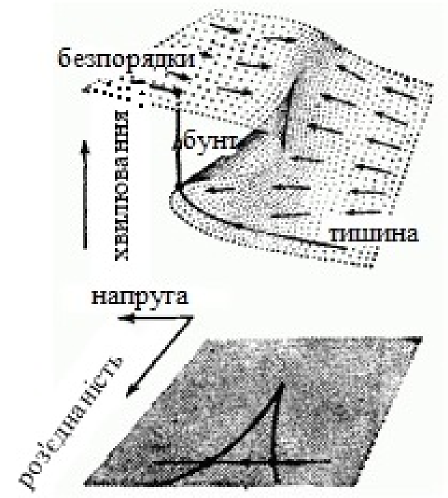


Рис. 1.20. Катастрофа тюремного бунту.

Розділ 2. Факультативні заняття по теорії катастроф

2.1. Теоретико-методологічні основи проведення факультативних занять з математики

За даними відомства, міжнародне дослідження PISA-2018 показало, що в Україні 36% 15-річних учнів не досягають базового рівня знання з математики. Однією з ініціатив, покликаних вирішити цю проблему, стало оголошення навчального року 2020/2021 Роком математичної освіти. Впродовж якого планується впровадити найбільш нагальні й потрібні дітям та освітянам новації, а також закріпити думку про те, що математика потрібна кожному з нас у повсякденному житті [24].

Одним із способів поглибленого вивчення математики в школах є факультативні заняття .

Основна мета факультативних занять з математики полягає в тому, щоб врахувати інтереси і нахили учнів, розширити і поглибити вивчення програмного матеріалу, ознайомити учнів з деякими загальними математичними ідеями і методами, показати найважливіші методи застосування математики на практиці.

Особливістю факультативних занять є те, що їх відвідують не всім класом, а певними групами і здобувачі освіти мають непогану підготовку та зацікавленість з математики.

Перед початком навчального року вчитель повинен скласти план цих занять. План занять складати можна у вигляді календарно-тематичного плану [4, с. 135]. Приклад факультативних занять з теорії катастроф в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

№ п/п	Тема і підтема програми	Кількість годин	Дата	Відмітки про виконання
1	Вступ	2		
2	Історія створення теорії катастроф	1		
3	Машина катастроф Зімана	1		
4	Гойдалки	2		
5	Застосування теорії катастроф	2		
6	Механіка конструкцій	1		
7	Семінар	1		

Програма розрахована на старші класи і спирається на значний обсяг знань, якими володіють учні. Кожне заняття присвячене певній темі. Програма передбачає виконання вправ, які допоможуть не тільки закріпити теоретичний матеріал, але і навчити застосовувати теорію катастроф на практиці. До програми додається планування факультативних занять, методичні вказівки до занять, практичні завдання. Програмою передбачено вивчення теорії катастроф та її застосування в 10-11 класах середніх загальноосвітніх закладах по 1 години на тиждень. Весь курс розрахований на 10 годин.

Методи навчання на факультативних заняттях. При виборі методів і прийомів навчання на факультативних заняттях необхідно враховувати зміст факультативного курсу, рівень розвитку і підготовленості учнів, їх інтерес до тих чи інших розділів програми.

Проводять факультативні заняття з математики в основному так, як і звичайні уроки: пояснюють новий матеріал, розв’язують задачі, закріплюють поданий матеріал, використовують технічні засоби. Слід відмітити, що прочитання даного факультативу є можливістю більше зупинятись на питаннях історії та прикладних задачах [4. с. 135].

Як і в роботі з математичними класами, на факультативах можна використати різні форми і методи проведення занять: лекції, практичні роботи, обговорення завдань з додаткової літератури, доповіді учнів, складання рефератів, екскурсії. Частину матеріалу можна викласти лекційно [14. с. 292].

Корисна форма роботи – підготовка учнями рефератів. Виконання таких завдань важливо перш за все у відношенні розвитку навичок самоосвіти, задоволення індивідуальних інтересів учнів. Слід прагнути до того, щоб підготовлені доповіді заслуховувалися і обговорювалися. До підготовки доповіді можна залучати декількох учнів, які завчасно опрацювали матеріал. Вони можуть виконувати роль асистентів лектора або його опонентів. Використання наочних і технічних засобів навчання на факультативних заняттях значно покращує просторову уяву в учнів.

Факультативні заняття повинні бути цікавими, захоплюючими для здобувачів освіти. Цікавість допоможе школярам освоїти факультативний курс, ідеї і методи математичної науки, які містяться в ньому, логіку і прийоми творчої діяльності. У цьому відношенні мета вчителя – домогтися розуміння учнями того, що вони підготовлені до роботи над складними проблемами, однак для цього необхідні зацікавленість предметом, працьовитість, оволодіння навичками організації своєї роботи.

Факультативні заняття з теорії катастроф покликані зацікавити учнів середніх класів в поглибленому вивченні математики, розглянути різні явища навколишнього світу з точки зору єдиної математичної теорії і сформувати науковий світогляд.

Для успішного викладання факультативного курсу з теорії катастроф в старших класах вчителю необхідно:

1. Знати основи теорії катастроф і її застосування;
2. Знати методику викладання цієї теорії;
3. Враховувати загальні психологічні закономірності процесу навчання і засвоєння знань учнів старших класів;
4. Враховувати захоплення учнів.

Так як курс теорії катастроф спирається на знання фізики, геометрії, математичного аналізу, то необхідно мати достатні знання з цих дисциплін і методики їх викладання.

2.2. Зміст факультативних занять.

1. Вступ в теорію катастроф (2 години).

Вступ в теорію катастроф відіграє особливу роль в мотивації навчання математики, тому необхідно зацікавити учнів в необхідності пізнання причин катастроф на математичній мові. Вступ в теорію катастроф, на мою думку потрібно розділити на два заняття. Перше присвятити поясненню, що саме може вивчати теорія катастроф, її широкий спектр з детальним описом одного з випадків, а друге ознайомленню з основними поняттями та наявною доступною літературою, сайтами які висвітлюють теорію катастроф. Всі заняття потрібно супроводжувати використанням наочності.

2. Історія створення (1 година).

Історія створення теорії катастроф дозволяє учням познайомитися з цікавими історичними фактами, дізнатися нові імена вчених, познайомитися з напрямками їх наукових робіт.

3. Машина катастроф Зімана (2 години).

Виготовити машину катастроф Зімана здобувачі освіти можуть самостійно, і продемонструвати її дію. Машина катастроф Зімана є наочною демонстрацією залежності стану системи від параметрів. Це дуже важливо як для розуміння, як самої теорії катастроф, так і розвитку інтересу до математики в цілому.

4. Гойдалки (2 години).

Виготовити качалку здобувачі освіти можуть самостійно, і продемонструвати її дію. Опис машини добре моделює широкий спектр явищ в поведінці кораблів. На цих заняттях здобувачі освіти можуть проаналізувати поведінку качалки у вигляді параболи та еліпса.

5. Механіка конструкцій.

На даному занятті здобувачі освіти можуть дослідити поведінку Ейлеворого стержня: залежність навантаження від відхилення центральної точки. На занятті можна використати теоретичний і практичний матеріал з пункту 1.4.2(4) даної роботи.

6. Застосування теорії катастроф (2 години).

Дуже важливо показати застосування теорії катастроф, щоб в учнів не виникало почуття віддаленості теорії від практики. Крім цього, застосування отриманих знань допоможе закріпити їх і сформувати наукове уявлення про навколишній світ. Необхідно знайти і розглянути доступні і зрозумілі учням. Останнє заняття рекомендується зробити відкритим, на якому учні (вивчили курс факультативу) могли б продемонструвати дію машини катастроф, зачитати доповіді, влаштувати презентацію робіт з подальшим обговоренням всіх робіт. В результаті цього заняття учні, які виступили отримають досвід роботи з літературою (пошук, аналіз), публічних виступів (поведінка на публіці, вміння вибудовувати своє бачення навколишнього світу) і моральне задоволення від виконаної роботи. Учні, які тільки познайомилися з теорією катастроф і її додатками, зможуть навчитися науковому увазі, диспуту і можливо той же зацікавляться як теорією катастроф, так і математикою в цілому.

2.3 Курс лекцій факультативу з теорії катастроф.

Вступ в теорію катастроф (2 години)

Землетруси, цунамі, виверження вулканів, вибухи АЕС, падаючі літаки, перевертаються кораблі, зіштовхуються автомобілі, снігові лавини і т.д. Все це - порушення стабільності, сталості, порядку. Порушення різкі, іноді - миттєві. Назвати всі ці явища можна одним словом – катастрофа.

Катастрофа з точки зору теорії систем - стрибкоподібна зміна, що виникають у вигляді раптового відгуку системи на плавну зміну зовнішніх умов [3, с. 8].

У навколишньому світі відбуваються різні процеси: ламається олівець, автомобіль рухається по дорозі, корабель пливе у відкритому океані, планета Земля обертається навколо Сонця та інші. Запропонувати учням описати рух цих об'єктів, описати фігури, які у них вийшли; чи схожі вони на прямі? Запитати в учнів чи знаєте ви, як будуть рухатися футболіст чи трактор в полі в будь-який момент часу, навіть якщо буде задано початкове положення?

На ці та інші питання вам допоможе відповісти теорія, яку ви будете розглядати на факультативному курсі, який називається теорією катастроф. Курс розрахований на 11 занять (по 1 заняттю на тиждень). Ви познайомитеся з короткою історією створення теорії катастроф, з основними поняттями. Вами будуть виконані практичні роботи по застосуванню теорії катастроф, де ви будете описувати процеси які відбуваються з різними приспособами та машинами. Ви навчитеся користуватися науковою літературою і на останньому семінарському занятті зробите гідну демонстрацію своїх робіт.

При підготовці до занять використовуйте наступну літературу:

1. Алексеев Ю.К. Сухоруков А.П. Введение в теорию катастроф. - М.: Изд-во МГУ, 2000, - 173с.
2. Арнольд В.И. Теория катастроф.-3-е изд., доп.-М.:Наука, 1990.-128с.
3. Дж. М.Т. Томпсон. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985, 254 с.
4. Стюарт И. Тайны катастрофы: пер. с франц.-М.: Мир, 1987.-76 с.
5. Теорія хаосу в економіці: підруч. / О. І. Черняк, П. В. Захарченко, Т. С. Клебанова. – Бердянськ : Видавець Ткачук О. В., 2014. – 244 с.
6. Т.Постон, И.Стюарт. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980, - 608с.

А також Інтернет ресурси:

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/
2. https://nv.nltu.edu.ua/Archive/2016/26_6/50.pdf

Назву «теорія катастроф» запропонував Зіман.

Теорія катастроф — розділ прикладної математики, галузь теорії біфуркацій, важливий інструмент для дослідження динамічних систем; також – спеціальний розділ загальнішої теорії сингулярностей в геометрії [25].

Якщо взяти в руки олівець і починати його згинати, то процес, який буде відбуватися досить легко можуть описати математики. Та не змінюючи навантаження олівець в певний момент зламається – відбудеться «катастрофа». Для продовження дослідження введено поняття біфуркації.

Біфуркація - придбання нової якості в рухах динамічної системи при малій зміні її параметрів. **Біфуркація** - роздвоєння, поділ, розгалуження чого-небудь.

Стан процесу в динамічній системі, при якому різко зростають флуктуації, і вихід з якого можливий за двома суттєві розходження важко передбачуваним напрямками - хаотичного або впорядкованого.

Щоб зрозуміти визначення до розглянемо досвід з пластмасовою лінійкою. Покладемо лінійку на дві опори (рис. 2.1) і почнемо ставити по черзі невеликі тягарці на середину лінійки, в якийсь момент часу лінійка вигнеться і скине тягарці. Відбулася катастрофа (поступова зміна навантаження викликала раптову відповідь системи).

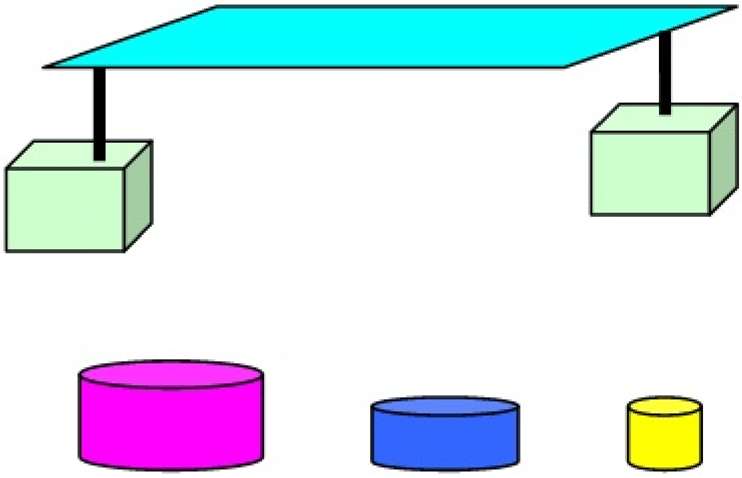


Рис. 2.1. Лінійка і тягарці.

Побудуємо графік залежності прогину лінійки від навантаження.

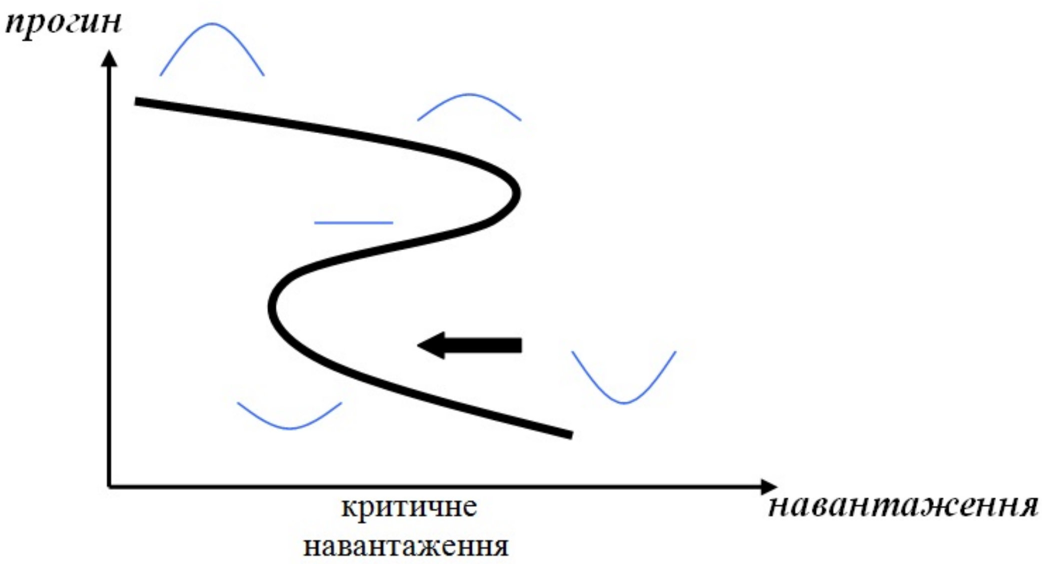


Рис. 2.2. Графік залежності прогину лінійки від навантаження

Величина прогину лінійки приблизно визначається положенням середньої точки (ординатою); при цьому точка прикладання сили може злегка зміщуватися вздовж осі абсцис (Рис. 2.2) [18, с. 13]. Якщо навантаження невелике, то лінійка прогинається вгору, коли ж навантаження виявилося занадто великим, то лінійка матиме прогин вниз. Лінійка вийшла зі стану рівноваги і скинула важки, тобто стан лінійки нестійкий. На уроках фізики ви розглядали такі поняття як енергія, теплота, робота по її передачі, а так само вам знайомі поняття пружні і непружні тіла. Процес, що відбувається з лінійкою можна пояснити з фізичної точки зору (всі механічні системи прагнуть до того, щоб їх потенціальна енергія була якомога менше). Ось чому тече вода, охолоджуються тіла, стріляють рогатки [18, с. 18].

Можна побудувати залежність, яка показує, як змінюється пружна енергія лінійки від її прогину при постійному навантаженні (рис. 2.3.). Нехай різні прогини лінійки називаються станами, відповідати їй буде вісь абсцис.

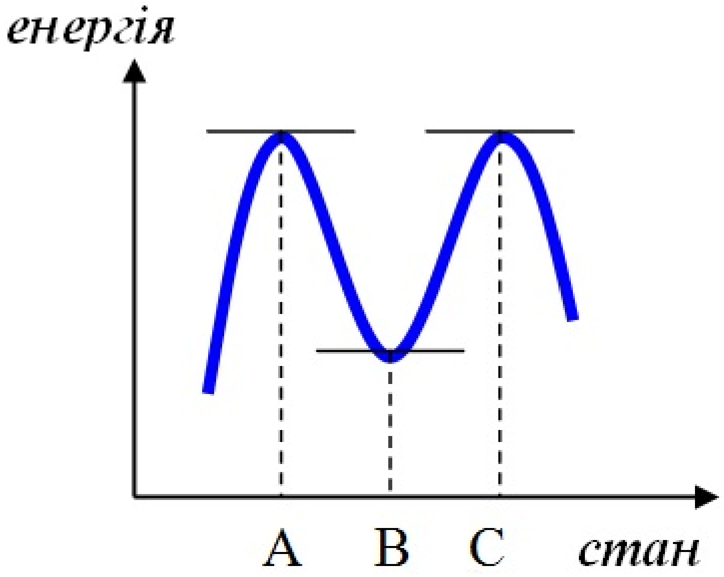


Рис. 2.3. Графік залежності енергії системи від її стану

Стани (А, В, С) відповідають точкам на кривій, у яких значення енергії стале. В стані В енергія мінімальна, а в станах А і С максимальна. Можна уявити кульку, яка котиться вздовж графіка, тоді, чим вище знаходиться кулька, тим більша її потенціальна енергія. Щоб зменшити енергію, кулька буде котитися вниз до тих пір, поки її енергія не стане мінімальною. Кулька не буде рухатися тільки на горизонтальних ділянках [18, с. 19].

Однак стани рівноваги можуть бути різними:

1. Мінімальна енергія. Стан, при якому енергія мінімальна – це стан стійкої рівноваги. Якщо кульку трохи змістити з положення рівноваги, її енергія зросте, і вона повернеться в початкове положення (рис. 2.4).

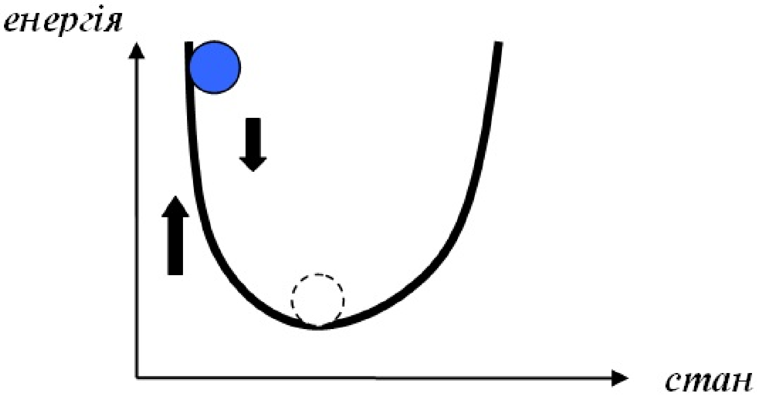


Рис. 2.4. Графік залежності системи від стану

2. Стан, при якому енергія максимальна. Будь-яке переміщення зменшує енергію у міру того, як кулька віддаляється від початкового положення, він втрачає все більше і більше енергії. Початкове зміщення від положення рівноваги має тенденцію до збільшення (рис. 2.5).

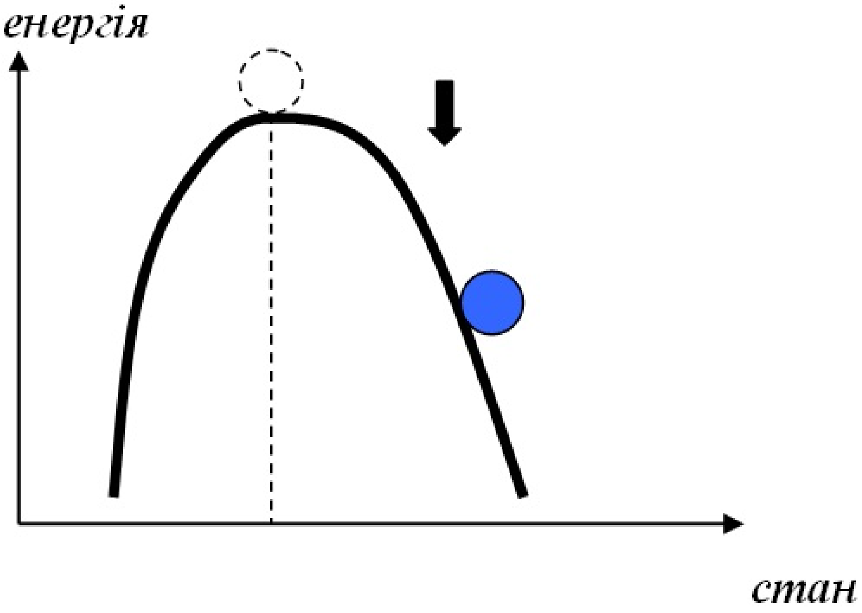


Рис. 2.5. Графік залежності енергії від стану

Розглянемо залежність пружної енергії лінійки від її прогину для п'яти значень прикладеного навантаження (рис. 2.6.)

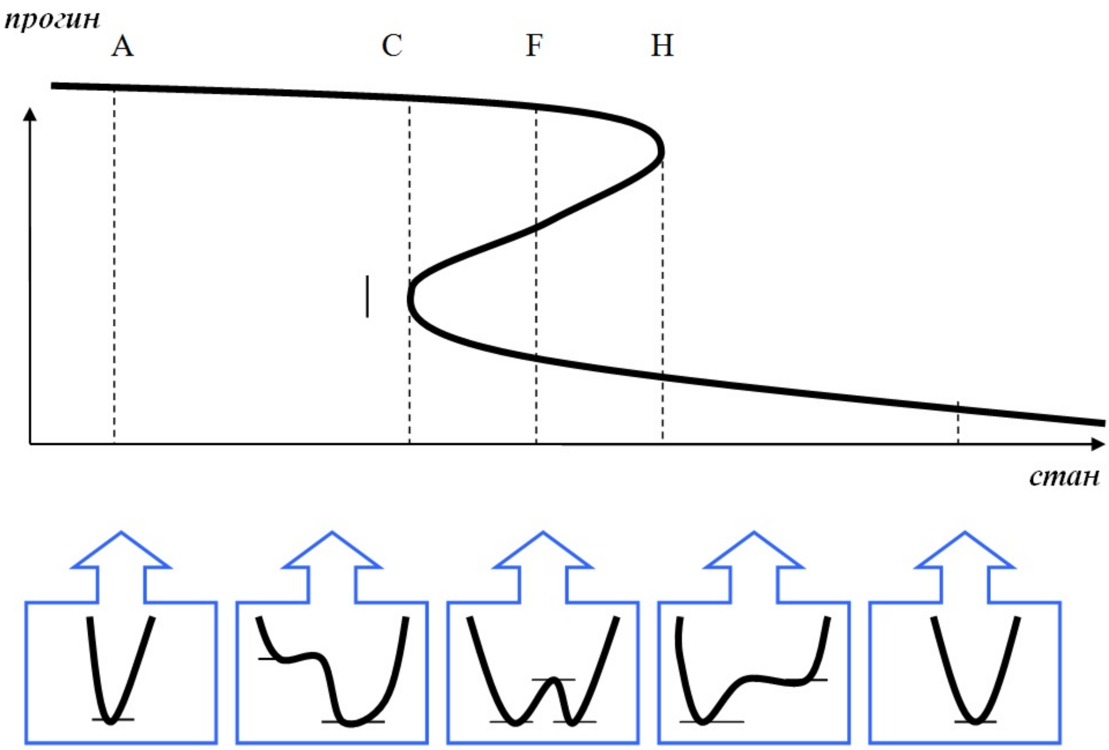


Рис. 2.6. Графік залежності енергії системи від її стану

Кожному можливому прогину відповідає деяка енергія. Стан рівноваги - це точки, яким на кривій залежності енергії лінійки від її прогину відповідають горизонтальні ділянки [18, с. 21]. При нульовому навантаженні залежність має W- подібну форму (рис. 2.7).

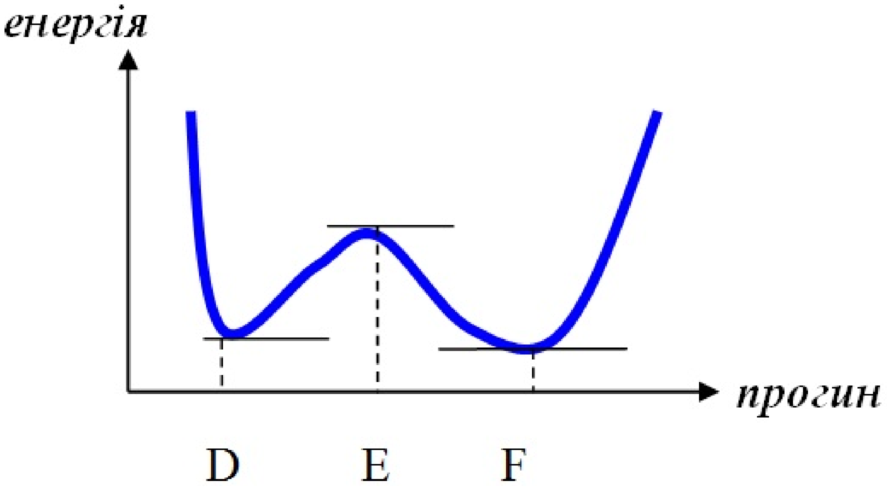


Рис. 2.7. Характер залежності енергії від стану

Стани, які відповідні точкам D і F – стійкі, а стан, відповідний точці E – нестійкий. Криву можна розбити на три області: стійка, нестійка, стійка. Тому після того як лінійка скинула важки, вона прогнулася вниз, так як для прогину вгору вона повинна подолати енергетичний бар'єр (рис. 2.8), а додаткового впливу ззовні в даному випадку немає [18 с. 22].

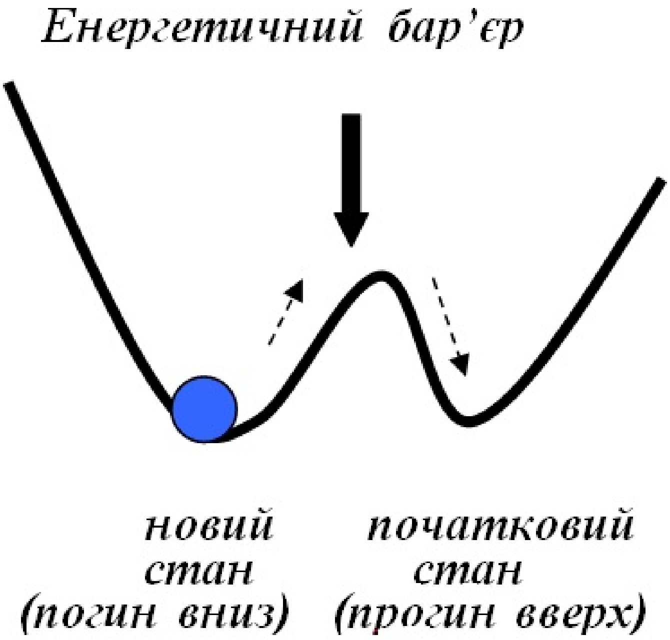


Рис. 2.8. Енергетичний бар'єр

Так як немає зовнішнього впливу, завдяки якому система може подолати енергетичний бар'єр, то система підпорядковується правилу запізнювання (або зволікання).

Лінійка може прогнуться вгору, якщо на неї діє сила спрямована вгору (негативне навантаження). Таке явище називається гістерезисом.

Знаючи характер залежності прогину від навантаження, тепер можна пояснити, чому лінійка раптово змінила свою форму: змінився її стан - він перестав бути стійким (рис. 2.9).

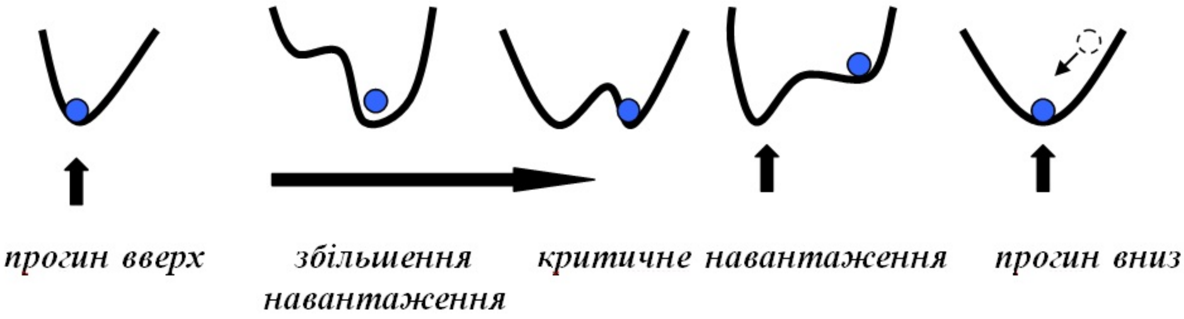


Рис. 2.9. зміна станів

Спостережуване явище має спеціальну назву - катастрофа, а теорія, яка розглядає катастрофи, називається теорією катастроф.

Теорія катастроф дозволяє математично ставити різні катастрофи та виконувати графічні зображення, не тільки на площині, а й у просторі.

Історія створення теорії катастроф

На мою думку розповідати історію створення теорії катастроф потрібно з більш детальною зупинкою над кожним прізвищем вченого, які зробили свій внесок в теорію катастроф демонструючи їх портрети. Це дасть змогу дітям поринути в історію та більше ознайомитися з вченими. В кінці лекції запропонувати групі здобувачів освіти (2-3 дитини) підготувати на семінар більш детальніші доповіді про вчених, які зробили значний внесок в теорію катастроф.

Необхідно почати з механіки, для повного розуміння становлення теорії катастроф. У 1686 році Ісаак Ньютон представив експериментальне дослідження маятникові рухи в повітрі і воді («Математичні початки природної філософії») [11, с. 11].

Сер Іса́ак Нью́тон (англ. Sir Isaac Newton (сер Айзек Ньютон); 4 січня 1643, Вулсторп, Лінкольншир, Королівство Англія – 31 березня 1727, Лондон, Великий Лондон, Англія, Королівство Великої Британії) – англійський вчений, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики та один із засновників числення нескінченно малих [25].

У книзі «Математичні начала натуральної філософії» Ньютон сформулював закони руху, відомі як закони Ньютона й закон всесвітнього тяжіння, які стали основою наукового світогляду впродовж трьох наступних століть і мали великий вплив не тільки на фізику, а й на філософію. Використовуючи свою теорію Ньютон зумів пояснити закони Кеплера, що описують рух планет навколо Сонця, чим заперечив останні сумніви щодо геліоцентричної системи світобудови.

Ньютон побудував перший телескоп-рефлектор і розвинув теорію кольору на основі спостережень розщеплення білого світла в спектр в оптичній призмі. Він сформулював емпіричний закон теплообміну, першим запропонував формулу розрахунку швидкості звуку в повітрі. У математиці Ньютон паралельно з Ґотфрідом Лейбніцом розвинув числення нескінченно малих, працював з рядами, узагальнив біном Ньютона та запропоновував метод Ньютона розв'язування нелінійних рівнянь.

Ньютон був ревним християнином, хоча мав деякі неортодоксальні погляди щодо природи Трійці. Чимало часу Ньютон присвятив алхімії та біблійній хронології, хоча більшість його робіт у цих галузях залишилися неопублікованими за життя.

Ньютон закінчив Кембріджський університет і був у ньому професором математики. Він був президентом Королівського наукового товариства і членом парламенту. Він служив уряду Королівства Англія як доглядач, а з 1699 року директор Королівського монетного двору.

У 1744 році Леонард Ейлер використав варіаційне числення, яке він створив для вивчення стиснутої пружної колони.[11, с. 11].

Леона́рд Е́йлер, правильніше О́йлер (нім. Leonhard Euler; стандартна німецька – МФА: [ˈɔʏlɐ], стандартна швейцарська німецька – МФА: [ˈɔɪlər])15 квітня 1707, Базель, Швейцарія – 7 (18) вересня 1783, Санкт-Петербург, Російська імперія) – швейцарський математик та фізик, який провів більшу частину свого життя в Росії та Німеччині. Традиційне написання «Ейлер» походить від рос. Леонард Эйлер, тоді як за німецькою фонетикою прізвище вимовляється як Ойлер [25].

Ейлер здійснив важливі відкриття в таких різних галузях математики, як математичний аналіз та теорія графів. Він також ввів велику частину сучасної математичної термінології і позначень, зокрема у математичному аналізі, як, наприклад, поняття математичної функції. Ейлер відомий також завдяки своїм роботам в механіці, динаміці рідини, оптиці та астрономії, інших прикладних науках.

Ейлер вважається найвидатнішим математиком 18-го століття, а, можливо, навіть усіх часів. Він також є одним з найбільш плідних – збірка всіх його творів зайняла б 60-80 томів. Вплив Ейлера на математику описує висловлювання «Читайте Ейлера, читайте Ейлера, він є метром усіх нас», яке приписується Лапласові (фр. Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous).

Ейлер увічнений у шостій серії швейцарських 10 франків і на численних швейцарських, німецьких та російських поштових марках. На його честь названо астероїд 2002 Ейлер. Він також відзначений лютеранською церквою в церковному календарі (24 травня) – Ейлер був побожним християнином, вірив у біблійну непогрішність, рішуче виступав проти видатних атеїстів свого часу [25].

Джозеф-Луї Лагранж розвинув аналітичний енергетичний метод в механіці («Аналітична механіка», 1788 р.). Метод Лагранжа призвів до фундаментальної теореми, що мінімальна повна потенційна енергія системи є достатнім для сталого розвитку. Ще один вагомий внесок у аналітичну механіку належить Вільяму Гамільтону. Він зумів описати векторне поле траєкторій фази системою диференціальних рівнянь першого порядку.

Жозеф-Луї Лагранж (фр. Joseph-Louis Lagrange, народжений як Джузеппе Луїджі Лаґранджа, італ. Giuseppe Luigi Lagrangia, або Джузеппе Людовіко Де ла Гранж Турн'є, італ. Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier; 25 січня 1736, Турин – 10 квітня 1813, Париж) – французький математик, фізик і астроном італійського походження. Член (1759), президент (1766-1787) Берлінської АН, іноземний почесний член Петербурзької АН (1776), член Бюро довгот у Парижі (1795) [25].

Лагранж народився в Турині й перші роки життя працював у рідному місті. Уже в дев'ятнадцять років він запропонував у листі до Леонарда Ейлера метод невизначених множників, одразу ж завоювавши визнання в математичному світі.

Лагранж працював у багатьох областях математики, розвинув нову галузь – варіаційне числення, зробив великий внесок у теорію диференційних рівнянь і методів апроксимації функцій.

Розроблений ним варіаційний метод знайшов застосування в механіці, яку Лагранж зумів сформулювати, виходячи із принципу найменшої дії.

Лагранж замінив Ейлера на посту президента Берлінської Академії, коли Ейлер від'їхав до Петербурга в 1767 р. На той час він уже мав славу першого математика Європи й прибув до Берліна на запрошення короля Прусії Фрідріха Великого. У Берліні Лагранж працював 20 років, і лише по смерті свого королівського покровителя прийняв запрошення французького короля й переїхав до Парижу. Там одразу ж побачила світ головна книга вченого – «Аналітична механіка», але незабаром розпочалася революція. Коли всіх іноземців виганяли з Парижа, для Лагранжа зробили виняток і навіть запросили його взяти участь в роботі Комітету Міри й Ваги. Лагранж був один із фундаторів знаменитих шкіл: Нормальної й Політехнічної. Був нагороджений Наполеоном орденом Почесного Легіону. Пізніше отримав також найвищу нагороду реставрованої монархії.

Джерелами теорії катастроф є теорія особливостей гладких відображень Уїтні Хаслера та теорія біфуркацій динамічних систем Пуанкаре та Андронова.

Хасслер Уїтні (англ. Hassler Whitney, 23 березня 1907 - 10 травня 1989) – американський математик, що вніс фундаментальний внесок в такі галузі математики, як диференціальна геометрія, алгебраїчна топологія і теорія катастроф [25].

Основний внесок Уїтні вніс в області алгебраїчної і особливо диференціальної топології. Одним з головних результатів Уїтні є знаменита теорема про те, що довільний гладкий m-вимірний многовид дозволяє гладке вкладення у $2m$-вимірний евклідів простір [25]. Також важливі його роботи про характеристичні класи і векторні розшарування. Уїтні був одним із засновників теорії особливостей, що передбачили теорію катастроф Р. Тома.

Дуже швидке зростання науки і, зокрема, прикладної механіки призвело до спеціалізації та появи різноманітних версій оригінальних класичних результатів. [11. с. 13]. Анрі Пуанкаре намалював загальну теорію біфуркації і створив загальну якісну теорію динамічних систем.

Жуль Анрі́ Пуанкаре́ (фр. Jules Henri Poincaré; 29 квітня 1854 – 17 липня 1912, Париж) – французький математик, фізик, філософ і теоретик науки. Голова Паризької академії наук (з 1906) і Французької академії (з 1908). Пуанкаре називають одним з найбільших математиків всіх часів, останнім математиком-універсалом, людиною, здатною охопити всі математичні результати свого часу [25].

Роботи Пуанкаре, опубліковані Паризькою Академією наук в 1916-1954, становлять 10 томів. Це праці з топології, теорії ймовірності, теорії диференціальних рівнянь, теорії автоморфних функцій, неевклідової геометрії. Пуанкаре серйозно використовував і доповнив методи математичної фізики, зокрема, вніс істотний внесок до теорії потенціалу, теорії теплопровідності. Він також займався розв'язуванням різних завдань з механіки і астрономії. Після захисту докторської дисертації, присвяченої вивченню особливих точок системи диференціальних рівнянь, Пуанкаре написав ряд мемуарів під загальною назвою «Про криві, визначені диференціальними рівняннями». В цих працях він побудував якісну теорію диференціальних рівнянь, досліджував характер ходу інтегральних кривих на площині, дав класифікацію особливих точок, вивчив граничні цикли. Пуанкаре успішно застосовував результати своїх досліджень до задачі про рух трьох тіл, детально вивчивши поведінку розв'язку (періодичність, асимптотичність і т. д.). Ним введені методи малого параметра, нерухомих точок, рівнянь у варіаціях, розроблена теорія інтегральних інваріантів.

Теорія біфуркацій розглядає різноманітні якісні перебудови та метаморфози різних об'єктів (систем) при зміні параметрів, від яких вони залежать. Слово «біфуркація» означає «роздвоєння» та характеризує можливі шляхи подальшого розвитку системи при зміні керуючих параметрів: стрибок – катастрофу чи збереження рівноваги [3, с. 8].

Великий вклад в теорію стійкості вніс А.М. Ляпунов у своїй докторській дисертації він запропонував розгляду узагальнення енергетичної функції. Ця функція зараз носить його ім’я [11, с. 12].

Ідучи по шляху запропонованим Пуанкаре, Андронов і Понтрягін ввели в 1937 році важливе топологічне поняття структурна стійкість, яке лежить в основі наступних класифікацій Тома, Зімана, Смейла і Арнольда. Сьогодні ці досягнення якісної теорії динамічних систем Пуанкаре зв’язують між собою топологію, механіку і теорію стійкості.

Теорія особливостей – це узагальнення досліджень функцій на максимум та мінімум. Уїтні Хаслер замінив функції відображення наборами функцій декількох змінних.

Основна праця американського математика Уїтні Хаслера «Про відображення площин на площину» надрукована у 1955 р. Вона дала поштовх бурхливому розвитку теорії особливостей, що тепер є однією із центральних галузей математики. Ця теорія пов'язує абстрактні розділи з прикладними.

Вивчивши характер робіт Хаслера Уітні з теорії особливостей і творів, які передували їм А. Пуанкаре і А. Андронова з теорії біфуркацій, Рене Том зайнявся широкою пропагандою цієї теорії. К. Зіман ввів термін «теорія катастроф», як сукупність теорії особливостей і її застосувань. Р. Том і К. Зіман намалювали «паралелі» між теорією катастроф і дослідженням Ейлера і Лагранжа. [11, с. 14].

Олександр Олександрович Андронов (29 березня [11 квітня] 1901 року, Москва - 31 жовтня 1952 Горький) – радянський фізик, механік і математик. Спеціаліст в області електротехніки, радіофізики та прикладної механіки, творець нового напрямку в теорії коливань і динаміці систем, талановитий діяч вищої школи. Академік Академії наук СРСР с 30 листопада 1946 року по відділенню технічних наук. Професор, що завідував кафедрою «Теорії коливань і автоматичного регулювання» радіофізичного факультету Горьковського державного університету ім. Н. І. Лобачевського (нині ННГУ) [25].

Багато займався математикою і придбав математичну культуру, значно глибшу і різнобічну, ніж та, якою зазвичай володіли фізики. У роки аспірантури (1926-1929 рр.) під керівництвом видатного фізика Л. І. Мандельштама займався спочатку статистичної фізикою і деякими питаннями квантової механіки. Потім його творчі сили зосередилися на питаннях генерації коливань, вирішення яких визначило напрямок його подальшої наукової діяльності.

Перші відомості про теорію катастроф з'явилися у друку в 70-х рр. З тих пір це одна із найвідоміших і найпопулярніших математичних теорій, яка знайшла широке прикладне використання. Теорія катастроф досліджує усі стрибкоподібні переходи, розриви, якісні зміни на відміну від ньютонівської теорії диференціального та інтегрального обчислення, яка застосовується для безперервних процесів.

Рене Том зробив огляд додатків теорії катастроф. У 1970-х роках були опубліковані роботи Томпсон і Хант, які включали в себе теорію катастроф [8, с. 12].

Рене Фредерік Том (фр. René Frédéric Thom, *2 вересня 1923, Монбельяр, Ду, Франція – 25 жовтня 2002, Бюр-сюр-Іветт, Ессонн, Франція) – французький математик [25].

Закінчив Вищу школу, учень Анрі Картана. Викладав в університетах Страсбурга і Гренобля. С 1964 працював в Інституті вищих наукових досліджень (Institut des Hautes Études Scientifiques – IHÉS).

Головні роботи Тома лежать в області алгебраїчної і диференціальної топології. Вже в дисертації, присвячену розшарованим просторів, були закладені основні ідеї, які пізніше були розвинені Томом в теорію кобордізмів – перший природний приклад т. зв. екстраординарної теорії когомологій (тобто теорії когомологій, яка не задовільняє аксіомі розмірності Стінрода-Ейленберга: $H^n(*) = 0$ при $n \neq 0$ де * – одноточковий простір). За створення теорії кобордізмов Том в 1958 отримав Філдсівську премію [25].

Том також займався теорією особливостей, де створив найвідоміший її розділ – теорію катастроф, найбільш відому широкому загалу за популярними книгами і яку Том намагався застосувати до різних питань – від лінгвістики до пояснення форми квіток. Втім, на відміну від своїх послідовників (К. Зімана та інших), Том значно обережніший у своїх припущеннях.

Вивчення динамічних систем за допомогою біфуркацій було проведено Л. Д. Ландау, пізніше Е. Хопфом. Пізніше з'явилася маса робіт, що описують, в основному на фізичному рівні строгості, перехід від регулярного (ламінарного) руху до хаотичного (турбулентного) руху [9, с. 9].

Машина катастроф Зімана (1 година).

Машину катастроф кожен може легко виготовити сам. Для цього потрібно взяти дошку (A) (див. рис. 2.10) і, вирізавши з картону диск (B), прикріпити його голкою в центрі (C) до дошки так, щоб він міг вільно обертатися. Інша голка (D) встромляється тільки в диск на його краю, а третя (E) - тільки в дошку. Щоб закінчити збірку машини потрібно ще дві стрічки з гуми, яка легко розтягується (F, G), олівець (H) і аркуш паперу. Після того, як голка на краю диска з'єднана з нерухомою голкою і з олівцем резинками, ми ставимо, вістрі олівця в деякій точці на аркуші паперу і тим натягуємо резинки [1, с. 10].

Диск встановлюється в деякому положенні. Тепер при русі вістря олівця диск буде повертатися.

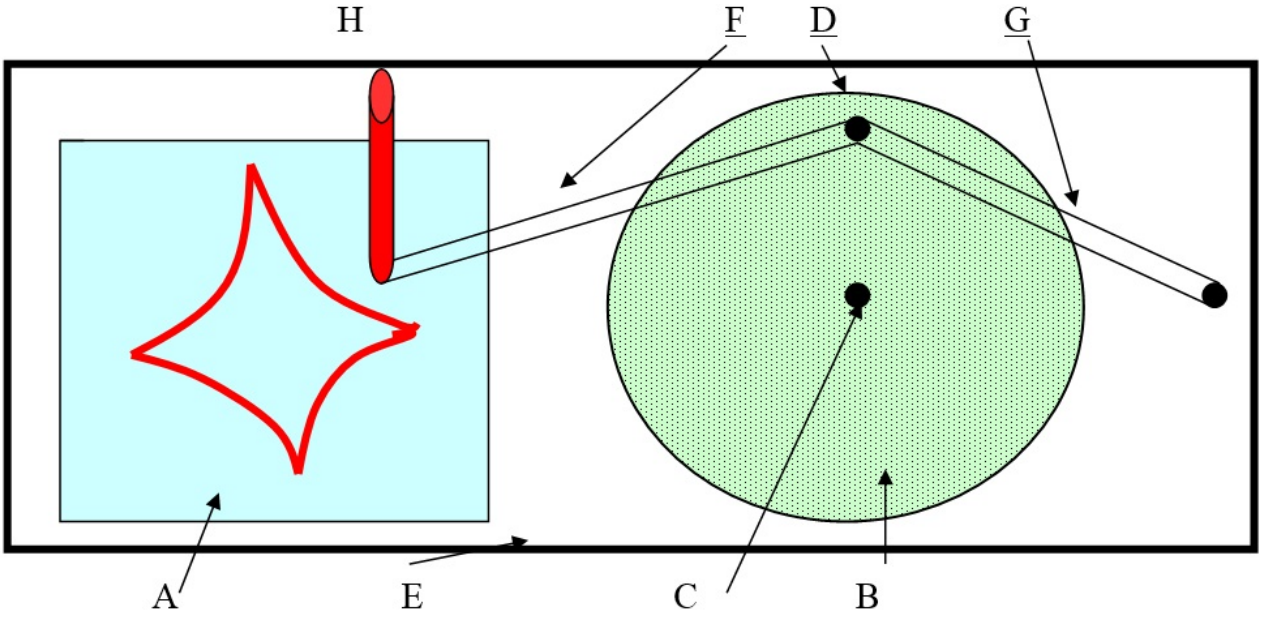


Рис. 2. 10 Машина катастроф Зімана.

При деяких положеннях вістря олівця невелика зміна його положення здатна викликати «катастрофу», тобто стрибок диска в нове положення. Якщо відзначити на аркуші паперу місця всіх таких «катастроф», то виходить «крива катастроф» (К). Отримана крива катастроф має чотири точки повернення. При перетині кривої катастроф стрибок може відбуватися, а може і не відбутися, в залежності від того, яким шляхом вістря олівця обходило точки повернення кривої катастроф.

Стан машини катастроф описується трьома числами.

Положення вістря олівця задається двома координатами (вони називаються керуючими параметрами). Положення диска визначається ще одним числом кутом повороту, який називається також внутрішнім параметром системи. Якщо всі три числа задані, і визначені ступені розтягування резинок то і, визначена потенційна енергія всієї системи. Диск повертається так, щоб цю енергію мінімізувати (щонайменше локально). При фіксованому положенні олівця потенціальна енергія - функція від положення диска, т. Е. Функція, задана на колі. Ця функція може мати в залежності від значень керуючих параметрів один або кілька мінімумів (рис. 2.11).

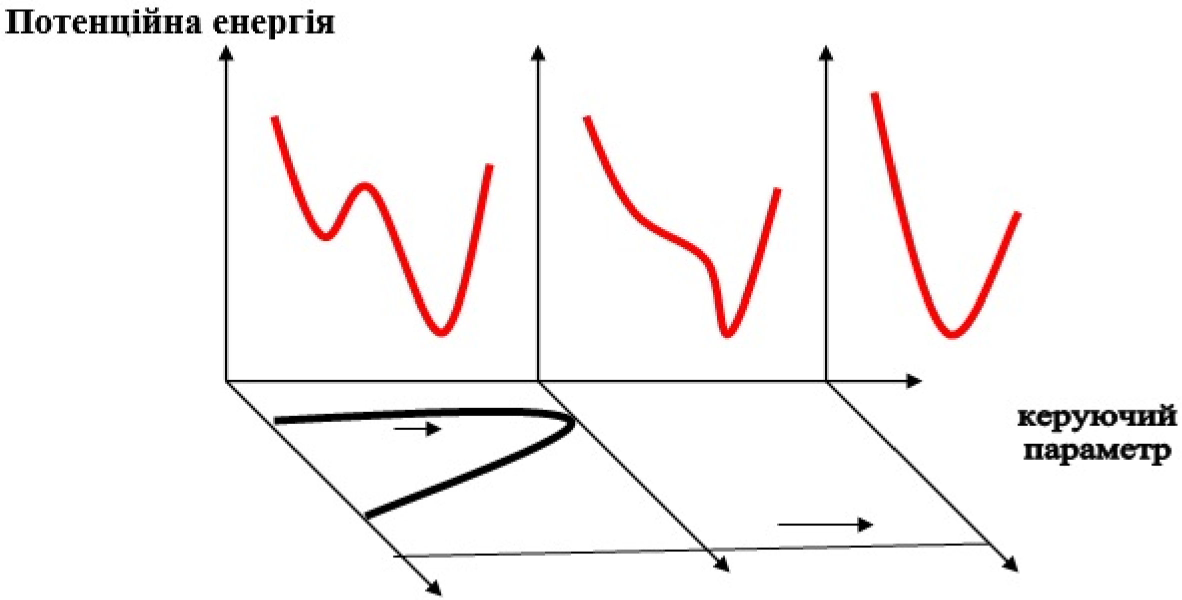


Рис. 2.11. Потенційна енергія теорії катастроф

Якщо при зміні керуючих параметрів положення мінімуму змінюється плавно, то стрибка не відбувається. Стрибок відбувається при тих значеннях керуючих параметрів, для яких локальний мінімум зникає, злившись локальним максимумом (рис. 2.11); після стрибка диск виявляється в положенні, що відповідає іншому локальному мінімуму Розглянемо тривимірний простір станів машини. Стану, при яких диск знаходиться в рівновазі, утворюють в цьому просторі гладку поверхню.

Якщо проектувати цю поверхню на площину керуючих параметрів уздовж осі внутрішнього параметра, то вийде наступна проекція – крива катастроф (рис. 2.12) [3, с. 15].

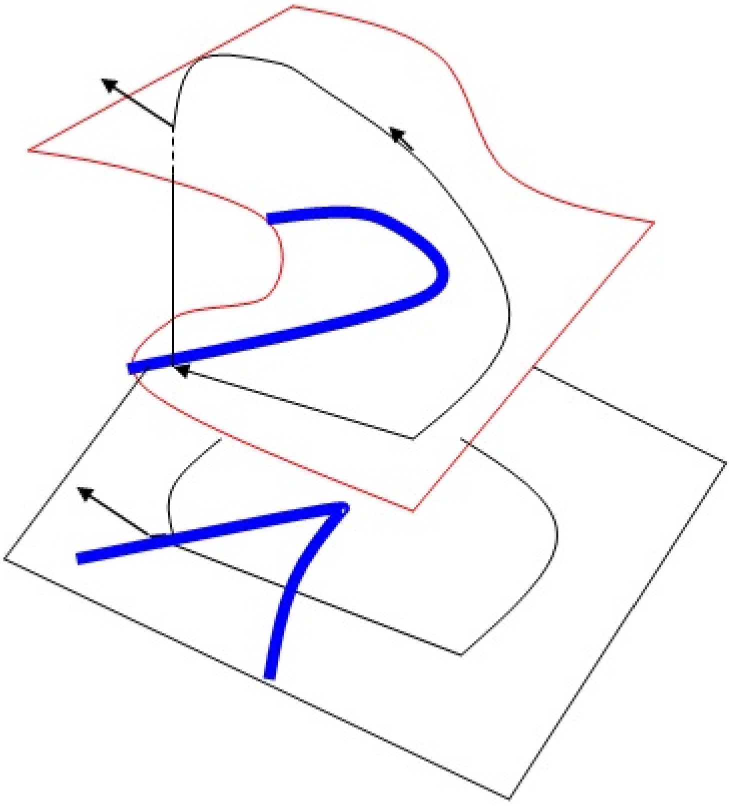


Рис. 2.12. Поверхня рівноваги машини катастроф

Гойдалки

Потрібно зробити фотокопію рис. 2.13. (масштаб не є важливим для моделювання) і потрібно наклеїти на картон. Дуже акуратно обрізати по контуру фігури. Потім потрібно виготовити аналогічну фігуру і вирізати середину на відстані декількох сантиметрів від краю. Приготуйте шість однакових розпірок схожих на трикутну правильну призму. Довжина розпірки повинна бути приблизно ¼ висоти нашої параболи (див. рис 2.14). Приклейте їх до торців суцільного сегмента і сегмента з вирізом (див. рис 2.15). Помістіть по одній розпірці по кутах, а інші розподіліть рівномірно. Сегменти повинні знаходитися один навпроти іншого. Розмістити невеликий неодимовий магніт з однієї сторони, а невеликий кусочок заліза з іншої сторони (див. рис 2.15). Вони триматимуть один одного на картоні і їх легко переміщати по картону [22, с. 24].

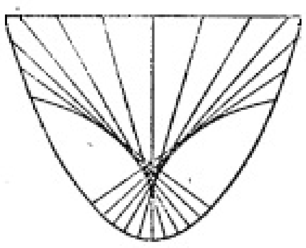


Рис.2.13. Макет параболи для гойдалки

Основна частина маси конструкції буде належати парі магніт-залізо. Отже, розташування цієї пари можна прийняти за центр маси цієї конструкції. Якщо качалка знаходиться в рівновазі, то ця пара повинна знаходитися по вертикалі над точкою опори.

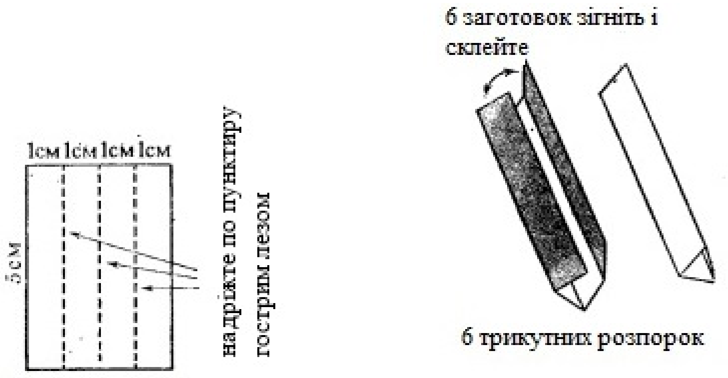


Рис. 2.14. Розпірки для качалки

У випадку коли гойдалка зберігає рівновагу на горизонтальній площині то ця площина буде дотичною до нашої параболи тоді, коли центр тяжіння лежатиме на відповідній нормалі: прямій, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної. Деякі з цих нормалей зображені на рис 2.13.

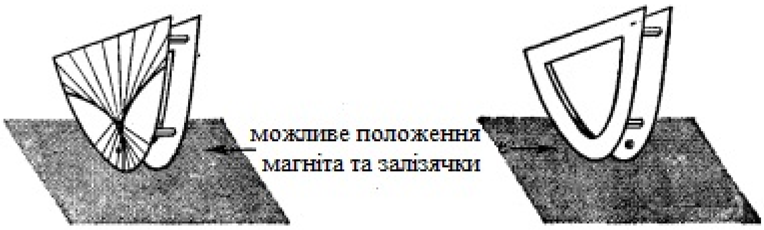


Рис. 2.15. Макет готової качалки

Експерименти з гойдалкою дадуть відповіді на наступні питання:

1) При яких положеннях магніту, якщо вони існують, гойдалка має N різних положень рівноваги, де N=0, 1, 2 …, і для кожного N повторюємо питання.
2) Де б ми не помістили магніт на нормалі побудованій в заданій точці P, центр тяжіння буде знаходитися над P і гойдалка з опорою в точці P буде знаходитися в рівновазі. Але при одних положеннях магніту на цих нормалях після невеликих відхилень гойдалка буде повертатися в положення рівноваги, тобто рівновага стійка. При інших буде падати як яйце, що знаходиться на гострому кінці, тобто рівновага не стійка. Яка відмінність між цими двома рівновагами?
3) Коли невелика зміна положення магніту приводить до нового положення рівноваги, яке трішки відмінне від початкового? Коли положення магніту приводить до того, що гойдалка починає котитися? Це і буде «катастрофічна зміна», яку ми можемо спостерігати експериментально [22, с. 25].

На другому занятті можна виготовити нову машину за основу взявши еліпс (рис. 2.16).

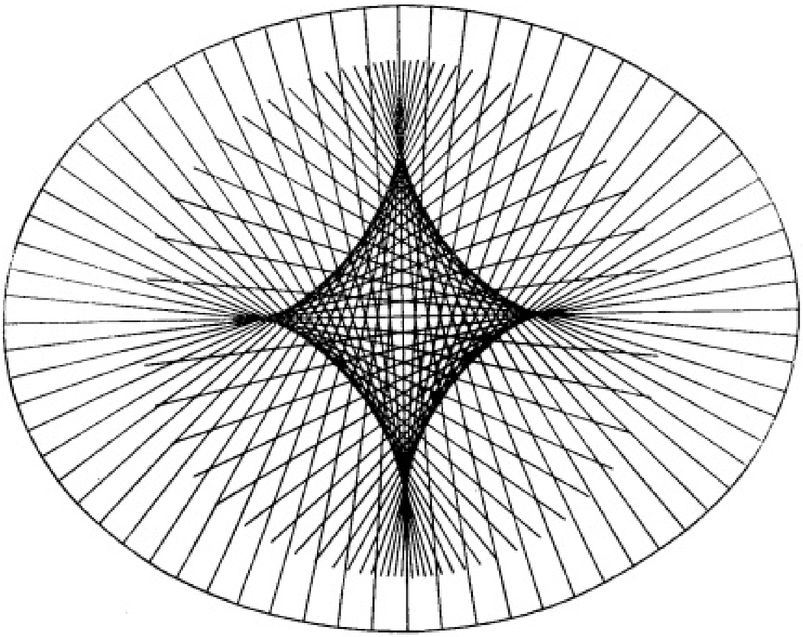


Рис .2.16. Макет еліпса для гойдалки.

Виявляється, що описані машини дуже добре моделюють широкий спектр поведінки корабля на воді.

Застосування теорії катастроф.

Щоб осягнути весь спектр застосування теорії катастроф потрібно дуже багато часу, але на простих прикладах можна пояснити ту невелику частину, де можна застосувати теорію катастроф. Для прикладу можна взяти застосування в економіці, геометрії рідини, соціології, виникнення хаосу в моделі Лоренца.

Геометрія рідини.

Відома модель, використовувана для вивчення переходу до хаосу в потоці рідини включає в себе два ексцентричних циліндра, які обертаються в протилежних напрямках. Зі збільшенням швидкості обертання внутрішнього циліндра спостерігається перехід від сталої швидкості до швидкості, яка періодично змінюється, і потім – до аперіодичного режиму.

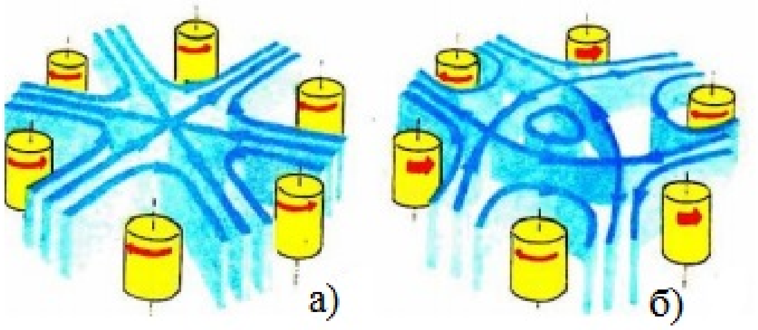


Рис. 2.17. Катастрофа в потоці рідини.

Цікава поведінка двовимірного потоку, створюваного шістьма симетрично розташованими, що обертаються назустріч один одному роликами. Лінії струму виходять такими, які показані на Рис. 2.17а тільки в тому випадку, якщо швидкість обертання всіх роликів однакова. Найменше відхилення в швидкостях обертання призводить до «катастрофи» - стрибкоподібної зміни картини ліній струму. Так, якщо всі ролики, що обертаються проти годинникової стрілки, збільшать свою швидкість, картина миттєво перебудується і стане такою, як показано на рис. 2.17б [22. с. 285].

Застосування в психології

Для прикладу охарактеризуємо творчу особистість (наприклад, вченого) трьома параметрами: «техніка», «захоплення», «досягнення». Між цими параметрами існує якась залежність, яку можна представити у вигляді поверхні в тривимірному просторі з координатами (Т, З, Д). При проектуванні цієї поверхні на площину (Т, З) уздовж осі Д виникає особливість - збірка. Розглянемо досягнення вченого в залежності від його захопленості і технічної можливості. Якщо захопленість невелика, то досягнення монотонно і досить повільно ростуть з технікою. Якщо захопленість досить велика, то наступають якісно нові явища. В цьому випадку досягнення з ростом техніки можуть рости стрибком (такий стрибок буде, наприклад, якщо техніка і захопленість змінюються вздовж кривої на рис. 2.18 в точці 2). Область високих досягнень, в яку ми при цьому потрапляємо, позначена словом «генії». З іншого боку, зростання захопленості, що не підкріплене відповідним зростанням техніки, призводить до катастрофи (на кривій 3 в точці 4, рис. 2.18), при якій досягнення стрибком падають, і ми потрапляємо в область позначену словом «маніяки». Цікаво, що скачки зі стану «геній» в стан «маніяк» і назад відбуваються на різних лініях, так що при досить великий захопленості геній і маніяк можуть мати рівні захоплення і техніки, розрізняючи лише досягненнями (і передісторією).

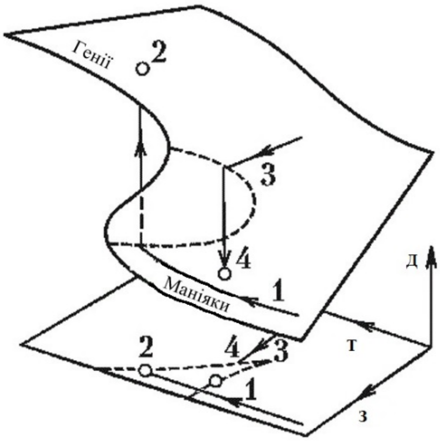


Рис. 2.18. Геометричний опис творчості вченого в координатах його досягнень (Д), захопленості (З) і володіння технікою досліджень (Т).

Виникнення хаосу в моделі Лоренца: дивний аттрактор

Едвард Лоренц по праву вважається «батьком» теорії хаосу. У 1961 році метеоролог і математик Е. Лоренц ввів у створену їм комп'ютерну модель погоди дані, округливши їх не до шостого, а до третього знаку після коми.

Рухомий бажанням зрозуміти, в чому трудність з прогнозами погоди, він розглянув рівняння руху рідини (вони описують і атмосферні течії) та шляхом спрощень отримав систему з трьома ступенями свободи. В результаті було сформульовано ефект метелика, відкрито один з найвідоміших дивних аттракторів, виявлено непередбачуваність поведінки багатьох детермінованих систем і, зрештою, створено теорію хаосу [20. с. 77].

У найбільш загальному вигляді модель Лоренца може бути представлена таким чином:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x, \qquad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \qquad (2.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \qquad (2.3)$$

де σ, r, b - управляючи параметри системи.

Модель є динамічною системою з тривимірним фазовим простором. Миттєвий стан визначається набором трьох змінних (x,y,z), а оператор еволюції визначений конкретним виглядом рівнянь. Щоб зрозуміти особливості системи Лоренца звернемося до розгляду тих аспектів динаміки, які можна виявити за допомогою теорії якісного аналізу поведінки системи.

Семінар.

На семінарі здобувачі освіти демонструватимуть виготовлені машини і катастрофи які ми можемо за допомогою них спостерігати. Зачитують доповіді про відомих вчених, які зробили внесок в теорію катастроф і не тільки. Роблять докладний розбір катастроф, які вони знайшли в додатково запропонованих ресурсах і не розглядалися на факультативі (наприклад каустику).

Висновки

У ході дослідження розглянуті основи теорії катастроф та її застосування; запропонований примірний план факультативних занять з теорії катастроф. В роботі наведений примірний курс лекцій факультативу теорії катастроф, при цьому здобувачі освіти можуть самі створювати прилади для демонстрації і дослідження деяких катастроф.

Робота розрахована на вчителів математики, студентів математичних спеціальносте вищих навчальних закладів та учнів, що цікавляться розв’язуванням нестандартних математичних задач. Дана робота стане в пригоді викладачам навчальних закладів для гурткових і факультативних занять з математики.

Список використаних джерел

1. Алексеев Ю.К. Сухоруков А.П. Введение в теорию катастроф. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 173с.
2. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. – М.: Наука, 1989. – 134 с.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф.-3-е изд., доп.-М.:Наука, 1990. – 128с.
4. Бевз Г.П. Методика викладання математики. 3-тє вид. доп. та перероб. – К.: Вища школа, 1989. – 367с.
5. Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. – М.: Мир, 1977. – 208 с.
6. Бурцева А.Д., Воронов М.П. Теория катастроф: подходы к иследованию и применение // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 8. – с. 43-52
7. Габура Зінаїда. Позакласна робота з математики в школі, як складова математичної підготовки учнів [Електронний ресурс] / З. Габура // Наукові записки молодих учених. – Електронні дані. – [Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім В. Винниченка, 2018]. – № 1. – Режим доступу: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1379/pdf (дата звернення 24.11.2020 р.). – Назва з екрана.
8. Ганна Деforж. Внесок Жожа Кюв'є (1769-1832) у розбудову еволюційної біології [Електронний ресурс] / Деforж Ганна // Історія науки і техніки. – Електронні дані. – Режим доступу: http://oaji.net/articles/2017/294-1521401992.pdf (Дата звернення 01.09.2020). – Назва з екрана.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1988. – 345 с.
10. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности: пер. с англ. Кушниренко А. Г. под редакцией Арнольда В. И. – М.: Мир, 1977. – 290 с.
11. Дж. М.Т. Томпсон. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254 с.

12. Журавлёв Г. Е. Системные проблемы развития математической психологии. – М.: Наука, 1983. – 289 с.
13. Кузьменко О.К. Моделювання розвитку соціально-економічної системи на основі теорії катастроф / О.К. Кузьменко // Проблеми економічної кібернетики 2014 : матер. II Всекур. наук.– метод. конф., 2-3 жовтня 2014 р., м. Полтава: тези доп. – Донецьк : ВИд-во "Цифрова типографія", 2014. – 161 с.
14. Методика викладання математики в середній школі: [Навч. посібник для пед. ін-тів за спец. 2104 «Математика» і 2105 «Фізика»: Пер. з рос. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – Х.: Вид-во «Основа» при Харк. Ун-ті. 1992. – 304 с.
15. Острейковский В.А. Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. – 326 с.
16. Пуанкаре Ж.А. Теория вероятностей / Ж.А. Пуанкаре. – М.: Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. – 280 с
17. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.
18. Стюарт И. Тайны катастрофы: пер. с франц. – М.: Мир, 1987. – 76 с.
19. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ КДПУ, 2001. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – 370 с.
20. Теорія хаосу в економіці: підруч. / О. І. Черняк, П. В. Захарченко, Т. С. Клебанова. – Бердянськ : Видавець Ткачук О. В., 2014. – 244 с.
21. Том Р. Структурная устойчивость и морфогенез. – М.: Логос, 2002. – 288 с.
22. Т.Постон, И.Стюарт. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. – 608с.
23. Чуличков А. Теория катастроф и развитие мира / А. Чуличков // Наука и жизнь. – 2001. – № 6.

24. Unian.ua. [Електронний ресурс] : [Інтернет портал]. – Електронні дані. – [Уніан. Інформаційний портал]. – Режим доступу https://www.unian.ua/society/rik-matematiki-kabmin-zatverdiv-plan-roku-matematichnoji-osviti-novini-ukrajini-11053334.html (Дата звернення 03.09.2020). – Назва з екрана.
25. uk.wikipedia.org [Електронний ресурс] : [Інтернет портал]. – Електронні дані. – [Вікіпедія – вільна енциклопедія]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/ (Дата звернення 10.11.2020). – Назва з екрана.