Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Викладання диференціального числення функції однієї змінної в умовах дистанційного навчання

Виконав:
студент VI курсу, групи ММ-21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Власюк Ігор Андрійович

Керівник:
канд. фіз.-мат. н., доцент Демчик С. П.

Рецензенти:
канд. тех. наук Присяжнюк О. В.,
проф., канд. фіз.-мат. наук
Крайчук О. В.

Рівне-2020 року

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Основними поняттями диференціального числення є похідна та диференціал. З цими означеннями студенти ознайомлюються під час вивчення операції диференціювання, яка означає розв'язок задачі на відшукання швидкості змінювання деякої функції. Поняття похідної і диференціала є фундаментальними поняттями вищої математики.

Засвоєння теоретичного та практичного матеріалу з даної теми має відбуватися у чіткій логічній послідовності та системі, структурованого аналізу та координації з боку викладача. Проте, багато тем виноситься на самостійне опрацювання здобувачами освіти, що вимагає високої саморегуляції та самоконтролю з боку студентів та гнучкості та інтерактивності з боку викладача.

У нас час неможливо не використовувати комп'ютерні і телекомунікаційні технології, які забезпечують інтерактивну взаємодію. Крім заочного та очного навчання в університеті студенти навчаються і за формою дистанційного навчання. Дистанційне навчання забезпечує самостійну роботу студентів з матеріалами інформаційної мережі та є необхідністю у такий не простий для світу час.

Актуальність теми полягає у необхідності створення навчальної бази для забезпечення неперервного навчання.

Мета роботи – систематизувати та розробити методику диференціального числення, згідно навчальної програми, адаптованої до вивчення дистанційно яка сприятиме підвищенню якості знань студентів і розвитку мислення.

Об'єкт дослідження –диференціальне числення функції однієї змінної.

Предмет дослідження – організація дистанційного навчання з диференціального числення та забезпечення студентів методичними матеріалами.

У відповідності з метою були поставлені завдання:

- Зібрати та проаналізувати наявну інформацію по тематиці роботи;

- Розкрити суть основних понять та теорем за темою дослідження;
- Проаналізувати доведення основних тверджень які стосуються диференціального числення;
- Розробити методичні матеріали з даної теми, а саме теоретичний та практичний матеріал.

Практичне значення даної роботи полягає в тому що розроблений матеріал може бути корисний викладачам та студентам при вивченні курсу «Диференціального числення».

Апробація. Матеріали магістерської роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів та співробітників РДГУ 26 травня 2020 року. Матеріали магістерської роботи публікувалися в Збірнику наукових матеріалів міжнародної студентської наукової конференції «Наука сьогодення: від досліджень до стратегічних рішень» яка відбулась 25 вересня 2020 року у м. Івано-Франківськ.

РОЗДІЛ І. ЛЕКЦІЙНИЙ МАТЕРІАЛ З ТЕМИ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

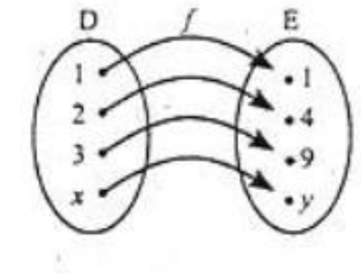
Розроблено 10 лекцій з теми «Диференціальне числення». Кожна лекція містить план, наводяться короткі теоретичні відомості та контрольні запитання.

1. Лекція №1. Функція. Основні поняття.

План

1. Поняття функції. Область визначення і область значень функції.
2. Графік функції. Зростання і спадання функції.
3. Періодичність функції. Парні та непарні функції.
4. Графіки деяких функцій та їх основні властивості.

1. *Числовою функцією* з областю визначення D називають залежність, згідно з якою кожному числу x із множини D відповідає за деяким правилом єдине число y із множини E.



Змінну x називають незалежною змінною або аргументом функції, а змінну y – залежною змінною або функцією.

Функцію позначають латинськими буквами *f, g, h,… (або f(x), g(x), h(x),…)* або рівностями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$,…

Якщо задане конкретне значення незалежної змінної $x=x_0$, то $y_0=f(x_0)$ називається значенням функції f у точці x_0.

Наприклад: якщо $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, то $f(x)=\frac{1^2}{1^2+1}=\frac{1}{2}, f(0)=\frac{0^2}{0^2+1}=0, f(a)=\frac{a^2}{a^2+1}$.

Область визначення функції позначають D(*f*). Множина, що складається з усіх чисел *f(x)* таких, що *x* належить області визначення функції f, називається *областю значень* функції і позначається E(*f*).

Функцію можна задати за допомогою *таблиці*, *графіка*, *формули*.

Найчастіше функцію задають формулою, яка дає можливість одержати значення залежної змінної *y*, підставивши конкретне значення аргументу *x*.

Наприклад: якщо кожному значенню *x* із множини дійсних чисел відповідає квадрат цього числа, то функцію можна записати у вигляді формули: $y = x^2$, або $f(x) = x^2$.

Областю визначення функції *y*=*f*(*x*), яка задана формулою, називають множину тих значень, яких може набувати *x*, тобто таких *x*, за яких формула має зміст (усі дії, указані формулою, можна виконати).

При знаходженні області визначення слід пам'ятати:

1. Якщо функція є многочленом $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, то $D(y) = (-\infty; +\infty) = R$.

Наприклад: якщо $y = x^2 + 2x + 1$, то *D(y)*=*R*.

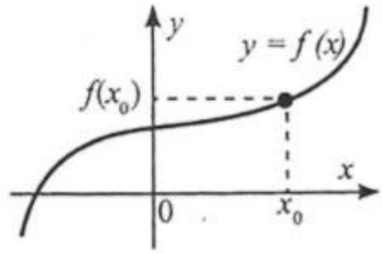
2. Якщо функція має вигляд $y = \frac{g(x)}{f(x)}$, де *f(x)*,*g(x)* – многочлени, то слід вважати *g(x)*≠0 (знаменник дробу не дорівнює 0).

Наприклад: якщо $y = \frac{x}{x^2-1}$, то $x^2 - 1 \neq 0$. Тоді *x≠1* і *x≠-1*. Отже, *D(y)=(−∞;−1)∪(−1;1)∪(1;+∞)*.

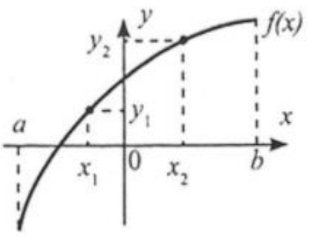
3. Якщо функція має вигляд $y = \sqrt{f(x)}$, то слід вважати *f*(*x*)≥0 (арифметичний квадратний корінь існує тільки з невід'ємних чисел).

Наприклад: якщо $y = \sqrt{5 + x}$, то $5 + x \geq 0, x \geq 0$, тобто *D(y)*=[*−5;*+∞).

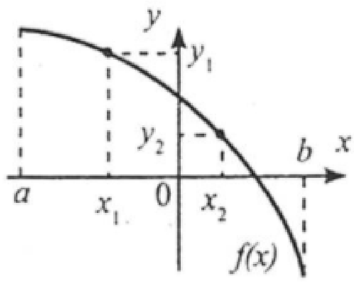
2. *Графіком* функції *y*=*f*(*x*) називають множину всіх точок площини з координатами (*x*;*f*(*x*)), де перша координата «пробігає» всю область визначення функції *y*=*f*(*x*), а друга – це відповідні значення функції *y* точці *x*.



Функція $y=f(x)$ є ***зростаючою***, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Тобто для будь-яких значень x_1,x_2 з області визначення функції як таких, $x_1<x_2$, що виконується нерівність $f(x_1)<f(x_2)$ (або $y_1<y_2$), і навпаки, якщо $y=f(x)$ - зростаюча, то за умови $f(x_1)<f(x_2)$ виконується нерівність $x_1<x_2$.

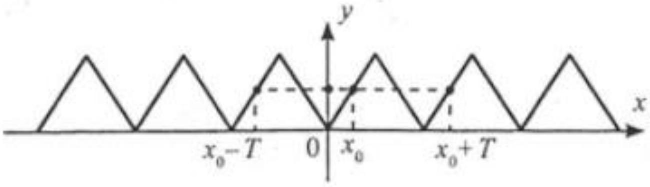


Функція $y=f(x)$ є ***спадною***, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Тобто для будь-яких значень x_1,x_2 з області визначення функції як таких, $x_1<x_2$, що виконується нерівність $f(x_1)>f(x_2)$ (або $y_1>y_2$), і навпаки, якщо $y=f(x)$ - спадна, то за умови $f(x_1)>f(x_2)$ виконується нерівність $x_1<x_2$.



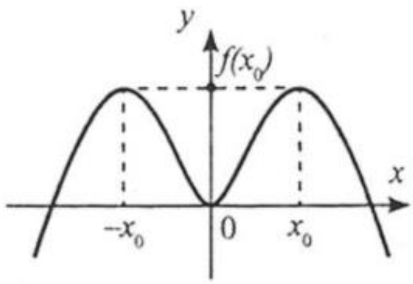
3. Функцію $y=f(x)$ називають періодичною з періодом $T\neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення числа $x+T$ і $x-T$ також належать області визначення і виконується рівність:

$$f(x+T)=f(x-T)=f(x).$$



Якщо функція $y=f(x)$ - періодична з найменшим додатним періодом T, то функція $y=f(kx+b)$ теж періодична, і найменший додатний період її дорівнює $\frac{T}{|k|}$ $(k \neq 0)$.

Функція $y=f(x)$ є *парною*, якщо для будь-якого значення x із $D(y)$ значення $-x$ також належить $D(y)$ і виконується рівність $f(-x)=f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі OY.



Приклад 1. Чи є парною функція $f(x)=x^4+x^2$?

Оскільки $D(f)=R$ і $f(-x)=(-x)^4+(-x)^2=x^4+x^2=f(x)$, то функція парна.

Приклад 2. Чи є парною функція $f(x)=x^2+x$?

Оскільки $D(f)=R$, але $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x\neq f(x)$, то функція є непарною.

Функція $y=f(x)$ є *непарною*, якщо для будь-якого значення x із $D(y)$ значення $x\in D(y)$ і виконується рівність $f(-x)=-f(x)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклад 3. Чи є непарною функція $f(x)=x^3-x^5$?

Оскільки $D(f)=R$ і $f(-x)=(-x)^3-(-x^5)=-x^3+x^5=-(x^3-x^5)=-f(x)$, то функція є непарною.

Приклад 4. Чи є непарною функція $f(x)=x^3-x^2$?

Оскільки $D(f)=R$ і $f(-x)=(-x)^3-(-x)^2=-x^3-x^2=-(x^3+x^2)\neq-f(x)=-x^3+x^2$, то функція не є непарною.

4. Функція $y=kx$:

Властивості:

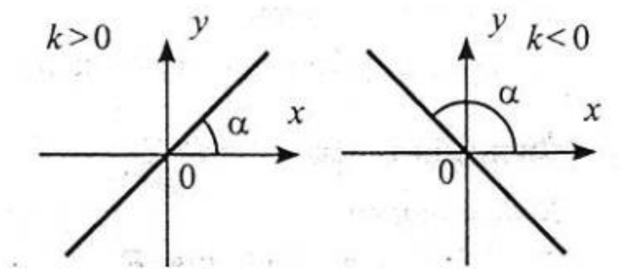
a. Область визначення: R.

b. Функція є непарною.

c. Для $x\in R$ функція зростає, якщо $k>0$; спадає, якщо $k<0$.

d. Область значень: R.

e. Графік – пряма, що проходить через початок координат.



Функція $y=b$

Властивості:

1. Область визначення: R.

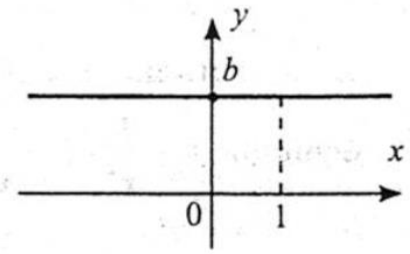
2. Функція є парною. Якщо $b=0$, то функція і парна, і непарна.

3. Для $x\in R$ функція стала.

4. Область значень: $\{b\}$.

5. Графік – пряма, паралельна осі x, якщо $b\neq0$, і пряма, що збігається з віссю x, якщо $b=0$.

6. Функція періодична, будь-яке число є періодом. Найменшого додатного періоду немає.



Функція $y = \frac{k}{x}\left(y = \frac{k}{x^{2n+1}}, n \in N, k \neq 0\right)$

Властивості

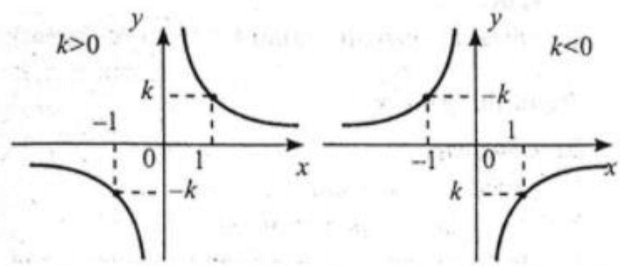
1. Область визначення: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2. Функція є непарною.

3. Якщо $k>0$, функція спадає на проміжку $(-\infty;0)(-\infty;0)$ і на проміжку $(0;+\infty)(0;+\infty)$. Якщо $k<0$, функція зростає на проміжку $(-\infty;0)$ і на проміжку $(0;+\infty)$.

4. Область значень: $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

5. Графік функції – гіпербола.



Функція $y=ax^2$ ($y=ax^{2n}$, $a \neq 0$, $n \in N$)

Властивості

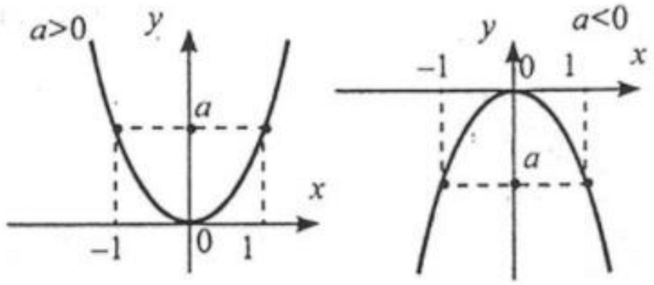
1. Область визначення: R.

2. Функція є парною.

3. Якщо $a>0$, функція спадає на проміжку $(-\infty;0]$, зростає на проміжку $[0;+\infty)$. Якщо $a<0$, функція зростає на проміжку $(-\infty;0]$, спадає на проміжку $[0;+\infty)$.

4. Область значень: якщо $a>0$, то $y \in [0;+\infty)$; якщо $a<0$, то $y \in (-\infty;0]$.

5. Графік функції – парабола.



Функція $y=ax^3$ ($y=ax^{2n+1}$, $a\neq 0$, $n\in N$)

Властивості

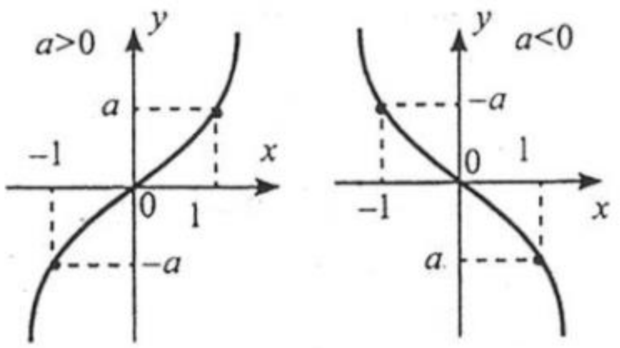
1. Область визначення: *R*.

2. Функція є непарною.

3. Для $x\in R$ функція зростає, якщо $a>0$; спадає, якщо $a<0$.

4. Область значень: *R*.

5. Графік функції – кубічна парабола.



Функція $y=|x|$

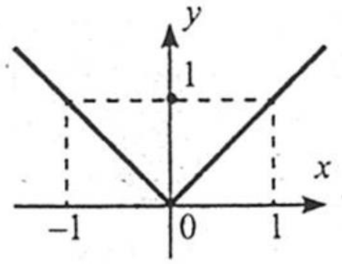
Властивості

1. Область визначення: *R*.

2. Функція є парною.

3. На проміжку (-∞;0] функція спадає; на проміжку [0;+∞) функція зростає.

4. Область значень: [0;+∞).



Функція $y=\frac{k}{x^{2n}}$ $\left(y=\frac{k}{x^{2n+1}}, k\neq 0, n\in N\right)$

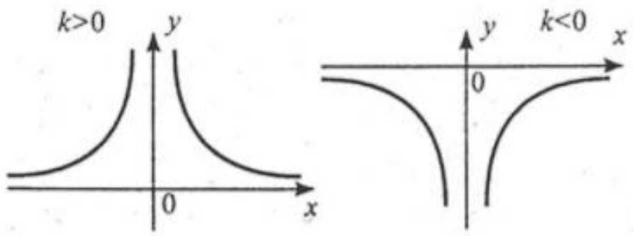
Властивості

1. Область визначення: x∈(−∞;0)∪(0;+∞)x∈(−∞;0)∪(0;+∞).

2. Функція є парною.

3. Якщо k>0, функція зростає на проміжку (−∞;0) і спадає на проміжку (0;+∞). Якщо k<0, функція спадає на проміжку (−∞;0) і зростає на проміжку (0;+∞).

4. Область значень: якщо k>0, то y∈(0;+∞); якщо k<0, то y∈(−∞;0).



Функція $\boldsymbol{y=\sqrt{x}}$

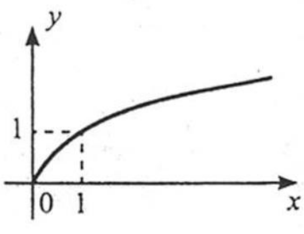
Властивості

1. Область визначення: [0;+∞).

2. Функція ні парна, ні непарна.

3. На проміжку [0;+∞) функція зростає.

4. Область значень: [0;+∞).



Контрольні питання:

1) Що називається функцією?

2) За допомогою чого можна задати функцію?

3) Що називають графіком функції?

4) Яка функція є зростаючою? Спадною?

5) Чим парна функція відрізняється від непарної?

6) Яка функція називається періодичною?

2. Лекція №2. Границя функції. Важливі границі.

План

1. Границя функції в точці.
2. Границя функції при умові $x \to \infty$.
3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.
4. Важливі границі.

1. Нехай функція $y= f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = \boldsymbol{x_0}$ за винятком, хіба що, самої точки $x = \boldsymbol{x_0}$.

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність: $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)–A|<\varepsilon$.

Пишуть: $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = A$.

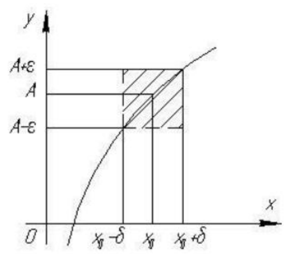


Рисунок 1

На Рисунку 1 показано:

$$(x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \delta \text{ - окіл точки } x_0$$

$$(A - \varepsilon; A + \varepsilon) - \varepsilon \text{ - окіл точки } A$$

Тоді геометрично це означає: що будь – якій точці з δ - околу відповідає деяка точка з ε - околу.

Функція *f(x)* не може мати двох різних границь в одній точці.

Розглянемо *основні властивості границь* при умові, що кожна з функцій *f (x)* і *g(x)* має скінченну границю при $\boldsymbol{x \to x_0}$:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C - C; C = const$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)};\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

Наслідки:

1. Постійний множник можна виносити за знак границі $\lim\limits_{x\to x_0}(C \cdot f(x)) = C \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ для будь-якого постійного числа *C*.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує, то для довільного натурального m має місце формула:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^m = \Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big)^m$$

1) На Рисунку 2 показано функцію, для якої виконується умова: якщо значення аргумента необмежено зростають, то значення функції *f(x)*≈5. В подальшому той факт, що значення аргумента необмежено зростають будемо записувати таким чином: x → ∞. Тоді число 5 будемо називати границею даної функції при умові, що x → ∞.

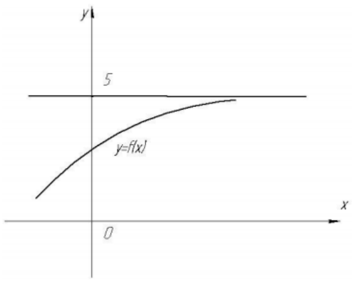


Рисунок 2

Означення. Число А називається границею даної функції при x, що прямує до +∞, якщо для любого числа існує таке додатнє число М, що при всіх значеннях аргумента x з області визначення, таких, що $x>M$, виконується нерівність $|f(x)–A|<\varepsilon$.

Використовують таку форму запису: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

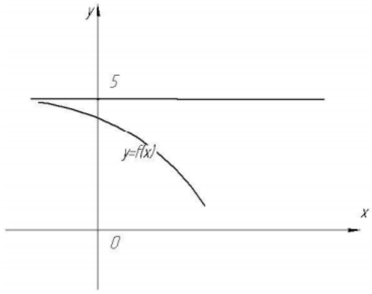


Рисунок 3

На Рисунку 3 показано функцію, для якої виконується умова: якщо значення аргумента необмежено зменшується, то значення функції $f(x)\approx 5$. В подальшому той факт, що значення аргумента необмежено зменшується будемо записувати таким чином: $x\to -\infty$. Тоді число 5 будемо називати границею даної функції при умові, що $x\to -\infty$.

Означення. Число А називається границею даної функції при x, що прямує до -∞, якщо для любого числа існує таке додатнє число М, що при всіх значеннях аргумента x з області визначення, таких, що $x<$–М, виконується нерівність $|f(x) – A| < \varepsilon$.

Використовують таку форму запису: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = A$.

2. Означення 1. Функція *f(x)* називається *нескінченно великою* величиною при $\boldsymbol{x \to x_0}$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)} = \infty$

Властивості нескінченно великих функцій:

1. Якщо при $\boldsymbol{x \to x_0}$ функція *f(x)* має скінченну границю $\left(\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{b}\right)$, а функція *φ(x)* – нескінченно велика $\left(\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{\varphi(x)} = \infty\right)$, то сума цих функцій – нескінченно велика функція, тобто $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\boldsymbol{f(x)} + \boldsymbol{\varphi(x)}\right) = \infty$; а границя відношення *f(x)* до *φ(x)* дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{\varphi(x)}} = \boldsymbol{0}$$

2. Добуток двох нескінченно великих функцій – функція нескінченно велика, тобто, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)} = \infty$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{\varphi(x)} = \infty$, то

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)\varphi(x)} = \infty$$

Означення 2. Функція *f(x)* називається *нескінченно малою* величиною при $\boldsymbol{x \to x_0}$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{0}.$$

Властивості нескінченно малих функцій:

1. Якщо функція *f(x)* нескінченно мала при $\boldsymbol{x \to x_0}$, то і функція *–f(x)* також є нескінченно малою при $\boldsymbol{x \to x_0}$.

2. Якщо функції *f(x)* і *φ(x)* нескінченно малі при $\boldsymbol{x \to x_0}$, то їх сума і різниця *f(x)+φ(x), f(x)-φ(x)* також є нескінченно малими функціями при $\boldsymbol{x \to x_0}$

3. Якщо при $\boldsymbol{x \to x_0}$ функція *f(x)* нескінченно мала, а функція φ(x) – обмежена, то їх добуток *f(x)φ(x)* – нескінченно мала функція.

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими функціями:

1. Якщо *f(x)* при $\boldsymbol{x \to x_0}$ - нескінченно велика функція , то функція $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f(x)}}$ - нескінченно мала.

2. Якщо при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$ функція *φ(x)* - нескінченно мала, то функція $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varphi(x)}}$ - нескінченно велика, при цьому функція *φ(x)* не перетворюється на нуль в околі точки $\boldsymbol{x_0}$.

Правила порівняння нескінченно малих величин.

Нехай $\boldsymbol{a_1(x)}$ і $\boldsymbol{a_2(x)}$ нескінченно малі величини при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$, тоді:

1. якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \boldsymbol{A \neq 0}$, то $\boldsymbol{a_1(x)}$і $\boldsymbol{a_2(x)}$ називаються нескінченно малими одного порядку;

2. якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{a_1(x)}$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $\boldsymbol{a_2(x)}$;

3. якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \infty$, то $\boldsymbol{a_1(x)}$ називається нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\boldsymbol{a_2(x)}$;

4. якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \mathbf{1}$, то $\boldsymbol{a_1(x)}$ і $\boldsymbol{a_2(x)}$ називаються еквівалентними нескінченно малими ($\boldsymbol{a_1(x) \approx a_2(x)}$);

Основні пари еквівалентних нескінченно малих функцій.

$\sin x \sim x, x \to 0$	$e^x - 1 \sim x, x \to 0$
$\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0$	$a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0$
$\arcsin x \sim x, x \to 0$	$\log_a(1+x) \sim x \log_a e, x \to 0$
$\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0$	$\ln(1+x) \sim x, x \to 0$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \to 0$	$(1+x)^x - 1 \sim kx, x \to 0, k > 0.$

3. При обчисленні границь часто використовують такі границі:

Перша важлива границя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k, k \neq 0;$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1;$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=k, k\neq 0;$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}=1.$

Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Зауваження: зазначимо, що число е = 2,7183... є основою натуральних логарифмів $\ln a=\log_e a$. Взагалі, число e, як і число π = 3,14 ..., широко застосовують при розв’язку різноманітних задач з різних галузей знань.

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}.$

Контрольні питання:

1) Сформулювати визначення нескінченно великої та нескінченно малої величин.
2) Сформулювати визначення границі.
3) Наведіть приклад функції, яка не має границі в даній точці.
4) Яка різниця між нескінченно малою і великою величинами?
5) Назвіть основні важливі границі.

3. Лекція №3 Похідна функції. Геометричний та фізичний зміст похідної.

План

1. Функція однієї змінної. Задачі, що приводять до поняття похідної.

2. Означення похідної функції. Геометричний та фізичний зміст похідної.

3. Диференціал та диференційовність функції однієї змінної.

1. Похідна функції є важливим для дослідження властивостей функції. Похідна у точці характеризує швидкість зміни функції у цій точці і вводиться це поняття з допомогою основної операції аналізу — граничного переходу. Розглянемо задачі, що приводять до поняття похідної.

Задача №1: Задача про миттєву швидкість

Нехай маємо деяке тіло, яке рухається прямолінійно за законом руху *S*=*S(t)* – довжина шляху *S* залежить від часу руху *t*. Визначити швидкість тіла *v* в даний момент часу *t*.

Для цього зафіксуємо деякий конкретний момент часу $t = t_0$. Тоді відстань, яку пройде тіло за цей час буде $S(t_0)$. Надамо часу деякого приросту $\Delta \boldsymbol{t}$, звідси $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0} + \Delta \boldsymbol{t}$. Шлях, який подолало тіло за час *t* відповідно дорівнює $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_0} + \Delta \boldsymbol{t})$.

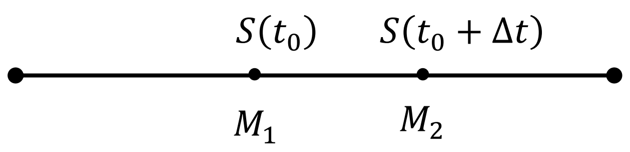


Рисунок 4

Знайдемо середню швидкість тіла на проміжку $\boldsymbol{M_1 M_2}$ (рис.1):

$$\boldsymbol{v_c} = \frac{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_0}+\Delta \boldsymbol{t}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_0})}{\Delta \boldsymbol{t}}. \tag{3.1}$$

Очевидно, що при $\Delta \boldsymbol{t} \to \boldsymbol{0}$ середня швидкість буде прямувати до миттєвої швидкості в точці $\boldsymbol{t_0}$. Тоді,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0+\Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Варто зазначити, що формула (3.2) дає змогу знайти швидкість у момент часу тоді, коли границя цього відношення існує. В іншому разі кажуть, що тіло в цей момент часу швидкості не має.

Задача №2: Задача про визначення густини неоднорідного матеріального стержня

Нехай дано деякий неоднорідний (тобто такий, густина якого не є сталою) стрижень довжиною *l* і відомо закон знаходження його маси *m* = *m(x)*. Визначити за даним законом густину стержня в точці *x*.

Зафіксуємо деяку точку *x* та надамо їй приросту $\Delta \boldsymbol{x}$ (рис. 2). Знайдемо масу частини стержня $\boldsymbol{M_1 M_2}$: $\boldsymbol{m(x+\Delta x)}$. Тоді середня густина частини стержня $\boldsymbol{M_1 M_2}$ шукається так:

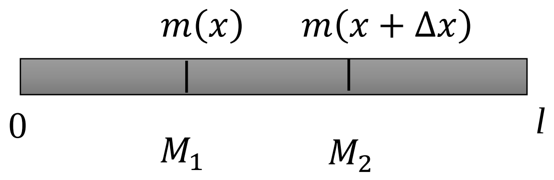


Рисунок 5

$$\boldsymbol{\rho_c = \frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}}. \qquad (3.3)$$

Очевидно, що якщо $\Delta \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{M_2} \to \boldsymbol{M_1}$ і відповідно $\boldsymbol{\rho_c} \to \boldsymbol{\rho}$. Тому,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x} \,. \qquad (3.4)$$

Задача №3: Задача про визначення сили струму, який проходить по провіднику

Нехай по провіднику за час *t* проходить струм, який рухається за законом *q = q(t)*. Потрібно знайти силу струму, який проходить через провідник, у момент часу *t*.

Аналогічно до двох попередніх задач, крім моменту часу *t* розглянемо ще й момент часу $\boldsymbol{t} + \Delta \boldsymbol{t}$. Тоді середню силу струму за проміжок часу $\Delta \boldsymbol{t}$ можна знайти так:

$$\boldsymbol{I_c = \frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}}. \qquad (3.5)$$

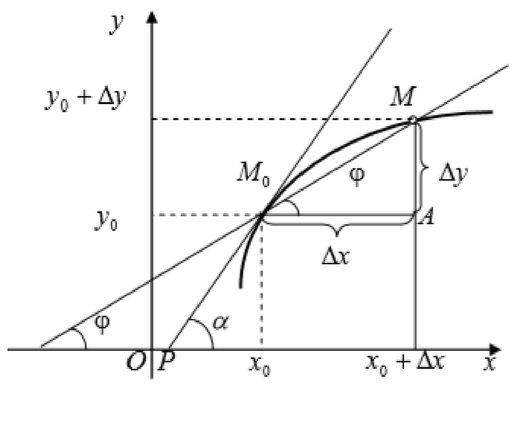
Звідси маємо, що при $\Delta \boldsymbol{t} \to \boldsymbol{0}$ сила струму в момент часу $\boldsymbol{t}$ прямуватиме до середньої сили струму. Отже,

$$\boldsymbol{I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}} \,. \qquad (3.6)$$

Задача №4: Задача про дотичну до кривої

Нехай нам дано деяку функцію *y = f(x)* неперервну на відрізку *AB*. Знайти дотичну, проведену до даної кривої в точці M_0 з координатами (x_0 ; $f(x_0)$), де $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B})$.

Зауважимо, що для знаходження дотичної, що проходить через дану точку кривої нам достатньо знайти її кутовий



Рисун

коефіцієнт, який чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної з додатнім напрямком осі *Ox*.

Надамо *x* приросту $\Delta\boldsymbol{x}$, отримаємо точку *M* $\left(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x};\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x})\right)$. Проведемо пряму $\boldsymbol{M_0M}$ і знайдемо $\boldsymbol{tg\varphi}$, де φ – кут між прямою $\boldsymbol{M_0M}$ і додатнім напрямком осі *Ox*.

Тангенс кута будемо шукати з $\triangle\ \boldsymbol{M_0MA}$, враховуючи, що $\angle\boldsymbol{MM_0A}=\boldsymbol{\varphi}$. Тоді, $\boldsymbol{tg\varphi}=\frac{\boldsymbol{AM}}{\boldsymbol{M_0A}}=\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})}{\Delta\boldsymbol{x}}$. (3.7)

Очевидно, що якщо $\Delta\boldsymbol{x}\rightarrow\boldsymbol{0}$, то точка *M* довжини кривої буде прямувати до точки $\boldsymbol{M_0}$, пряма $\boldsymbol{M_0M}$ прямуватиме до дотичної в точці $\boldsymbol{M_0}$, $\angle\boldsymbol{\varphi}\rightarrow\angle\boldsymbol{\alpha}$, тоді $\boldsymbol{tg\varphi}\rightarrow\boldsymbol{tg\alpha}$. Отже, для довільної точки *x* кривої на заданому проміжку

$$tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}tg\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{3.8}$$

Таким чином, ми бачимо, що різні задачі приводять нас до розгляду границь одного і того ж самого виду, а тому очевидно такі границі потрібно розглянути окремо, використовуючи математичне формулювання відповідної задачі. В математиці такі границі називають похідною.

2. Нехай функція *y = f(x)* неперервна і визначена на деякому проміжку $(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B})$. Зафіксуємо $\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B})$ і надамо аргументу такого приросту $\Delta\boldsymbol{x}$, що нове значення $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$ аргументу буде також належати цьому проміжку, тобто $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B})$. Тоді функція *y = f(x)* набуде приросту, який дорівнює

$$\Delta\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{3.9}$$

Похідною функції y = f(x) у точці *x* називають границю відношення приросту функції $\Delta\boldsymbol{y}$ до приросту аргументу $\Delta\boldsymbol{x}$, коли приріст аргументу прямує до нуля і позначають

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{3.10}$$

Для похідної використовують ще позначення: $\boldsymbol{y}'$; $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}$; $\frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dx}}$; $\boldsymbol{y}'_{\boldsymbol{x}}$.

Якщо в деякій точці границя відношення приросту функції до приросту аргументу дорівнює нескінченності, то похідну також називають нескінченною. Якщо ця границя не існує в певній точці, то не існує і похідної в цій точці. Із означення похідної випливає алгоритм її знаходження.

Правило знаходження похідної функції в точці за означенням:

1) Фіксуємо деяку точку x та надаємо їй приросту $\Delta \boldsymbol{x}$. Відповідно отримуємо приріст функції $\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

2) Складаємо частку $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ і $\frac{\boldsymbol{f}(x+\Delta x)-\boldsymbol{f}(x)}{\Delta x}$.

3) Шукаємо границю відношення приросту функції $\Delta \boldsymbol{y}$ до приросту аргументу $\Delta \boldsymbol{x}$, тобто $\boldsymbol{y}' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Нехай дано функцію $y = f(x)$, тоді похідна в точці x_0 цієї функції чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеному до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0. Це і є *геометричний зміст похідної*.

Знайдемо рівняння дотичної. Використаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку $(\boldsymbol{x_0};\ \boldsymbol{y_0})$ із заданим кутовим коефіцієнтом k, тобто

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) \tag{3.11}$$

З геометричного змісту похідної випливає, що

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_{\text{дот}} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0}). \tag{3.12}$$

Тоді з формули (3.11) рівняння прямої (*дотичної*) до графіка функцій $y = f(x)$ у точці $(\boldsymbol{x_0};\ \boldsymbol{y_0})$ матиме вигляд:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}). \tag{3.13}$$

З курсу аналітичної геометрії відомо, що якщо пряма задана рівнянням $y = kx + b$, то перпендикулярна до неї пряма має рівняння $\boldsymbol{y} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{C}$. Тоді рівняння *нормалі* (прямої, яка є перпендикулярною до дотичної) матиме вигляд:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}). \tag{3.14}$$

Якщо функція $y = f(x)$ характеризує деякий фізичний процес або залежність то похідна буде швидкістю протікання цього процесу. Це і є *фізичний зміст похідної*. Наведемо деякі приклади.

1. Кутова швидкість ω оберту твердого тіла навколо осі є похідна від кута φ оберту тіла відносно цієї осі за часом *t*: ω = $\boldsymbol{\varphi'(t)}$.

2. Швидкість хімічної реакції $\boldsymbol{v = v(t)}$ – похідна за часом *t* від кількості речовини *M(t)* , що вступила в реакцію: $\boldsymbol{v = M'(t)}$.

3. Теплоємність c – похідна від кількості теплоти *W* за температурою *T*: $\boldsymbol{c = W'(T)}$.

4. Сила струму *I* є похідна від кількості електрики *Q* за часом *t*: $\boldsymbol{I = Q'(t)}$.

Крім того, виділяють ще й *економічний зміст* похідної: продуктивність праці в момент часу $t = t_0$ є похідна за часом від кількості виробленої продукції.

3. Нехай функція *y* = *f(x)* визначена на проміжку $\boldsymbol{(A; B)}$, $\boldsymbol{x \in (A; B)}$ і $\Delta\boldsymbol{x}$ – такий приріст аргументу, що $\boldsymbol{x + \Delta x \in (A; B)}$.

Функцію *y* = *f(x)* називають *диференційовною* в точці $\boldsymbol{x_0}$, якщо вона має в цій точці скінченну похідну, тобто коли існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = A. \qquad (3.15)$$

Якщо функція диференційовна в кожній точці *x* проміжку $\boldsymbol{(A; B)}$, то говорять, що функція диференційовна на всьому проміжку $\boldsymbol{(A; B)}$. Між диференційовністю та неперервністю функції в точці існує зв'язок.

Теорема. *Якщо функція y = f(x)* диференційовна в точці $\boldsymbol{x_0}$, то вона у цій точці неперервна.

<u>Доведення:</u>

Дано, що функція є диференційовна в точці $\boldsymbol{x_0}$, це означає що існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boldsymbol{f'(x_0) + \alpha(x)}$, де $\boldsymbol{\alpha(x)}$ – нескінченно мала величина за умови, що $\Delta\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$.

Маємо $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$. Тоді, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. А це і означає, що функція *y* = *f(x)* неперервна в точці $\boldsymbol{x_0}$.

Зауваження: Обернене твердження неправильне, тобто якщо функція неперервна в деякій точці, то вона може не мати в цій точці похідної (не бути диференційовною).

Наприклад, функція $\boldsymbol{y = |x|}$ неперервна в точці $\boldsymbol{x_0 = 0}$, але не має похідної в цій точці.

Таким чином, неперервність функції в точці є лише необхідна, але не достатня умова диференційовності функції в цій точці.

Диференціалом функції *y* = *f(x)* у точці $\boldsymbol{x_0}$ називають головну, лінійну щодо $\Delta\boldsymbol{x}$, частину приросту диференційовної функції і позначають

$$\boldsymbol{df(x_0) = f'(x_0)}\Delta\boldsymbol{x} \tag{3.16}$$

Знайдемо диференціал функції *f(x)* = *x*.

Оскільки $\boldsymbol{f'(x) = x' = 1}$, то $\boldsymbol{df = dx} = \Delta\boldsymbol{x}$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює приростові цієї змінної і формулу для обчислення диференціала можна ще записати так:

$$\boldsymbol{df = f'(x)dx}. \tag{3.17}$$

З неї випливає рівність
$$\boldsymbol{\frac{df}{dx} = f'(x)}. \tag{3.18}$$

<u>Контрольні запитання</u>

1) Дайте означення похідної функції в точці.
2) У чому полягає геометричний та фізичний зміст похідної. Наведіть приклади.
3) Наведіть алгоритм обчислення похідної виходячи з її означення.
4) Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
5) Яку функцію називають диференційовною в точці?
6) Сформулюйте теорему про зв'язок між диференційовністю та неперервністю функції в точці.

4. Лекція №4. Диференціал функції.

План

1. Диференціал функції. Правила знаходження диференціала.

2. Властивість інваріантності форми диференціала.
3. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.
4. Диференціювання функцій, заданих параметрично.

1. Нехай функція $y=f(x)$ має в даній точці x_0 скінченну похідну $\boldsymbol{f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boldsymbol{f'(x_0) + \alpha}$, де $\boldsymbol{\alpha \to 0}$, якщо $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$. Звідки

$$\boldsymbol{\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x}.$$

Якщо Δx - нескінченно малий приріст, то доданок $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малим вищого порядку, ніж доданок $f'(x_0) \cdot \Delta x$ і якщо $f'(x_0) \neq 0$, то $f'(x_0) \cdot \Delta x$ і Δx -нескінченно малі одного порядку.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0, то вираз $f'(x_0) \cdot \Delta x$ називається ***диференціалом*** (differential) функції в цій точці і позначається символом $dy(x_0)$. Тобто, $dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Зауваження. Диференціал функції $y = f(x)$ в даній точці є головною лінійною частиною приросту функції, пропорційною приросту аргументу з коефіцієнтом пропорційності $f'(x_0)$:

$$\Delta y = dy(x_0) + \alpha \cdot \Delta x.$$

Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто

$$dx = \Delta x.$$

Для будь-якої диференційовної в точці x функції $y = f(x)$ формулу диференціала можна записати так:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Звідки отримаємо, що

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

тобто похідну можна розглядати як відношення двох диференціалів.

З правил знаходження похідної випливають правила знаходження диференціала. Якщо функції $u(x)$, $v(x)$ -диференційовні в точці x, то

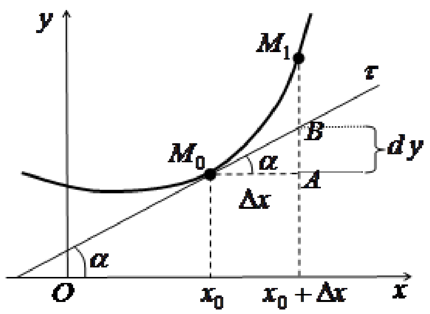
1) $d(u+v)=du+dv$.

2) $d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv$.

Зауваження. $d(c\cdot u)=c\cdot du$, де $c=const$.

3) $\boldsymbol{d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}}$, $(v\neq 0)$.

Нехай $y=f(x)$, $\boldsymbol{x\in X}$ та існує $f'(x)$. За означенням диференціала $\boldsymbol{dy=f'(x_0)\cdot\Delta x}$.



Скористаємося геометричним змістом похідно $\boldsymbol{f'(x_0)=tg\,\alpha}$.

З трикутника M_0AB маємо:

$\boldsymbol{|AM_0|}$ або $|AB|=f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Але $f'(x_0)\cdot\Delta x=dy$, тому $dy=|AB|$.

Отже, диференціал функції $y=f(x)$ в точці x_0 визначає приріст ординати дотичної до кривої в точці $M_0(x_0,f(x_0))$ при переході від абсциси x_0 до абсциси $x_0+\Delta x$.

2. **Теорема**. Якщо маємо складену функцію $y=f(u)$, де $u=u(x)$, причому $f(u)$ і $u(x)$ -диференційовні функції, то

$$dy=f'_u\cdot du.$$

Дійсно, $\boldsymbol{dy=f'(u(x))\cdot\Delta x=f'_u u'_x\cdot\Delta x=f'_u du}$, де $\boldsymbol{u'\cdot\Delta x=du}$.

Зауваження. Форма диференціала не залежить від того, є аргумент функції незалежною змінною, чи функцією цієї змінної.

Приклад. Знайти диференціал функції $y=\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Знаходимо похідну від заданої функції:

$$y'=\left(\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}\right)'=\left((2+\cos x)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2+\cos x)'=$$

$$=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}(-\sin x);$$

$$dy=-\frac{2\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}dx.$$

Другий спосіб. Знаходимо диференціал, використовуючи формулу:

$$dy=\frac{2}{3}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}\cdot d(2+\cos x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}(-\sin x\cdot dx)=$$

$$=-\frac{2\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}}dx.$$

3. З означення похідної функції в точці x_0 випливає, що її приріст $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ можна подати у вигляді: $\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$, де $\alpha\to 0$, якщо $\Delta x\to 0$.

Отже, при малих Δx має місце наближена рівність:

$\Delta y\approx dy$, тобто $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Звідки

$$f(x_1)=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Формула дозволяє знаходити значення функції $y=f(x)$ в точці $x_1=x_0+\Delta x$, якщо відомі значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$, з точністю Δ

$$\Delta<M\cdot\Delta x^2,$$

де $M=\max\limits_{x_0<x<x_0+\Delta x}|f''(x)|$.

Приклад. Наближено обчислити значення $\sin 28^0$.

Розв'язання. В даному випадку $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$. Покладемо $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, що відповідає 30^0 в градусній мірі;

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \frac{\pi}{180} \cdot 28 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{90}.$$

отримаємо:

$$\sin 28^0 \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{90}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0{,}47,$$

тобто $\sin 28^0 \approx 0{,}47$.

Для того, щоб оцінити абсолютну і відносну похибки, скористаємось більш точним значенням, отриманим за допомогою калькулятора: $\sin 28^0 \approx 0{,}469$. Тоді $\Delta \approx |0{,}469 - 0.47| = 0{,}001$, а відносна похибка δ дорівнюватиме:

$$\delta \approx \frac{0{,}001}{0{,}469} \cdot 100\% \approx 0{,}2\%.$$

Приклад. Наближено обчислити значення $\sqrt[4]{19}$.

Розв'язання. В даному випадку $f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

Нехай $x_0 = 16$, $x_1 = 19$, тоді $\Delta x = x_1 - x_0 = 3$ і за формулою (3.12): $f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, отримаємо, що:

$$\sqrt[4]{19} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} \cdot 3 = 2 + \frac{1}{32} \cdot 3 \approx 2{,}09.$$

Використовуючи калькулятор, отримаємо: $\sqrt[4]{19} \approx 2{,}088$. Тоді $\Delta \approx |2{,}088 - 2{,}09| = 0{,}002$, а відносна похибка δ дорівнюватиме:

$$\delta \approx \frac{0{,}002}{2{,}088} \cdot 100\% \approx 0{,}1\%.$$

4. Нехай функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ параметрично задають функцію $y = y(x)$, причому $x(t)$ і $y(t)$ - функції диференційовні за змінною *t* і $x'(t) \neq 0$.

Похідну y'_x від функції *y* за змінною *x* знаходимо, диференціюючи $x = x(t)$ і $y = y(t)$ за змінною *t* :

$$dx = x'(t) \cdot dt, \; dy = y'(t) \cdot dt.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t) \cdot dt}{x'(t) \cdot dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

тобто

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad (x'_t \neq 0).$$

Приклад. Знайти похідну y'_0 функції $y = f(x)$, заданої параметрично: $x = 8\cos t$, $y = 4\sin t$ в точці $M_0(4\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

Розв'язання. Знаходимо похідні x'_t та y'_t: $x'_t = -8\sin t$, $y'_t = 4\cos t$. За формулою (*) маємо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\cos t}{-8\sin t} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} t.$$

Обчислимо значення параметра *t* в точці $M_0(4\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

$$\left.\begin{aligned} 8\cos t = 4\sqrt{2} \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4\sin t = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, $t = \frac{\pi}{4}$ і $y'_0 = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$.

Приклад. Знайти похідну y' функції, заданої параметрично:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні x'_t та y'_t:

$$x'_t = 3a\frac{1\cdot(1+t^3)-3t^2\cdot t}{(1+t^3)^2} = 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

$$y'_t = 3a\frac{2t\cdot(1+t^3)-3t^2\cdot t^2}{(1+t^3)^2} = 3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}.$$

Отже, $y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\cdot(2t-t^4)}{(1+t^3)^2}\cdot\frac{(1+t^3)^2}{3a\cdot(1-2t^3)}$, тобто $y' = \frac{2t-t^4}{1-2t^3}, \quad \left(t \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

<u>Контрольні питання:</u>

1) Що таке диференціал?
2) Назвіть основні правила диференціювання.
3) Основні властивості диференціала.
4) Який геометричний зміст диференціала?

5. Лекція №5. Правила диференціювання.

План

1. Основні правила диференціювання. Похідні складеної та оберненої функцій.
2. Диференціювання неявних функцій та функцій, які задані параметрично.
3. Похідні елементарних функцій. Таблиця основних похідних.

1. Нехай функції *y = f(x)* і *y = g(x)* диференційовні в точці *x*, Δx – приріст аргументу, *C* – деяка константа. Тоді диференційовними будуть їхні сума, добуток та частка, до того ж справедливими є такі рівності:

$$(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}\right)' = \frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}^{2}(\boldsymbol{x})}\ (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0})$$

Похідна складеної функції

Якщо значенням аргументу функції *f* є значення функції g, то кажуть, що задано складену функцію *y* = *f(g(x))*. Похідну складеної обчислюють за формулою

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})))' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \tag{5.1}$$

Теорема (про похідну складеної функції). Якщо функція *u* = *φ(x)* диференційовна в точці *x*, а функція *y* = *f(u)* диференційовна в точці *u*, то складена функція *y* = *f(φ(x))* також диференційовна в точці *x* і справедливою є формула

$$\boldsymbol{y}'_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{x}} \tag{5.2}$$

<u>Доведення:</u>

Оскільки функція *u* = *φ(x)* диференційовна в точці *x*, то буде існувати границя: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$.

Оскільки $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{u}}$ існує, то існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{y(u+\Delta u)-y(u)}{\Delta u} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{y(u+\Delta u)-y(u)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}$.

$$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)'_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{\varphi}(x)}\cdot\boldsymbol{\varphi}'_{\boldsymbol{x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})\big)-\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)}{\Delta\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})\big)-\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)}{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})}{\Delta\boldsymbol{x}} =$$

$$= \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\varphi}'_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{x}}$$

Похідна оберненої функції

Нехай задана неперервна і диференційовна функція *y* = *f(x)*, яка в точці x_0 є монотонною. Тоді, за теоремою про існування оберненої функції, в цьому околі буде існувати обернена функція $f^{-1}(x)$.

Теорема (про похідну оберненої функції). Якщо функція $y = f(x)$ має в околі точки x_0 похідну, то обернена функція також має у цій точці похідну і справедливою буде рівність

$$\left(\boldsymbol{f^{-1}(y)}\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f'(x)}} \tag{5.3}$$

Похідна оберненої функції використовується при обчисленні похідних обернених тригонометричних функцій.

2. *Похідна неявної функції*

Нехай диференційовну функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням

$$F(x,y) = 0.$$

Якщо в рівнянні під y вважати функцію від x, то це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x:

$$\boldsymbol{F\big(x, y(x)\big) = 0} \ \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}. \tag{5.4}$$

Диференціюючи цю тотожність за змінною x, дістаємо лінійне щодо $\boldsymbol{y'}$ рівняння, яке також містить змінні x та y. Розв’язуючи його щодо $\boldsymbol{y'}$, знаходимо шукану похідну функції, заданої неявно

$$\boldsymbol{y'_x = g(x, y)}. \tag{5.5}$$

Похідна від функції заданої параметрично

Нехай маємо функцію, яку задано параметрично

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \varphi(t)}, \\ \boldsymbol{y = \psi(t)}, \end{cases} \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{\alpha};\ \boldsymbol{\beta}]. \tag{5.6}$$

Іноді з (2.6) вдається виключити параметр $\boldsymbol{t}$, тоді можна перейти до явного задання функції $y = f(x)$. Іноді рівність взагалі не задає функцію. Наприклад:

$\begin{cases} \boldsymbol{x = r\cos t}, \\ \boldsymbol{y = r\sin t}, \end{cases}$, де $\boldsymbol{r}$ – деяке число.

Припустімо, що рівність (2.6) задає параметричну функцію $y = f(x)$. Крім того, вважатимемо, що функція $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$ має обернену функцію $\boldsymbol{t = \varphi^{-1}{}_x}$, яка також диференційовна. Тоді функцію $y = y(x)$, задану параметрично, можна розглядати як складену функцію $\boldsymbol{y = \psi(\varphi^{-1}{}_x)}$.

Отже, похідна функції $y = y(x)$, заданої параметрично теж задається параметрично рівняннями

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \varphi(t)}, \\ \boldsymbol{y'_x = \psi'(\varphi^{-1}{}_x) \cdot (\varphi^{-1}{}_x)' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}}. \end{cases} \tag{5.7}$$

3. Виведемо формули для похідних елементарних функцій в довільній точці x.

1) Нехай $y = f(x) = C$, де C – деяка константа, $\boldsymbol{x} \in (-\infty; \infty)$, то

$$\boldsymbol{y' = (C)' = 0}. \tag{5.8}$$

2) Нехай $y = x$, $\boldsymbol{x} \in (-\infty; \infty)$, то $\boldsymbol{y' = (x)' = 1}$. (5.9)

3) Нехай $\boldsymbol{y = \log_a x}$, то застосовуючи властивості логарифмічної функції та другу чудову границю, отримаємо $\boldsymbol{y' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}}$. (5.10)

Зокрема, коли $a = e$, отримаємо формулу $\boldsymbol{y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}}$. (5.11)

4) Нехай $\boldsymbol{y = x^{\alpha}}$, де α – довільне дійсне число, то застосовуючи формули правил диференціювання складеної і неявної функцій, одержимо

$$\boldsymbol{y' = (x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}. \tag{5.12}$$

Зокрема, коли α = -1, $\boldsymbol{y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$; коли α = $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$,

$$\boldsymbol{y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}. \tag{5.13}$$

5) Нехай $\boldsymbol{y = a^x}$, де $\boldsymbol{0 < a \neq 1}$, $\boldsymbol{x} \in (-\infty; \infty)$, то

$$\boldsymbol{y' = (a^x)' = a^x \cdot \ln a}. \tag{5.14}$$

Зокрема, $\boldsymbol{y' = (e^x)' = e^x}$. (5.15)

6) Якщо на інтервалі $\boldsymbol{x} \in (-\infty; \infty)$ задано тригонометричні функції, то застосовуючи формули різниці тригонометричних функцій двох кутів, правила диференціювання, властивості границь і першу чудову границю, отримаємо

$$\boldsymbol{y' = (\sin x)' = \cos x},$$

$$\boldsymbol{y' = (\cos x)' = -\sin x},$$

$$\boldsymbol{y' = (tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}},$$

$$\boldsymbol{y' = (ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}. \qquad (5.16)$$

7) Якщо на інтервалі $\boldsymbol{x} \in (-\infty; \infty)$ задано обернені тригонометричні функції, то

$$\boldsymbol{y' = (arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}},$$

$$\boldsymbol{y' = (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}},$$

$$\boldsymbol{y' = (arc\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}},$$

$$\boldsymbol{y' = (arcc\mathrm{tg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}}. \qquad (5.17)$$

Запишемо отримані формули (5.8 – 5.17) у таблицю.

$C' = 0$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x' = 1$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(arc\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(arcc\mathrm{tg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{th}\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Контрольні запитання

1) Сформулюйте правила диференціювання алгебричної суми, добутку і частки двох функцій. Наведіть приклади.

2) Сформулюйте правила диференціювання складеної функції.

3) Як знайти похідну неявної функції? Наведіть приклади.

4) Запишіть умови існування та формулу похідної оберненої функції.

5) Що являє собою похідна параметрично заданої функції?

6. Лекція №6. Основні теореми диференціального числення.

План

1. Теорема Ферма.
2. Теорема Ролля.
3. Теорема Коші.
4. Теорема Лагранжа.
5. Правило Бернуллі-Лопіталя для розкриття невизначеності.
6. Многочлен та формула Тейлора.
7. Розвинення за формулою Тейлора-Маклорена основних функцій.
8. Застосування формули Тейлора.

1. Теорема Ферма. Нехай функція *y = f(x)* є неперервною на проміжку $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ і набуває на цьому проміжку свого найбільшого або найменшого значення в деякій точці $\boldsymbol{C} \in [\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$. Тоді, якщо в цій точці існує похідна, то вона рівна нулю: $\boldsymbol{f'}_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{0}$.

<u>Доведення:</u>

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що в точці *C* функція *y = f(x)* приймає своє найбільше значення.

Оскільки *C* – точка, в якій функція найбільша, то *f(x)< f(C)* для будь-якого *x* з околу *C*. в нашому випадку то *f(x)< f(C)* для будь-якого $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$, *x* ≠ *C*. Надамо точці *C* приросту $\Delta\boldsymbol{x}$ та $-\Delta\boldsymbol{x}$.

Розглянемо відношення $\frac{f(C-\Delta x)-f(C)}{-\Delta x}$, тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(C-\Delta x)-f(C)}{-\Delta x} \geq \boldsymbol{0}$.

Розглянемо відношення $\frac{f(C+\Delta x)-f(C)}{\Delta x}$, тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(C+\Delta x)-f(C)}{\Delta x} \leq \boldsymbol{0}$.

Оскільки в даній точці похідна існує, то $\boldsymbol{f'}_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{0}$. Теорему доведено.

Геометрично теорема Ферма означає, що якщо в точці *C* функція *y* = *f(x)* досягає свого найбільшого або найменшого значення, то дотична, проведена до кривої *y* = *f(x)* в точці *C* паралельна до осі *Ox*.

2. Теорема Ролля. Якщо функція *y* = *f(x)* є неперервною і диференційовною на проміжку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, і на кінцях цього відрізка набуває однакових значень *f(a)*=*f(b)*, то знайдеться принаймні одна точка $\boldsymbol{C} \in [\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$, що $\boldsymbol{f'}_{\boldsymbol{C}} = \mathbf{0}$.

Доведення:

Оскільки функція *y* = *f(x)* є неперервною на проміжку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, то вона має найбільше і найменше значення на цьому проміжку. Якщо *M* = *m*, то це означає, що *y* = *C*, де *C* – стала. Тоді $\boldsymbol{y'}_{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ для будь-якого $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$.

Якщо найбільше і найменше значення досягається на проміжку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, то за теоремою Ферма, буде існувати точка *C*, що $\boldsymbol{f'}_{\boldsymbol{C}} = \mathbf{0}$.

Якщо найбільше (найменше) значення знаходиться на одному з кінців відрізка, то оскільки *f(a)*=*f(b)*, то найбільше значення буде знаходитись всередині відрізка $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$. Тоді за теоремою Ферма, існує точка *C*, що $\boldsymbol{f'}_{\boldsymbol{C}} = \mathbf{0}$.

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо *f(a)*= *f(b)* = 0, то теорему Ролля формулюють по іншому: Між двома коренями функції лежить принаймні один корінь похідної.

3. Теорема Коші. Якщо функції *f(x)* та φ*(x)* є неперервні і диференційовною на проміжку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, при цьому φ*(x)* ≠ 0 для будь-якого $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$. Тоді існує така точка $\boldsymbol{C} \in [\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$, що справедливим буде рівність:

$$\frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{\varphi(b)-\varphi(a)}} = \frac{\boldsymbol{f'(C)}}{\boldsymbol{\varphi'(C)}} \tag{6.1}$$

Доведення:

Для доведення теореми введемо допоміжну функцію:

$$\boldsymbol{F(x)} = \boldsymbol{f(x)} - \frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{\varphi(b)-\varphi(a)}} \cdot \boldsymbol{\varphi(x)}.$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0}$, бо якби $\boldsymbol{\varphi(b) = \varphi(a)}$, то згідно теореми Ролля на проміжку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, існувала б така точка $\boldsymbol{C^*}$, що $\boldsymbol{\varphi'_{C^*} = 0}$, що суперечить умові теореми.

Функція $\boldsymbol{F(x)}$ на відрізку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому існує така точка $\boldsymbol{C} \in [\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$, що $\boldsymbol{F'(C) = 0}$, або

$$\boldsymbol{f'(C) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot \varphi'(C) = 0}.$$

Звідси, $\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(C)}{\varphi'(C)}}$.

Теорему доведено.

4. Теорема Лагранжа. Якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ і диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$, то в середині цього інтервалу існує принаймні одна точка $\boldsymbol{C}$ така, що справедливим буде

$$\boldsymbol{f(b) - f(a) = f'(C)(b - a)}. \tag{6.2}$$

<u>Доведення:</u>

Розглянемо додаткову функцію $\boldsymbol{\varphi(x) = x}$, тоді $\boldsymbol{\varphi(b) = b}$, $\boldsymbol{\varphi(a) = a}$, $\boldsymbol{\varphi'(x) = 1 \neq 0}$ для будь-якого $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$. Отже, функції *f(x)* та φ*(x)* задовольняють усі вимоги теореми Коші.

$$\boldsymbol{\frac{f'(C)}{\varphi'(C)} = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)},\ f'(C) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \Rightarrow\ f(b) - f(a) = f'(C)(b - a)}.$$

Теорему доведено.

<u>Зауваження</u>: Цю формулу ще називають *Лаґранжовою формулою*. Якщо в Лаґранжовій формулі покласти $\boldsymbol{a = x_0}$, $\boldsymbol{b = x_0 + \Delta x}$, то вона набуде вигляду

$$\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(C)\Delta x}. \tag{6.3}$$

Оскільки формула дає точний зв’язок приросту функції і приросту аргументу, її ще називають *формулою скінченних приростів* (вказати точку $\boldsymbol{C}$ часто не можливо).

Ця формула має досить широке застосування в математичному аналізі та інших математичних дисциплін.

5. Правило Бернуллі-Лопіталя називають ще правило Лопіталя, оскільки Лопіталь вперше його опублікував, хоча Бернуллі відкрив його першим.

Нехай функції *f(x)* та φ*(x)*, які є визначеними та неперервно диференційовними в деякому околі точки $\boldsymbol{x_0}$, окрім, можливо, самої точки $\boldsymbol{x_0}$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ і у вказаному околі $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то також існує границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. І ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \text{ – \textit{правило Лопіталя.}} \qquad (6.4)$$

<u>Доведення:</u>

Нехай зафіксуємо деяку точку $\boldsymbol{x_0}$ та розглянемо відрізок $[x_0; x]$, який належить околу $\boldsymbol{x_0}$. Визначимо значення функцій *f(x)* та φ*(x)* в точці $\boldsymbol{x_0}$: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$.

Тоді, в цій точці функції неперервні. Отже функції неперервні на відрізку $[x_0; x]$ і диференційовні на проміжку $(x_0; x)$, причому $\varphi'(x) \neq 0$ в кожній точці цього проміжку. Тоді, за теоремою Коші існує така точка $\boldsymbol{C}$, що справедливим буде рівність:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(C)}{\varphi'(C)} \Rightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(C)}{\varphi'(C)}.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

<u>Зауваження</u>: Правило Лопіталя є справедливим і у випадку, коли $x_0 \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)},\ x = \frac{1}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Якщо внаслідок застосування правила Лопіталя маємо невизначеність $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то це правило можна застосовувати доти, поки не буде одержано дріб, для якого не виконуватимуться умови цього правила.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

6. Під час дослідження теоретичних питань, а також під час розв'язання деяких практичних задач, зокрема при наближених обчисленнях важливе значення має формула Тейлора.

Нехай задано багаточлен $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, де $a_0, a_1, \dots a_n$ – дійсні числа. Продиференціюємо цей багаточлен *n* – разів.

$P'(x)=1a_1+2a_2x+3a_3x^2\dots+na_nx^{n-1}$,

………..

$P^{(n-1)}(x)=(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2\cdot 1a_{n-1}+n(n-1)\dots 2a_nx$,

$P^{(n)}(x)=n!\,a_n$.

Підставляючи в ці рівності *x* = 0, дістанемо

$a_0=P(0)$;

$a_1=\frac{P'(0)}{1!}$;

$a_2=\frac{P''(0)}{2!}$;

….

$$a_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}. \tag{6.5}$$

Записавши многочлен за степенями $(x-x_0)$ і виконавши заміну (5.1), отримаємо наступне означення.

Многочленом Тейлора *n*-го порядку за степенями $(x-x_0)$ називають многочлен

$$\widetilde{P_n}(x)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{6.6}$$

Візьмемо довільну функцію *f(x)*, яка має похідні до *n*-го порядку включно в околі точки x_0. Тоді для функції можна записати багаточлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Цей багаточлен називають багаточленом Тейлора для функції *f(x)*.

Формулою Тейлора *n*-го порядку функції *f(x)*в околі точки x_0 називають формулу $f(x) = \widetilde{P_n}(x) + R_n(x)$, (6.7)

де $\widetilde{P_n}(x)$ — многочлен Тейлора, $R_n(x)$ — залишковий член формули Тейлора.

Залишковий член формули Тейлора визначає похибку наближення функції її многочленом Тейлора. Формулу Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ називають формулою *Тейлора — Маклорена*.

7. Підставимо у Тейлорову формулу $x - x_0 = \Delta x,\ x = x_0 + \Delta x$, тоді маємо

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + R_n(x).$$

Оскільки $(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0),\ f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^n f(x_0)$, тоді

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + R_n(x). \quad (6.8)$$

Отримали формулу Тейлора *n*-го порядку функції *f(x)* в *диференціальній формі.*

Теорема. Якщо функція *f(x)* означена й *n* разів диференційовна в околі точки x_0, то справедливою є формула Тейлора *n*-го порядку функції *f* із залишковим членом у *формі Пеано*:

$$f(x) = \widetilde{P_n}(x) + o((x - x_0)^n) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \to x_0. \quad (6.9)$$

Якщо функцію *f(x)* диференціювати (*n + 1*) разів в околі точки x_0, тоді

$$f(x) = \widetilde{P_n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\mathrm{C})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\mathrm{C})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, C \in (x_0; x). \quad (6.10)$$

Отримали формулу Тейлора із залишковим членом *у формі Лагранжа*.

Розвинемо за формулою Тейлора - Маклорена елементарні функції, використавши формули (6.4)-(6.6).

Нехай маємо функцію $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, яка нескінченно диференційовна на $\boldsymbol{R}$. Шукаємо похідні функції:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = e^x, \\ f'(x) = e^x, \\ \ldots . \\ f^{(n)}(x) = e^x, \\ f^{(n+1)}(x) = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} f(0) = 1, \\ f'(0) = 1, \\ \ldots . \\ f^{(n)}(0) = 1, \\ f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi}, \xi \in (0; x). \end{array}\right.$$

Підставляючи одержані значення похідних у формулу Тейлора - Маклорена із залишковими членами у формі Пеано і Лаґранжа, дістаємо

$$\boldsymbol{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);}$$

$$\boldsymbol{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} e^{\xi}, \xi \in (0; x).} \qquad (6.11)$$

Нехай маємо функцію $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k});$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \cos\xi \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \xi \in (0; x). \quad (6.12)$$

Нехай маємо функцію $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \cos\xi \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}, \xi \in (0; x). \quad (6.13)$$

Нехай маємо функцію $\boldsymbol{f(x) = \ln(1 + x)}$.

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \xi \in (0; x). \quad (6.14)$$

Нехай маємо функцію $\boldsymbol{f(x) = (1 + x)^{\alpha}}$.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, \xi \in (0;x). \tag{6.15}$$

8. Формули Тейлора — Маклорена із залишковим членом у формі Пеано є джерелом асимптотичних формул.

Наприклад, для функції $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ маємо:

$e^x = 1 + x + o(x),$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3). \tag{6.16}$$

Знайдемо границю, використавши формули (5.12):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

Формулу Тейлора за степенями $\boldsymbol{(x - x_0)}$ із залишковим членом у формі Лаґранжа застосовують для обчислення наближених значень функції в околі $\mathbf{U}(\boldsymbol{x_0})$.

Значення $\boldsymbol{f(x)}$ в околі $\mathbf{U}(\boldsymbol{x_0})$ обчислюють за формулою

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|, \xi \in (x_0; x)\ .$$

<u>Контрольні запитання:</u>

1) Дайте визначення поняття многочлена Тейлора.
2) Дайте визначення поняття формули Тейлора.
3) Для чого застосовується формули Тейлора — Маклорена?
4) Сформулюйте теорему Ферма.
5) Сформулюйте теорему Ролля.

6) Сформулюйте теорему Коші.

7) Сформулюйте теорему Лагранжа.

8) Для чого застосовується правило Бернулі-Лопіталля?

7. Лекція №7. Похідні і диференціали вищих порядків.

План

1. Похідна *n* - го порядку.
2. Диференціали вищих порядків.

1. Нехай маємо функцію $y = f(x)$, яка має в точках проміжку $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$ скінченну першу похідну (похідну першого порядку). Очевидно, що ця нова функція $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})$ теж диференційовна в деякій точці $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$, s вона також має в цій точці скінченну похідну $\boldsymbol{y''}(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})\right)' = \boldsymbol{f''}(\boldsymbol{x})$, яку називають другою (*похідною другого порядку*) та позначають одним із таких символів:

$$\boldsymbol{y''}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y''}_{x^2},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{7.1}$$

Механічний зміст похідної другого порядку полягає в тому, що друга похідна шляху за часом дорівнює прискоренню a рухомої точки в певний момент часу t.

Похідні третього й більш високих порядків визначають аналогічно.

Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n - 1)$ - го порядку і позначають

$$\boldsymbol{y}^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^nf(x)}{dx^n},\ \boldsymbol{f}^{(n)}(\boldsymbol{x}). \tag{7.2}$$

Щоб обчислити похідну n-го порядку треба послідовно знайти похідні всіх попередніх порядків, застосовуючи правила та формули щодо першої похідної.

Похідні 1-го, 2-го та 3-го порядку позначають штрихами, приміром,

$$\boldsymbol{y'}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y''}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y'''}(\boldsymbol{x}). \tag{7.3}$$

Починаючи з похідної 4-го порядку, похідні позначають цифрами (римськими або арабськими, взятими в дужки). Приміром, $y^4(x) = y^{IV}(x)$.

В деяких випадках можна вивести формулу, яка дає змогу знайти похідну n-го порядку безпосередньо, без потреби шукати всі попередні похідні.

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, n \le m \\ 0, \; n > m, \end{cases} n \in N;$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + x\right). \qquad (7.4)$$

Розглянемо випадок параметричного задання функції. Маємо: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha;\ \beta]$. Вважаємо, що $\boldsymbol{y(t)}$ і $\boldsymbol{x(t)}$ є диференційовні на проміжку $[\boldsymbol{\alpha};\ \boldsymbol{\beta}]$.

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t};\ y''_x = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}}. \qquad (7.5)$$

$$\boldsymbol{y^{(n)} = \frac{\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^n}\right)'_t}{x'_t}}. \qquad (7.6)$$

2. Нехай функція *y* = *f(x)* диференційовна на проміжку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, тоді $\boldsymbol{dy = y'_x \cdot dx}$ – диференціал першого порядку. Другим диференціалом $\boldsymbol{d^2y}$ функції або диференціалом другого порядку називають диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d(dy) = d\left(y'_x dx\right) = \left(y'_x dx\right)' dx = y''_x dx dx = y''_x dx^2. \qquad (7.7)$$

Диференціали третього і більш високих порядків визначають аналогічно.

Диференціалом n-го порядку функції *y* = *f(x)* називають диференціал від диференціала (*n* – 1) - го порядку, який дорівнює

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = y^{(n)}{}_x dx^n. \qquad (7.8)$$

Розглянемо випадок складеної функції. Нехай маємо функцію

y = *f(x)*, *x* = *x(t)*.

Знайдемо диференціал другого порядку і перевіримо, чи не зміниться його загальний вигляд:

$$d^2y = d(dy) = d\left(y'_x dx\right) = d\left(y''_x dx + y'_x dx^2\right) = y''_x dxdx + y'_x x''_t dt^2$$

$$d^2y = y''_x d^2x + y'_x x''_t dt^2. \qquad (7.9)$$

Бачимо, що форма другого диференціала у випадку складеної функції змінилася. Перший диференціал функції f визначають однією і тією самою формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи є функцією іншого аргументу. Цю властивість диференціала називають *інваріантністю форми першого диференціала*. Тобто диференціали другого та більш високих порядків не мають властивості інваріантності форми диференціала.

Контрольні запитання

1) Сформулюйте властивість інваріантності форми першого диференціала.
2) У чому полягає механічний зміст похідної другого порядку?
3) Сформулюйте означення похідної *n*-го порядку.
4) Сформулюйте означення диференціала *n*-го порядку.

8. Лекція №8. Дослідження функцій за допомогою першої похідної.

План

1. Монотонність функцій. Екстремальні точки.
2. Локальні екстремуми функцій.
3. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції.

1. Функцію $y = f(x)$ називають *зростаючою (спадною)* на інтервалі $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, якщо для будь-яких $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ з нерівності $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}$ випливає нерівність $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})\right)$.

Функцію *y = f(x)* називають *незростаючою (неспадною)* на інтервалі $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, якщо для будь-яких $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ із нерівності $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}$ випливає нерівність $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})\big)$.

Зростаючі та спадні функції називають *строго монотонними* або монотонними в строгому значенні, а незростаючі та неспадні – монотонними або монотонними у широкому значенні. Інтервали, у яких функція спадає чи зростає, називають інтервалами монотонності.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають *стаціонарними*, а ті, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, *критичними точками*.

Теорема. Якщо функція *f(x)* тотожно стала на інтервалі $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ то її похідна рівна нулю.

Теорема. Для того, щоб неперервна на сегменті $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ і диференційовна на інтервалі $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ функція *f(x)* була неспадною (незростаючою), необхідно і достатньо, щоб $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}$).

<u>Доведення:</u>

- Необхідність.

Нехай функція *f(x)* є неспадною, тоді для будь-яких $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ із справедливим буде $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \geq \boldsymbol{0}$.

Складемо відношення $\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})}{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}} \geq \boldsymbol{0}$. Якщо $\boldsymbol{x_2} \to \boldsymbol{x_1}$, то

$$\lim_{\boldsymbol{x_2} \to \boldsymbol{x_1}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})}{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}} \geq \boldsymbol{0}.$$

Для незростаючої доводиться аналогічно.

- Достатність.

Нехай $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Доведемо, що функція неспадна. Тобто, що $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \geq \boldsymbol{0}$.

Функція *f(x)* задовольняє усі вимоги теореми Лагранжа. А отже, для неї справедливим буде $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) = \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{C})(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})$, $\boldsymbol{C} \in (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$.

Оскільки $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{C}) \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} > \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \geq \boldsymbol{0}$.

Отже, функція *f(x)* є неспадною.

Теорему доведено.

Точка $\boldsymbol{x_0}$ називається *точкою максимуму функції f(x)*, якщо існує окіл $(\boldsymbol{x_0-\delta};\ \boldsymbol{x_0+\delta}), \boldsymbol{\delta>0}$ точки $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a,b})$ і такий, що $\boldsymbol{f(x)<f(x_0)}$ для всіх $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_0-\delta};\ \boldsymbol{x_0+\delta}), \boldsymbol{x \neq x_0}$. Число $\boldsymbol{f(x_0)}$ називають *максимумом функції f(x)* у точці $\boldsymbol{x_0}$.

Точка $\boldsymbol{x_0}$ називається *точкою мінімуму функції f(x)*, якщо існує окіл $(\boldsymbol{x_0-\delta};\ \boldsymbol{x_0+\delta}), \boldsymbol{\delta>0}$ точки $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a,b})$ і такий, що $\boldsymbol{f(x)>f(x_0)}$ для всіх $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_0-\delta};\ \boldsymbol{x_0+\delta}), \boldsymbol{x \neq x_0}$. Число $\boldsymbol{f(x_0)}$ називають *мінімумом функції f(x)* у точці $\boldsymbol{x_0}$.

Точки максимуму й мінімуму функції називають ще *екстремальними точками*, а максимум і мінімум – *екстремумом* функції.

Графік функції поблизу точок зростання (спадання) та екстремальних точок зображено на рис. 4, *а-г*.

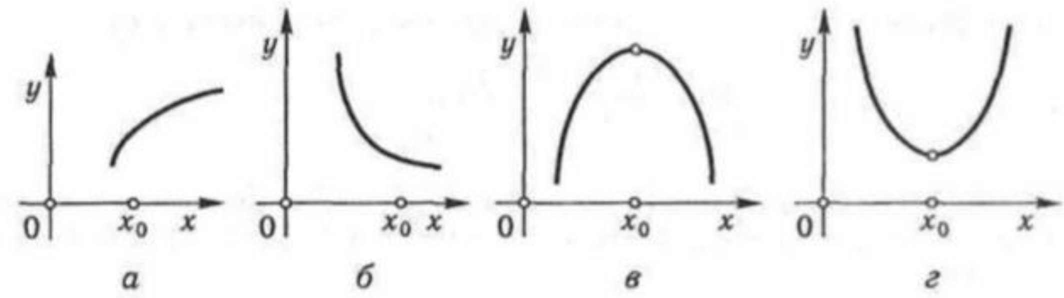


Рисунок 6

2. Екстремальні точки, як випливає з означення, це такі точки, в яких функція набуває відповідно найбільшого чи найменшого значення порівняно зі значеннями функції, яких вона набуває в точках, досить близьких до екстремальної точки. Такий екстремум називають локальним.

Зауваження: Не слід плутати локальний максимум (мінімум) з найбільшим (найменшим) значенням функції на відрізку. Локальних максимумів чи мінімумів функція може мати кілька, тоді як найбільше значення (абсолютний максимум) і найменше значення (абсолютний мінімум), якщо існують, єдині.

Локальний максимум може бути меншим за локальний мінімум. Абсолютний мінімум не може перевищувати абсолютний максимум. Локальних екстремумів функція досягає лише у внутрішніх точках відрізка. В той час, як абсолютний може досягати і на його кінцях.

Теорема (необхідна умова існування локального екстремуму функції). Якщо точка $\boldsymbol{x_0}$ є точкою екстремуму функції *f(x)*, то похідна $\boldsymbol{f'(x)}$ в цій точці рівна нулю.

Доведення теореми випливає з теореми Ферма.

Геометричний зміст необхідної умови: Якщо точки $\boldsymbol{x_i}$ є точками локального екстремуму і у цих точках існують невертикальні дотичні, то вони паралельні до осі *Ox*.

Якщо точки $\boldsymbol{x_i}$ є точками, в яких $\boldsymbol{f'(x_i) = 0}$, то це ще не означає, що ці точки є точками локального мінімуму чи локального максимуму.

Перша достатня умова існування екстремуму. Нехай $\boldsymbol{x_0}$ - критична точка функції *f(x)* і нехай існує окіл цієї точки $\boldsymbol{(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)}$, в якому функція має похідну, окрім, можливо, самої точки $\boldsymbol{x_0}$. Тоді

– якщо в інтервалі $\boldsymbol{(x_0 - \delta;\ x_0)}$ $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, а в інтервалі $\boldsymbol{(x_0;\ x_0 + \delta)}$ $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, то точка $\boldsymbol{x_0}$ є точкою локального максимуму функції;

– якщо в інтервалі $\boldsymbol{(x_0 - \delta;\ x_0)}$ $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, а в інтервалі $\boldsymbol{(x_0;\ x_0 + \delta)}$ $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, то точка $\boldsymbol{x_0}$ є точкою локального мінімуму функції;

– якщо на інтервалах $\boldsymbol{(x_0 - \delta;\ x_0)}$ і $\boldsymbol{(x_0;\ x_0 + \delta)}$ похідна набуває однакового знаку, то точка $\boldsymbol{x_0}$ не є екстремальна.

Друга достатня умова існування екстремуму. Якщо функція *f(x)* в околі точки $\boldsymbol{x_0}$ має похідні першого та другого порядків, причому $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, то,

- якщо $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$, точка $\boldsymbol{x_0}$ – точка локального максимуму;
- якщо $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, точка $\boldsymbol{x_0}$ – точка локального мінімуму.

Третя достатня умова існування екстремуму. Якщо в стаціонарній точці $\boldsymbol{x_0}$ функція *f(x)* має всі похідні *n* -1 порядку, які дорівнюють нулю, а $\boldsymbol{f^{(n)}(x) \neq 0}$, то тоді,

- якщо *n* – непарне, то точка $\boldsymbol{x_0}$ не є екстремальна;
- якщо *n* – парне, то у випадку $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0) > 0}$, то точка $\boldsymbol{x_0}$ – точка локального мінімуму; а якщо $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0) < 0}$, то точка $\boldsymbol{x_0}$ – точка локального максимуму.

3. Нехай функція *f(x)* є неперервною на деякому відрізку $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, тоді за другою теоремою Ваєрштрасса, функція має на цьому відрізку найбільше і найменше значення.

Якщо функція *f(x)* набуває свого найбільшого (найменшого) значення у внутрішніх точках відрізка $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, то це значення є локальним максимумом (мінімумом) заданої функції. Звідси випливає, що для знаходження точок найбільшого (найменшого) значення функції *f(x)* на відрізку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, потрібно знайти всі локальні максимуми (мінімуми) і порівняти їх із значеннями функції, які вона набуває на кінцях відрізка.

Приклад.

1) Знайти відрізку найбільше і найменше значення функції $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1}$ на відрізку $\left[\boldsymbol{-2; \frac{5}{2}}\right]$.

Розв'язання.

Знаходимо стаціонарні точки, для цього шукаємо похідну:

$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 6x - 12}$.

Прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо рівняння: $\boldsymbol{6x^2 - 6x - 12 = 0}$.

Отримали стаціонарні точки $\boldsymbol{x_1 = -1}, x_2 = \boldsymbol{2}$. Точок, в яких похідна не існує, немає.

Обчислимо значення функції в даних точках, а також на кінцях відрізка, тобто в точках $\boldsymbol{x_3 = -2, x_4 = \frac{5}{2}}$:

$\boldsymbol{f(-1) = 8}$; $\boldsymbol{f(2) = -19}$; $\boldsymbol{f(-2) = -3}$; $\boldsymbol{f\left(\frac{5}{2}\right) = -16\frac{1}{2}}$.

Отже, найбільше значення $\boldsymbol{f(-1) = 8}$, а найменше - $\boldsymbol{f(2) = -19}$.

Контрольні запитання:

1) Яку функцію називають зростаючою (спадною)?

2) У чому полягає відмінність між стаціонарними і критичними точками?

3) Дайте визначення таким поняттям: точка максимуму (мінімуму), максимум (мінімум) функції, екстремум функції.

4) Назвіть необхідну і достатні умови існування екстремуму.

9. Лекція №9. Дослідження функцій за допомогою другої похідної.

План

1. Опуклість та вгнутість кривих. Точки перегину.
2. Асимптоти графіка функцій.
3. Загальна схема повного дослідження функції та побудова графіка.

1. Нехай функція *f(x)* є визначеною на $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$.

Крива *y = f(x)* називається *опуклою* (*увігнутою*) на інтервалі $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, якщо всі її точки графіка функції, крім точки дотику, лежать нижче (вище) за її довільну дотичну на цьому інтервалі.

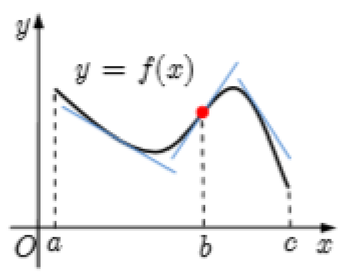


Рисунок 7

Точкою перегину називають таку точку кривої, яка відділяє опуклу частину графіка функції від увігнутої.

На рисунку бачимо, що крива є опуклою на інтервалі $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, вгнутою на інтервалі $(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c})$. Точка $(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$ буде точкою перегину.

Відзначимо, що дотична в точці перегину перетинає криву $y = f(x)$. І всі точки кривої на інтервалі $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ знаходиться над дотичною, а всі на інтервалі $(\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$ під дотичною.

Позначимо довільну ординату кривої через y, а дотичної через Y, нехай точка M_0 з координатами $(x_0; y_0)$ є точкою дотику, $x_0 \in (\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$.

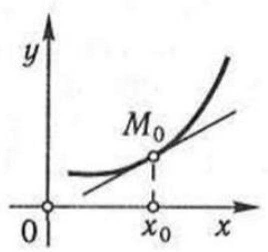


Рисунок 8

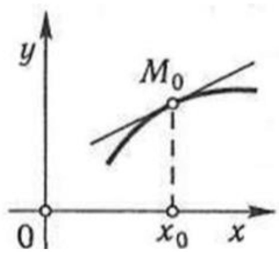


Рисунок 9

$y - Y < 0$ для $\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, $x \neq x_0$ $\qquad$ $\forall\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x_0} \rightarrow y - Y > 0$

Тоді сформуємо означення опуклості та вгину у такій формі:

Крива $y = f(x)$ буде опуклою на інтервалі $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, якщо $\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, і $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x_0}$ буде справедливим $y - Y < 0$.

Крива $y = f(x)$ буде вгнутою на інтервалі $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, якщо $\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, і $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x_0}$ буде справедливим $y - Y > 0$.

Інтервали опуклості та вгнутості будемо шукати за допомогою теорем.

Теорема: Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на інтервалі $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$. Тоді:

1) Якщо $\boldsymbol{f''(x) < 0}$, при $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, то крива є опуклою на $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$.
2) Якщо $\boldsymbol{f''(x) > 0}$, при $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, то крива є вгнутою на $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$.

Доведення: Оскільки функція є двічі диференційованою, то розкладемо її в ряд Тейлора в околі точки x_0.

Тоді $\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(C)(x-x_0)^2}{2!}}$

Використаємо рівняння дотичної, проведеної до кривої в точці $\boldsymbol{x_0}$:

$y - y_0 = \boldsymbol{f'(x_0)(x - x_0)}$

Тоді: $\boldsymbol{Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$.

$$\boldsymbol{y - Y = \frac{f''(C)(x-x_0)^2}{2!}}.$$

Очевидно, що знак різниці визначається знаком другої похідної. Тоді, якщо $\boldsymbol{f''(x) > 0}$ при $\boldsymbol{x \in (a;b)}$, то і $\boldsymbol{f''(C) > 0 \Rightarrow y - Y > 0}$ - крива вгнута.

Якщо $\boldsymbol{f''(x) < 0}$, при $\boldsymbol{x \in (a;b)}$, то і $\boldsymbol{f''(C) < 0 \Rightarrow y - Y < 0}$ - крива опукла.

<u>Зауваження</u>: З наведеної теореми випливає, що в точці перегину друга похідна, якщо вона існує, дорівнює нулю $\boldsymbol{f''(x) = 0}$. Однак точками перегину можуть бути і точки, у яких друга похідна не існує (наприклад, точка $\boldsymbol{x = 0}$ функції $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$).

Точки, у яких друга похідна $\boldsymbol{f''(x)}$ дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками другого роду* функції *f(x)*.

<u>Достатня умова існування точки перегину.</u>

Нехай $\boldsymbol{x_0}$ – критична точка другого роду функції *f(x).* Якщо під час переходу через неї друга похідна змінює знак на протилежний, то точка з абсцисою $\boldsymbol{x_0}$ є точкою перегину.

Отже, щоб знайти точки перегину кривої, треба знайти критичні точки другого роду і дослідити зміну знака другої похідної під час переходу через ці точки.

2. *Асимптотою* кривої називають таку пряму, що відстань *d* від точки *M* кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка *M* віддаляється вздовж нескінченної гілки від початку координат.

Зазначимо, що не кожна крива з нескінченними вітками має асимптоту.

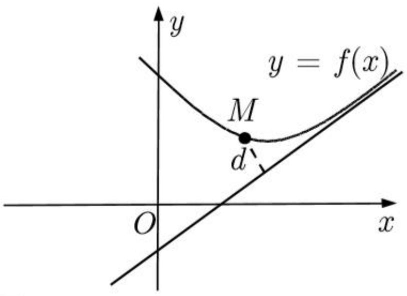


Рисунок 10

Так, парабола $y = x^2$ асимптот немає, а гіпербола $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ має дві асимптоти (осі *Ox* і *Oy*). Для кривої $y = \lg x$ асимптотою є вісь *Oy*.

Розрізняють *похилі* та *вертикальні асимптоти*.

Знайдемо необхідні і достатні умови для того, щоб крива мала асимптоту, і виведемо рівняння асимптоти.

Для цього припустимо, що криву задано параметрично: $\begin{cases} \boldsymbol{x = \varphi(t)}, \\ \boldsymbol{y = \psi(t)}, \end{cases} \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{\alpha};\ \boldsymbol{\beta}]$. Вважатимемо, що коли $\boldsymbol{t \to \beta}$, то точка *M* по кривій рухається у нескінченність.

Нехай крива має похилу асимптоту, тоді рівняння прямої *l* можна записати у вигляді: $y - \boldsymbol{kx} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. (7.1)

Знайдемо відстань від точки *M* до кривої: $\boldsymbol{d} = \frac{|\boldsymbol{y(t) - kx(t) - b}|}{\sqrt{\boldsymbol{1 + k^2}}}$.

$\lim\limits_{t \to \beta} \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ або $\lim\limits_{t \to \beta} (\boldsymbol{y(t) - kx(t) - b}) = \boldsymbol{0}$. (7.2)

Умова (7.2) є достатньою умовою, щоб пряма *l* була похилою. З цієї ж формули знайдемо *k* і *b*:

$$\boldsymbol{k} = \lim_{t \to \beta} \frac{\boldsymbol{y(t)}}{\boldsymbol{x(t)}}, \boldsymbol{b} = \lim_{t \to \beta} \big(\boldsymbol{y(t) - kx(t)}\big). \quad (7.3)$$

Отже, для того, щоб пряма (7.1) була похилою асимптотою кривої, необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення (7.3).

Нехай крива має вертикальну асимптоту $x = a$, тоді

$$\lim_{t \to \beta} \boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{a}, \lim_{t \to \beta} \boldsymbol{y(t)} = \infty. \quad (7.4)$$

Отже, для того, щоб крива мала вертикальну асимптоту, необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення (7.4).

3. Побудову графіка функції зазвичай здійснюють за точками, але не завжди такий метод є доцільним і зручним. Тому, перш ніж будувати графік функції, потрібно провести дослідження функції, а саме:

1. Знайти область визначення функції.

Це дає змогу визначити всі точки осі абсцис, над (під) якими пройде графік функції, а над (під) якими ні.

2. Знайти точки перетину графіка з координатними осями.

Для цього потрібно розв’язати дві системи рівнянь:

$\begin{cases} \boldsymbol{y = f(x)}, \\ \boldsymbol{y = 0} \end{cases}$ і $\begin{cases} \boldsymbol{y = f(x)}, \\ \boldsymbol{x = 0} \end{cases}$.

Перша система дає точки перетину з віссю $\boldsymbol{Ox}$, а друга – з віссю $\boldsymbol{Oy}$.

3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.

Розв'язання цього питання може полегшити побудову графіка в тому розумінні, що побудову доведеться виконувати не в усій області визначення функції, а тільки в її частині.

4. Знайти точки розриву функції та дослідити їх характер.

Знання характеру точок розриву допоможе встановити вигляд графіка функції поблизу цих точок.

5. Знайти значення функції на кінцях відрізків, де визначена функція.

Якщо областю визначення функції є інтервал або кілька інтервалів, то потрібно знайти граничне значення функції, коли x наближається до одного з кінців розглянутих проміжків.

6. Знайти інтервали монотонності функції.

Для того, щоб знати, де функція зростає, а де спадає.

7. Знайти екстремальні точки й побудувати їх на площині.

8. Знайти інтервали вгнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції.

9. Знайти точки перегину і побудувати їх на площині.

10. Знайти асимптоти графіка функції.

11. На основі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Контрольні запитання:

1) Наведіть означення опуклості, увігнутості й точки перегину графіка функції.

2) Сформулюйте достатні умови опуклості та існування точки перегину графіка функції.

3) Дайте визначення асимптоти функції та назвіть умови існування асимптот.

4) Сформулюйте алгоритм дослідження та побудови графіка функції. Яку роль відіграють перша та друга похідна у побудові?

10. Лекція №10. Дослідження функції і графік функції.

План

1) Визначення області визначення.
2) Точки перетину графіка функціїї.
3) Парність і непарність функції.
4) Обчислення критичних точок.

1. Область визначення – всі можливі значення x. Обмеження для основних функції:

$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$
$y=\sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x)\geq 0$
$y=\lg(f(x))$	$f(x)>0$
$y=\log_{f(x)}a \quad (a>0)$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$

2. Точки перетину графіка функціїї:

- з віссю *Ox*: *y*=0 (розв'язати рівняння *f*(*x*)=0 та виписати точку *A*(*x*;0) або декілька точок)

- з віссю *Oy*: *x*=0 (у рівняння *y*=*f*(*x*) підставити *x*=0 та виписати точку *B*(0;*y*).

3. $f(-x)=f(x)$ – функція **парна**;

$f(-x)=-f(x)$ – функція **непарна**;

$f(x+T)=f(x)$ – функція періодична, *T* – період функції.

4. Обчислимо похідну $f'(x)$ заданої функції $f(x)$, а потім знаходимо точки, в яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує. Ці точки називаються критичними для функції $f(x)$.

Критичними точками область визначення функції $f(x)$ розбивається на інтервали, на кожному з яких похідна $f'(x)$ зберігає свій знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності.

Дослідимо знак $f'(x)$ на кожному із знайдених інтервалів. Якщо на даному інтервалі $f'(x)>0$, то на цьому інтервалі $f(x)$ ***зростає***, якщо ж $f'(x)<0$, то на цьому інтервалі $f(x)$ ***спадає.***

$f'(x)>0$, *то* ↗ *(зростає)*
$f'(x)<0$, *то* ↘ *(спадає)*

Якщо $f'(x)$ змінює знак при переході через таку точку, то функція $f(x)$

в цій точці має екстремум. А саме, якщо знак змінюється з мінуса на плюс, то в цій точці мінімум; якщо з плюса на мінус, то в цій точці максимум. Якщо ж знак $f'(x)$ не змінюється при переході через задану точку, то функція $f(x)$ не має екстремуму в цій точці.

« + » → « - », то x_0 - max
« - » → « + », то x_0 - min

Точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$ називаються точками екстремуму даної функції, а значення функції $f(x)$ в точках максимуму і мінімуму називають максимумом і мінімумом функції або екстремумами функції

Приклад: Дослідити функцію $f(x)=x^3-3x^2$;

1) Знайти область визначення функції.

$$D(f)=R;$$

2) Знаходимо точки перетину графіка з координатними осями.

Знайдемо абсциси точок перетину графіка з віссю OX:

$$x^3-3x^2=0;$$

$$x^2(x\text{-}3) = 0;$$

$$x = 0 \text{ або } x = 3.$$

Отримані точки $A(0;0)$ та $B(3;0)$ Знайдемо ординату точки перетину графіка з віссю OY: $y=0^3\text{-}3\cdot0^2 = 0$.

Отримана точка $C(0;0)$.

3) З'ясовуємо парність (непарність), періодичність функції.

Оскільки $f(\text{-}x) = (\text{-}x)^3\text{-}3(\text{-}x)^2 = \text{-}x^3\text{-}3x^2$, то функція не є парною, не є непарною. Функція неперіодична.

4) З'ясовуємо парність (непарність), періодичність функції.

Знайдемо похідну:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

$$D(f') = R;$$

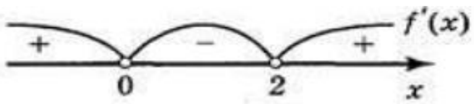
Знайдемо стаціонарні точки: $f'(x) = 0$;

$$3x(x-2) = 0;$$

$$x = 0, \text{або } x = 2.$$

5) Знаходимо проміжки зростання, спадання, точки екстремуму та екстремальні значення функції. З'ясовуємо поведінку функції на кінцях області визначення.

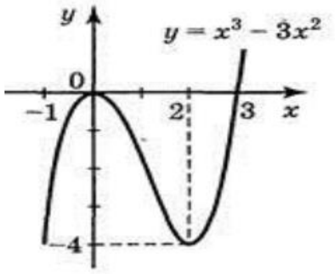
Стаціонарні точки розбивають координатну пряму на три проміжки: (-∞; 0), (0; 2), (2; +∞). На рисунку вказано знаки похідної. (Символ ↗ в таблиці означає, що функція зростає, а символ ↘ означає, що функція спадає.) Складемо таблицю:



x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗
		max		min	

6) На підставі проведеного дослідження будуємо графік функції. Якщо залишається невизначеність, то знаходимо додаткову точку.

Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y = x^3 - 3x^2$



<u>Контрольні питання:</u>

1). Для чого похідні використовують в дослідженні функції?

2). Похідні яких порядків використовується в дослідженні функцій?

3). Чи може застосування похідно при дослідженні бути неможливим?

РОЗДІЛ ІІ. МАТЕРІАЛ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕМИ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Другий розділ містить 10 практичних занять. Кожне практичне заняття містить необхідні формули, приклади виконаної роботи та завдання для самосійної роботи.

1. Практичне заняття №1. Функція. Основні поняття функції.

Приклад: Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\log_2 \frac{x+1}{2x-3}}$;

Задана функція буде визначена, якщо одночасно будуть виконуватись умови:

1)підкореневий вираз невід'ємний.

2)Вираз під знаком логарифма додатній.

3)Знаменник дробу відмінний від нуля.

Отже, область визначення даної функції є розв'язком наступної системи:

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x+1}{2x-3} \geq 0; \\ \frac{x+1}{2x-3} > 0; \\ 2x-3 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2x-3} \geq 1; \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{3}{2}; 4\right], \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right). \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{2}; 4\right].$$

Самостійне виконання:

a. $y = \frac{\sqrt[6]{x^2-1}}{x}$;

b. $y = \ln \cos x$;

c. $y = \frac{1}{16^{x^2} - 2^x}$;

d. $y = \sqrt{\cos x}$;

e. $y = \sqrt[4]{x+3} + \sqrt[4]{3-x}$;

f. $y = \arccos(3-x)$.

Домашнє завдання:

- $y = \sqrt{x^2(x-2)}$;
- $y = arctg \frac{x}{x^2-9}$.

2. Практичне заняття №2. Границя функції в точці.

Формули для використання:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} C - C; C = const;$$

$$\lim_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)};\ \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0;$$

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)$;

$$\lim_{x\to} 2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5;$$

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2 - 13x + 5)$;

$$\lim_{x\to 2}(5x^2 - 12x + 5) = \lim_{x\to 2}(5x^2) - \lim_{x\to 2}(13x) + \lim_{x\to 2} 5 = 20 - 26 + 5 = -1.$$

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)} = \frac{2}{2\cdot 1 - 1} = 2.$$

Приклад: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1}$;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x-\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+0+0}{3+0+0} = \frac{1}{3};$$

Приклад: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)}$;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty}\frac{(8x^2+36x^2+54x+27)(x+1)-8x^4}{(9x^2+12x+4)(x-4)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4+36x^3+54x^2+27x+8x^3+36x^2+54x+27-8x^4}{9x^3+12x^2+4x-36x^2-48x-16} = \lim_{x\to\infty}\frac{44x^3+90x^2+81x+27}{9x^3-24x^2-44x-16} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{44x^3}{9x^3} = \frac{44}{9}.$$

Самостійне виконання:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{x}$;

b. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^2-1}{6x^2-5x+1}$;

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$;

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^5}{2x^2+1}-\frac{x^3-x}{2}\right)$;

e. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$;

f. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+5}$;

g. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

h. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

i. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$;

j. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^2-4x+4}$;

k. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos x}{1-\cos 5x}$.

Домашнє завдання:

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{8x+1}-5}{2x^2+2-21}$;
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2-x}{x^3-x^2-x+1}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+3x-4x^3}{4+x^3}$.
- $\lim\limits_{x\to 6}\frac{4x^2-1}{2x-1}$.

3. Практичне заняття №3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Важливі границі.

Формули для використання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k, k\neq 0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=k, k\neq 0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}=1.$$

Приклад: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Приклад: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=0$$

Приклад: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{(2x-1)\frac{x-2}{3}\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^{6}.$$

Самостійне виконання:

a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\,x}{x}$;

b. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{tg\,2x}$;

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$;

d. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$;

e. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x\cos 3x}{5x}$;

f. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{7x}\right)^{5x}$.

Домашнє завдання:

- $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$.

4. Практичне заняття №4. Похідна функції. Диференціювання функцій.

Формули для використання:

$$(C\cdot f(x))'=C\cdot f'(x)$$

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}\ (g(x)\neq0)$$

$$\big(f(g(x))\big)'=f'(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}$$

$y'=(\sin x)'=\cos x,$

$y'=(\cos x)'=-\sin x,$

$y'=(tg\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x},$

$y'=(ctg\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$

$$y' = (arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y' = (arc\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y' = (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y' = (arc\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Приклад: $y = 3x^3 + 10x^2 - 2x + 6;$

$$y' = 9x^2 + 20x - 2;$$

Приклад: $y = \frac{x^2-1}{3x^3+5};$

$$y' = \frac{(x^2-1)'(3x^3+5)-(x^2-1)(3x^3+5)'}{(3x^3+5)^2} = \frac{2x(3x^3+5)-(x^2-1)(9x^2)}{(3x^3+5)^2}$$

Приклад: $\boldsymbol{y = \cos^2 4x}$

$$y' = 2cos4x(cos4x)' = 2cos4x(-sin4x)\,(4x)' = -8cos4xsin4x.$$

Самостійне виконання:

a. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1);$

b. $y = (3x^4 + 5x - 1)^{10};$

c. $y = (5e^{2x} - \frac{6}{x^3\sqrt[5]{x^2}} + tg^4 ax)^5;$

d. $y = arctg\sqrt{7 - x^2} + 10^{3x^2};$

e. $y = cos^3 x;$

f. $y = \frac{1}{4} tg^4 x.$

Домашнє завдання:

- $y = 10^{2x-3};$
- $y = e^{\arcsin 2x};$
- $y = cos^2 4x;$
- $y = 3\sin(3x + 5).$

5. Практичне заняття №5. Диференціювання неявно заданої функції. Логарифмічне диференціювання.

Формули для використання:

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} \ (g(x) \neq 0)$$

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

.

Приклад: $y = 2x + \arccos 3y$;

$$y' = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-9y^2}} 3y';$$

$$y'\left(1 + \frac{3}{\sqrt{1-9y^2}}\right) = 2;$$

$$y'\left(\frac{\sqrt{1-9y^2}+3}{\sqrt{1-9y^2}}\right) = 2;$$

$$y' = \frac{2\sqrt{1-9y^2}}{\sqrt{1-9y^2}+3}.$$

Приклад: $e^{-x+y} = x - y^2$.

$$(e^{-x+y})' = (x - y^2);$$

$$e^{-x+y}(-x+y)' = (x)' - (y^2)';$$

$$e^{-x+y}(-1+y') = 1 - 2yy';$$

$$y'(e^{-x+y} + 2y) = 1 + e^{-x+y};$$

$$y' = \frac{e^{y-x}+1}{e^{y-x}+2y}.$$

Приклад: $3^x + 3^y = 3^{x-y}$;

$$3^x \cdot \ln 3 + 3^y \cdot \ln 3 \cdot y' = 3^{x+y} \ln 3 \cdot (1 + y');$$

$$3^x - 3^{x+y} = (3^{x+y} - 3^y) \cdot y';$$

$$y' = \frac{3^x(1-3^y)}{3^y(3^x-1)} = \frac{1-3^y}{3^x-1} 3^x 3^{-y} = \frac{1-3^y}{3^x-1} 3^{x-y}.$$

Приклад: $\ln y = \ln x^{5x}$;

$$(\ln y)' = (5x \cdot \ln x)' = (5x)' \cdot \ln x + 5x \cdot (\ln x)' = 5 \ln x + 5x \cdot \frac{1}{x} = 5(\ln x + 1);$$

Самостійне виконання:

a. $x - y = arcsin\, x - arcsin\, y$;

b. $cos^2 \frac{\sqrt{x}}{y} y = 5y$;

c. $y = 1 + xe^y$;

d. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = a^{\frac{1}{2}}$;

e. $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$;

f. $\cos xy = \frac{y}{x}$;

g. $x^2 + y - arctg\, xy = 0$.

h. $x - y = \ln\left(y^2 - \sqrt{x}\right)$;

i. $y = \frac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2}$;

j. $y = (x^2 + 1)\sqrt{\frac{x(2x-1)}{(3x+5)^3\sqrt[3]{(x-5)^2}}}$;

k. $y = x^2 \cdot 5^{\sqrt{x}} \cdot \tan x$;

l. $\ln y = \ln \frac{x^3(x^2+3)\cdot \sin x}{(x-4)\sqrt{3x+5}}$;

m. $y = (\ln x)^{\sin x}$.

Домашнє завдання:

- $y = 1 + xe^y$;
- $y \sin x + \cos(x - y) = \cos y$;
- $e^{x+y} = \sin \frac{x}{y}$.
- $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} arctg\, x$;
- $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$.

6. Практичне заняття №6. Диференціал. Його застосування.

Формули для використання:

$$d(C) = 0;$$

$$d(u + v - z) = du + dv - dz;$$

$$d(uv) = udv + vdu;$$

$$d(Cu) = Cdu;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0;$$

$$df(u) = f'(u)du.$$

Приклад: Знайти диференціал функції:

$$y = tg^2 x;$$

$$dy = (tg^2 x)' dx = 2tg\, x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \frac{2tg\, x}{\cos^2 x} \cdot dx.$$

Приклад: За допомогою диференціала наближено обчислити:

$$\sqrt[3]{8.01};$$

$$f(x) - \sqrt[3]{x};$$

$$x_0 = 8;$$

$$x_0 + \Delta x = 8.01;$$

$$\Delta x = 8.01 - 8 = 0.01;$$

Знаходимо:

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}};$

$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2;$

$f'(8) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$

Отже:

$\sqrt[3]{8.01} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot 0.01 = 2 + \frac{1}{1200} \approx 2.001.$

Самостійне виконання:

Знайти диференціал функції:

a. $y = \frac{1}{1-t^2};$
b. $y = 5^{\ln tg\, x};$
c. $y = x^3 \ln x;$
d. $y = xe^{-x^2};$
e. $y = e^{-x} \cos x\,;$

За допомогою диференціала наближено обчислити:

a. $y = \cos x,$ при $x = 61;$
b. $y = e^x,$ при $x = 0{,}1;$
c. $y = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}},$ при $x = 2{,}2;$
d. $y = \sqrt{x^2 + 16},$ при $x = 3{,}02;$

Домашнє завдання:

Знайти диференціал функції:

- $y = x + \frac{\ln x}{x};$
- $y = xe^{\frac{1}{x}};$

За допомогою диференціала наближено обчислити:

- $y = \sqrt{\frac{x+7}{x+2}}$, при $x = 2{,}1$.

7. Практичне заняття №7. Похідні вищих порядків.

Приклад: $y = -2 - 3x^2 + x^3$;

$$y' = -6x + 3x^2;$$

$$y'' = -6 - 6x;$$

$$y''' = 6;$$

Усі похідні порядку *n>3* дорівнюють 0.

Приклад: Знайти другу похідну функції $f(x) = y^{\sin x}$;

$$f'(x) = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x;$$

$$f''(x) = e^{\sin x}(\cos x)' + \left(e^{\sin x}\right)'\cos x = e^{\sin x}(-\sin x) + e^{\sin x}\cos x \cdot \cos x$$
$$= e^{\sin x}(cos^2 x - x - \sin x).$$

Приклад: Знайти другу похідну функції $y = \frac{x^2+1}{x-1}$;

$$y' = \frac{(x-1)(x^2+1)' - (x-1)\prime(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2};$$

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right) = \frac{(x-1)^2(x^2-2x-1)' - ((x-1)^2)'(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} ==$$
$$\frac{(x-1)^2(2x-2)-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)2(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3}.$$

Приклад: Розкласти в ряд Тейлора функцію *f*(*x*)=ln(*x*) за степенями (*x*-1).

Розклад функції за степенями (x-1) слід розуміти, як розклад в точці x=1. Обчислимо значення функції та її похідних в цій точці

$$f(1) = \ln 1 = 0;$$

$$f'^{(x)} = (\ln x)' = \frac{1}{x}, f'(1) = \frac{1}{1} = 1;$$

$$f''(x) = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2}, f''(1) = -1;$$

$$f'''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3}, f''^{\prime(1)} = 2;$$

Підставляємо отримані значення в формулу Тейлора

$$\frac{1}{x} = 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{2}{3!} \cdot (x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$$

Самостійне виконання:

Знайти другу похідну функції:

a. $y = e^x \sin x - 3\sqrt{x}$;

b. $y = e^x \cos x$;

c. $y = t^5 + 2t$;

d. $y = xe^{-x^2}$;

e. $y = cos^3 t$;

f. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

g. $y = a(\sin t - t\cos t)$;

h. $x = \ln(tg\ t)$.

Розкласти в ряд Тейлора:

a. $f(x) = \ln(1 + \sin x)$;

b. $f(x) = \frac{1}{x+2}$, за степенями $(x - 1)$;

c. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, за степенями $(x + 2)$;

Домашнє завдання:

- $y = \arccos 2t$;
- $x = \frac{2-t}{2+t^2}$;
- $y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t}$;
- $f(x) = \frac{1}{x+3}$, за степенями $(x + 1)$.

8. Практичне заняття №8. Дослідження функцій за допомогою першої похідної.

Дослідження функції на монотонність, точки екстремуму.

1) Знаходження області визначення.
2) Знаходження точок перетину функції з осями Ox і Oy.
3) Дослідження на непарність.
4) Визначення точок розриву.
5) Дослідження функції на монотонність і точки розриву.

Приклад: $\boldsymbol{y = x^3 - 3x^2}$;

1) Функція є многочленом, область існування якого – вся множина дійсних чисел.

$$\boldsymbol{D(y)}: \boldsymbol{x} \in (-\infty, +\infty).$$

2) Знайдемо точки перетину графіка с віссю *Ox*, для цього покладемо *y=0*:

$$\boldsymbol{x^3 - 3x^2 = 0};$$

$$\boldsymbol{x^2(x-3) = 0};$$

Звідки:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0}; \\ \boldsymbol{x_2 = 3}; \end{cases}$$

Отже, в точках *O(0;0)* та *A(3;0)* графік перетинає вісь *Ox*.

Точки перетину з віссю *Oy*: покладемо *x=0*, тоді знайдемо *y=0*.

Тобто, графік перетинає вісь *Oy* у точці *O(0;0)*.

3) Функція не періодична, вона не є парною, не є непарною $\boldsymbol{\big(y(-x) \neq y(x)\big)}$

Та

$$\boldsymbol{y(-x) \neq -y(x)}$$

4) Функція є неперервною на всій числовій прямій. Тобто точок розриву не має.

5) Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум.

Обчислимо:

$$\boldsymbol{y' = 3x^2 - 6x};$$

Знайдемо критичні точки з рівняння:

$$\boldsymbol{y' = 0: 3x^2 - 6x = 0};$$

$$\boldsymbol{3x(x-2) = 0};$$

Отримаємо, що

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0}; \\ \boldsymbol{x_2 = 2}; \end{cases}$$

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(0;2)$.

Згідно з правилом знаходження екстремуму, *x=0* - точка максимуму, *x=2* - точка мінімуму.

Обчислимо

$\boldsymbol{y_{max} = y(0) = 0}$,

$\boldsymbol{y_{min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4}$.

Самостійне виконання:

a. $y = \frac{x+3}{x-2}$, при $x \in (2; +\infty)$;

b. $y = e^x$, при $x = 0{,}2$;

c. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;

d. $y = arctg\, x$, при $x = 0{,}98$;

e. $y = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$, при $x = 2{,}2$.

Домашнє завдання:

- $y = e^{x^2-x}$, при $x = 1{,}2$;
- $y = \sqrt{x^2 + 16}$, при $x = 0{,}2$.

9. Практичне заняття №9. Дослідження функцій за допомогою другої похідної.

1) Знаходження області визначення.
2) Знаходження точок перетину функції з осями Ox і Oy.
3) Дослідження на непарність.
4) Визначення точок розриву.
5) Дослідження функції на монотонність і точки розриву.
6) Знаходження інтервалів вгнутості та опуклості, точок перетину.

Приклад: $\boldsymbol{y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}}$;

1) $\boldsymbol{D(y)}: \boldsymbol{x \neq 0}$, тобто $\boldsymbol{x} \in (-\infty; \boldsymbol{0}) \cup (\boldsymbol{0}; +\infty)$;

2) Точки перетину графіка з координатними осями. При: $\boldsymbol{y = 0}$: $\boldsymbol{\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 0}$;

$\boldsymbol{\frac{x^2+4}{2x} = 0}$;

Звідки

$\boldsymbol{x^2 + 4 \neq 0}$;

Тобто з віссю *Ox* графік не перетинається.

Зважаючи на те, що $\boldsymbol{x \neq 0}$, робимо висновок, що графік не перетинає вісь *Oy*.

3) Функція не періодична, вона непарна бо

$\boldsymbol{y(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = -y(x)}$.

Тому її графік є симетричним відносно початку координат.

4) В точці *x=0* функція має розрив II-го роду, тому що

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to 0\pm 0}\frac{x^4+4}{2x} = \pm\infty;$$

Отже, пряма *x=0* - вертикальна асимптота.

5) Знайдемо $\boldsymbol{y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}}$;

Розв’яжемо рівняння: $\boldsymbol{y' = 0: \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0}$;

$\boldsymbol{\frac{2}{x^2} = \frac{1}{2}}$;

$\boldsymbol{x^2 = 4}$;

Звідки

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -2, \end{cases} - \text{критичні точки функції.}$$

Похідна не ічнує при *x=0∈D(y)*.

Функція зростає на інтервалах (-∞*;2*) та (*2;*+∞);

Функція спадає на інтервалі (-2;2).

X=-2 - точка максимуму функції, а *x=2* - точка мінімуму.

Обчислимо:

$\boldsymbol{y_{max} = y(-2) = -1 - 1 = 2}$,

$\boldsymbol{y_{min} = y(2) = 1 + 1 = 2}$.

Отже, A_1(-2;-2), A_2(2;2) – екстремальні точки.

6) Знайдемо:

$\boldsymbol{y'' = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{4}{x^3}}$.

Зважаючи на те, що

$\boldsymbol{y'' = \frac{4}{x^3} \neq 0}$

Робимо висновок, що перегину графік функції не має.

Функція вгнута на інтервалі (*0;*+∞) та опукла на інтервалі (-∞*;0*).

Самостійне виконання:

a. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, при $x = 4{,}2$;

b. $y = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, при $x = 0{,}1$;

c. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, при $x = 0{,}2$;

d. $y = \sqrt{x^3+1}$, при $x = 2{,}01$;

e. $y = e^{2x-x^2}$, при $x = 2{,}1$;

Домашнє завдання:

- $y = arcctg\, x$, при $x = 0{,}97$;
- $y = \sin(x+1)$.

10. Практичне заняття №10. Повне дослідження функцій та побудова графіка.

1. Знаходження області визначення.
2. Знаходження точок перетину функції з осями Ox і Oy.
3. Дослідження на непарність.
4. Визначення точок розриву.
5. Дослідження функції на монотонність і точки розриву.
6. Знаходження інтервалів вгнутості та опуклості, точок перетину.
7. В залежності від дослідження будуємо графік функції.

Приклад: Дослідити функцію $y = \frac{x^2-3}{x+1}$ та побудувати графік.

1) Функція визначена для всіх $x \neq -1$.
2) Функція загального виду, оскільки $f(-x) \neq \pm f(x)$. Функція не є періодичною.

   Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$, отже, маємо точки: $\left(-\sqrt{3}; 0\right), \left(\sqrt{3}; 0\right)$. Графік перетинає вісь ординат, якщо $x = 0 \Rightarrow y = -3$, маємо точку (0;-3) .

3) Точка x=-1 є точкою розриву функції. Оскільки:

   $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x^2-3}{x-1} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2-3}{x-1}=-\infty;$

То точка x=-1 є точкою розриву 2-го роду.

4) З дослідження пункта 3. Маємо що пряма x=-1 є вертикальною асимптотою.

Знайдемо похилі асимптоти у вигляді: $y=k_{1,2}x+b_{1,2}$;

$k_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{x\cdot(x+1)}=1;$

$b_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3}{x+1}-1x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x-3}{x+1}=-1;$

Отже, y=x-4 - похила асимптота.

5) Для знаходження інтервалів монотонності знайдемо похідну:

$y'=\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)'=\frac{2x(x+1)-(x^2-3)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2};$

Прирівняємо похудну до 0:

$y'=0\Rightarrow\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}=0;$

$(x+1)^2\neq 0;$

$x^2+2x+3=0\ -$ коренів немає;

Враховуючи що:

$x^2+2x+3>0;$

$(x+1)^2\geq 0;$

Робимо висновок що y' >0;

Отже дана функція зростає при $x\in(-\infty;-1)$ і при $x\in(-1;+\infty)$.

Точок екстремуму немає.

6) Знайдемо проміжки опуклості і вгнутості:

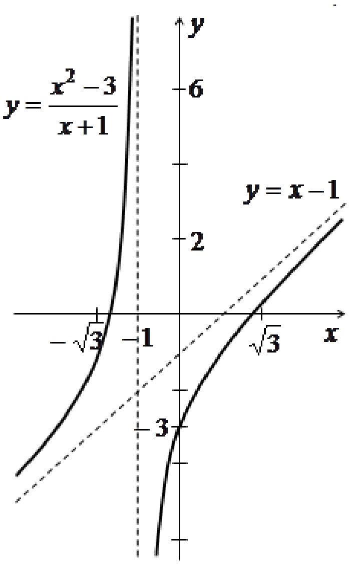
Для цього знайдемо 2-гу похідну функції:

$y''=\left(\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\right)'=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}.$

За методом інтервалів отримуємо, що y''>0 при $x\in(-\infty;-1)$ - тут графік функції вгнутий, та y''<0 при $x\in(-1;+\infty)$ - тут графік функції опуклий.

В самій точці $x=-1$ функція невизначена, тому точки перегину немає.

7) В залежності від дослідження будуємо графік:



Самостійне виконання:

Дослідити функцію:

a. $y = e^x x^{-1}$;

b. $y = \frac{4x^3+5}{x}$;

c. $y = x - \ln x$;

d. $y = x^{\frac{1}{2}} \ln x$;

e. $y = \frac{2}{x^2+x+1}$;

Домашнє завдання:

Дослідити функцію:

- $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;
- $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$;
- $y = \ln(x^2 + 1)$.

РОЗДІЛ ІІІ. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Розроблено самостійні та контрольна робота для перевірки засвоєння студентами матеріалу. До кожної роботи наведено розв'язаний типовий варіант.

Самостійна робота №1 з теми «Границя функції»

Варіант 0

1) Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x^2-4x}$;

При змінній прямуючій до нуля маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для її усуненення різницю коренів домножимо та поділимо на спряжений вираз, щоб в чисельнику утворити різницю квадратів. В знаменнику маємо поліном, який містить особливість, тому розкладемо його на прості множники. Після спрощень отримаємо залежність, границю якої легко знаходимо методом підстановки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x^2-4x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x\cdot(3x-4)\cdot\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\cdot(3x-4)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(3x-4)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{(0-4)\cdot(1+1)}=-0{,}25;$$

2) Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$;

Помножимо чисельник і знаменник на аргумент та зведемо до першої чудової границі

$$\mathit{lim}_{x\to 0}\frac{\mathit{sin}\,\alpha x}{\mathit{sin}\,\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\beta\sin\beta x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{1}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{\beta x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Самостійна робота №2 з теми «Диференціювання функцій»

Варіант 0

1) Продиференціюйте функцію $y = \ln(\cos x^2)$.

Позначимо $u = \cos x^2$.

$$(\ln\cos x^2)' = (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{u'}{u} = \frac{(\cos x^2)'}{\cos x^2}.$$

Таким же чином обчислимо похідну функції $\cos x^2$.

Знову позначимо $u = x^2$.

$$(\cos x^2)' = (\cos u)' = -\sin x^2 \cdot (x^2)' = -2x\sin x^2.$$

Далі, вставивши отриманий вираз, виходить

$$(\ln\cos x^2)' = \frac{-2x\sin x^2}{\cos x^2} = -2x\, tg\, x^2.$$

2) Продиференціювати функцію $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ до *2*-го порядку.

Визначаємо першу похідну для кореневої функції

$$y' = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Обчислюємо другу похідну за правилом похідної частки

$$y'' = \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)' = -\frac{1\cdot\sqrt{a^2-x^2} - x\cdot y'}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}0.$$

Контрольна робота №1 з теми «Границя функції. Її застосування»

Варіант 0

1) Знайти область визначення функції:

$$y = \frac{5 - \sqrt{7 - x}}{2x - 10};$$

Вираз під коренем невід'ємний:

$$7 - x \geq 0;$$

$$-x \geq -7;$$

$$x \leq 7;$$

Маємо проміжок (-∞;7];

Вираз в знаменнику не повинен дорівнювати нулю, шукаємо при яких значеннях це може бути:

$$2x - 10 = 0;$$

$$2x = 10;$$

$$x = 5;$$

Отже, маємо проміжок (-∞;7], і виключаєм з нього точку x=5.

Маємо:

$$D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; 7].$$

2) Знайти границю функції $y = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x-2} = \{1^\infty\} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{-4}{2x+1}\right)^{4x-2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}\frac{-4}{2x+1}(4x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right)^{\frac{-4}{2x+1}(4x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{4(4x-2)}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{4(4x-2)}{2x+1}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\left(2-\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{2x}}} = e^{-8}.$

3) Знайти границю використовуючи важливу границю:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}$$

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2} = \begin{vmatrix} \pi-x=y \\ x=\pi-y \\ x\to\pi \\ y\to 0 \end{vmatrix} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2} = \frac{1}{8}.$

Контрольна робота №2 з теми «Похідна функції. Їх застосування»

Варіант 0

1) Знайти похідну функції $y = \frac{2x^2}{x^2-5}$;

$y' = \left(\frac{2x^2}{x^2-5}\right)' = \frac{(2x^2)'(x^2-5)-2x^2(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} = \frac{4x(x^2-5)-2x^2\cdot 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{4x}{(x^2-5)} - \frac{4x^3}{(x^2-5)}.$

2) Продиференціювати функцію $y = x + \frac{\ln x}{x}$ до *2*-го порядку

Для початку знайдемо похідну 1-го порядку:

$y' = 1 + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$;

Після цього знайдемо похідну 2-го порядку:

$y'' = \left(1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x - (1 - \ln x)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = -\frac{1 + 2 - 2\ln x}{x^3} = -\frac{3 - 2\ln x}{x^3}$.

3) Дослідити функцію $y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$;

Область визначення функції (-∞;2)∪(2;+∞).

Функція ні парна, ні непарна так як вона несиметрична відносно початку координат.

Функція неперіодична.

Дослідимо функцію в точці розриву x=2:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{4x - 12}{(x-2)^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{4x - 12}{(x-2)^2} = -\infty;$$

Отже x=2 є точкою розриву другого роду, а пряма x=2 – вертикальна асимптота графіка функції.

Знайдемо похилі асимптоти графіка:

Рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$,

$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x - 12}{(x-2)^2 \cdot x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x - 12}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = 0;$

$b = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x - 12}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x - 12}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3}} = 0.$

Пряма y=0 (вісь O_x) – горизонтальна асимптота графіка функції.

Знайдемо точки перетину з осями.

При $x=0$ – y=-3;

При $y=0$ – x=3;

Дослідимо функцію на монотонність та екстремум.

Для цього знайдемо похідну першого порядку:

$y' = \frac{4(x-2)^2-2(4x-12)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-4(x-4)}{(x-2)^3}$.

Прирівняємо похідну до нуля:

$$y' = 0: \begin{cases} x = 4 \\ x \neq 2 \end{cases};$$

Маємо 3 критичні точки: (-∞;2);(2;4);(4;+∞).

Дослідимо тепер функцію на опуклість та вгнутість, для цього знайдемо другу похідну:

$y'' = -4\frac{(x-2)^3-3(x-4)(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{8(x-5)}{(x-2)^4}$.

Друга похідна дорівнює нулю при:

$$y'' = 0: \begin{cases} x = 5; \\ x \neq 2; \end{cases}$$

Таким чином, функція має 2 критичні точки другого роду, які ділять область на 3 інтервали: (-∞;2),(2;5),(5;-∞).

Індивідуальні довгострокові завдання з теми «Диференціальне числення».

Варіант 0

1. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 2} 5(x^2 - 13x + 5)$;

Розв'язання:

$\lim\limits_{x\to 2}(5x^2 - 13x + 5) = \lim\limits_{x\to 2}(5x^2) - \lim\limits_{x\to 2} 13x + \lim\limits_{x\to 2} 5 = 20 - 26 + 5 = -1.$

2. Обчислити похідну функції: $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;

Розв'язання:

$y' = \frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2-1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

3. Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 17;$$

Спочатку знаходимо похідну:

$$f'(x) = (x^3 - 4x^2 - 16x + 17)' = 3x^2 - 8x - 16.$$

Це парабола, яка перетинає вісь *O*х в точках^

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{3}; \\ x_2 = 4; \end{cases}$$

і її гілки спрямовані вгору. Тому похідна від'ємна в інтервалі $(-\frac{4}{3};4)$ (функція спадає) і додатна в інтервалах $(-\infty;-\frac{4}{3})$ і $(4;+\infty)$ (функція зростає).

$$y_{min} = y(4) = -47;$$

$$y_{max} = y\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{779}{27}.$$

4. Продиференціювати до *2*-го порядку:

$$y = \frac{x^2+1}{x-1};$$

$$y' = \frac{(x-1)(x^2+1)' - (x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2};$$

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right) = \frac{(x-1)^2(x^2-2x-1)' - ((x-1)^2)'(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} ==$$

$$\frac{(x-1)^2(2x-2)-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)2(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3}.$$

5. Знаходження інтервалів вгнутості та опуклості, точок перетину:

$$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4;$$

Область визначення $D(f): x \in (-\infty;\infty)$.

Для знаходження точок перегину потрібно знайти першу похідну:

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3;$$

За правилом, знаходимо другу похідну:

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 0;$$

$$f''(x) = x^3 - x^2 = 0;$$

$$f''(x) = x^2(x-1) = 0;$$

І прирівнюємо її до 0:

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 1; \end{cases}$$

Отримаємо:

$f''(x) > 0$ *при* $x \in (1;\infty)$;

$f''(x) < 0$ *при* $x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$.

Отже, на інтервалі $(1;\infty)$ крива вгнута. Враховуючи, що в точці $x=0$ функція неперервна, робимо висновок, що крива опукла на інтервалі $(-\infty;1)$. При переході через точку $x=1$ друга похідна змінює знак, тому $x=1$ - точка перегину. В точці $x=0$ перегину немає.

$$f(1) = 3 - 5 + 4 = 2;$$

(1;2) – точка перегину.

6. Дослідити функцію та побудувати графік:

$$y = \frac{x^2+1}{x-1};$$

1) Область існування – вся числова пряма, крім точки x=1, тобто $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

2) Графік функції $y=f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) в точці $(0;f(0))$. Знаходимо $y(0)=-1$, отже $A(0;-1)$ – точка перетину кривої з віссю *Oy*. Щоб знайти точки перетину графіка з віссю *Ox*, потрібно розв'язати рівняння $y=0$, тобто $\frac{x^2+1}{x-1} = 0$. Це рівняння не має дійсних коренів, тому дана функція не перетинає вісь абсцис.

3) Функція неперіодична. Розглянемо вираз

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} = \frac{x^2+1}{-x-1},$$

таким чином, $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$. Це означає, що дана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального виду.

4) Функція в точці x=1 має розрив другого роду, причому

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty$$
,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty$$
.

В усіх інших точках функція неперервна.

5) Знайдемо похідну $y'=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^{\wedge}2}$ і розв'яжемо рівняння y'=0, тобто $x^2-2x-1=0$, $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$ – стаціонарні точки. Крім того, похідна невизначена при x=1. Отже, $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=1$ – критичні точки або точки можливого екстремуму. Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали

(-∞;1-$\sqrt{2}$), (1-$\sqrt{2}$;1), (1; 1-$\sqrt{2}$), (1-$\sqrt{2}$;∞).

На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за методом інтервалів або обчислення значень похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу). На інтервалах (-∞;1-$\sqrt{2}$), (1+$\sqrt{2}$,∞) похідна додатна, отже функція зростає; якщо $x\in\left(1-\sqrt{2};1\right)\cup\left(1;1+\sqrt{2}\right)$, то функція спадає, бо на цих інтервалах похідна від'ємна. При переході через точку $x_1=1-\sqrt{2}$ (рух відбувається зліва направо) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, в цій точці досягається локальний максимум, знайдемо

$$y_{\max}=y(1-\sqrt{2})=\frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1}=2-2\sqrt{2}$$
.

При переході через точку $x_2=1+\sqrt{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум, причому

$$y_{\min}=y(1+\sqrt{2})=\frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1}=2+2\sqrt{2}$$
.

Точка x=1 не є точкою екстремуму (в цій точці функція невизначена).

6) Знайдемо другу похідну

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

На інтервалі (-∞;1), $y''<0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; якщо $x \in (1;\infty)$, то $y''>0$ – крива вгнута. В точці $x=1$ функція невизначена, тому ця точка не є точкою перегину.

7) З результатів п.4 випливає, що пряма $x=1$– вертикальна асимптота кривої.

Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,$$

то горизонтальні асимптоти відсутні.

Знайдемо границі

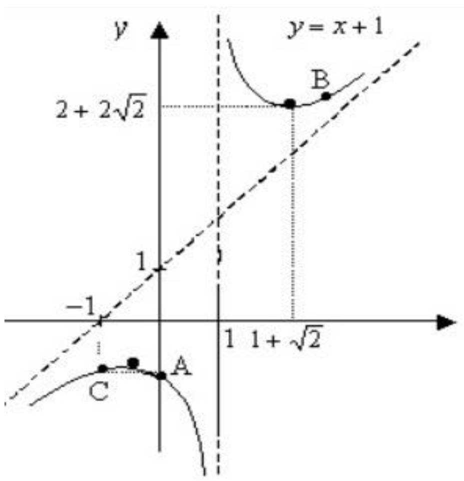
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1.$$

Отже, $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, тоді

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Таким чином, пряма $y=x+1$ – похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає.

8) Враховуючи проведені дослідження, будуємо графік.



ВИСНОВКИ

Дистанційна освіта у наш час є не тільки зручним та швидким способом самоосвіти, вона є також необхідністю, у зв'язку з епідеміологічною ситуацією в світі і в Україні. Тому, виникає потреба у трансформації звичної системи освіти та удосконаленню інформаційних технологій для забезпечення безперервного навчання. Саме з цією метою була виконана дипломна робота.

В ході виконання магістерської роботи мною було опрацьовано та проаналізовано різну літературу з теми «Диференціальне числення». На основі зібраної інформації розроблено лекційний матеріал з теми «Диференціальне числення», дидактичний матеріал для практичних занять з вибраної теми з метою активної самостійної роботи студентів та подано матеріал для самостійних і контрольних робіт з вибраної теми.

Кожне практичне заняття містить необхідні формули, приклади виконаної роботи, завдання для самосійної роботи, та приклади на домашнє завдання. До кожного виду перевірки знань наведено розв'язаний типовий варіант.

З теми «Диференціальне числення» для швидкої та зручної перевірки засвоєння матеріалу розроблено онлайн тестування на платформі «На урок».

В дипломній роботі виконано всі завдання, які були поставлені на початку дослідження. Результати роботи можуть бути використані викладачами та студентами при вивченні курсу «Диференціальне числення».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський, В.В. Вища математика для економістів/ В.В Барковський, Н.В Барковська .– К.: ЦУЛ, 2002. – 400 с.

2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. Пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Профессия, 2002. – 432 с.

3. Биков В.Ю. Технологія створення дистанційного курсу: навч. посіб. / В.Ю. Биков, В.М. Кухаренко, Н.Г. Сиротенко, О.В. Рибалко, Ю.М. Богачков. – К.: Міленіум, 2008. – 324 с.

4. Бораковський О. В. Конспект лекцій з курсу «Вища математика»: (модуль ІІ)/ О. В. Бораковський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. –Х.: ХНАМГ, 2012. – 64 с.

5. Власюк І. А., Власюк С. В. Викладання диференціального та інтегрального числення в умовах дистанційного навчання: матеріали конфер. Молодіжної наукової ліги [«Наука сьогодення: від досліджень до стратегічних рішень»] (Івано-Франківськ, 25.09.2020). - Електронний ресурс: https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/liga/issue/view/25.09.2020

6. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу/И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; Под общ. ред. В.А. Садовничего.-М.:Изд-во МГУ,1988.-415 с.

7. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах/ В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. – Чернівці: Рута, 2007. – Ч.1. – 440 с.

8. Вища математика: Навчальний посібник: У 2 ч./ Ф.М. Ліман, В.Ф. Власенко, С.В. Петренко та інші, За заг. ред. Ф.М. Лимана. – Суми; ВТД „Університетська книга”, 2006. – 614 с

9. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підр. для студ. фіз.-мат. ф-тів пед. ін-тів: У 3-х ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. – 2-е вид., перероб. І доп. - К.: Вища шк., 1990. – 383 с.

10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.:Наука,1990.-624 с.

11. Демчик С. П. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: метод. посіб. Ч. 1. – Рівне: РДПІ, 1998. – 85 с.

12. Демчик С. П. Математичний аналіз: метод. вказів. до індив. завд. та орган. самос. роб. студ./ С. П. Демчик, О. В. Крайчук, Т. М. Сапіліді. – Рівне, 2007. – 64 с.

13. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій/ В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксеєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

14. Дзядик В. К. Математичний аналіз: підруч. для студ. мат. спец. ун-тів.: У 2 т. Т. 1. - К.: Вища шк., 1995. – 495 с.

15. Дубовик, В.П. Вища математика: в 3ч./ В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Х.: Веста, 2008. – Ч.2. – 240 с.

16. Дудас В. О. Математичний аналіз: інд. завд. і метод. вказів./В. О. Дудас. – Рівне, 2002. - 36 с.

17. Д'яченко Н.М., Клименко М.І. Диференціальне числення функції однієї змінної: навч. посіб. для студ. І курсу математ. фак-ту. – Запоріжжя: ЗНУ, 2008. – 100 с.

18. В. А. Зорич, Математический анализ. Ч. 1–2. М.: Наука, 1981, 1985.

19. Ильин В. А. Основы математического анализа/ В. А. Ильин, Э. П. Позняк. – М:Наука, 1967. – 616 с.

20. Істер О. С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, профільний рівень): підр. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти/О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2018. – 384с.: іл.

21. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1.М.: Высш.шк., 1988.-712с

22. Кузьменко В.А. Диференціальне числення: посіб. до вивч. курсу «Вища математика»/ В. А. Кузьменко, О. Г. Шевельов, І. В. Пешат. – Дніпропетровськ, 2012. – 40 с.

23. Ляшко І.І. Математичний аналіз: У 2 ч./І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук.-К.: Вища шк.-Ч.1.-1992.-494 с.

24. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике/В.П. Минорский. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

25. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 3т./Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.

26. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. – Ростов н/Д: Изд-во «Феникс», 2004. – 640 с.

27. Томусяк А. А. Математичний аналіз: посіб. / А. А. Томусяк, В. С. Томусяк. – Вінниця, 1999. – 488 с.

28. Уваренков И. М. Курс математического анализа/ И. М. Уваренков, М. З. Маллер. – М:Просвещение, 1966.

29. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: учебник. Ч. 2. – 6-е изд., стер. – М.: Лань, 2005. – 463 с.

30. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для ВУЗов – 6-е изд. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

31. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підруч. для студ. мат. спец. вищ. навч. закладів: У 2 ч. Ч. 1. – 3-є вид., переробл. І допов. – К.: Вища школа., 2005. – 446 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Завдання самостійної роботи №1 з теми «Границя функції»

1. Знайти границю функції.

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-3}\right)^{5x-6}$;

1.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x-1}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$;

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}$;

1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$;

1.6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$;

1.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^{3x-2}$;

1.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x-tg^2\, x}$

1.9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{16-x^4}{x^3-x^2-x-2}$;

1.10. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

2. Знайти границю функції.

2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{tg\ 11x}$

2.2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\,\frac{\pi x}{2}$

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$

2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-3}\right)^{x-2}$

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(3x+1)}$

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{7x}$

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{n}$

2.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-3x+1}\right)$

2.10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2)tg\, x$.

Додаток Б

Завдання самостійної роботи №2 з теми «Диференціювання функцій»

1. Знайти похідну функції.

1.1. $y = e^x \cos x$;

1.2. $y = xe^{-x^2}$;

1.3. $y = x \ln x + 5$;

1.4. $y = \ln ctg\ 4x$;

1.5. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

1.6. $y = x + \frac{\ln x}{x}$;

1.7. $y = e^x \cos x$;

1.8. $y = (5x + 2)e^{2x}$;

1.9. $y = \frac{x}{x^2-1}$;

1.10. $y = e^{3x} sin2x$

2. Продиференціювати функцію до *n*-го порядку.

2.1. $y = \sqrt{x^2 + 16}, n = 2$;

2.2. $y = \frac{2}{x^2-4}, n = 2$;

2.3. $y = e^x, n = 4$;

2.4. $y = \cos x , n = 3$;

2.5. $y = \sin x,\ n = 2$;

2.6. $y = e^{x^2-x}, n = 3$;

2.7. $y = tg\ x, n = 2$;

2.8. $y = x^3e^{-3}, n = 3$;

2.9. $y = 2x \ln(x + 2), n = 2$;

2.10. $y = \ln(\ln x),\ n = 4$.

Додаток В

Завдання контрольної роботи №1 з теми «Границя функції. Її застосування»

1. Знайти область визначення функції:

1.1. $y = cos^2 x$;

1.2. $y = \frac{x^2-5}{x-3}$;

1.3. $y = \frac{x-1}{x+1}e^{-x}$;

1.4. $y = \frac{x^3}{4} - 3x + 4$;

1.5. $y = ln\, ctg 4x$;

1.6. $y = (x-1)^2(x+2)$;

1.7. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

1.8. $y = \frac{x-1}{x+1}e^{-x}$;

1.9. $y = (x^2-2)e^{-2x}$.

1.10. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

2.Знайти границю функції:

2.1. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$;

2.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{a}}{x}$;

2.3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{x^2-4}$;

2.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+tg\, x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^2}$;

2.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$;

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-1}$;

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{(2x-4)^3}$;

2.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{2x^2}$;

2.9. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)tg\frac{\pi x}{2}$;

2.10. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin 2x\, ctg^2 3x$.

3. Знайти границю функції використовуючи важливі границі:

3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$;

3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$;

3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cos 3x}{5x}$;

3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{7x}$;

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$;

3.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$;

3.8. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$;

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^{3x-2}$.

Додаток Г

Завдання контрольної роботи №2 з теми «Похідна функції. Їх застосування»

1. Знайти похідну функції:

1.1. $y = e^x x^{-1}$;

1.2. $y = x^2 \ln x$;

1.3. $y = \frac{x^2-5}{x-3}$;

1.4. $y = x - \ln x$;

1.5. $y = x\, arctg\, x$;

1.6. $y = e^{-x} \sin x$;

1.7. $y = \frac{x-1}{x+1} e^{-x}$;

1.8. $y = x^3 \ln x$;

1.9. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

1.10. $y = \ln ctg 4x$.

2. Продиференціювати функцію до *n*-го порядку:

2.1. $y = e^{2x-x^2}, n = 3$;

2.2. $y = \cos^2 x, n = 4$;

2.3. $y = x + \frac{\ln x}{x}, n = 2$;

2.4. $y = (2x+3)\sin 5x, n = 2$;

2.5. $y = 2x\ln(x+2), n = 2$;

2.6. $y = xe^{\frac{1}{x}}, n = 3$;

2.7. $y = \frac{x}{1+x^2}, n = 2$;

2.8. $y = x \ln x + 5, n = 2$;

2.9. $y = e^x \cos x, n = 2$;

2.10. $y = x\sqrt{1+x^2}, n = 3$.

3. Дослідити функцію:

3.1. $y = \frac{x^3}{4} - 3x + 4$;

3.2. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

3.3. $y = \frac{x^2}{x-1}$;

3.4. $y = (e^{2x} - 1)^{-1}$;

3.5. $y = \ln(2x^2 + 3)$;

3.6. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

3.7. $y = x(x-1)^3$;

3.8. $y = x + \frac{4}{x^4}$;

3.9. $y = (x-1)^2(x+2)$;

3.10. $y = (x^2 - 2)e^{-2x}$

Додаток Д

Індивідуальні довгострокові завдання з теми «Диференціальне числення»

1. Знайти границю функції:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\ 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{8x+1}-5}{2x^2+2-21}$;

6) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{7x}\right)^{5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cos 3x}{5x}$.

2. Обчислити похідну функції:

1) $y=\frac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2}$;

2) $y=e^x\cos x$;

3) $y=cos^2 4x$;

4) $y=\frac{1}{4}tg^4x$;

5) $y=(5e^{2x}-\frac{6}{x^3\sqrt[5]{x^2}}+tg^4ax)^5$;

6) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

7) $cos^2\frac{\sqrt{x}}{y}y=5y$;

8) $y=2x+\arccos 3y$;

9) $y=(\ln x)^{\sin x}$;

10) $3^x+3^y=3^{x-y}$.

3. Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум:

1) $y=e^{x^2-x}$, при $x=1{,}2$;

2) $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$;

3) $y=e^x$, при $x=0{,}2$;

4) $y=arctg\ x$, при $x=0{,}98$;

5) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$;

6) $y=\sqrt{x^2+16}$, при $x=0{,}2$;

7) $y=\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$, при $x=2{,}2$;

8) $y=x^3-3x^2$;

9) $y=e^x\cos x$;

10) $y=\frac{x+3}{x-2}$, при $x\in(2;+\infty)$.

4. Продиференціювати до 2-го порядку:

1) $f(x)=y^{\sin x}$;

2) $y=xe^{-x^2}$;

3) $y=a(\sin t-t\cos t)$;

4) $y=cos^3t$;

5) $y = e^x \sin x - 3\sqrt{x}$;

6) $y = 1 + xe^y$;

7) $y = e^x \cos x$;

8) $x = \ln(tg\ t)$;

9) $x = \frac{2-t}{2+t^2}$;

10) $x = \ln(tg\ t)$.

5. Знаходження інтервалів вгнутості та опуклості, точок перетину:

1) $f(x) = y^{\sin x}$;

2) $y = xe^{-x^2}$;

3) $y = a(\sin t - t\cos t)$;

4) $y = cos^3 t$;

5) $y = e^x \sin x - 3\sqrt{x}$;

6) $y = 1 + xe^y$;

7) $y = e^x \cos x$;

8) $x = \ln(tg\ t)$;

9) $x = \frac{2-t}{2+t^2}$;

10) $x = \ln(tg\ t)$.

6. Дослідити функцію та побудувати графік:

1)$y = x\ln x$;

2)$y = arctg\frac{1}{x}$;

3)$y = xe^{-x}$;

4)$y = \frac{2x}{x^2+1}$;

5)$y = \frac{x}{\ln x}$;

6)$y = \frac{x^3+4}{x^2}$;

7)$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$;

8)$y = \frac{1}{x^2-4}$;

9)$y = \frac{x}{1+x^2}$;

10)$y = 1 - \ln(x^2 - 4)$.