Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

«**Викладання інтегрального числення функції однієї змінної в умовах дистанційного навчання**»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ММ-21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Власюк Світлана Віталіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент
Демчик С. П.
Рецензенти:
канд. тех. наук Присяжнюк О. В.,
проф., канд. фіз.-мат. наук
Крайчук О. В.

Рівне-2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Для сучасного науково-технічного та соціально-економічного розвитку суспільства кожен компетентний фахівець з будь-якої сфери повинен добре володіти математичним апаратом, фундаментом якого є математичний аналіз. Інтегральне числення разом з диференціальним численням є основою математичного аналізу, і є необхідним у будь-якій математичній науці.

Викладання інтегрального числення студентам факультету математики та інформатики в Рівненському державному гуманітарному університеті відбувається на першому курсі і незадовільне засвоєння цієї бази унеможливлює подальше вивчення математичних дисциплін.

2020 рік кинув виклик людству, змусивши проаналізувати справжні цінності, такі як спілкування, і зрозуміти важливість медицини і освіти. Комунікація на відстані стала необхідністю, основним способом зв'язку, а дистанційна освіта дала змогу навчанню бути безперервним, незалежно від епідеміологічної ситуації в світі.

Актуальність теми полягає у необхідності дистанційної роботи студентів і викладачів, що зумовлює створенню бази масового неперервного самонавчання та загального обміну інформацією.

Мета роботи – систематизувати та розробити методику інтегрального числення, згідно навчальної програми, адаптованої до вивчення дистанційно яка сприятиме підвищенню якості знань студентів і розвитку мислення.

Об'єкт дослідження – інтегральне числення функції однієї змінної при дистанційному навчанні.

Предмет дослідження – організація дистанційного навчання з інтегрального числення та забезпечення студентів методичними матеріалами.

У відповідності з метою були поставлені **завдання:**

- Зібрати та проаналізувати наявну інформацію по тематиці роботи;
- Розкрити суть основних понять та теорем за темою дослідження;

- Проаналізувати доведення основних тверджень які стосуються інтегрального числення;
- Розробити методичні матеріали з даної теми, а саме теоретичний та практичний матеріал.

Практичне значення даної роботи полягає в тому що розроблений матеріал може бути корисний викладачам та студентам при вивченні курсу «Інтегральне числення».

Апробація. Матеріали магістерської роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів та співробітників РДГУ 26 травня 2020 року. Матеріали магістерської роботи публікувалися в Збірнику наукових матеріалів міжнародної студентської наукової конференції «Наука сьогодення: від досліджень до стратегічних рішень» яка відбулась 25 вересня 2020 року у м. Івано-Франківськ.

РОЗДІЛ І. ЛЕКЦІЙНИЙ МАТЕРІАЛ З ТЕМИ «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Розроблено 10 лекцій з теми «Інтегральне числення». Кожна лекція містить план, наводяться короткі теоретичні відомості та контрольні запитання.

1.1. Лекція №1. Первісна функція і невизначений інтеграл.

План

1. Первісна і невизначений інтеграл.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиця основних інтегралів.

1. В диференціальному численні знаходять похідну заданої функції. Цілком природною виникає потреба розв’язати обернену задачу: За даною функцією $f(x)$ знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Ми знаємо з диференціального числення, що миттєва швидкість прямолінійного руху точки дорівнює похідній координати точки: $v(t) = x'(t)$. Але якщо за заданою швидкістю руху точки $v(t)$ потрібно визначити закон її руху, тобто залежність її координати від часу $x(t)$, то це і означає, що треба знайти таку функцію $x(t)$, похідна якої дорівнює заданій функції $v(t)$.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на деякому проміжку $(a; b)$, якщо для всіх значень $x \in (a; b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Очевидно, що якщо $F'(x) = f(x)$, то і $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$, тобто $F(x) + C$ при будь-якій сталій C також є первісною для функції $f(x)$.

Теорема. Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на деякому проміжку $(a; b)$, то будь-яка інша первісна для $f(x)$ на тому ж проміжку має вигляд

$$F(x) + C, \text{ де } \quad C - \text{ стала.} \tag{1.1}$$

Множину всіх первісних для даної функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ називають ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають $\int f(x)dx$ ($f(x)$ називається підінтегральною функцією, $f(x)dx$ - підінтегральним виразом, а x - змінною інтегрування). Процес знаходження первісної функції називається ***інтегруванням***.

Згідно з вищезазначеним $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ - яка небудь первісна для функції $f(x)$, а C – довільна стала.

2. Запишемо *основні властивості невизначеного інтеграла*.

1) Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:
$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C) = F'(x) = f(x).$$
2) Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:
$$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$
3) Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:
$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$
4) Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \text{ якщо } a = const.$$
5) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків. Наприклад
$$\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Властивості 4) і 5) перевіряються з властивості 1) почленним диференціюванням відповідних рівностей.

3. Вивчимо таблицю основних інтегралів, які безпосередньо випливають з таблиці похідних.

$\int 0dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int 1dx = x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	$\int \mathrm{tg}x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \mathrm{ctg}x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$

Контрольні запитання:

1) Що називають первісною?
2) Поясніть означення невизначеного інтегралу.
3) Назвіть основні властивості невизначеного інтеграла.
4) Наведіть приклади табличних інтегралів.

1.2. Лекція №2. Методи інтегрування

План

1. Інтегрування функцій.
2. Заміна змінних у невизначених інтегралах (метод підстановки).
3. Інтегрування частинами.

1. З таблиці основних інтегралів можна знайти деякі інтеграли, цей процес має назву безпосереднього інтегрування. На відміну від диференціального числення, в інтегральному численні неможна інтегрувати будь-яку функцію. Але існують методи, використання яких дозволяє звести заданий інтеграл до табличного.

Метод безпосереднього інтегрування означає використання таблиці інтегралів. Наприклад,

$$\int\left(3x^2-\frac{3}{x^2+9}\right)dx=3\int x^2dx-3\int\frac{1}{x^2+9}dx=$$

$$=3\cdot\frac{x^3}{3}+C_1-3\cdot\frac{1}{3}atctg\frac{x}{3}+C_2=x^3-atctg\frac{x}{3}+C.$$

2. Теорема. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, а $\varphi(t)$ - диференційовна функція, то $\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt=F\big(\varphi(t)\big)+C$.

Суть теореми полягає у переході до нової змінної, і використовується двома способами.

1) Введення під знак диференціала: $\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt=$

$=\begin{bmatrix}\varphi(x)=t\\ \varphi'(x)dx=dt\end{bmatrix}=\int f(t)dt=F(t)+C=F\big(\varphi(x)\big)+C$, коли для функції *f* відома первісна.

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-tgx}}=\begin{bmatrix}tgx=t\\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=\arcsin\frac{t}{2}+C=$$

$$=\arcsin\frac{tgx}{2}+C$$

2) Виведення з-під знаку диференціала: $\int f(t)dt=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt=$

$=F(t)+C=F\big(\varphi^{-1}(x)\big)+C$, коли функція *f* має обернену.

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int\frac{\cos\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\begin{bmatrix}\sqrt[3]{x}=t\\ x=t^3\\ dx=3t^2dt\end{bmatrix}=\int\frac{\cos t\cdot 3t^2dt}{t^2}=3\sin t+C=3\sin\sqrt[3]{x}+C.$$

3. **Теорема**. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні в інтервалі $(a;b)$ то на цьому проміжку виконується формула інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{2.1}$$

Цим способом можна інтегрувати такі найбільш часто вживані інтеграли:

а) Інтеграли вигляду $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\cos ax\, dx$, $\int P(x)\sin ax\, dx$, де $P(x)$ - многочлен.

б) Інтеграли вигляду $\int P(x)\ln x\, dx$, $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arctgxdx$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

А) $\int(3x^2-5)\ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = (3x^2-5)dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x^3 - 5x = x(x^2-5) \end{bmatrix} =$

$= (x^3-5x)\ln x - \int(x^2-5)dx = (x^3-5x)\ln x - \frac{x^3}{3} + 5x + C.$

Б)$\int(3x-1)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = 3x-1 & dv = e^{2x}dx \\ du = 3dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} =$

$= (3x-1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int\frac{3}{2}e^{2x}dx = \frac{3x-1}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$

Іноді доводиться застосовувати формулу (2.1) двічі.

Контрольні запитання:

1) Що означає метод безпосереднього інтегрування?
2) В чому полягає суть методу підстановки?
3) Яка формула інтегрування частинами?
4) Наведіть приклади інтегралів, які інтегруються частинами.

1.3. Лекція №3. Інтегрування раціональних та ірраціональних функцій і виразів.

План

1. Рекурентні формули.
2. Інтегрування раціональних дробів.
3. Розкладання складних раціональних дробів на найпростіші.

4. Інтегрування деяких ірраціональних виразів.

1. Розглянемо приклад $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $(n > 1)$.

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} = \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} & v = \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(x\frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)}I_{n-1} =$$

$$= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Отримали рекурентну формулу:

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}. \tag{3.1}$$

Використовуючи цю формулу дістаємо такий інтеграл:

$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C.$

2. Інтегрування найпростіших раціональних дробів поділяється на наступні типи:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A}{(1+n)(x-a)^{n-1}} + C;$

3) $$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx +$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

4) $$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}dx +$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = -\frac{B}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Звідси маємо: $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{-B}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)I_n$, де I_n можемо знайти з формули (3.1).

3. Складний раціональний дріб спочатку потрібно розкласти на найпростіші за допомогою невизначених коефіцієнтів.

1) Перевіримо чи правильний раціональний дріб. Якщо дріб неправильний, виділимо цілу частину шляхом ділення «кутом» або у стовпчик:

$$\underset{(n \le m)}{\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx} = \underset{(k < m)}{\int \left(M(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}\right)dx}.$$

2) Якщо правильний, знаменник розкладаємо на множники.

3) Правильний раціональний дріб розписуємо на суму найпростіших за допомогою невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{m_1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{m_1-1}} + \frac{A_{m1}}{x-a} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^{n_1}} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n_1-1}} + \cdots + \frac{B_{n_1}x+C_{n_1}}{x^2+px+q} + \cdots.$$

4) Інтегруємо цілу частину і найпростіші дроби.

4. Іноді інтеграли від ірраціональних функцій зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки.

Для інтеграла $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ виконують підстановку $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – НСК(n, …., s).

Приклад.

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}dx = \left|\begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{matrix}\right| = \int \frac{t^3+1}{t^6(t^2-1)}6t^5dt = 6\int \frac{t^2-t+1}{t(t-1)}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^2-t+1}{t^2-t}dt = 6\int \left(1 + \frac{1}{t^2-t}\right)dt = 6\left(t + \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|\right) + C =$$

$$= 6\left(t + \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\right) + C = 6\left(\sqrt[6]{x} + \ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}}\right|\right) + C.$$

Контрольні запитання:

1) Які існують види раціональних дробів?
2) Яким чином інтегрується раціональний дріб?
3) Що означає метод невизначених коефіцієнтів?
4) Як потрібно інтегрувати ірраціональні функції?

1.4. Лекція №4. Інтеграли тригонометричних функцій та тригонометричні підстановки.

План

1. Тригонометричні підстановки.
2. Інтегрування тригонометричних функцій.
3. Інтеграл від біномного диференціала.
4. Підстановки Ейлера.

1. Часто застосування підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ у ірраціональних функцій вимагає громіздких обчислень, тому краще виконати тригонометричну підстановку. Для цього спочатку інтеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ підстановкою $x = t - \frac{b}{2a}$ зводять до наступних видів: $\int R\left(t, \sqrt{t^2+m^2}\right)dt$; $\int R\left(t, \sqrt{t^2-m^2}\right)dt$; $\int R\left(t, \sqrt{m^2-t^2}\right)dt$. Тоді використовують відповідно підстановки: $t = m\mathrm{tg}u$; $t = \frac{m}{\sin u}$; $t = m\sin u$.

2. Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, зводяться до інтеграла від дробово-раціональної функції так званою універсальною підстановкою
$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Тоді, $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = \mathrm{arctg}t$ і $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

Іноді, раціональніше використати інші підстановки. Такі як:

- $t = \mathrm{tg}x$ - коли функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$.
- Для інтеграла виду $\int \cos^m x \sin^n dx$ $t = \cos x$, якщо $m = 2l + 1$, а якщо $n = 2k + 1$ то $t = \sin x$.
- Якщо m і n - парні невід'ємні, то використовуємо формули: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Приклад. Знайти інтеграл:

$$\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x+3} dx = \int \frac{(1+\sin^2 x)\sin x}{2\cos^2 x-1+3} dx = \int \frac{(1+\sin^2 x)\sin x}{2(\cos^2 x+1)} dx.$$

Оскільки підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, то візьмемо підстановку $t = \cos x$. Тоді $dt = -\sin x\, dx$, $\sin^2 x = 1 - t^2$. Отримуємо

$$\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x+3} dx = -\int \frac{(2-t^2)dt}{2(t^2+1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{3(t^2+1)dt}{t^2+1} = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{1}{2}\int dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\mathrm{arctg}t + \frac{1}{2}t + C = -\frac{3}{2}\mathrm{arctg}(\cos x) + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

3. Вираз $x^m(a + bx^n)^p dx$, де $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$ – називають ***біномним диференціалом***.

П. Л. Чебишев довів, що біномний диференціал інтегрується у таких випадках:

1) p – ціле число, $m = \frac{r}{s}, n = \frac{l}{k}$, тоді інтеграл раціоналізується підстановкою $x = t^\alpha$, де α – НСК(s, k).
2) $p = \frac{r}{s}$ – дробове число, але $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то робимо підстановку $a + bx^n = t^s$.
3) $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, тоді робимо підстановку $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$.

Приклад.

$$I = \int x\sqrt{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} m = 1, n = 2, p = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{m+1}{n} = 1 \in \mathbb{Z}, x^2 + 1 = t^2; xdx = tdt \end{array} \right| = \int t \cdot tdt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{x^2}+1\right)^3}{3} + C.$$

4. Для інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left(x, (x-x_1), \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)dx$ виконують підстановку Ейлера:

- якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$, - перша підстановка Ейлера. Тоді $x = \frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$.
- якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ - друга підстановка Ейлера. Тоді $x = \frac{t^2x_1 - ax_2}{t^2-a}$.

Приклад.

$$\int \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \left| \begin{array}{c} t - x = \sqrt{x^2+2x+3} \\ x = \dfrac{t^2-3}{2t+2}; dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{t^2+2t+3}{(t+1)^2}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t+1}{t - \frac{t^2-3}{2t+2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{t^2+2t+3}{(t+1)^2}dt = \int dt = t + c = x + \sqrt{x^2+2x+3} + c.$$

Приклади інтегралів, які не виражаються через елементарні функції:

$\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{e^x}{x^n}dx\ (n \geq 1)$, $\int \frac{\sin x}{x^n}dx\ (n \geq 1)$, $\int \frac{\cos x}{x^n}dx\ (n \geq 1)$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ і т.д.

Контрольні запитання:

1) Які підстановки використовують при інтегруванні тригонометричних функцій?
2) Що називають біномним диференціалом?
3) У яких випадках інтегрується біномний диференціал за Чебишевим?
4) Для інтегрування яких функцій використовують підстановку Ейлера?

1.5. Лекція №5,6: Визначений інтеграл за Ріманом.

План

1. Задачі, що приводять до визначеного інтеграла.
2. Верхня й нижня суми Дарбу.

3. Критерій інтегровності функцій.
4. Властивості визначеного інтеграла.

1. *Задача про площу криволінійної трапеції.*

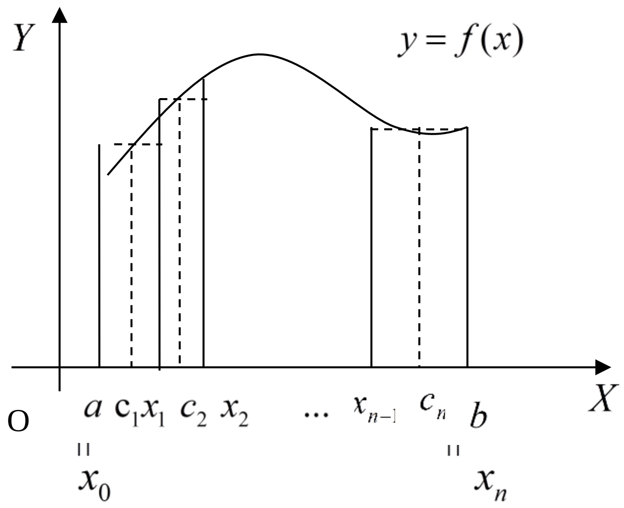


Рис. 1

Нехай функція $y = f(x)$ невід'ємна і неперервна на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин (відрізків) точками $a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Довжину кожного частинного відрізка позначимо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Тоді на кожному частинному відрізку довільним чином оберемо по одній точці $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1 \dots n$ і побудуємо прямокутник з основою Δx_k і висотою $f(c_k)$. Звідси площа прямокутників буде $f(c_k)\Delta x_k$.

Тоді площа фігури, яка утворюється із площ прямокутників, що її складають, наближено дорівнюватиме площі *S* криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (5.1)$$

Чим дрібнішим є розбиття проміжку $[a, b]$, тим точнішою є рівність (5.1). Звідси за площу криволінійної трапеції можна вважати границю площ ступінчатих фігур при $\max(\Delta x_k) \to 0$:

$$S = \lim_{\max(\Delta x_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (5.2)$$

Задача про шлях точки у прямолінійному русі.

Нехай точка рухається по прямій з швидкістю $v = v(t)$. Знайдемо шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[\alpha, \beta]$. Для цього розіб'ємо проміжок часу від α до β на *n* частинних проміжків часу моментами

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Тривалість кожного часового проміжку позначимо $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ і в кожному проміжку оберемо по одному значенню $t = c_k \in [t_{k-1}, t_k]$ $(k =$

$1, 2, \dots, n$). Чим дрібніше розбиття проміжку $[\alpha, \beta]$, тим швидкість точки на кожному частинному проміжку наближається до сталої, рівною $v(c_k)$, а шлях, пройдений за цей проміжок часу, наближається до $v(c_k)\Delta t_k$. Сума цих частинних шляхів дасть наближене значення всього шляху l, пройденого точкою за проміжок часу $[\alpha, \beta]$:

$$l \approx \sum_{k=1}^{n} v(c_k)\Delta t_k. \quad (5.3)$$

При необмеженому подрібненні розбиття, тобто при переході до границі при $\max(\Delta x_k) \to 0$, отримуємо $l = \lim\limits_{\max(\Delta t_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} v(c_k)\Delta t_k$.

Суму (5.1) будемо називати ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. А границю (5.2) - ***визначеним інтегралом функції*** (або інтегралом Рімана) $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і будемо позначати

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \quad (5.4)$$

2. Нехай маємо на відрізку $[a, b]$ обмежену функцію $f(x)$. Якщо вона обмежена, то має точні нижню і верхню межі. Позначимо:

$m_k = \inf\limits_{x\in[x_k;\, x_{k+1}]} f(x)$;

$M_k = \sup\limits_{x\in[x_k;\, x_{k+1}]} f(x)$.

Тоді $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k$ – нижня сума Дарбу, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k$ – верхня сума Дарбу.

Розглянемо властивості сум Дарбу:

1) Правильною є рівність: $s_n \le S_n$;
2) Якщо до точок поділу відрізка додати нові точки, то нижня сума від цього може збільшитися, а верхня сума – зменшитися;
3) Кожна нижня сума Дарбу не перевищує кожну верхню суму Дарбу, незалежно від розбиття відрізка $[a, b]$ на частини.

Теорема. Якщо маємо функцію $f(x)$ обмежену на відрізку $[a, b]$, то послідовності нижніх і верхніх сум Дарбу мають скінченні границі при $\lambda \to 0$.

3. **Теорема 1**. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона є інтегрованою на ньому.

Доведення:

Оскільки $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то за теоремою Кантора, вона є рівномірно неперервною на цьому відрізку. Тоді, $\forall \frac{\varepsilon}{b-a} > 0 \; \exists \; \delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) > 0$, що при $\forall x, x'' \in [a; b]$, якщо $|x' - x''| < \delta$, то $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Якщо $\lambda \to 0$, то розглянемо тільки ті розбиття, для яких λ<δ, тобто $\forall \Delta x_k < \delta$, тоді $|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $|S_n - s_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |M_k - m_k| \, \Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$.

Тоді ми отримали, що $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при λ<δ $|S_n - s_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0}(S_n - s_n) = 0$, або $S_n = s_n$.

Але $s_n \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \, \Delta x_k \leq S_n$ й за теоремою про границю проміжної функції $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \, \Delta x_k = S = s$.

Отже визначений інтеграл для неперервної на відрізку функції існує, і не залежить від способу розбиття відрізка і вибору точок.

Теорема 2. Будь-яка монотонна й обмежена функція на відрізку $[a, b]$ є інтегрованою на ньому.

Теорема 3. Будь-яка обмежена функція на відрізку $[a, b]$, яка має скінченне число точок розриву, є інтегрованою на ньому.

4. *Основні властивості визначеного інтеграла*

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx \, , (C = const)$.

Справді: $\int_a^b Cf(x)dx = \lim\limits_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} Cf(c_k)\Delta x_k = C \lim\limits_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k =$

$= C\int_a^b f(x)dx.$

4) $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

Для довільного розбиття відрізка маємо: $\sum_{k=1}^{n} \big(f(c_k) \pm g(c_k)\big)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k$, звідки, переходячи до границі при $\max(\Delta x_k) \to 0$, отримаємо сформульовану властивість.

5) Нехай функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a, b]$ і $a < c < b$. Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$, то: $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{l} f(c_k)\Delta x_k + \sum_{k=l+1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$.

Переходячи в цій рівності до границі при $\max(\Delta x_k) \to 0$, отримуємо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6) $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ $(a < b)$.

Маємо $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k$, бо за умовою $f(c_k) \le g(c_k)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$. Переходячи до границі при $\max(\Delta x_k) \to 0$, одержуємо $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

7) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$, $(a < b)$.

8) $\int_a^b dx = b - a$.

Оскільки, відповідна інтегральна сума

$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots (x_{n-1} - x_{n-2}) + (b - x_{n-1}) = b - a$

при будь-якому розбитті, отже $\lim\limits_{\max(\Delta x_k) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a = \int_a^b dx$.

Контрольні запитання:

1) Які задачі приводять до визначеного інтеграла?
2) Що називають визначеним інтегралом функції?
3) Дайте визначення поняттям нижня і верхня суми Дарбу.
4) Які теореми доводять інтегрованість функцій?
5) Назвіть основні властивості визначеного інтеграла.

1.6. Лекція №7: Інтегрування визначеного інтеграла.

План

1. Теореми про середнє значення визначеного інтеграла.
2. Інтеграл Ньютона-Лейбніца.
3. Заміна змінних у визначеному інтегралі.
4. Інтегрування визначених інтегралів частинами.

1. Теорема 1. Якщо m і M відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{7.1}$$

Доведення:

На підставі властивості 6) з попередньої лекції $\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$, звідки, застосовуючи властивості 3) і 8) отримуємо: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Теорема 2. (про середнє значення функції) Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує така точка $c \in [a,b]$, що $f(c) = f_{\text{сер}}$ і

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{7.2}$$

Доведення:

З попередньої теореми з (7.1) випливає, що $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$. Але оскільки $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує хоча б така точка c, що $m \le f(c) \le M$ і $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 3. (узагальнена теорема про середнє) Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, крім того $g(x)$ не змінює знак, то існує таке число $c \in (a,b)$, що

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx. \tag{7.3}$$

Доведення:

Доведення випливає з властивості 3) та теореми 1.

2. Розглянемо інтеграл зі змінною верхньою межею

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt\,, x \in [a, b].$$

Теорема. Похідна від інтеграла по змінній верхній межі дорівнює підінтегральній функції.

Доведення:

Надамо аргументу x приріст Δx, тоді відповідний приріст $I(x)$ буде $\Delta I(x) = I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt +$
$+ \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

Тоді застосуємо теорему про середнє значення

$\Delta I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x,$

Згідно з означенням похідної

$I'^{(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$, тому що при $\Delta x \to 0$ точка $c \to x$, а функція $f(x)$ неперервна.

Нехай тепер $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, де C – деяка стала.

Нехай $x = a$, тоді $F(a) + C = \int_a^x f(t)dt = 0$, звідки $C = -F(a)$, так що $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ для будь-якого $x \in [a, b]$.

Нехай тепер $x = b$, отримуємо **формулу Ньютона-Лейбніца**

$$\int_a^b f(x)dt = F(b) - F(a), \tag{7.4}$$

Зазвичай користуються умовним позначенням: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, і тоді формула Ньютона-Лейбніца записується у вигляді

$$\int_a^b f(x)dt = F(x)\Big|_a^b.$$

Приклад.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sin(2 \cdot 0) = \frac{1}{2}.$

3. Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$; функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$; $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і для будь-якого $t\in(\alpha;\ \beta)$ значення $\varphi(t)\in(\alpha;\ \beta)$.

$$\text{Тоді } \int_a^b f(x)dt=\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (7.5)$$

Оскільки $F(x)$ - первісна для $f(x)$ на $[a,b]$, то $F\big(\varphi(t)\big)$ буде первісною для функції $f\big(\varphi(t)\varphi'(t)\big)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$.

За формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dt=F(b)-F(a)$ і $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'^{(t)}dt=F\big(\varphi(\beta)\big)-F\big(\varphi(\alpha)\big)=F(b)-F(a)$.

Отже $\int_a^b f(x)dt=\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt$, що й треба було довести.

Приклад. Обчислити $\int_0^6\sqrt{9-0{,}25x^2}dx$.

$$\int_0^6\sqrt{9-0{,}25x^2}dx=\left|\begin{matrix} x=6\sin t & dx=6\cos t\,dt\\ 6\sin\alpha=0\Rightarrow\alpha=0 & 6\sin\beta=0\Rightarrow\beta=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-0{,}25\cdot36\sin^2t}6\cos t\,dt=18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2t}\cos t\,dt=$$

$$=18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2t)dt=9\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=9\cdot\frac{\pi}{2}-9\cdot0=\frac{9\pi}{2}.$$

4. Теорема. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a,b]$, то $\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$, або

$$\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \qquad (7.6)$$

Оскільки для функції $[u'(x)v(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]$ функція $u(x)v(x)$ є первісною, то за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b\big(u(x)v'(x)+u'(x)v(x)\big)dx=[u(x)v(x)]\Big|_a^b.$$

Звідси отримуємо $\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$,

Формула (7.6) називається ***формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі.***

Приклад. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Нехай $u = x$, $dv = \cos x\,dx$, $v = \int \cos x\,dx = \sin x$. Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

<u>Контрольні запитання:</u>

1) Що говорить теорема про середнє значення функції?
2) Яка формула Ньютона-Лейбніца?
3) Як виконується заміна змінної у визначеному інтегралі?
4) Назвіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

1.7. Лекція №8: Застосування визначеного інтеграла до задач з геометрії.

План

1. Обчислення площі плоских фігур.
2. Рівняння лінії на площині.
3. Довжина дуги кривої.
4. Об’єм тіла обертання.
5. Площа поверхні обертання.

1. Розглянемо фігуру *ABCD*, обмежену графіками функцій $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ і прямими $x = a$ і $x = b$ $(y_1(x) \le y_2(x), \forall x \in [a, b])$. Площа S цієї фігури дорівнює різниці площ криволінійних трапецій *aBCb* і *aADb*, отже

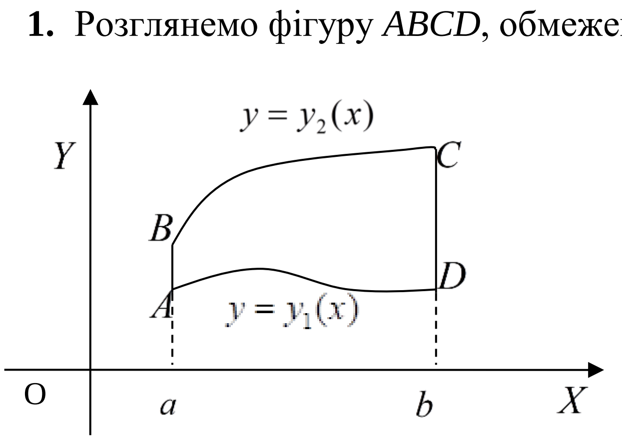


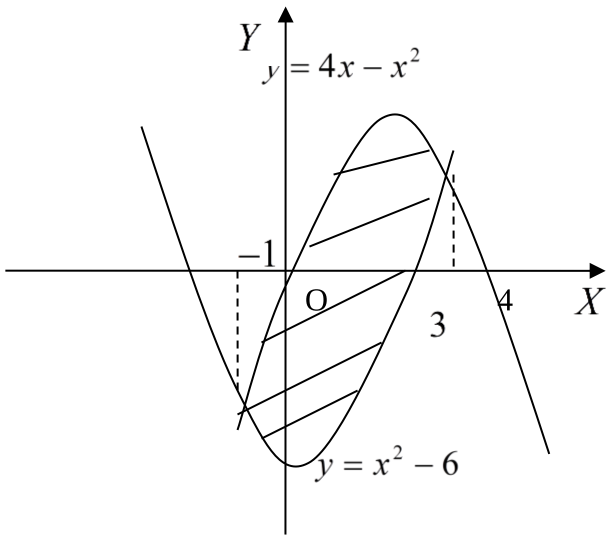
Рис. 2

$$S = \int_a^b y_2(x)dx - \int_a^b y_1(x)dx =$$

$$= \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx \qquad (8.1)$$

Якщо значення a і b не задані, то межі інтегрування визначаються як абсциси точок перетину ліній $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$.

Приклад. Обчислити площу, обмежену $y = 4x - x^2$ і $y = x^2 - 6$.



Знайдемо точки перетину цих кривих. Координати цих точок задовольняють систему $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$.

Віднімаючи від другого рівняння перше, одержимо $2x^2 - 4x - 6 = 0$ або $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Звідси $a = x_1 = -1$, $b = x_2 = 3$. Тоді

$$S = \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx = \int_{-1}^3 \big((4x - x^2) - (x^2 - 6)\big)dx =$$

$$= \int_{-1}^3 (6 + 4x - 2x^2)dx = \left(6x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3} = \Big(6 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 -$$

$$\frac{2}{3} \cdot 3^3\Big) - \left(6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3\right) = 18 - \left(-3\frac{1}{3}\right) = 21\frac{1}{3}(\text{кв. од.})$$

Якщо в криволінійній трапеції крива задана параметрично, то $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_a;\ t_b]$, $y \geq 0$, тоді

$$S = \int_a^b y dx = \int_{t_a}^{t_b} y(t)x'_t dt. \tag{8.2}$$

2. Рівняння лінії на площині можна також задавати у полярній системі координат. Фігуру, обмежену променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ і кривою $r = r(\varphi)$, де $r(\varphi)$ - неперервна функція називають ***криволінійним сектором*** (рис. 3).

Таким чином $S = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta dF(\varphi)$.

$\Delta F(\varphi) = F(\varphi + d\varphi) - F(\varphi)$ на малому відрізку $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ зображується площею заштрихованого на рисунку сектора, а ця площа дорівнює площі кругового сектора радіуса $r(\varphi)$ з центральним кутом $d\varphi$: $\Delta F(\varphi) = \frac{1}{2}\left(r(\varphi)\right)^2 d\varphi$ + нескінченно малі вищого порядку.

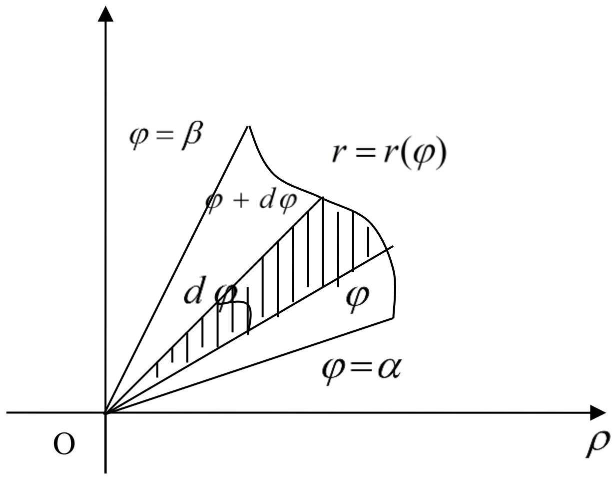


Рис. 3

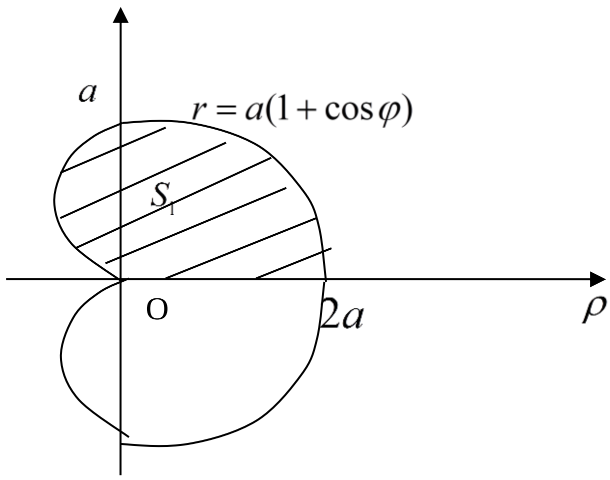
Тоді $dF(\varphi) = \frac{1}{2}\left(r(\varphi)\right)^2 d\varphi$, а площа криволінійного сектора виражається формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r(\varphi)\right)^2 d\varphi. \qquad (8.3)$$

Коли фігура обмежена променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ та лініями $r = r_1(\varphi)$ і $r = r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \le r_2(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta)$, то

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\left(r_2(\varphi)\right)^2 - \left(r_1(\varphi)\right)^2\right] d\varphi. \qquad (8.4)$$

Приклад: Знайти площу, обмежену кардіоїдою $r = a(1 + \cos\varphi)$.



Внаслідок симетрії шукана площа S дорівнює подвоєній площі S_1 криволінійного сектора (заштрихований на рисунку), обмеженого променями $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$ та кривою $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Тоді $S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1 + + \cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + + \cos^2\varphi)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + 2\cos\varphi)\right)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\varphi + + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\pi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi \cdot a^2$.

Нехай функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і потрібно обчислити довжину дуги $\overset{\smile}{AB}$.

Оберемо довільно точку $x \in [a,b]$. Довжина дуги AM є очевидно функцією від x, визначеною на $[a,b]$. Позначимо її $F(x)$. Оскільки $F(a) = 0$, а $F(b) = l$, де l - довжина всієї дуги AB, то $l = F(b) - F(a)$.

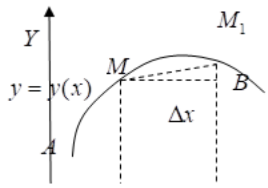


Рис. 4

Надамо змінній x приріст $\Delta x = dx$, тоді приріст функції $y(x)$ - $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$, а відповідний приріст функції $F(x)$ - довжина малої дуги MM_1, де $M(x, y(x))$, а $M_1\,(x+\Delta x, y(x+\Delta x))$. Звідси

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left|\overset{\smile}{MM_1}\right|}{\left|\overline{MM_1}\right|} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 1.$$

Таким чином

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta F(x)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \times$$

$$\times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = 1 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} = \sqrt{1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

Отже $dF(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$, і довжина дуги $\overset{\smile}{AB}$ дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y(x))^2}\,dx. \tag{8.5}$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{1}{9}(x^2+6)^{\frac{3}{2}}$ на відрізку $[3; 6]$. Знаходимо похідну: $y' = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}(x^2+6)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{3}x\sqrt{x^2+6}$.

Тоді

$$l=\int_3^6\sqrt{1+\frac{x^2}{9}(x^2+6)}dx=\int_3^6\sqrt{1+\frac{2}{3}x^2+\frac{x^4}{9}}dx=\int_3^6\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^2}dx=\int_3^6\left(1+\frac{x^2}{3}\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_3^6=\left(6+\frac{6^3}{9}\right)-\left(3+\frac{3^3}{9}\right)=30-6=24.$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \end{cases}$ то

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y(x))^2}dx=\left[\begin{array}{ll} x=x(t) & x=a=x(\alpha)\Rightarrow t=\alpha \\ dx=x'(t)dt & \\ \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)} & x=b=x(\beta)\Rightarrow t=\beta \end{array}\right]=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}x'(t)dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Отже, $$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt. \qquad (8.6)$$

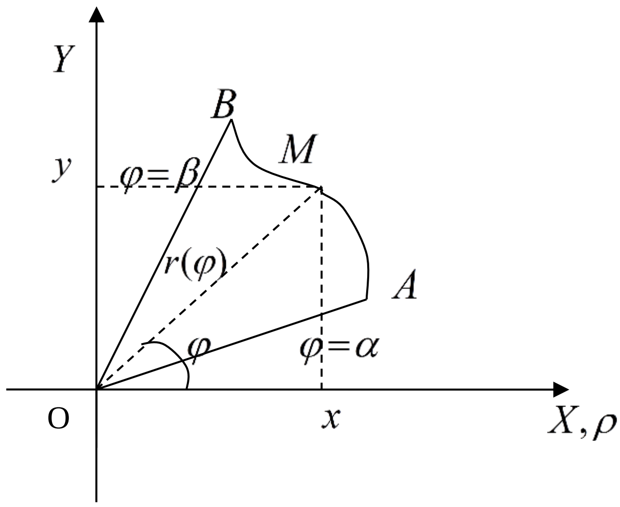


Рис. 5

У полярній системі координат рівняння заданої лінії запишеться у вигляді (рис. 5):

$\begin{cases} x=r(\varphi)\cos\varphi \\ y=r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$ Тоді,

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Знаходимо

$$x'(\varphi)=r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi;$$

$$y'(\varphi)=r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi.$$

$$(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2=\left(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi\right)^2+\left(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi\right)^2=$$
$$=(r'(\varphi))^2\cos^2\varphi-2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi+(r(\varphi))^2\sin^2\varphi+(r'(\varphi))^2\sin^2\varphi+$$
$$+2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi+(r(\varphi))^2\cos^2\varphi=\left(r'(\varphi)\right)^2+\left(r(\varphi)\right)^2.$$

Таким чином довжина заданої дуги $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}\,d\varphi.$ (8.7)

3. Нехай криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної функції $y=y(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ і $x=b$ обертається навколо осі Ox.

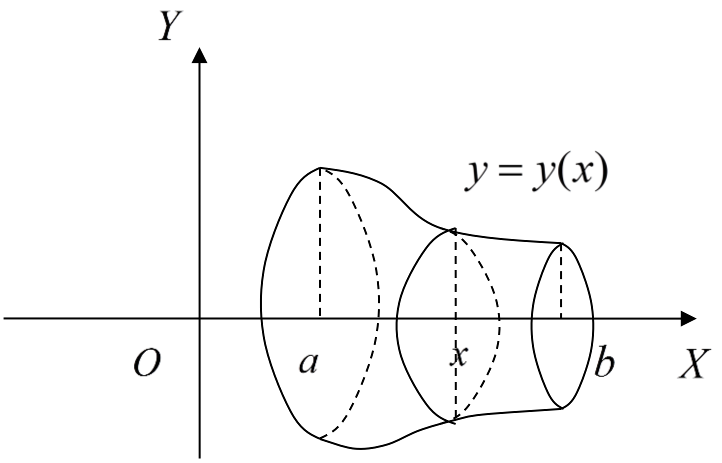


Рис. 6

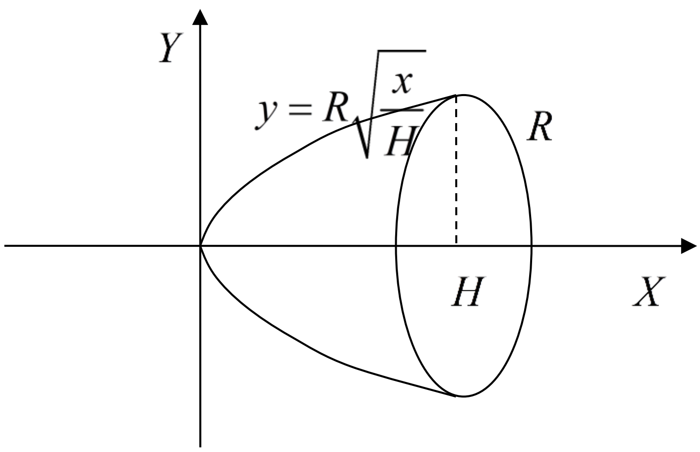
Переріз цього тіла площиною, перпендикулярною осі Ox, є круг радіуса $y(x)$, і кожній точці $x\in[a,b]$ відповідає площа цього перерізу, рівна $S(x)=\pi(y(x))^2$.

Тоді об'єм цього тіла $V=\pi\int\limits_a^b(y(x))^2\,dx$. (8.8)

Приклад. Знайти об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі Ox фігури , обмеженої лініями

$y=R\sqrt{\dfrac{x}{H}}$, $y=0$, $x=H$

(об'єм параболоїда обертання з радіусом основи R і висотою H).



Отримуємо $$V=\pi\int_0^H y^2dx=\pi R^2\int_0^H \frac{x}{H}dx= =\frac{\pi R^2}{H}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H=\frac{1}{2}\pi R^2 H.$$

У випадку, коли крива $x = g(y)$ обертається навколо осі Oy, об'єм тіла обчислюється за такою формулою: $V = \pi\int_a^b \big(g(y)\big)^2 dy$. (8.9)

4. Нехай задана невід'ємна, неперервна функція $y = y(x)$ на відрізку $[a,b]$. Розглянемо поверхню, утворену обертанням навколо осі Ox дуги лінії. Перетнемо поверхню двома площинами, які проходять через точки x і $x+dx$ перпендикулярно до осі Ox. Та частина поверхні, яка міститься між цими площинами нагадує «кільце», ширина якого з точністю до нескінченно малих вищого порядку дорівнює елементу довжини дуги $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, а довжина його розгортки $2\pi y(x)$ (довжина кола радіуса $y(x)$).

Площа поверхні цього кільця дорівнює $2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, тоді при зміні x від $x=a$ до $x=b$ площа поверхні дорівнює

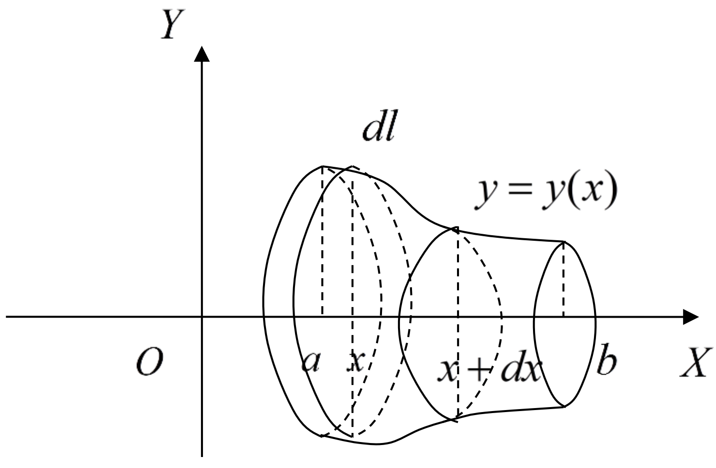


Рис. 7

$$S=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx. \qquad (8.10)$$

Приклад. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги лінії $y=2\sqrt{x}$ на відрізку $0\le x\le 3$.

Знаходимо $y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Тоді

$$S = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left((3+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{56\pi}{3}(\text{кв. од.})$$

Контрольні запитання:

1) Назвіть формулу площі плоскої фігури.
2) Назвіть формулу площі криволінійного сектора.
3) Назвіть формулу довжини дуги кривої.
4) Назвіть формулу об’єму тіла обертання.
5) Назвіть формулу площі поверхні обертання.

1.8. Лекція №9: Застосування визначеного інтеграла до задач фізики.

План

1. Обчислення статичних моментів і центра маси кривої.
2. Теорема Гульдіна.
3. Обчислення роботи та сили тиску.

1. Нехай *M* – матеріальна точка, що має масу m і координати $[x; y]$. Добутки my і mx називаються статичними моментами т. *M* відносно осей Ox та *Oy*.

Нехай маємо спрямлювальну криву, яка має масу і ця маса пропорційна довжині кривої $\Delta m = \rho \Delta s, \rho = \text{const}$. Для спрощення будемо вважати, що $\rho = 1$. Такі криві в механіці називаються однорідними. Проведемо деяке τ - розбиття відрізка $[0; s]$, йому на кривій відповідає розбиття її на частинки. Виберемо на кожному частковому відрізку $[s_{i-1}; s_i]$ довільну точку c_i. Тоді на кривій цим точкам будуть відповідати точки з координатами $x_i = x(c_i)$, $y_i = y(c_i)$. Так, як крива однорідна, то $\Delta m_i = \Delta s_i$. Тоді добуток $y_i \Delta s_i$ називається елементарним статичним моментом часткової дуги.

При цьому вся дуга заміниться матеріальними точками і її статичний момент відносно осі Ox буде дорівнювати границі, до якої прямує сума статичних моментів, розглянутих точок. Ця границя, коли дрібність $\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i$ всіх τ – розбиття прямує до 0, називається ***моментом кривої*** відносно осі Ox

$$M_x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta\tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i = \int_0^s y ds = \int_{x_0}^{x_s} y(x)\sqrt{1+(y')^2}dx. \quad (9.1)$$

Аналогічно визначається статичний момент відносно осі Oy:

$$M_y = \int_0^s x ds = \int_{x_0}^{x_s} x\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

Статичні моменти кривої дозволяють легко встановити положення її центра маси $C(x_0;\ y_0)$. Точка C має таку властивість, що якщо в ній зосередити всю масу кривої, то момент цієї маси відносно довільної осі співпадає з моментом кривої відносно осей координат:

$$Sx_0 = M_y = \int_0^s x ds; Sy_0 = M_x = \int_0^s y ds \ \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{My}{S} = \frac{\int_0^s x ds}{S}; y_0 = \frac{Mx}{S} = \frac{\int_0^s y ds}{S}. \quad (9.2)$$

2. З формули (9.2) відомо, що $Sy_0 = \int_0^s y ds$. Домножимо на 2π:

$$2\pi S y_0 = 2\pi \int_0^s y ds = 2\pi \int_{x_0}^{x_s} y(x)\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

Права частина чисельно дорівнює площі поверхні, що утворюється при обертанні кривої навколо осі Ox, а ліва – добутку довжини кола, описаного центром маси кривої при обертанні її навколо осі Ox на масу цієї кривої, яка дорівнює її довжині.

Отримали наступну теорему.

Теорема Гульдіна. Величина площі поверхні, яка утворюється при обертанні кривої навколо деякої осі, що її не перетинає дорівнює довжині дуги цієї кривої, помноженій на довжину кола, описаного центром маси кривої.

Ця теорема дає змогу знаходити ординату y_0, центра маси кривої, якщо відома її довжина та площа описаної нею поверхні обертання.

3. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж осі Ox під дією сили $\overline{F}=\overline{F}(x)$ з положення $x=a$ в положення $x=b$. Позначимо проекцію сили $\overline{F}$ на вісь Ox через $f(x)$.

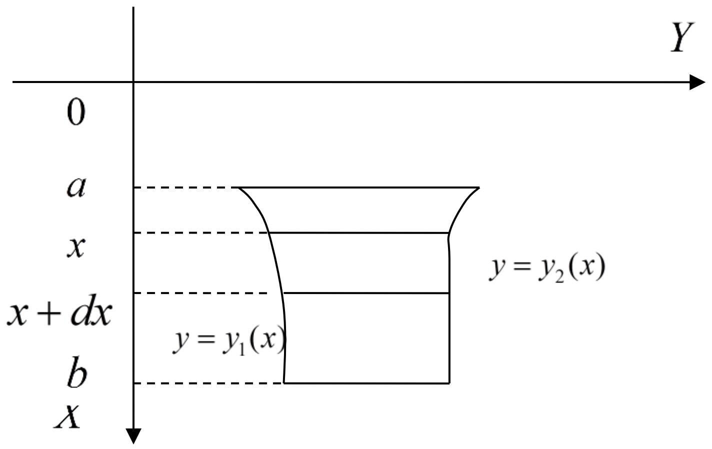


Рис. 8

Тоді робота, виконана на елементарному відрізку $[x,x+dx]$, з точністю до нескінченно малих вищого порядку дорівнює $dA=f(x)dx$ (добуток сили на переміщення). А робота, виконана на всьому відрізку $[a,b]$, дорівнює

$$A=\int_a^b f(x)dx. \tag{9.3}$$

Обчислимо силу тиску рідини на вертикальну стінку. Нехай вісь Ox спрямована перпендикулярно до вільної поверхні вглиб рідини, а плоска фігура лежить в площині Oxy. Нехай ця фігура обмежена лініями $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$, які є неперервні на відрізку $[a,b]$, та прямим $x=a$ і $x=b$, $\left(a\le x\le b,\quad y_1(x)\le y\le y_2(x)\right)$

Згідно з законом Паскаля тиск рідини на глибині h дорівнює $p=\rho gh$, де ρ - густина рідини, g - прискорення сили тяжіння. Площа виокремленої через точки x і $x+dx$ елементарної смужки з точністю до нескінченно малих вищого порядку дорівнює $\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx$, а тиск, що діє на неї дорівнює ρgx, так що диференціал сили, яка діє на пластину, дорівнює $dF=pdx(y_2(x)-y_1(x))dx$, проінтегрувавши обидві частини маємо:

$$F = \rho g \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))x dx. \qquad (9.4)$$

Контрольні запитання:

1) Як використовують інтеграл у задачах з фізики?
2) Як обчислюються статичні моменти з використанням інтегралу?
3) Яка теорема випливає з обчислення центра маси кривої?
4) Поясніть теорему Гульдіна.
5) Як знаходиться робота з використанням інтегралу?
6) Назвіть формулу обчислення сили тиску на вертикальну стінку.

1.9. Лекція №10: Невласні інтеграли.

План

1. Невласні інтеграли на нескінченному проміжку.
2. Критерії Коші. Ознаки збіжності інтегралів на нескінченному проміжку.
3. Невласні інтеграли від необмежених функцій.
4. Умови збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій.

1. Як відомо, якщо функція обмежена на проміжку, то вона інтегрована на ньому. Тим часом застосування інтеграла іноді вимагають узагальнення цього поняття на випадок нескінченного проміжка або випадок необмеженої підінтегральної функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на пів інтервалі $[a, +\infty)$ і інтегрована на будь-якому проміжку $[a, b]$, де $b > a$, тобто інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує для будь-якого значення $b \in [a, +\infty)$, то границя $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ називається ***невласним інтегралом від функції*** $f(x)$ ***на нескінченному проміжку*** $[a, +\infty)$ і позначається:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (10.1)$$

Замість виразу «невласний інтеграл існує», кажуть, що даний невласний інтеграл ***збігається***. В іншому разі кажуть, що невласний інтеграл ***розбігається*** і символу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ніякого числового значення не приписують.

Якщо функція $f(x)$ невід’ємна, то збіжний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ дорівнює скінченній площі нескінченної фігури, обмеженої віссю Ox, прямою $x=a$ і графіком функції $f(x)$.

Невласний інтеграл від функції $f(x)$ по нескінченному проміжку $(-\infty,b]$визначається аналогічно:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (10.2)$$

Також, іноді розглядається невласний інтеграл по всій числовій прямій $(-\infty,+\infty)$. За означенням $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, де c - будь-яке число, при умові, що обидва інтеграли в правій частині збігаються.

2. **Теорема**. Якщо на проміжку $[a,+\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і $f(x)$ є нескінченно малою функцією відносно $g(x)$, то

а) якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, то збігається і $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

б) якщо розбігається інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то розбігається $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема. (ознака порівняння у граничній формі)

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$, то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Теорема.(Критерій Коші) Для того, щоб невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ був збіжним, необхідно і достатньо, щоб для $\forall\varepsilon>0\ \exists b(\varepsilon)>0$, що для всіх $b'>b(\varepsilon)$ $b''>b(\varepsilon)$ виконувалась нерівність $\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають ***абсолютно збіжним,*** якщо збіжним буде $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

3. Нехай функція $f(x)$ визначена на пів інтервалі $[a,b)$, необмежена в точці $x=b$ і інтегрована на будь-якому відрізку вигляду $[a,b-\varepsilon]$, де $\varepsilon>0$ і $[a,b-\varepsilon]\subset[a,b)$. Тоді, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то ця границя називається ***невласним інтегралом від необмеженої функції*** $f(x)$ ***на проміжку*** $[a,b]$ і позначається $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже, $$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{10.3}$$

Якщо границя в правій частині існує, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***збігається.*** Якщо границя не існує, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не існує або ***розбігається***.

Аналогічно визначається невласний інтеграл на півінтервалі $[a,b)$, коли функція необмежена в точці $x=a$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (10.4)$$

Якщо ж функція має особливу точку $x = c$ всередині проміжка (a,b), то за означенням $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ при умові збіжності обох інтегралів у правій частині.

4. **Теорема**. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a,b)$, і задовольняють нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$ при $x \to b - \varepsilon$, то

а) якщо збігається інтеграл $\int_a^b g(x)dx$, то збігається і $\int_a^b f(x)dx$;

б) якщо розбігається інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, то розбігається і інтеграл $\int_a^b g(x)dx$.

Ця достатня умова збіжності (чи розбіжності) невластивих інтегралів називається ***ознакою порівняння***.

Теорема. (ознака порівняння в граничній формі) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і приймають додатні значення в проміжку $[a,b)$, і існує границя $\lim_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \ne 0$, то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$ або обидва збігаються або обидва розбігаються.

Теорема.(Критерії Коші) Для того, щоб невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ необмеженої функції $f(x)$ при $x \to b - \varepsilon$ збігався, необхідно і достатньо, щоб для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, що для всіх $\eta';\ \eta''\ b-\delta < \eta'' < b$ виконувалась нерівність $\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Якщо $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ - збіжний, в цьому випадку інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають ***абсолютно збіжним***. Якщо ж інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається, а $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ розбігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають ***умовно*** (або ***неабсолютно***) збіжним.

Контрольні запитання:

1) Дайте визначення поняття невласний інтеграл на нескінченному проміжку.
2) Назвіть умову збіжності та розбіжності невласного інтеграла із нескінченними межами інтегрування.
3) Дайте визначення поняття невласний інтеграл від необмеженої функції.
4) Назвіть умову збіжності та розбіжності невласного інтеграла від необмеженої функції.
5) Який інтеграл називають абсолютно збіжним?

РОЗДІЛ ІІ. МАТЕРІАЛ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕМИ «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Другий розділ містить 10 практичних занять. Кожне практичне заняття містить необхідні формули, приклади виконаної роботи та завдання для самосійної роботи.

2.1. Практичне заняття № 1: Інтегрування функцій.

№1 Розв’язати методом безпосереднього інтегрування:

А) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10} = \int \frac{dx}{x^2-2x\cdot\frac{7}{2}+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+10} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} =$

оскільки $d\left(x-\frac{7}{2}\right) = \left(x-\frac{7}{2}\right)' = 1 = dx$, то можемо записати $= \int \frac{d\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right| + \text{C} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + \text{C};$

Б) $\int \left(3\sqrt[3]{x} - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}} + 2x\right)dx$

Оскільки, за властивостями інтегралу $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ і $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, якщо $a = const$, то можемо записати інтеграл у вигляді $3\int x^{\frac{1}{3}}dx - 4\int x^{-\frac{3}{5}}dx + 2\int xdx = \frac{3\cdot 3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{5\cdot 4x^{\frac{2}{5}}}{2} + \frac{2x^2}{2} + \text{C}.$

В) $\int(x-2)^2dx = \int(x^2-4x+4)dx = \int x^2dx - 4\int xdx + 4\int dx =$
$= \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x + C.$

Завдання для самостійного виконання:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(5x+3)^2}};$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}};$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+1}};$
4. $\int \left(x^2 - 2e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx;$
5. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$

№2 Розв’язати методом підстановки або заміни змінної:

А) $\int(x-2)^{50}dx = \left|\begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int t^{50}dt = \frac{t^{51}}{51} + C = \frac{(x-2)^{51}}{51} + C;$

Б) $\int \text{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \text{tg}x - x + C;$

В) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x-4} = t \\ x-4 = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{(t^2+4)\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{2}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C.$

Завдання для самостійного виконання:

1. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$
2. $\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)};$
3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$
5. $\int (3x-5)^{10} dx.$

2.2. Практичне заняття № 2: Інтегрування частинами.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Інтегрування частинами застосовується коли знову отриманий інтеграл $\int vdu$ простіше або подібний попередньому $\int udv$.

Приклад № 1: Знайти інтеграли методом інтегрування частинами

А) $\int x\cos x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + +\cos x + C.$

Метод інтегрування частинами може бути застосований двічі або, навіть, тричі, у залежності від степеня многочлена.

Б) $\int (x^2+1)e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+1 & du = 2xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right| = (x^2+1)e^x - 2\int e^x x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right| = (x^2+1)e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = (x^2+1)e^x - 2xe^x - 2e^x + C.$

В) $\int (2x^2+3)\cos x\, dx = \left| \begin{matrix} u = 2x^2+3 & du = 4xdx \\ dv = \cos x\, dx & v = \sin x \end{matrix} \right| =$

$= (2x^2+3)\sin x - 4\int x\sin x\, dx = (2x^2+3)\sin x -$

$4\left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = (2x^2+3)\sin x - 4(-x\cos x + \int \cos x\, dx) =$

$= (2x^2-1)\sin x + 4x\cos x - 4\sin x + C = (2x^2+3)\sin x + 4x\cos x + C.$

Завдання для самостійного виконання.

1. $\int \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$;
2. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x}}$;
3. $\int x \ln 2x \, dx$;
4. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$
5. $\int x^3 e^{x^2} dx$;
6. $\int \cos \ln x \, dx$;
7. $\int (2x^2 + x - 3) \sin x \, dx$;
8. $\int x^2 \cos 3x \, dx$;
9. $\int x e^x dx$;
10. $\int \ln^2 x \, dx$.

2.3. Практичне заняття № 3: Інтегрування раціональних функцій.

Раціональним дробом називається вираз $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b}$.

Прості дроби:

1) $\frac{A}{x-a}$;
2) $\frac{A}{(x-a)^n}$;
3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q(D<0)}$;
4) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$.

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

<u>Приклади №1</u>

А) Раціональний дріб 1-го виду:

$\int \frac{3}{x-2} dx = 3\int \frac{d(x-2)}{x-2} = 3\ln|x-2| + C$.

Б) Раціональний дріб 2-го виду:

$\int \frac{5}{(x-1)^3} dx = 5\int (x-1)^{-3} d(x-1) = 5\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$.

В) Раціональний дріб 3-го виду:

$\int \frac{3}{x^2+2x+10} dx = 3\int \frac{dx}{x^2+2x+1+9} = 3\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3^2} = \frac{3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C$.

Г) Раціональний дріб 4-го виду:

$\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-11x+2}} = \int \frac{(6x-11)\frac{1}{6}+\frac{11}{6}}{\sqrt{3x^2-11x+2}} dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x-11}{\sqrt{3x^2-11x+2}} dx + \frac{11}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}} =$

$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2} + \frac{11}{6\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x\cdot\frac{11}{6}+\frac{121}{36}-\frac{97}{36}}} = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2} +$

$$+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{97}{36}}\right|+C.$$

Завдання для самостійного виконання.

1. $\int\frac{4-3x}{5x^2+6x+18}dx;$
2. $\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{4x-1-x^2}};$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+5x^2}};$
4. $\int\frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx;$
5. $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}.$

Приклад №2: Проінтегрувати раціональні функції за допомогою невизначених коефіцієнтів**.**

А) Випадок 1. Знаменник має тільки дійсні різні корені

$$\int\frac{2x^3+x^2-2}{x^3-x}dx$$

Підінтегральний вираз – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину.

$$\begin{array}{r|l} -\ 2x^3+x^2-2 & x^3-x \\ \cline{2-2} 2x^3 \qquad -2x & 2 \\ \hline x^2+2x-2 & \end{array}$$

Тоді, $\int\frac{2x^3+x^2-2}{x^3-x}dx=\int\left(2+\frac{x^2+2x-2}{x^3-x}\right)dx=2\int dx+\int\frac{x^2+2x-2}{x(x-1)(x+1)}dx=$ $(**)$

Розглянемо правильний раціональний дріб

$$\frac{x^2+2x-2}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

Звільнимося від знаменника

$$x^2+2x-2=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частині, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 1=A+B+C \\ x^1 & 2=B-C \\ x^0 & -2=-A \end{array}\Bigg\}A=2;$$

$$\begin{cases}B+C=-1\\ B-C=2\end{cases}+$$

$2B = 1; \qquad B = \frac{1}{2}; C = -\frac{3}{2};$

Або простіше. Надаючи x значення, що дорівнюють дійсним кореням знаменника, одразу отримаємо невизначені коефіцієнти.

$$\begin{array}{c|c} x = 0 & -2 = -A; A = 2; \\ x = 1 & 1 + 2 - 2 = A \cdot 0 + 2B + C \cdot 0; B = \frac{1}{2}; \\ x = -1 & 1 - 2 - 2 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + 2C;\ C = -\frac{3}{2}; \end{array}$$

$(**) = 2\int dx + 2\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} = 2x + 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + C;$

Б) Випадок 2. Знаменник має дійсні корені, деякі з яких кратні.

$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3} dx$

$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1};$

$x^2 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2$

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 0 = A + D \\ x^2 & 1 = -3A + C - 2D \\ x^1 & 0 = 3A + B - C + D \\ x^0 & 1 = A \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A = 1 \\ D = -A = -1 \\ C = 1 + 3 - 2 = 2 \\ B = -3 + 2 + 1 = 0 \end{array}$$

Отже,

$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3} dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int (x-1)^{-2} dx - \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x| - \frac{2(x-1)^{-1}}{-1} + \ln|x - 1| + \ln C = \ln|Cx(x-1)| + \frac{2}{(x-1)}.$

В) Випадок 3. Серед коренів є дійсні і комплексно-спряжені.

$\int \frac{3dx}{x^3-1} = \int \frac{3dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$\frac{3dx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$3 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$

$$\begin{array}{c|c} x = 1 & 3 = A \cdot 3 + (Bx + C) \cdot 0; A = 1; \\ x^2 & 0 = A + B; B = -A = -1; \\ x^0 & 3 = A - C; C = A - 3 = -2; \end{array}$$

$\int \frac{3dx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1} dx =$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{4}{4}} =$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+$$

$$+1) - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \frac{2x^2+x-1}{(x+1)^2(x-2)^2}dx;$
2. $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx;$
3. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^4-2x^2+2)^2}dx;$
4. $\int \frac{3x^2-2}{9x^4-12x^2+4}dx;$
5. $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x+3)(x^2-x+1)}dx;$
6. $\int \frac{3x^2+2x+10}{(x+1)(2x^2-4x+5)}dx.$

2.4. Практичне заняття № 4: Інтегрування ірраціональних функцій.

Інтеграли від ірраціональних функцій виду

$\int R\left(x,\ (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots,\ (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ розв’язують підстановкою $ax+b=t^s, s=НСК[n_1,\dots,n_2]$.

Приклад №1:

А) Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Виконаємо заміну змінної, поклавши $x+1=t^6$, тоді $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$.

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{\left(t^6-1\right)^2+t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt = 6\int t^3(t^{12}-2t^6+1+t^3)dt =$$

$$6\int(t^{15}-2t^{9}+t^{6}+t^{3})dt=6\left(\frac{t^{16}}{16}-\frac{t^{10}}{5}+\frac{t^{7}}{7}+\frac{t^{4}}{4}\right)+C=6t^{4}\left(\frac{t^{12}}{16}-\frac{t^{6}}{16}+\frac{t^{3}}{7}+\frac{1}{4}\right)+$$

$$+C=6\sqrt[3]{(x+1)^{2}}\left(\frac{(x+1)^{2}}{16}-\frac{x+1}{5}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}+\frac{1}{4}\right)+C.$$

Б) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+1}=\begin{vmatrix}x=t^{2}\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int\frac{\sqrt{t^{2}}2tdt}{t^{2}+1}=2\int\frac{t^{2}dt}{t^{2}+1}=2\int\frac{t^{2}+1-1}{t^{2}+1}dt=2\Big(\int dt-\int\frac{dt}{t^{2}+1}\Big)=2(t-\operatorname{arctg}t)+C=2\big(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\big)+C.$

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

1. $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx;$
2. $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x};$
3. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1};$
4. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[6]{x}}{x+\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx;$
5. $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx;$
6. $\int\frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^{2}}};$
7. $\int\frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx;$
8. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}};$
9. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}};$
10. $\int\frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx.$

2.5. Практичне заняття № 5: Тригонометричні підстановки.

$$\int\sqrt{a^{2}-x^{2}}dx=\begin{vmatrix}x=a\cdot\sin t\\ (x=a\cdot\cos t)\\ dx=a\cdot\cos t\,dt\end{vmatrix}=\int\sqrt{a^{2}-a^{2}\cdot\sin^{2}t}\cdot a\cdot\cos t\,dt=$$

$$=\int\sqrt{a^{2}\cdot\cos^{2}t}\cdot a\cdot\cos t\,dt=a^{2}\int\cos^{2}t\,dt;$$

$$\int\sqrt{a^{2}+x^{2}}dx=\begin{vmatrix}x=a\cdot\operatorname{tg}t\\ (x=a\cdot\operatorname{ctg}t)\\ dx=a\cdot\frac{1}{\cos^{2}t}dt\end{vmatrix};$$

$$\int\sqrt{x^{2}-a^{2}}dx=\begin{vmatrix}x=\frac{a}{\sin t}\\ \left(x=\frac{a}{\cos t}\right)\end{vmatrix}.$$

<u>Приклад №1:</u>

А) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = \begin{vmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}{a^2\sin^2 t}a\cos t\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt =$

$$= \int\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = -\mathrm{ctg}t - t + C = \begin{vmatrix} \sin t = \frac{x}{a};\, t = \arcsin\frac{x}{a} \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}\cdot a}{a\cdot x} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \begin{vmatrix} x = a\,\mathrm{tg}\,t \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt \end{vmatrix} = \int \frac{adt}{a\,\mathrm{tg}\,t\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,t}\cos^2 t} =$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin t\frac{1}{\cos t}\cos^2 t} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \mathrm{ctg}t\right| + C =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{ctg}t = \frac{a}{x} \\ \frac{1}{\sin t} = \sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 t} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x^2}\right| + C.$$

В) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{vmatrix} x = \frac{a}{\sin t} \\ dx = -a\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt \end{vmatrix} = -\int \frac{\frac{a}{\sin t}\cdot a\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}} = -a\int\frac{\sin^2 t\cos t dt}{\sin^3 t\cos t} =$

$$= -a\int\frac{dt}{\sin^2 t} = \mathrm{arctg}t + C = \begin{vmatrix} \sin t = \frac{a}{x} \\ \cos t = \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \end{vmatrix} = a\frac{\sqrt{x^2-a^2}x}{x\cdot a} + C =$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} + C.$$

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

1. $\int \frac{x^2dx}{a^2-x^2}$;
2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;
3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(4+x^2)^5}}$;
4. $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$;
5. $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$;
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$;
7. $\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+4}}$;
8. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
9. $\int\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;
10. $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.

2.6. Практичне заняття № 6: Інтеграл від біномного диференціала. Підстановки Ейлера.

$x^m(a+bx^n)^p dx$, де $a,b\in\mathbb{R};\ m,n,p\ \in\mathbb{Q}$ –біномний диференціал.

1) p – ціле число, $m=\frac{r}{s},n=\frac{l}{k}$, тоді інтеграл раціоналізується підстановкою $x=t^\alpha$, де α – НСК(s, k).

2) $p=\frac{r}{s}$ – дробове число, але $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то робимо підстановку $a+bx^n=t^s$.

3) $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число, тоді робимо підстановку $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$.

Для інтеграла виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(x,(x-x_1),\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)dx$

виконують підстановку Ейлера:

- якщо $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$, - перша підстановка Ейлера. Тоді $x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$.
- якщо $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$. - друга підстановка Ейлера. Тоді $x=\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}$.

Приклад №1:

Проінтегрувати диференціальний біном

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} m=-\frac{1}{2},n=\frac{1}{4},p=\frac{1}{3}\\ \frac{m+1}{n}=2\Rightarrow 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3;t=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\\ \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}dx=3t^2dt\end{array}\right|=\int x^{\frac{1}{4}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{3}{4}}dx=$$

$$=\int(t^3-1)t\cdot 12t^2dt=12\int(t^6-t^3)dt=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C.$$

Приклад №2:

Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

Застосуємо другу підстановку Ейлера: $\sqrt{1-x-x^2} = xt-1$, тоді $1-x-x^2 = x^2t^2 - 2xt + 1$, звідки $x = \frac{2t-1}{t^2+1}$,

$$dx = \frac{2(t^2+1) - 2t(2t-1)}{(t^2+1)^2}dt = \frac{2(1+t-t^2)}{(t^2+1)^2}dt,$$

$$1+x = 1+\frac{2t-1}{t^2+1} = \frac{t^2+2t}{t^2+1},\ \sqrt{1-x-x^2} = xt-1 = \frac{t^2-t-1}{t^2+1}\sqrt{2}.$$

В результаті отримуємо

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{\frac{2(1+t-t^2)}{(t^2+1)^2}dt}{\frac{t^2+2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2-t-1}{t^2+1}} = -2\int\frac{dt}{t^2+2t} = -2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2-1} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1-1}{t+1+1}\right| + C = -\ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x-x^2}}{2x+1+\sqrt{1-x-x^2}}\right| + C.$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$;
3. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}$;
4. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;
5. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$;
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$;
7. $\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}dx$;
8. $\int x^{-\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{1}{6}}\right)^{-1}dx$;
9. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x^2+x}\right)^2}$;
10. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

2.7. Практичне заняття № 7: Інтегрування тригонометричних функцій.

$\int R(\sin x\,, \cos x)dx$

Якщо sin$x$ та cos$x$ входять у раціональну функцію R у першому степені не перемножуючись одне з одним, то застосуємо, так звану, універсальну тригонометричну підстановку:

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Якщо $R(\sin x\,, \cos x)$ є непарною функцією відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x\,, \cos x) = -R(\sin x\,, \cos x)$, то застосовуємо підстановку $\cos x = t$.

Якщо $R(\sin x\,, \cos x)$ є непарною функцією відносно $\cos x$, $R(\sin x\,, -\cos x) = -R(\sin x\,, \cos x)$, то застосовуємо підстановку $\sin x = t$.

Якщо $R(\sin x\,, \cos x)$є парною функцією відносно $\sin x$ та $\cos x$, тобто $R(-\sin x\,, -\cos x) = R(\sin x\,, \cos x)$, то застосовуємо підстановку tg$x = t$.

Тоді $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Приклад №1:

А) $\int \frac{dt}{\sin x+1} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \;\; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+1} = 2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t+1+t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} =$

$= \frac{-2}{t+1} + C = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + C.$

Б) $\int \frac{\cos x-\cos^3 x}{\sin^2 x-\sin^4 x}dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x-\sin^4 x}dx = \int \frac{t^2dt}{t^2(1-t^2)} =$

$-\int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = \ln\sqrt{\frac{\sin x+1}{\sin x-1}} + C.$

В) $\int \frac{dx}{2\sin x\cos x-\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}x = t & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, & dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$

$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2t-1} = \frac{1}{2}\ln|2t-1| + C = \ln\sqrt{2\operatorname{tg}x-1} + C.$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

2. $\int \sin^5 x\, \sqrt[5]{\cos x}\, dx$;

3. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin 3x}$;
4. $\int \frac{dx}{4+\mathrm{tg}x+4\mathrm{ctg}x}$;
5. $\int \mathrm{tg}^6 x\, dx$;
6. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$;

$$\int \cos^m x \sin^n x dx$$

Якщо m і n - парні невід'ємні, то використовуємо формули: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot$

Для інтегралів, що мають вигляд $\int \mathrm{tg}^m x \frac{dx}{\sin^n x}$, $\left(\int ctg^m x \frac{dx}{\sin^n x}\right)$ де n додатнє парне число, скористаємося наступними формулами:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x + 1, \frac{1}{\sin^2 x} = \mathrm{ctg}^2 x + 1.$$

Інтеграли, що мають вигляд $\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx\, dx$:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x);$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m-n)x)$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin x)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

<u>Приклад №2:</u>

А) $$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$$

Б) $$\int \sin^4 x dx = \int\left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x=\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]+C=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

В) $\int\cos 5x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos(5x+2x)+\cos(5x-2x)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos 7x+\cos 3x)dx==\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 3x}{3}\right)+C.$$

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

1. $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;
2. $\int\frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}$;
3. $\int\sin^3 x\,dx$;
4. $\int\frac{\cos^5 xdx}{5\sin x}$;
5. $\int\sin 3x\sin x\,dx$;
6. $\int\cos 3x\cos 2x\,dx$;
7. $\int\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}dx$.

2.8. Практичне заняття №8: Інтегрування визначеного інтеграла.

$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$ - формула Ньютона-Лейбніца

$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt$ - формула заміни змінної

$\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$ - формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

<u>Приклад №1:</u>

А) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)=-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

Б) $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = R\sin t \\ dx = R\cos t\, dt \\ x_1 = 0; 0 = R\sin t_1\,;\ t_1 = 0 \\ x_2 = R; R = R\sin t_2\,;\ t_2 = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t} \cdot R\cos t\, dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$

$= \frac{R^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2} sin\, 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right) = \frac{\pi R^2}{4}.$

В) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx.$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = \dfrac{dx}{x^2} \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{x}\ln x\,\Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} =$$

$= -\frac{1}{x}\ln x\,\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{1}{e}\ln e + 1\ln 1 - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx;$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 2x}{\cos x}dx;$
3. $\int_{-1}^1 x\, \text{arctg}x\, dx;$
4. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x};$
5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$
6. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx;$
7. $\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx;$
8. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6};$
9. $\int_{-1}^0 x\ln(1-x)\, dx;$
10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}.$

2.9. Практичне заняття №9: Застосування визначеного інтеграла.

$S = \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$ – формула обчислення площі плоских фігур.

Якщо в криволінійній трапеції крива задана параметрично, то

$$S = \int_{t_a}^{t_b} y(t)x'_t dt.$$

Площа криволінійного сектора у полярній системі координат:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big(r(\varphi)\big)^2 d\varphi$$

Довжина дуги: $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y(x))^2}\, dx$.

Якщо крива задана параметричними рівняннями:

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

У полярній системі координат рівняння заданої лінії запишеться у вигляді: $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi.$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox: $V = \pi \int\limits_a^b (y(x))^2\, dx$.

У випадку, коли крива $x = g(y)$ обертається навколо осі *Oy*, об'єм тіла обчислюється за такою формулою: $V = \pi \int_a^b \left(g(y)\right)^2 dy$.

Площа поверхні: $S = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$

<u>Приклад №1:</u>

А) Обчислити площу фігури, що обмежена лініями: $y = x^2$, $y = x + 2$.

Розв'язання:

Знайдемо точки перетину:

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = 2;\ x_2 = -1.$

Тоді

$S = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(4 - 1) +$

$+2(2 + 1) - \frac{1}{3}(8 + 1) = 4{,}5.$

Б) Обчислити площу фігури обмеженої однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ та віссю *Ox*.

Розв'язання:

Рівняння задано параметрично. Оскільки, t змінюється від 0 до 2π, то

$dx = a(1-\cos t)dt$

$S = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = a^2\left(\frac{3}{2}2\pi-2(\sin 2\pi-\sin 0)+\frac{1}{4}(\sin 4\pi-\sin 0)\right) = 3\pi a^2.$

<u>Приклад №2:</u>

А) Обчислити довжину пласкої кривої $y = \ln\sin x\,, x \in \left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання:

$y' = \frac{\cos x}{\sin x};$

$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1}{\sin x}-\mathrm{ctg}x\right|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln|1-0|-\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = -\ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 3.$

Б) Обчислити довжину однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$.

Розв'язання.

Оскільки рівняння задано параметрично, то використовуємо відповідну формулу:

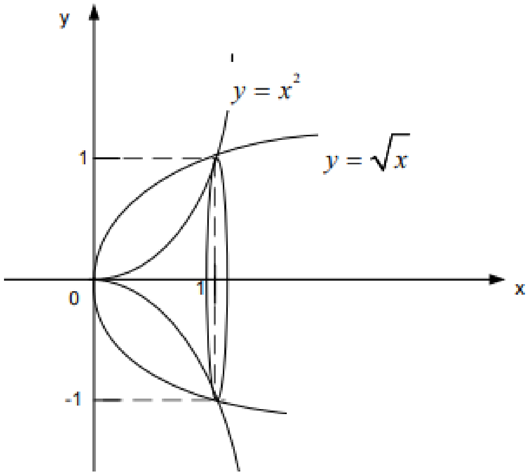
$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}dt =$

$= \int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$

$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -2\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4(\cos\pi-\cos 0) = -4(-1-1) = 8.$

<u>Приклад №3:</u> Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі *Ox* фігури, що обмежена лініями $y = x^2,\ x = y^2$.

Розв'язання:



Знайдемо точки перетину $y^2 = x^4$, тоді $x = x^4$, $x_1 = 0;\ x_2 = 1$.

$V_x = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$.

<u>Приклад №4:</u> Обчислити площу поверхні фігури, утвореної обертанням навколо осі *Ox* прямої $y = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$.

Розв'язання:

$$S_x = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + (3x^2)^2}dx = 2\pi \int_0^1 (9x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \left|x^3dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right)\right| = \frac{2\pi}{4\cdot 9}\int_0^1 (9x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} d(9x^4 + 1) = \frac{2\pi}{18}\frac{(9x^4+1)^{\frac{1}{2}}}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{27}\left((9 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

1. Обчислити площу плоскої фігури, яка обмежена наступними лініями:

А) $y = 2x^2$, $y = -2x + 4$;

Б) $y = -x^2 + 6x - 5$, $y = 0$;

В) $y = 5 - x^2$, $y = 0$;

Г) $\begin{cases} x = \frac{5}{3}\cos^3 t, \\ y = \frac{5}{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$;

Д) $\rho = \frac{2}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)}$; $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

2. Знайти довжину дуги кривої:

А) $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $1 < a \le x \le b$;

Б) $\begin{cases} x = 7\cos^2 t\,, \\ y = 7\sin^2 t\,, \end{cases} \frac{\pi}{2} \le t \le \pi;$

В) $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$.

3. Обчислити об’єм тіла, утвореного внаслідок обертання плоскої фігури, яка обмежена лініями.

А) $y = \dfrac{3}{4}x,\ x = 4,\ y = 0$ навколо осі О*x;*

Б) $x^2 = -2y + 16,\ y = 0,\ y = 6$ навколо осі О*y*.

2.10. Практичне заняття №10: Інтегрування невласного інтеграла.

Невласний інтеграл від функції $f(x)$ ***на нескінченному проміжку*** - $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Невласний інтеграл від необмеженої функції - $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Приклад №1. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

А) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}}dx$.

Тут особлива точка $x = \frac{\pi}{3}$ тому що $1 - 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 0$ і підінтегральна функція необмежена в околі цієї точки.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\frac{\pi}{3}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1-2\cos x)}{\sqrt{1-2\cos x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{1-2\cos x}\,\Bigg|_{\frac{\pi}{3}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{1+2\cos\frac{\pi}{2}} - \sqrt{1-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}\right) = 1,$$

інтеграл збігається.

Б) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^\alpha}$. При $\alpha \le 0$ особливої точки немає, при $\alpha > 0$ особливою точкою є точка $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^\alpha dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1; \\ \infty \quad \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Якщо $\alpha = 1$, то $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\ln\varepsilon) = \infty$.

Таким чином заданий інтеграл збігається при $\alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

В) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right) =$

$$= \begin{cases} \infty, \text{ якщо } \alpha < 1 (\textit{розбігається}) \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, \text{якщо } \alpha > 1 (\textit{збігається}). \end{cases}$$

Можна пересвідчитися, що при $\alpha = 1$ даний інтеграл розбігається. Таким чином інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається, якщо $\alpha > 1$ і розбігається, якщо $\alpha \leq 1$.

Г) $\int_1^{+\infty} (\ln(x+10) - \ln x)dx = \int_1^{+\infty} \ln\frac{x+10}{x}dx$.

Знайдемо границю

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+10}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{10}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{10}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 10 \neq 0.$$

Оскільки $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ розбігається, то і заданий інтеграл розбігається.

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

1. $\int_0^\infty x\sin x\, dx$;
2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}$;
3. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$;
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}$;

5. $\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx;$

6. $\int_{0}^{\infty} e^{-3x}xdx;$

7. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}};$

8. $\int_{0}^{3}\frac{\sqrt[3]{9}dx}{\sqrt[3]{9-x^2}};$

9. $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}};$

10. $\int_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}.$

РОЗДІЛ ІІІ. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Розроблено самостійні та контрольні роботи для перевірки засвоєння студентами матеріалу, також індивідуальні довгострокові завдання. До кожної роботи наведено розв'язаний типовий варіант.

4.1. Самостійна робота №1 за темою «Інтегрування раціональних та ірраціональних функцій»

Варіант 0

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)(x+3)}$.

Розв'язання:

Знаменник раціонального дробу має прості корені

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -3.$

Тому розклад на елементарні дроби має вид:

$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$

З цієї рівності раціональних дробів слідує рівність многочленів:

$x = A(x-1)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x-1)(x+1).$

Покладаючи послідовно $x = 1$, $x = -1$, $x = -3$, знаходимо

$1 = 8A, -1 = -4B, -3 = 8C,$

тобто, $A = \frac{1}{8}, B = \frac{1}{4}, C = -\frac{3}{8}.$

Тому $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{8}\ln|x-1| +$ $+\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{8}\ln|x+3| + C.$

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання:

Цей інтеграл має вигляд $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, причому $a = b = 1$,

$m = 0, n = 4, p = \frac{1}{4}.$

Так як $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$, то, застосовуючи підстановку $1-x^{-4}=t^4$ знаходимо $t=(1+x^{-4})^{\frac{1}{4}}, x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$,

$dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^4dt}{t^4-1}=-t-\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=-t+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

Варіанти самостійних робіт винесено в додатки.

4.2. Контрольна робота №1 за темою «Невизначений інтеграл»

Варіант 0

Знайти інтеграли

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-3}}$

Оскільки $d(5x-3)=(5x-3)'dx=5dx$, то домноживши і розділивши підінтегральний вираз на сталий множник 5, одержимо:

$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-3}}=\int\frac{\frac{1}{5}5dx}{\sqrt{5x-3}}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x-3)}{\sqrt{5x-3}}=\frac{1}{5}\int(5x-3)^{-\frac{1}{2}}d(5x-3)$ – отримали табличний інтеграл виду $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, тоді

$\frac{1}{5}\int(5x-3)^{-\frac{1}{2}}d(5x-3)=\frac{2}{5}\sqrt{5x-3}+\mathrm{C}.$

2. $\int x\cos 2x\,dx.$

Використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x\cos 2x\,dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos 2x\,dx & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{vmatrix}=x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-$$

$$\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

3. $\int\frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$

Оскільки $d(x^2-7x+12)=(x^2-7x+12)'dx=(2x-7)dx$, то домноживши і розділивши підінтегральний вираз на сталий множник 2 та додавши і віднявши 7, одержимо:

$$\int\frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}=\int\frac{(2x-7)\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{2}-2}{x^2-7x+12}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-7)dx}{x^2-7x+12}+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-7x+12}=\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+12|+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-2x\cdot\frac{7}{2}+\frac{49}{4}-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+12|+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+12|+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}\right|+\mathrm{C}=\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+12|+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+\mathrm{C}.$$

4. $\int\frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$

Оскільки тригонометричні функції у парних степенях, то використаємо підстановку $\mathrm{tg}x=t$

$$\int\frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}=|\mathrm{tg}x=t|=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4t^2}{1+t^2}-\frac{7}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{4t^2-7}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{(2t)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2t-\sqrt{7}}{2t+\sqrt{7}}\right|+C=\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}x-\sqrt{7}}{2\mathrm{tg}x+\sqrt{7}}\right|+C.$$

5. $\int\frac{4x^3+10x^2+10x+1}{\left(x+1\right)^2(x^2+2x+2)}dx$

Під знаком інтеграла правильний раціональний дріб, розкладемо його в суму простих дробів

$$\frac{4x^3+10x^2+10x+1}{\left(x+1\right)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Зведемо праву частину до спільного знаменника і прирівняємо чисельники лівої і правої частини:

$$4x^3+10x^2+10x+1=A(x^3+3x^2+4x+2)+B(x^2+2x+2)+C(x^3+2x^2+2)+$$
$$+D(x^2+2x+2).$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \left\{\begin{array}{c} A+C=4 \\ 3A+B+2C+D=10 \\ 4A+2B+C+2D=10 \\ 2A+2B+D=1 \end{array}\right. \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^6 & \end{array}.$$

Розв’язок цієї системи $A=2,\ \ B=-3,\ C=2,\ \ D=3$.

Тоді

$$\int\frac{4x^3+10x^2+10x+1}{\left(x+1\right)^2(x^2+2x+2)}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{3}{\left(x+1\right)^2}+\frac{2x+3}{x^2+2x+2}\right)dx=$$

$$=2\int\frac{dx}{x+1}-3\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2}+\int\frac{(2x+2)+1}{x^2+2x+2}dx=2\ln\left|x+1\right|+\frac{3}{x+1}+\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2}+$$

$$+\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2+1}=2\ln\left|x+1\right|+\frac{3}{x+1}+\ln\left|x^2+2x+2\right|+arctg(x+1)+C.$$

Варіанти самостійних робіт винесено в додатки.

4.3. Самостійна робота №2 за темою «Застосування визначеного інтеграла»

Варіант 0

1. Знайти інтеграл:

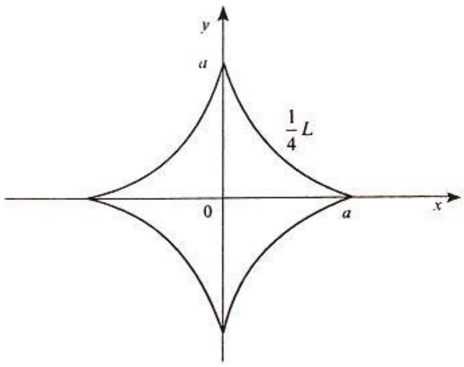
$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$

Оскільки $d(\ln x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, то ввівши під знак диференціала та використавши формулу Ньютона-Лейбніца, отримаємо:

$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int_1^e \sin(\ln x)\, d(\ln x) = -\cos(\ln x)\Big|_1^e = -\cos(\ln e) +$
$-\cos(\ln 1) = 1 - \cos 1.$

2. Знайти площу, обмежену астроїдою:

$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}.$



З графіка астроїди видно, що достатньо знайти площу однієї її четверті, а потім помножити результат на 4. Звідси, якщо x змінюється в межах $[0; a]$, то параметр t змінюється в межах $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Оскільки рівняння задано параметрично, то використовуємо відповідну формулу: $\int_{t_a}^{t_b} y(t)x'_t dt$.

$$S = 4S_1 = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a \cdot \sin^3 t \cdot 3a \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t)dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t\, dt =$$

використаємо формулу пониження степеня $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ і $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$,

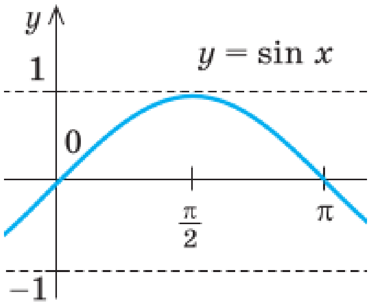
$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)(1 - \cos^2 2t)dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^2 2t)dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4t}{2}dt + + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2t)d\,(\sin 2t) \right)$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi a^2}{8}(\text{кв. од.})$$

3. Знайти площу поверхні та об’єм тіла, утвореного обертанням однієї півхвилі $y = \sin x$ навколо осі *Ox*.



З графіка видно межі $[0;\ \pi]$, застосовуючи відповідну формулу $V = \pi\int_a^b (y(x))^2\,dx$, отримуємо

$$V = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \pi\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Використаємо формулу: $S = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$

$$S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t\\ -\sin x\,dx = dt\end{matrix}\right| =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+t^2} - \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right) = \pi\left(2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$= \pi\left(2\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right) = \pi\left(2\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right).$$

Варіант 1

1. Знайти інтеграл: $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $x + y = 3$.
3. Знайти довжину дуги кривої: $y = \frac{x^2}{2} - 1$, відтятої віссю Ox.

Варіант 2

1. Знайти інтеграл: $\int_1^e x\ln x\,dx$.
2. Визначити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$, що відтинається прямою $x = \frac{4}{3}$.

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ навколо осі *Ox*.

Варіант 3

1. Знайти інтеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x dx$.
2. Знайти довжину дуги кардіоїди $r = a(1 + \cos\varphi)$.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ навколо осі *Oy*.

Варіант 4

1. Знайти інтеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \mathrm{tg} x) dx$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо осі *Ox*.

Варіант 5

1. Знайти інтеграл: $\int_0^{\pi} e^x \sin 2x \, dx$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.
3. Знайти площу поверхні, утворену обертанням кривої $y = \frac{x^3}{3}$, $x = -2$, $x = 2$, навколо осі *Ox*.

Варіант 6

1. Знайти інтеграл: $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.
2. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln(\sin x)$ від $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.
3. Знайти площу поверхні, утворену обертанням дуги кривої $y^2 = 4 + x$, що відтинається прямою $x = 2$.

Варіант 7

1. Знайти інтеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.
2. Знайти довжину дуги кривої $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ між точками перетину з віссю абсцис.
3. Знайти площу поверхні, утворену обертанням всієї кривої $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Варіант 8

1. Знайти інтеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.
2. Знайти довжину дуги всієї кривої $r = a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$.
3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $x + y = 3$.

Варіант 9

1. Знайти інтеграл: $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x^2}$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
3. Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t + \sin t) \end{cases}$ від точки $t_1 = 0$ до точки $t_2 = 1$.

Варіант 10

1. Знайти інтеграл: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^2}$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $r = a\cos 2\varphi$.
3. Знайти площу поверхні сфери, утвореної обертанням півкола $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ навколо осі *Ox*.

3.4. Контрольна робота №2 за темою «Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла»

Варіант 0

1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^x \arcsin e^{-x} dx$.

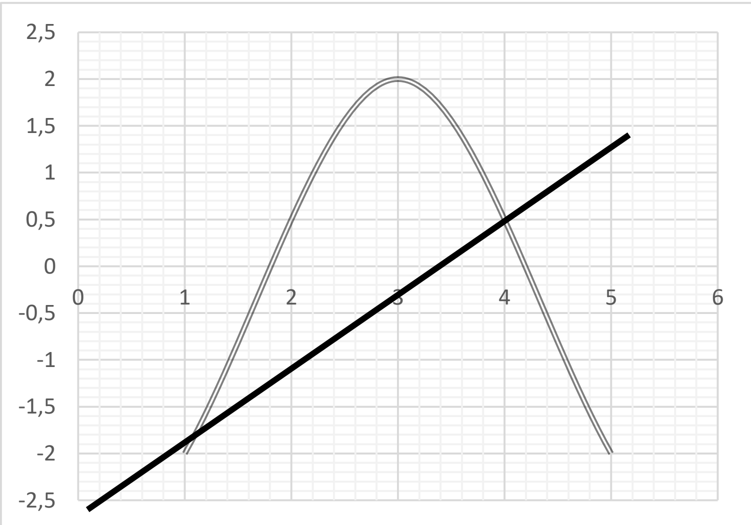
Розв'язання:

Знайдемо первісну підінтегральної функції. Зробивши заміну змінної $t = e^{-x}$, потім застосувавши метод інтегрування частинами, одержимо $\int_0^1 e^x \arcsin e^{-x} dx = -\int_0^1 \frac{\arcsin t}{t^2} dt = \frac{1}{t} \arcsin t \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$, де $\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\int_0^1 \frac{dt}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} = \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right) + C.$

Тут первісна має скінченну границю в точці $x = 0$, тому можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца. В результаті одержимо

$$\int_0^1 e^x \arcsin e^{-x} dx = e \cdot \arcsin e^{-1} - \frac{\pi}{2} + \ln\left(e + \sqrt{e^2 - 1}\right) + C.$$

2. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 6x - x^2 - 7$ і прямою $y = x - 3$.



Розв'язання:

Знаходимо абсциси точок перетину даних кривих: з рівняння $6x - x^2 - 7 = x - 3$ маємо $x_1 = 1, x_2 = 4$.

За формулою площі

$S = \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x)\right) dx$ знаходимо площу фігури:

$$S = \int_1^4 \left((6x - x^2 - 7) - (x - 3)\right) dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx =$$

$= \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$

3. Знайти довжину дуги кривої однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$; $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання:

Оскільки функція задана параметрично $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і $t \in [\alpha;\ \beta]$, то довжина дуги знаходиться за формулою $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$. Тоді,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9(1 - \cos t)^2 + 9\sin^2 t}\,dt = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = 6\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -4 \cdot 3\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 24.$$

4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$; $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання:

За формулою $S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$ маємо

$$S_x = 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt = 2\pi \int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{2 \cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 2 \cdot 8\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2} = -16\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -16\pi \left[\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right]_0^{2\pi} = -16\pi\left[-2 + \frac{2}{3}\right] = \frac{64}{3}\pi$$

5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = x^2$ і $y = 2\sqrt{2x}$.

Розв’язання:

Знаходимо абсциси точок перетину даних кривих: з рівняння $x^2 = 2\sqrt{2x}$ маємо $x_1 = 0, x_2 = 2$.

Шуканий об’єм тіла обертання за формулою

$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right) dx$ дорівнює

$V = \pi \int_0^2 8x dx - \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{48\pi}{5}$.

6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтегралу від необмеженої функції $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв’язання:

Підінтегральна функція необмежена в лівому околі точки $x = 1$ і інтегровна на відрізку $[0; 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$.

За означенням невласного інтеграла одержимо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin x \left| \begin{matrix} 1-\varepsilon \\ 0 \end{matrix} \right. \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Варіанти самостійних робіт винесені в додатки.

3.5. Індивідуальні довгострокові завдання за темою «Інтегральне числення»

Варіант 0

1) Обчислити невизначені інтеграли:

А) $\int \frac{e^x dx}{(e^x+2)^2}$;

Б) $\int x \ln 3x \, dx$;

В) $\int \frac{5x^4+2x^2-1}{x(x+1)^2} dx$;

Г) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

Д) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Розв’язання:

А) Інтеграл обчислюється за допомогою заміни змінної:

$$\int \frac{e^x dx}{(e^x+2)^2} = \left| \begin{matrix} t = e^x + 2 \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{e^x+2} + C.$$

Б) Обчислимо цей інтеграл за частинами:

$$\int x\ln 3x\,dx = \begin{vmatrix} u=\ln 3x & du=\frac{3}{x}dx \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln 3x - \frac{3}{2}\int xdx =$$

$= \frac{x^2}{2}\ln 3x - \frac{3}{4}x^2 + C.$

В) Дріб, що стоїть під знаком інтеграла неправильний, тому розділимо спочатку цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\;5x^4+2x^2-1 & x^3+2x^2+x \\ \underline{5x^4+10x^3+5x^2} & 5x-10 \\ -\;-10x^3-3x^2-1 & \\ \underline{-10x^3-20x^2-10x} & \\ 17x^2+10x-1. & \end{array}$$

$\frac{5x^4+2x^2-1}{x(x+1)^2} = 5x - 10 + \frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2}.$

Правильний дріб $\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2}$ подамо у вигляді суми простих дробів:

$\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$

Зведемо суму дробів в правій частині до спільного знаменника і прирівняємо чисельник дробу, що стоїть в лівій частині, та чисельник дробу, що отримався

$17x^2 + 10x - 1 = A(x+1)^2 + Bx + Cx(x+1).$

Прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях змінної *x*, отримаємо систему, з якої знайдемо шукані сталі *A*, *B* та *C*

$$\begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix}\begin{cases} 17 = A + C, \\ 10 = 2A + B + C, \\ -1 = A. \end{cases} A=-1; C=18; B=-6.$$

Отже, $\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{6}{(x+1)^2} + \frac{18}{x+1}.$

Шуканий інтеграл дорівнює

$$\int \frac{5x^4+2x^2-1}{x(x+1)^2}dx = \int\left(5x - 10 - \frac{1}{x} - \frac{6}{(x+1)^2} + \frac{18}{x+1}\right)dx =$$

$= \frac{5}{2}x^2 - 10x - \ln|x| + \frac{6}{x+1} + 18\ln|x+1| + C.$

Г) Даний інтеграл є інтегралом від диференціального бінома $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, причому $a=b=1, m=0, n=4, p=\frac{1}{4}$.

Так як $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$, то, застосовуючи підстановку $1-x^{-4}=t^4$ знаходимо $t=(1+x^{-4})^{\frac{1}{4}}, x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$,

$dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^4dt}{t^4-1}=-t-\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=-t+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-$$

$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$.

Д) Цей інтеграл обчислимо за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\left|\begin{aligned}\sin x&=\frac{2t}{1+t^2}\\ dx&=\frac{2dt}{1+t^2}\end{aligned}\right|=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{1+t^2+2t}=$$

$=2\int\frac{dt}{(t+1)^2}=-\frac{2}{t+1}+C=-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$.

2) Обчислити визначені інтеграли:

А) $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$; Б) $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x dx$.

Розв'язання:

А) Виконаємо заміну змінної, поклавши $x=2\sin t$, тоді $dx=2\cos t\,dt$. Якщо $x=0$, то $0=2\sin t$; $t_1=0$ (нижня межа). Якщо $x=2$, то $2=2\sin t$; $t_2=\frac{\pi}{2}$ (верхня межа).

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=(2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$.

Б) Обчислимо даний інтеграл за частинами:

$$\int_0^1 x\,\text{arctg}x dx = \begin{vmatrix} u = \text{arctg}x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\text{arctg}x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{arctg}1 - \tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \tfrac{dx}{1+x^2}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}(x - \text{arctg}x)\Big|_0^1 = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{2}.$$

3) Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

А) параболою $y = 3x^2 + 1$ і прямою $y = 3x + 7$;

Б) однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\ 0 \le t \le 2\pi$, і віссю *Ox*;

В) кардіоїдою $r = 3(1 + \cos\varphi)$.

Розв’язання:

А) знайдемо точки перетину параболи і прямої, розв’язавши для цього систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 1 \\ y = 3x + 7 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 1 = 3x + 7, 3x^2 - 3x - 6 = 0, x^2 - x - 2 = 0.$$

Звідки: $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$.

Площу шукаємо за формулою $S = \int_{x_1}^{x_2}\big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$.

Отже,

$$S = \int_{-1}^{2}\big(3x + 7 - (3x^2 + 1)\big)dx = \int_{-1}^{2}(-x^2 + 3x + 6)dx =$$

$$= \left(-x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 6x\right)\Big|_{-1}^{2} = -8 + 6 + 12 - 1 - \tfrac{3}{2} + 6 = 13{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

Б) Якщо фігуру задано параметричним рівнянням, то шукана площа дорівнює $S = \int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$, де $t_1 \le t \le t_2$. Оскільки $\varphi' = a(1 - \cos t)$, то

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\cdot a(1 - \cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)dt\right) = a^2\left(2\pi + \tfrac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}\right) = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2 \text{ (кв. од.)}.$$

В) Площа сектора, обмеженого графіком функції в полярних координатах дорівнює $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$.

Оскільки кардіоїда симетрична відносно осі Ox, то можна знайти площу її половини, а потім помножити на 2, при цьому кут φ зміниться від 0 до π.

Отже,

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(3(1+\cos\varphi)\big)^2 d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\varphi\,\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right) = \frac{9}{2}\left(\pi + \frac{1}{2}\varphi\,\Big|_0^{\pi} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\,\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{9}{2}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{27}{4}\pi.$$

Шукана площа дорівнює:

$S = 2S_1 = 2\cdot\frac{27}{4}\pi = \frac{27}{2}\pi$(кв. од.).

4) Обчислити довжину дуги:

А) ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ на сегменті $[0; a]$ осі абсцис;

Б) однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = 3(t-\sin t) \\ y = 3(1-\cos t)\end{cases}$; $0 \le t \le 2\pi$;

В) довжину кардіоїди $2 = 3(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Розв'язання:

А) Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то довжина дуги при $a \le x \le b$ визначається за формулою $l = \int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx$.

Оскільки $f(x) = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$,

то $f'(x) = \mathrm{sh}\frac{x}{a}$ і $l = \int_0^a \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}dx = \int_0^a \mathrm{ch}\frac{x}{a}dx = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^a = a\,\mathrm{sh}1$.

Б) У випадку параметричного задання кривої $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і $t \in [\alpha;\ \beta]$, довжина дуги знаходиться за формулою

$L = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}dt.$

Знаходимо

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{9(1-\cos t)^2+9\sin^2 t}\,dt=3\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=6\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=-4\cdot 3\cos\tfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=24.$$

В) Довжина дуги кривої, заданої в полярних координатах, визначається формулою $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}d\varphi\,,\alpha\le\varphi\le\beta$.

Враховуючи, що $\rho'=-3\sin\varphi$, отримаємо

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{9\sin^2\varphi+9(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$$=3\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\varphi+1+\cos^2\varphi+2\cos\varphi}\,d\varphi=3\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=6\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=6\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi+\int_\pi^{2\pi}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi\right)=$$

$$=6\left(2\sin\tfrac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}-2\sin\tfrac{\varphi}{2}\Big|_\pi^{2\pi}\right)=24.$$

5) Знайти об’єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y=x^2$ і $y=2\sqrt{2x}$.

Розв’язання:

Знаходимо абсциси точок перетину даних кривих: з рівняння $x^2=2\sqrt{2x}$ маємо $x_1=0,x_2=2$.

Шуканий об’єм тіла обертання за формулою

$V=\pi\int_\alpha^\beta\left(y_2^2(x)-y_1^2(x)\right)dx$ дорівнює

$V=\pi\int_0^2 8xdx-\pi\int_0^2 x^4dx=\frac{48\pi}{5}$. (куб. од.)

6) Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

А) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; Б) $\int_2^3\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$.

Розв’язання:

А) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_e^a\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_e^a\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^a\right)=$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{\ln e}\right)=-\frac{1}{\lim\limits_{a\to+\infty}\ln a}+\frac{1}{\ln e}=1.$

Даний інтеграл збіжний.

Б) В точці $x = 2$ підінтегральна функція необмежена, тому

$$\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{d(x^2-4)}{\sqrt[4]{x^2-4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{4}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{4}}\Big|_{2+\varepsilon}^{3}\right) = \frac{2}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left((9-4)^{\frac{3}{4}} - ((2+\varepsilon)^2-4)^{\frac{3}{4}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{5^3} - \frac{2}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}((2+\varepsilon)^2-4)^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{5^3}.$$

Даний невласний інтеграл збіжний.

Варіанти самостійних робіт винесені в додатки.

ВИСНОВКИ

У такі непрості часи для нашої країни, коли саме дистанційне спілкування є основним способом зв’язку не тільки у сфері освіті, а й у звичному житті створення систем масового неперервного самонавчання та загального обміну інформацією просто необхідне.

В ході виконання магістерської роботи мною було опрацьовано та проаналізовано літературу з теми «Інтегральне числення».

На основі вивченого матеріалу розроблено теоретичний блок, а саме лекції з теми «Інтегральне числення», та практичний блоки для активної самостійної роботи студентів. Кожне практичне заняття містить необхідні формули, приклади виконаної роботи, завдання для самосійної роботи, та приклади на домашнє завдання.

Крім того, подано матеріал для самостійних та контрольних робіт з вибраної теми, індивідуальні довгострокові завдання для перевірки засвоєння студентами матеріалу. До кожного виду перевірки знань наведено розв’язаний типовий варіант.

З теми «Інтегральне числення» для перевірки засвоєння матеріалу розроблено онлайн тестування на платформі «На урок». Онлайн-тести наразі є найактуальнішим та найлегшим способом перевірки засвоєння знань під час дистанційного навчання.

В дипломній роботі виконано всі завдання, які були поставлені на початку дослідження. Результати роботи можуть бути використані викладачами та студентами при вивченні курсу «Інтегральне числення».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський, В.В. Вища математика для економістів/ В.В Барковський, Н.В Барковська .– К.: ЦУЛ, 2002. – 400 с
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. Пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Профессия, 2002. – 432 с.
3. Бораковський О. В. Конспект лекцій з курсу «Вища математика»: (модуль ІІ)/ О. В. Бораковський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. –Х.: ХНАМГ, 2012. – 64 с.
4. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підр. для студ. фіз.-мат. ф-тів пед. ін-тів: У 3-х ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. – 2-е вид., перероб. І доп. - К.: Вища шк., 1990. – 383 с.
5. Власюк І. А., Власюк С. В. Викладання диференціального та інтегрального числення в умовах дистанційного навчання: матеріали конфер. Молодіжної наукової ліги [«Наука сьогодення: від досліджень до стратегічних рішень»] (Івано-Франківськ, 25.09.2020). - Електронний ресурс: https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/liga/issue/view/25.09.2020
6. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу/И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; Под общ. ред. В.А. Садовничего.-М.:Изд-во МГУ,1988.-415 с.
7. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах/ В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. – Чернівці: Рута, 2007. – Ч.1. – 440 с.
8. Вища математика: Навчальний посібник: У 2 ч./ Ф.М. Ліман, В.Ф. Власенко, С.В. Петренко та інші, За заг. ред. Ф.М. Лимана. – Суми; ВТД „Університетська книга”, 2006. – 614 с
9. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підр. для студ. фіз.-мат. ф-тів пед. ін-тів: У 3-х ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. – 2-е вид., перероб. І доп. - К.: Вища шк., 1990. – 383 с.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.:Наука,1990.-624 с.

11. Демчик С. П. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: метод. посіб. Ч. 1. – Рівне: РДПІ, 1998. – 85 с.
12. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій/ В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.
13. Дзядик В. К. Математичний аналіз: підруч. для студ. мат. спец. ун-тів.: У 2 т. Т. 1. - К.: Вища шк., 1995. – 495 с.
14. Дубовик, В.П. Вища математика: в 3ч./ В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Х.: Веста, 2008. – Ч.2. – 240 с.
15. Дудас В. О. Математичний аналіз: інд. завд. і метод. вказів./В. О. Дудас, Т. В. Процько. – Рівне, 2006. - 46 с.
16. Д’яченко Н.М., Клименко М.І. Диференціальне числення функції однієї змінної: навч. посіб. для студ. І курсу математ. фак-ту. – Запоріжжя: ЗНУ, 2008. – 100 с.
17. В. А. Зорич, Математический анализ. Ч. 1–2. М.: Наука, 1981, 1985.
18. Ильин В. А. Основы математического анализа/ В. А. Ильин, Э. П. Позняк. – М:Наука, 1967. – 616 с.
19. Істер О. С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, профільний рівень): підр. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти/О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2018. – 384с.: іл.
20. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1.М.: Высш.шк., 1988.-712с
21. Кузьменко В.А. Диференціальне числення: посіб. до вивч. курсу «Вища математика»/ В. А. Кузьменко, О. Г. Шевельов, І. В. Пешат. – Дніпропетровськ, 2012. – 40 с.
22. Ляшко І.І. Математичний аналіз: У 2 ч./І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук.-К.: Вища шк.-Ч.1.-1992.-494 с.
23. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике/В.П. Минорский. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

24.Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 3т./Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.

25.Сапіліді Т. М. Конспекти лекцій з математичного аналізу/ Т. М. Сапіліді. – Рівне, 2013. – 79 с.

26.Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. – Ростов н/Д: Изд-во «Феникс», 2004. – 640 с.

27.Томусяк А. А. Математичний аналіз: посіб. / А. А. Томусяк, В. С. Томусяк. – Вінниця, 1999. – 488 с.

28.Уваренков И. М. Курс математического анализа/ И. М. Уваренков, М. З. Маллер. – М:Просвещение, 1966

29.Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: учебник. Ч. 2. – 6-е изд., стер. – М.: Лань, 2005. – 463 с.

30.Шкіль М. І. Математичний аналіз: підруч. для студ. мат. спец. вищ. навч. закладів: У 2 ч. Ч. 1. – 3-є вид., переробл. І допов. – К.: Вища школа., 2005. – 446 с.

31.Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди: навч. посіб. для студ. пед. навч. закладів/ Н. М. Шунда, А. А. Томусяк. – К.: Вища шк., 1995. – 541 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Завдання самостійної роботи №1 за темою «Інтегрування раціональних та ірраціональних функцій»

Варіант 1

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{(5x-14)dx}{x^3-x^2-4x+4}$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

Варіант 2

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

Варіант 3

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

Варіант 4

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4}\,dx$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Варіант 5

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

Варіант 6

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{(5x-3)dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Варіант 7

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{(4x^2+4x-11)dx}{(2x-1)(2x+3)(x-4)}$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

Варіант 8

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{(2x^2+41x-91)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

Варіант 9

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^6+1}}$.

Варіант 10

1. Знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{x^5-2x^2+3}{x^2-4x+4}dx$.

2. Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

Додаток Б

Завдання контрольної роботи №1 за темою «Невизначений інтеграл»

Варіант 1

Знайти інтеграли:

1. $\int \cos 2x\,dx$.
2. $\int x^2 e^x dx$.
3. $\int \frac{dx}{x^2+x-3}$.
4. $\int \sin 5x \sin x\,dx$.
5. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Варіант 2

Знайти інтеграли:

1. $\int e^{3x+2}dx$.
2. $\int x \cos 3x\,dx$.
3. $\int \frac{dx}{x^2-7x+3}$.
4. $\int \left(\mathrm{tg}^3 \frac{x}{3} + \mathrm{ctg}^4 \frac{x}{3}\right) dx$.
5. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

Варіант 3

Знайти інтеграли:

1. $\int \sin^4 x \cos x\,dx$.
2. $\int e^{2x} \sin x\,dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+2}}$.
4. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x-2\cos x+3}$.
5. $\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$.

Варіант 4

Знайти інтеграли:

1. $\int \sqrt{3x^2+7}\cdot xdx$.
2. $\int x^3 \sin 2x\,dx$.
3. $\int \frac{5xdx}{x^2-2x+5}$.
4. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$.
5. $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3}$.

Варіант 5

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
2. $\int \ln x \, dx.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$
4. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\cos 2x + 3}.$
5. $\int \frac{(x^3-2x-8)dx}{x^2(x-1)(x^2+4x+8)}.$

Варіант 6

Знайти інтеграли:

1. $\int \sin\frac{x}{3} dx.$
2. $\int (2x^2+1)\ln x \, dx.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+4x-2x^2}}.$
4. $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 6}.$
5. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$

Варіант 7

Знайти інтеграли:

1. $\int e^{-3x+1} dx.$
2. $\int \frac{\ln 4x}{x^2} dx.$
3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx.$
4. $\int \frac{dx}{\sin^3 3x \cdot \cos^5 3x}.$
5. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}.$

Варіант 8

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{2x+3}.$
2. $\int x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx.$
3. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-x-1}} dx.$
4. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$
5. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}.$

Варіант 9

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{(x+3)^2}.$
2. $\int (x^2+3x+1)e^{-2x} dx.$
3. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{-x^2-2x+3}} dx.$
4. $\int \sin 3x \cos 5x.$

5. $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+6x+8}$.

Варіант 10

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{1+16x^2}$.
2. $\int e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x \, dx$.
3. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$.
4. $\int \cos^2 3x \sin^4 3x \, dx$.
5. $\int \frac{dx}{x^5-x^3+x^2-1}$.

Додаток В

Завдання контрольної роботи №2 за темою «Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла»

Варіант 1

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = x - \frac{\pi}{2}, y = \cos x,$ $x = 0$.
3. Знайти довжину дуги кривої $y = 2x^{\frac{3}{2}}, 0 \le x \le 11$.
4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $y = x^3, 0 \le x \le 1$.
5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \sin 2x\,, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, y = 0$.
6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Варіант 2

1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+3}$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = -x^2, y = x^2 - 2x - 4$.
3. Знайти довжину дуги кривої $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, 0 \le x \le 2\sqrt{3}$.
4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $y = e^{-x}, 0 \le x \le a$.
5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}e^{-x}, y = 0, x = a$.
6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Варіант 3

1. Обчислити інтеграл $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \sin x\,, y = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.
3. Знайти довжину дуги кривої $y = \sqrt{2x - x^2} - 1, \frac{1}{4} \le x \le 1$.
4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $y = \sin x\,, 0 \le x \le \pi$.
5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \frac{\ln x}{x}, 1 \le x \le e, y = 0, x = 0$.
6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

Варіант 4

1. Обчислити інтеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \mathrm{tg}x, y = \frac{2}{3}\cos x\,, x = 0$.
3. Знайти довжину дуги кривої $y = -x^{\frac{2}{3}} - 1, 0 \le x \le 5\sqrt{5}$.
4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $2ay = a^2 + x^2, 0 \le x \le a$.
5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \sin\sqrt{x}\,, (0 \le x \le \pi^2), y = 0$.
6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_0^\pi \mathrm{tg}x dx$.

Варіант 5

1. Обчислити інтеграл $\int_1^e x \ln x\, dx$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = x, y = \frac{\pi}{2}\sin x\,, x = 0$.

3. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, 0 \le x \le 9$.
4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $y = \text{tg}x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.
5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{6}$.
6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$.

Варіант 6

1. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}^4 x dx$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \sin^2 x, y = x\sin x$, $0 \le x \le \pi$.
3. Знайти довжину дуги кривої $y = \sqrt{\frac{x}{3}}(1-x), 0 \le x \le 1$.
4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $y^2 = 4x, 0 \le x \le 3$.
5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \frac{1}{a^2+x^2}, y = 0, x = 0, x = a$.
6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)}}$.

Варіант 7

1. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$.
2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = a^x, y = a, x = 0$, $a > 1$.
3. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12}, -11 \le x \le -3$.

4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $y^2 = 4 + x, -4 \le x \le 2$.

5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}}, -1 \le x \le 1, y = 0$.

6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+3)}$.

Варіант 8

1. Обчислити інтеграл $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \ln(1+x)\,, y = -xe^x$, $x = 1$.

3. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{3}{2}\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}\right), 1 \le x \le 8$.

4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $3y = 4\cos x\,, -\frac{\pi}{2} \le x \le 0$.

5. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{\frac{9+x}{9-3x}}, 0 \le x \le \frac{3}{2}, y = 0, x = 0, x = \frac{3}{2}$.

6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$.

Варіант 9

1. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = |\log_a x|, y = 0$, $x = \frac{1}{a}, x = a, a > 1$.

3. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{x^2}{4}, 0 \le x \le 2$.

4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $y^2 = 2(x-1), 0 \leq x \leq 1$.

5. Знайти об’єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = x, y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 2$.

6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$.

Варіант 10

1. Обчислити інтеграл $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-8}$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = 6x^2 - 5x + 1$, $y = \cos \pi x\,, 0 \leq x \leq \pi$.

3. Знайти довжину дуги кривої $y = 4 - \frac{x^2}{2}, y \geq 0$.

4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі *Ox* даної кривої $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right), \frac{5}{4} \leq x \leq \frac{5}{3}$.

5. Знайти об’єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y = \sin x\,, y = \cos x\,, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

6. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла від необмеженої функції $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-1}$.

Додаток Г

Індивідуальні довгострокові завдання за темою «Інтегральне числення»

1. Знайти невизначений інтеграл:

1.1. А) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$;
Б) $\int x2^x dx$;
В) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;
Г) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$;
Д) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

1.2. А) $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$;
Б) $\int xe^{-x}dx$;
В) $\int \frac{(4x^2+4x+11)dx}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}$;
Г) $\int \frac{x^3dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;
Д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$.

1.3. А) $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$;
Б) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$;
В) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$;
Г) $\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}dx$;
Д) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$.

1.4. А) $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$;
Б) $\int x\mathrm{tg}^2 xdx$;
В) $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x-1)(x+1)^2}$;
Г) $\int \frac{xdx}{(2x+1)\sqrt{3x^2+5}}$;
Д) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^3 x}$.

1.5. А) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;
Б) $\int \sin x\cdot \ln tg\, xdx$;
В) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x(x-1)^3}$;
Г) $\int \frac{x^2+x+1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx$;
Д) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^5 x}$.

1.6. А) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$;
Б) $\int x^2\arcsin 2x\,dx$;
В) $\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$;
Г) $\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}$;
Д) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$.

1.7. А) $\int \sin^6 x\cos x\,dx$;
Б) $\int x^3\ln^3 x\,dx$;
В) $\int \frac{x(x^2+1)dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$;
Г) $\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$;
Д) $\int \mathrm{th}^4 xdx$.

1.8. А) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$;
Б) $\int \ln^4 x\,dx$;
В) $\int \frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x+1}dx$;
Г) $\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dx$;
Д) $\int \frac{\sin xdx}{(3\cos x-1)^3}$.

1.9. А) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$;
Б) $\int x^8e^{-x}dx$;
В) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$;
Г) $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}dx$;

Д) $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

1.10. А) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$;
Б) $\int \cos 3x\, e^x dx$;
В) $\int \frac{x^4}{1-x^4} dx$;
Г) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx$;
Д) $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

2. Знайти визначений інтеграл:

2.1. А) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx$; Б) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$.

2.2. А) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$; Б) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x\, dx$.

2.3. А) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2+1}$; Б) $\int_1^2 (y-1) \ln y\, dy$.

2.4. А) $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; Б) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 x e^{-2x} dx$.

2.5. А) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$; Б) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cdot \cos x\, dx$.

2.6. А) $\int_1^e \frac{(1+\ln x) dx}{x}$; Б) $\int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{2}{3}} \frac{x}{e^{3x}} dx$.

2.7. А) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}$; Б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

2.8. А) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$; Б) $\int_1^{e^2} \sqrt{y} \ln y\, dy$.

2.9. А) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; Б) $\int_0^1 \mathrm{arctg}\sqrt{x} dx$.

2.10. А) $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4} dx$; Б) $\int_0^{\pi} (y+2) \cos\frac{y}{2} dy$.

3. Знайти площі фігур, обмежених кривими:

3.1. А) $y = x - \frac{\pi}{2}$; $y = \cos x$; $x = 0$;
Б) $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ В) $\rho = 3\cos\varphi$.

3.2. А) $y = \sin x$; $y = \cos x$; $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$;
Б) $\begin{cases} x = 4(2\cos t + \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ В) $\rho = 2(1+\cos\varphi)$.

3.3. А) $y = x$; $y = \frac{\pi}{2}\sin x$; $x \ge 0$;
Б) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3, \end{cases}$ В) $\rho = 2 + 3\cos\varphi$.

3.4. А) $y = a^x$; $y = a$; $x = 0$; $a > 1$;
Б) $\begin{cases} x = t^2 - 4, \\ y = t^3 - 2t, \end{cases}$ В) $\rho = 2\cos 3\varphi$.

3.5. А) $y = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $y = 2a$; $a > 0$;

Б) $\begin{cases} x = 7\cos^3 t, \\ y = 7\sin^3 t, \end{cases}$ В) $\rho^2 = 2\sin 2\varphi$.

3.6. А) $y = \sin^2 x$; $y = \mathrm{x}\sin x$; $0 \le x \le \pi$;

Б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ В) $\rho = 2\sin 5\varphi$.

3.7. А) $y = \ln(1 + x)$; $y = -xe^x$; $x = 1$;

Б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$

В) $\rho = 3|tg\varphi|$; $\rho = \frac{2}{\cos\varphi}$.

3.8. А) $y = 6x^2 - 5x + 1$; $y = \cos x$; $0 \le x \le \frac{1}{2}$;

Б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} 0 \le t \le 2\pi$;

В) $\rho = 6\cos\varphi$; $\rho = 3\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

3.9. А) $y = \frac{6}{x+5}$; $y = |x|$; $x \ge 2$;

Б) $\begin{cases} x = \frac{7}{4}\cos^3 t, \\ y = \frac{7}{3}\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le 2\pi$;

В) $\rho^2 = 4\frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$; $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

3.10. А) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$; $y = 0$; $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3}{4}\pi$;

Б) $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ В) $\rho = 2 - \cos\varphi$; $\rho = \cos\varphi$.

4. Знайти довжину дуги кривої:

4.1. А) $y = -x^{\frac{2}{3}} - 1$; $0 \le x \le 5\sqrt{5}$;

Б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ В) $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$.

4.2. А) $x^2 = 5y^3$; $x^2 + y^2 \le 6$;

Б) $\begin{cases} x = 3e^{2t}\cos t, \\ y = 3e^{2t}\sin t, \end{cases} 0 \le t \le t_0$;

В) $\rho = 5\cos^5\frac{\varphi}{5}$.

4.3. А) $y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$; $0 \le x \le 9$;

Б) $\begin{cases} x = t - \frac{1}{2}\mathrm{sh}2t, \\ y = 2\mathrm{ch}t, \end{cases} 0 \le t \le t_0$;

В) $\rho = 9(1 - \cos\varphi)$.

4.4. А) $y = \frac{x}{6}\sqrt{x + 12}$; $-11 \le x \le -3$;

Б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (t^2 - 2)\cos t - 2t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi$;

В) $\rho = 10\varphi;\ 0 \le \varphi \le \varphi_0$.

4.5. А) $y = \frac{3}{2}\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}\right);\ 1 \le x \le 8$;

Б) $\begin{cases} x = 2(3\cos t - \cos 3t), \\ y = 2(3\sin t - \sin 3t), \end{cases}\ 0 \le t \le \pi$;

В) $\rho = 3\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

4.6. А) $y = \frac{x^2}{4};\ 0 \le x \le 4$;

Б) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}\ 0 \le t \le \pi$;

В) $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$.

4.7. А) $y = 4 - \frac{x^2}{2};\ y \ge 0$;

Б) $\begin{cases} x = 7\cos^3 t, \\ y = 7\sin^3 t, \end{cases}$ В) $\rho = 3\cos\varphi$.

4.8. А) $y^2 = 8x;\ -4 \le y \le 4$;

Б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}\ 0 \le t \le 2\pi$;

В) $\rho = 6\cos^3\frac{\varphi}{3},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

4.9. А) $y = 4\sqrt{x-2};\ 2 \le x \le 3$;

Б) $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 5\sin^2 t, \end{cases}\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

В) $\rho = \sin^3\frac{\varphi}{3},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

4.10. А) $y = \ln x;\ 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}$;

Б) $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \end{cases}\ 2\pi \le t \le 4\pi$;

В) $\rho = 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le \varphi_0$.

5. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вказаної осі координат:

5.1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2};\ x = 0;\ y = 0;\ Ox$.

5.2. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}};\ x = \frac{1}{4};\ y = 0;\ x = 1;\ Ox$.

5.3. $y = \sin 2x;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ y = 0;\ Ox$.

5.4. $y^2 = x;\ x = y^2;\ Ox$.

5.5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;\ Oy$.

5.6. $y = 2x - x^2;\ y = 0;\ Ox$.

5.7. $y = 3 + 2\sin 2x;\ 0 \le x \le \pi;\ x = \pi;\ x = 0;\ y = 0;\ Ox$.

5.8. $xy = 4;\ 2x + y - 6 = 0;\ Ox$.

5.9. $y = 2 - x^2;\ y = x^2;\ Ox$.

5.10. $y = x^3;\ x = 0;\ y = 8;\ Oy$.

6. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

6.1. А) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$; Б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

6.2. А) $\int_0^{\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; Б) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

6.3. А) $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{(x^2+4)^3}$; Б) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(3x-1)dx}{3x-1}$.

6.4. А) $\int_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; Б) $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}dx}{2-3x}$.

6.5. А) $\int_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$; Б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}$.

6.6. А) $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$; Б) $\int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

6.7. А) $\int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$; Б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

6.8. А) $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$; Б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

6.9. А) $\int_0^{\infty} x \sin x\, dx$; Б) $\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

6.10. А) $\int_0^{\infty} xe^{-3x}dx$; Б) $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{64-x^6}}$.