Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

бакалаврського рівня

на тему:

# Основна теорема теорії многочленів та її застосування

Виконала: студентка IV курсу,

групи МІФ-41

спеціальності:014 Середня освіта (Математика)

Гамза Марія Сергіївна

Керівник: к. ф.-м. н., доцент Марач Віктор Сильвестрович

Рецензент: зав. кафедри математики з методикою її викладання РДГУ, канд. фіз.-мат. наук Крайчук Олександр Васильович

Рівне - 2020 року

## Зміст

## Вступ

Відомо, що існують многочлени з дійсними коефіцієнтами, що не мають дійсних коренів: $x^2 + 1$ – один з таких многочленів. Можна було б припустити, що існують многочлени, які не мають коренів навіть серед комплексних чисел, особливо, коли розглядаються многочлени з будь-якими комплексними коефіцієнтами. Якби так було, то система комплексних чисел потребувала б свого роз-ширення. Насправді, **будь-який многочлен з довільними комплексними кое-фіцієнтами, степінь якого не менший одиниці, має хоча б один корінь, в загальному випадку комплексний.**

Ця твердження є одним з найбільших досягнень всієї математики і знаходить застосування в різних областях науки. На ньому базується, в деякій мірі, вся подальша теорія многочленів з числовими коефіцієнтами, і тому його називали раніше (а іноді називають і зараз) «основною теоремою вищої алгебри». Більш правильно називати її основною теоремою теорії многочленів. Насправді, основна теорема не є чисто алгебраїчною. Всі її доведення, – а їх після Гаусса, який довів її вперше в кінці XVIII ст., було знайдено досить багато, – використовують в більшій чи меншій мірі так звані топологічні властивості дійсних і комплексних чисел, тобто властивості, зв’язані з неперервністю. Ми розглянемо три доведення основної теореми теорії многочленів. Спочатку наведемо доведення, яке ґрунтується на розгляді многочлена $f(x) \in C[x]$ та його модуля $|f(x)|$ як неперервних функцій від комплексної змінної і суттєво використовує властивості таких функцій. Друге доведення є найбільш алгебраїчним з існуючих і ґрунтується на властивостях симетричних мно-гочленів. Третє доведення є суто топологічним.

**Актуальність теми** зумовлена важливістю застосувань основної теореми теорії многочленів в різних розділах математики.

**Мета дослідження:** Розглянути доведення основної теореми та її найважливіші застосування.

**Об'єкт дослідження:** основна теорема теорії многочленів та її застосування.

**Обсяг роботи:** Робота складається із вступу, двох розділів, висновків та списку використаної літератури. У вступі наведено історичні відомості та дається загальна характеристика роботи. В 1-му розділі розглянуто три доведення основної теореми теорії многочленів та наслідки з неї. Розділ 2 присвячений найважливішим застосуванням основної теореми: для розкладу многочленів на незвідні множники, знаходження коренів многочлена з використанням формул Вієта, відшукання раціональних коренів многочлена з цілочисловими коефіцієнтами.

**Апробація роботи:** Результати роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету 14 травня 2020 року.

## Розділ 1. Основна теорема теорії многочленів та наслідки з неї

### 1.1 Неперервність многочлена та його модуля як функцій комплексної змінної

Дотримуючись позначень, що прийняті для функцій від комплексної змінної, будемо позначати змінну символом $z$. Якщо дано послідовність комплексних чисел $\{z_n = x_n + y_n i\}_{n=1}^{\infty}$, то вона визначає дві послідовності $\{\mathrm{x_n}\}_{\mathrm{n=1}}^{\infty}$ і $\{\mathrm{y_n}\}_{\mathrm{n=1}}^{\infty}$ дійсних чисел. Якщо $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$**,** то говорять, що число $\mathrm{c} = a + bi$ є границею послідовності $\{z_n\}$ і записують $\lim_{n\to\infty} z_n = c$. Умова $\lim_{n\to\infty} z_n = c$ рівносильна умові $\lim_{n\to\infty} z_n - c = 0$, оскільки $\max\{|x_n - a|, |y_n - b|\} \leq |z_n - c| == \sqrt{|x_n - a|^2 + |y_n - b|^2 \leq \sqrt{2} max\{|x_n - a|, |y_n - b|\}}$.

Послідовність $\{z_n\}$ називається обмеженою, якщо існує таке додатне дійсне число N, що $|z_n| < \mathrm{N}$ для всіх n=1,2,3.... Для дійсних послідовностей справедлива теорема Больцано – Вейєрштрасса: будь-яка обмежена дійсна послідовність містить збіжну підпослідовність. Це твердження залишається істинним і для послідовностей, складених з комплексних чисел. Справді, якщо $\{z_n = x_n + y_n i\}$ – обмежена послідовність, тобто $|z_n| < N$, то $|x_n| < N$ і $\{x_n\}$ є обмеженою послідовністю дійсних чисел. Згідно з теоремою Больцано–Вейєрштрасса, існує збіжна підпослідовність $\{x_{n_k}\} \to a$**.** Тоді відповідна підпослідовність $\{y_{n_k}\}$ теж обмежена, оскільки $|y_{n_k}| < N$, тому існує збіжна підпослідовність $\{y_{n_k}\} \to b$. Отже, відповідна підпослідовність комплексних чисел $\left\{z_{n_{k_m}} = x_{n_{k_m}} + y_{n_{k_m}} i\right\}$ збіжна до числа $c\ = a + bi$.

Нехай $f(z)$– многочлен з кільця $\mathrm{C}[z]$, який ми будемо розглядати як функцію від комплексної змінної $z$. Модуль многочлена $|\,f(z)|$ теж можна розглядати як функцію від комплексної змінної, але яка приймає дійсні невід'ємні значення. Якщо аргумент $z$ подати у вигляді $z = x + yi$, то функцію w = | $f(z)$ | можна розглядати як дійсну функцію від двох дійсних змінних $x$ і $y$, а її графік можна уявити у вигляді поверхні, що розміщена над деякою фіксованою горизонтальною площиною з вибраною в ній прямокутною декартовою системою координат ХОУ і утворена кінцями перпендикулярів довжини $|f(z)|$, проведених до площини в усіх точках з координатами $(x \; ; y)$ (тобто в точках, які є зображеннями на комплексній площині чисел $z = x + yi$). Ми встановимо, що $f(z)$ і | $f(z)$ | є неперервними функціями від комплексної змінної $z$ на всій комплексній площині. Нагадаємо, що функція $F(z)$ від комплексної змінної називається неперервною в точці $z_0$, якщо достатньо близьким до $z_0$, значенням z відповідають як завгодно близькі до $F(z_0)$ значенні $F(z)$, або, більш строго, якщо для довільного дійсного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке дійсне δ > 0, що із $|z - z_0| < \delta$ випливає $|F(z) - F(z_{0)}| < \varepsilon$. Множина всіх точок комплексної площини, що відповідають комплексним числам z, які задовольняють умову $|z - z_0| < \delta$ (неважко зрозуміти, що це будуть всі внутрішні точки круга радіуса δ з центром в точці $z_0$, називається δ-околом точки $z_0$. Тоді поняттю неперервності функції $F(z)$ в точці $z_0$ можна дати таке наочне тлумачення: функція $F(z)$ називається неперервною в точці $z_0$, якщо для довільного ε - околу точки $F(z_{0)}$ можна вказати такий δ - окіл точки $z_0$, що для всіх точок $z$ з δ - околу точки $z_0$ відповідні значення функції $F(z)$ будуть лежати в ε-околі точки $F(z_{0)}$. Встановлення неперервності функції $w =| f(z)|$ дасть можливість уявити графік цієї функції у вигляді неперервної поверхні, яка накриває комплексну площину $w$ = 0, де вибираються значення аргументу, і яка може місцями досягати цієї площини. Власне, нам і потрібно довести, що для деякого значення $z_0$ $f(z_0) = 0$, а отже, і | $f(z_0)$ |= 0, тобто, що поверхня $w =| f(z_0)$ | досягає площини $w$ = 0 в точці $z_0$. Ми доведемо, що коли $| f(z_1)| > 0$, то в околі точки $z_1$ знайдеться така точка $z_2$, що

$|f(x_1)| < |f(x)|$. Тоді тільки залишиться встановити, що на поверхні $w =| f(z)|$ буде існувати найнижча точка, іншими словами, що $w =| f(z)|$ як дійсна функція від двох дійсних змінних $x$, $y$ має локальний мінімум. В такій точці $z_0$ обов'язково буде $| f(z_0) |=0$, бо інакше на поверхні $w = | f(z)|$ можна було б знайти точку, розміщену нижче від точки $| f(z_0) |$.

Тепер розглянемо доведення основної теореми, розбивши його на ряд лем.

***Лема 1.*** Многочлен $f(z) = a_0 z^n +. \cdots + a_1 z$ з нульовим вільним членом є неперервною функцією в точці $z = 0$.

***Доведення.*** Нехай задано довільне дійсне число $\varepsilon > 0$. Можна вважати, що $|z-0| = |z| < 1$, тобто будемо брати $\delta < 1$. Тоді, користуючись властивостями модуля комплексних чисел, будемо мати: $|f(z)| = |a_n z_n + \cdots + a_1 z| =$ $= |z| \cdot |a_n z_n - 1 + \cdots + a1| \leq |z| \cdot (|a_n| \cdot |z_n - 1| + \cdots + |a_1|) \leq |z|(|a_n| + \cdots + |a_1|)$. Покладемо $|a_n| + \cdots + |a_1| = M, \delta = min\left\{1, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$. Тоді якщо $| z - 0|=| z | < \delta$, то $|f(z) - f(0)| = |f(z)| \leq |z| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$, тобто функція $f(z)$ неперервна в точці $z = 0$.

***Лема 2.*** Довільний многочлен $f(z) \in C[z]$ є неперервною функцією у всіх точках комплексної площини.

***Доведення.*** Нехай дано довільний многочлен $f(z) \in C[z]$ і довільну точку $z$ комплексної площини. Розкладемо многочлен $f(z)$ за степенями лінійного двочлена $z - z_0$: $f(z) = c_n(z - z_0)^n + \cdots + c_1(z - z_0) + c_0$. Тоді $f(z_0) = c_0$, тому $f(z) - f(z_0) = c_n(z - z_0)^n + \cdots + c_1(z - z_0)$, тобто $f(z) - f(z_0)$ є многочленом від змінної $u = z - z_0$, з нульовим вільним членом. Згідно з лемою 1, для довільного дійсного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке дійсне $\delta > 0$, що з нерівності $|z - z_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, тобто многочлен $f(z)$ є неперервною функцією в точці $z_0$.

***Лема 3.*** Модуль многочлена $f(z)$ є неперервною функцією в усіх точках комплексної площини.

***Доведення.*** Підставивши в нерівність $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, яка справджується для довільних комплексних чисел $z_1$ і $z_2$, замість $z_1$ число $z_1 – z_2$ дістанемо: $|z_1| = |(z_1 – z_2) – z_2| \leq |z_1 – z_2| + |z_2|$, звідки $|z_1 – z_2| \geq |z_1| – |z_2|$. Оскільки $|z_1 - z_2| = |z_2 - -z_1| \geq |z_2| - |z_1|$, то справджується також нерівність $|z_1 – z_2| \geq \geq ||z_1| - |z_2||$. Якщо $f(z)$ – довільний многочлен з кільця $\mathrm{C}[z]$ і $z_0$ довільна точка комплексної площини, то, згідно з лемою 2, для довільного дійсного $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне $\delta > 0$, що з нерівності $|z - z_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Але тоді виконується також нерівність $\left||f(z)| - |f(z_0|\right| \leq\leq |f(z) - f(z_0| < \varepsilon$. Отже, функція $|f(z)|$ неперервна в точці $z_0$.

## 1.2 Доведення основної теореми на основі леми Даламбера

***Лема 4.*** (***Про зростання модуля многочлена***). Якщо $f(z)$ – многочлен з кільця $\mathrm{C}[z]$, відмінний від константи, то для довільного дійсного $\mathrm{M} > 0$ існує таке дійсне $N > 0$, що з нерівності $|z| > N$ випливає нерівність $f(z) > \mathrm{M}$. Геометрично це означає, що коли точка, яка відповідає комплексному числу $z$, береться за межами круга радіуса $N$ з центром у початку координат, то точка, яка відповідає комплексному числу $f(z)$, буде лежати за межами круга радіуса М з центром в початку координат.

***Доведення.*** Нехай дано довільний відмінний від константи многочлен $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \epsilon C[z]$ і дійсне число $\mathrm{M} > 0$. Користуючись властивостями модуля комплексних чисел, зокрема нерівностями $||\mathrm{z}_1| - |\mathrm{z}_2| \leq |\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2| \leq |\mathrm{z}_1| + |\mathrm{z}_2|$, будемо мати:

$$|f(z)| = |a_n z^n + (a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)| \geq$$

$$\geq \ |a_n| \cdot |z_n| - |\ a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|. \qquad (1)$$

Але

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \leq |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_1| \cdot |z| + |a_0| \leq$$

$$\leq A(z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1) = A\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}, \qquad (2)$$

де $A = max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}$.

Якщо накласти на змінну $z$ додаткову умову $|z| > 1$, то $A\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} < A\frac{|z|^n}{|z| - 1}$ і тоді, підсилюючи за допомогою нерівностей (2) нерівність (1), отримаємо:

$$|f(z)| > |a_n| \cdot |z|^n - A\frac{|z|^n}{|z| - 1} = |z|^n\left(|a_n| - \frac{A}{|z| - 1}\right). \qquad (3)$$

Якщо взяти $|z| > \frac{2A}{a_n} + 1 = N_1$, то тоді $\frac{A}{|z| - 1} < \frac{a_n}{2}$ і ми дістанемо: $|a_n| - \frac{A}{|z| - 1} >$ $> \ |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2}$. Оскільки $N_1 > 1$, то при $|z| > N_1$ нерівність (3) запишеться у вигляді: $|f(z)| > |z|^n \frac{|a_n|}{2}$. При $|z| > \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_n|}}$ буде справджуватися нерівність $|z|^n \frac{a_n}{2} > \frac{2M}{a_n} \cdot \frac{a_n}{2} = M$. Якщо взяти тепер $|z| > N$, де $\mathrm{N} = \max\left\{\mathrm{N}_1, \sqrt[n]{\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{a}_n}}\right\}$, то тоді $|f(z)| > |z|^n \frac{a_n}{2} > M$. Лему доведено.

Із нерівностей, отриманих при доведенні леми 4, можна безпосередньо отримати такі важливі наслідки.

***Наслідок 1.*** Якщо $f(z_0) = 0,$ то $|\ z_0| < 1 + \frac{\mathrm{A}}{|\mathrm{a}_n|} = N_0$, де

$$A = max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}.$$

***Доведення.*** Справді, якщо $|z| \geq 1 + \frac{A}{|a_n|} = N_0$, то $|a_n| - \frac{A}{|z-1|} \geq 0$, тому з нерівності (3) в даному випадку отримаємо:$|f(z)| > |z|^n \cdot \left(|a_n| - \frac{A}{|z|-1}\right) \geq 0$, тобто $|f(z)| > 0$. Отже, якщо $f(z_0) = 0$, то $z_0 < N_0$.

***Наслідок 2.*** При $|z| > 1 + \frac{A}{|a_n|} = N_0$ модуль старшого члена многочлена $f(z)$ більший від модуля суми всіх інших його членів.

***Доведення.*** Справді, якщо $|z| > N_0$, то $|a_n| - \frac{A}{|z-1|} > 0$, тому $|a_n z^n| - -|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| > |z|^n \cdot \left(|a_n| - \frac{A}{|z|-1}\right) > 0$. Отже, в цьому випадку $|\,a_n z^n\,| > |\,a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0\,|$.

***Лема 5.*** Для довільного многочлена $f(z) \in C[z]$ існує таке $z_0$, що $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ для всіх $z \in C$.

***Доведення.*** Позначимо точну нижню грань значень $|f(z)|$ через $m$ (вона існує, оскільки множина $\{|f(z)|\}$ обмежена знизу: $|f(z)| \geq 0$). Розглянемо послідовність дійсних чисел $\left\{m + \frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, яка збігається до $m$. Оскільки довільний член цієї послідовності більший від $m$, то для кожного $k = 1,2,\ldots$ знайдеться таке комплексне число $z_k$, що $|f(z_k)| < m + \frac{1}{k}$. Згідно з лемою 4, для дійсного числа $M = m + 1 > 0$ існує таке дійсне число $N > 0$, що з нерівності $|z| > N$ випливає нерівність $|f(z)| > M \geq m + \frac{1}{k}$. Звідси випливає, що $|z_k| < N$ для всіх $k = 1,2,\ldots$. Оскільки послідовність $\{z_k\}$ обмежена, то існує збіжна її підпослідовність $\{z_{k_s}\}$, яка збігається до деякого комплексного числа $z_0$. Оскільки функція $|f(z)|$ неперервна, то $\lim\limits_{s\to\infty}\left|f(z_{k_s})\right| = |f(z_0)|$. Враховуючи, що $m \le \left|f\left(z_{k_s}\right)\right| \le m + \frac{1}{k_s}$, отримаємо: $|f(z_0)| = \lim_{s\to\infty}\left|f\left(z_{k_s}\right)\right| = m$, що й потрібно було довести.

***Лема 6.*** (**лема Даламбера**). Нехай $f(z)$ - відмінний від константи многочлен з кільця $\mathrm{C}[z]$ і $|f(z_1)| \neq 0$. Тоді знайдеться таке комплексне число z, що $|f(z_2)| << |f(z_1)|$. Геометричний зміст цього твердження такий: якщо на поверхні $w = |f(z)|$ взяти точку, яка розміщена вище площини $w = 0$, то можна вказати деяку іншу точку цієї поверхні, яка буде лежати нижче першої.

***Доведення.*** Нехай дано відмінний від константи многочлен $f(z)$ з кільця $C[z]$ і $|f(z1)| \neq 0$. Розкладемо многочлен $f(z)$ за степенями лінійного двочлена $z - z_1$: $f(z) = c_n(z - z_1)^n + \cdots + c_1(z - z_1) + c_{0.}$ Тоді $f(z_1) = c_0 \neq 0$. Нехай $c_k \times\times (z - z_1)^k$ – перший відмінний від нуля член після $c_0$, тобто $\mathrm{c}_1 = ... = \mathrm{c}_{k-1} = 0$. Такий доданок завжди знайдеться, оскільки $f(z)$ не є константою. Тоді

$$\mathrm{f(z) = c_0 + c_k (z - z_1)^k + c_{k+1}(z - z_1)^{k+1} + \ldots + c_n (z - z_1)^n} =$$

$$= \mathrm{c_0}\left(1 + \frac{\mathrm{c_k}}{\mathrm{c_0}}(\mathrm{z} - \mathrm{z_1})^{\mathrm{k}} + \frac{\mathrm{c_k}}{\mathrm{c_0}}(\mathrm{z} - \mathrm{z_1})^{\mathrm{k}}\left(\frac{\mathrm{c_{k+1}}}{\mathrm{c_k}}(\mathrm{z} - \mathrm{z_1}) + \ldots + \frac{\mathrm{c_n}}{\mathrm{c_k}}(\mathrm{z} - \mathrm{z_1})^{\mathrm{n-k}}\right)\right) =$$

$$= \mathrm{c_0}\left(1 + \frac{\mathrm{c_k}}{\mathrm{c_0}}(\mathrm{z} - \mathrm{z_1})^{\mathrm{k}} + \frac{\mathrm{c_k}}{\mathrm{c_0}}(\mathrm{z} - \mathrm{z_1})^{\mathrm{k}}\varphi(\mathrm{z} - \mathrm{z_1})\right).$$

Тут $\varphi(z - z_1) = \left(\frac{c_{k+1}}{c_k}(z - z_1) + \cdots + \frac{c_n}{c_k}(z - z_1)^{n-k}\right)$ є многочленом від $z - z_1$ з нульовим вільним членом. Згідно з лемою 1, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ знайдеться таке дійсне число $\delta > 0$, що з нерівності $|z - z_1| < \delta$ буде випливати нерівність $|\varphi(z - -z_1)| < \frac{1}{2}$. Нехай в тригонометричній формі запису $\frac{c_k}{c_0} = R(cos\theta + +isin\theta)$,

$z - -z_1 = r(cos\psi + i\ sin\psi)$. Тоді $\frac{c_k}{c_0}(z - z_1)^k = Rr^k(\cos(\theta + k\psi) + \sin(\theta + k\psi))$. Виберемо $z$ так, щоб виконувалася нерівність $Rr^k < 1$. Для цього потрібно підібрати $z$ так, щоб було $|z - z_1| = r < \sqrt[k]{\frac{1}{R}}$. Серед вибраних значень z візьмемо таке, щоб виконувалась умова $\theta + k\psi = \pi$, тобто візьмемо $\psi = \frac{\pi - \theta}{k}$. При такому виборі буде справджуватися рівність: $\frac{c_k}{c_0}(z - z_1)^k = Rr^k$. Розглянемо число $z_2 = z_1 + r(cos\psi + i \cdot sin\psi)$, де $r < min\left\{\delta, \sqrt[k]{\frac{1}{R}}\right\} \psi = \frac{\pi - 0}{k}$. Тоді, згідно з рівностями (4),

$$f(z_2) = c_0(1 - Rr^k - Rr^k \cdot \varphi(z - z_1))$$

і

$$|f(z_2)| = |c_0| \cdot \left|1 - Rr^k - Rr^k \cdot \varphi(z - z_1\right| \leq |c_0| \cdot \left(\left|1 - Rr^k\right| - Rr^k \cdot |\varphi(z - z_1)|\right) \leq$$
$$\leq |c_0|\left(1 - Rr^k + \frac{1}{2}Rr^k\right) = |c_0|\left(1 - \frac{1}{2}Rr^k\right) < |c_0| = |f(z_1)|.$$

Отже, $|f(z_2)| < |f(z_1)|$, і лему доведено.

Тепер вже легко отримати доведення основної теореми теорії многочленів.

***Теорема 1.*** Будь-який відмінний від константи многочлен $f(z) \in C[z]$ має принаймні один комплексний корінь.

***Доведення.*** Нехай $f(z)$ – відмінний від константи многочлен з кільця $C[z]$, $m = inf\{|f(z)|\}$. Тоді, згідно з лемою 5, існує таке комплексне число $z_1$, що $|f(z_1)| = m$. Тоді $f(z_1) = 0$, бо інакше, згідно з лемою 6, знайшлося б таке комплексне число $z_2$, що $|f(z_2)| < |f(z_1)| = inf\{|f(z)|\}$, а це неможливо. Отже, многочлен $f(z)$ має принаймні один комплексний корінь $z_1$.

## 1.3 Доведення основної теореми з використанням властивостей симетричних многочленів

Наведемо ще одне доведення основної теореми, яке вважається найбільш алгебраїчним. І хоч воно теж спирається на функціональні властивості многочленів (зокрема, на їх неперервність у полі $R$ дійсних чисел), проте, порівняно з іншими доведеннями, використання таких властивостей зведено тут до мінімуму.

Спочатку покажемо, що многочлен $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь у випадку, коли його степінь $n$ є непарним числом. Справді, $f(x)$ можна розглядати як дійсну функцію дійсної змінної, яка, як відомо з курсу математичного аналізу, неперервна на всій дійсній осі. Згідно з наслідком 2 леми 4, при достатньо великих значеннях $|x|$ модуль старшого члена $|a_n x^n|$ многочлена $f(x)$ більший за модуль суми всіх інших його членів, тому при вказаних значеннях змінної $x$ числове значення многочлена $f(x)$ має знак, який збігається із знаком старшого члена $a_n x^n$ . А оскільки $n$ – непарне число, то при $x \to \infty$ і при $x \to -\infty$ старший член $a_n x^n$ буде мати протилежні знаки. Отже, існують такі значення $x = a$ і $x = b$, що числа $f(a)$ і $f(b)$ будуть різних знаків. Але тоді, згідно з теоремою Больцано-Коші, яка доводиться в курсі математичного аналізу, знайдеться таке значення $x_0 \in (a, b)$, що $f(x_0) = 0$, тобто дійсне число $x_0$ є коренем многочлена $f(x)$.

Далі доведемо, що довільний відмінний від константи многочлен $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами має принаймні один комплексний корінь. Зауважимо, що степінь $n$ цього многочлена можна подати у вигляді $n = 2^k q$, де k – ціле невід'ємне число, $q$ – непарне натуральне число. Доведення проведемо методом математичної індукції за показником $k$. При $k = 0$ многочлен $f(x)$ має непарний степінь $q$ і для нього дане твердження вже доведене. Припустимо, що комплексний корінь має довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами степеня $2^{k-1}q$, тобто степінь якого ділиться на $2^{k-1}$, але не ділиться на $2^k$, і доведемо те саме для многочлена $f(x)$ степеня $n = 2^k q$. Для многочлена $f(x)$, якщо його розглядати над полем C комплексних чисел, існує поле розкладу, тобто таке розширення P поля C, в якому многочлен $f(x)$ має $n$ коренів $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$. Візьмемо тепер довільне дійсне число $r$ і розглянемо всі можливі елементи поля P, що подаються у вигляді $\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j + r(\alpha_i + \alpha_j)$, $i < j$. Кількість таких елементів дорівнює, очевидно, числу комбінацій з $n$ елементів по два, тобто $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}q(2^k q - 1) = 2^{k-1}q_1$, де $q_1 = q(2^k q - 1)$ – не-парне число. Розглянемо тепер многочлен $\varphi(x) = \prod_{i,j(i<j)} (x - \beta_{ij})$ з кільця $P[x]$, коренями якого є елементи $\beta_{ij}$ і лише вони. Очевидно, його степінь дорівнює $2^{k-1}q_1$. Оскільки $r$ – дійсне число, то коефіцієнти многочлена $\varphi(x)$ подаються у вигляді многочленів з дійсними коефіцієнтами від коренів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, причому ці многочлени будуть симетричними, оскільки, як неважко зрозуміти, будь-яка перестановка елементів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ приведе тільки до перестановки лінійних множників у добутку $\varphi(x) = \prod_{i,j(i<j)} (x - (\alpha_i \alpha_j + r(\alpha_i + \alpha_j)))$, а сам многочлен $\varphi(x)$ від цього не зміниться, отже, не зміняться і його коефіцієнти. Згідно з теоремою 3, коефіцієнти многочлена $\varphi(x)$ є дійсними числами і, оскільки його степінь $2^{k-1}q_1$ ділиться на $2^{k-1}$, але не ділиться на $2^k$, то, згідно з припущенням індукції, принаймні один з його коренів $\beta_{ij}$ є комплексним числом. Отже, при довільному виборі дійсного числа $r$ можна вказати таку пару індексів $i, j$, що елемент $\alpha_i \alpha_j +$ $+r(\alpha_i + \alpha_j)$, є комплексним числом. Оскільки множина різних пар індексів $i, j$ $(i, j = 1,2, \dots, n)$ скінченна, а вибір дійсного числа $r$ допускає нескінченну кількість можливостей, то знайдуться такі два різні дійсні числа $r_1$ і $r_2$, що їм

відповідатиме одна й та ж пара індексів $i, j,$ для яких $\alpha_i \alpha_j + r_1(\alpha_i + \alpha_j) = \gamma_1$ і $\alpha_i \alpha_j + r_2(\alpha_i + \alpha_j) = \gamma_2$ є комплексними числами. Але тоді $\alpha_i + \alpha_j = = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{r_1 - r_2}$ і $\alpha_i \alpha_j = \gamma_1 - r_1 \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{r_1 - r_2}$ – теж комплексні числа. Отже, $\alpha_i$ і $\alpha_j$, як корені квадратного рівняння $z^2 - (\alpha_i + \alpha_j)z + +\alpha_i \alpha_j = 0$ з комплексними коефіцієнтами, самі є комплексними числами, тобто многочлен $f(x)$ степеня $2^k q$ має навіть два комплексних корені. Згідно з методом математичної індукції, це означає, що довільний відмінний від константи многочлен з дійсними коефіцієнтами обов'язково має принаймні один комплексний корінь.

Для повного доведення основної теореми залишається розглянути випадок довільного многочлена $f(x) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ із комплексними коефіцієнтами. Утворимо многочлен $\bar{f}(z) = \overline{a_n} z^n + \cdots + \overline{a_1} z + \overline{a_0}$, замінивши в $f(z)$ всі коефіцієнти спряженими комплексними числами, і розглянемо добуток $F(z) = f(z) \cdot \bar{f}(z) = b_{2n} z^{2n} + \cdots + b_1 z + b_0$, де $b_k = \sum_{i+j=k} a_i \overline{a_j}$. Згідно із властивостями спряжених комплексних чисел, $b_k = \overline{\sum_{i+j=k} a_i \overline{a_j}} = \sum_{i+j=k} \overline{a_i \overline{a_j}} = = \sum_{i+j=k} \overline{a_i}\, a_j = b_k$, тому всі коефіцієнти многочлена $F(z)$ є дійсними числами. Як доведено вище, многочлен $F(z)$ має принаймні один комплексний корінь $\alpha$, тобто $\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{f}(\alpha) \cdot \bar{\mathrm{f}}(\alpha)$, звідки $f(\alpha) = 0$ або $\bar{\mathrm{f}}(\alpha) = 0$. У першому випадку многочлен $f(z)$ має комплексний корінь $\alpha$ і теорему доведено. У другому випадку $\overline{a_n} \alpha^n + \cdots + \overline{a_1} \alpha + a_0 = 0$ і, перейшовши в обох частинах цієї рівності до спряжених чисел, отримаємо:

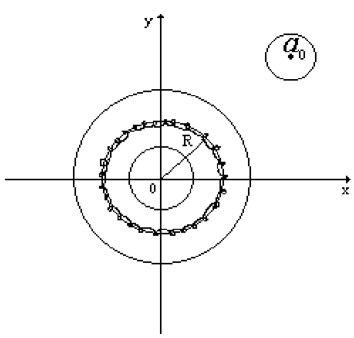
$$0 = \bar{0} = \overline{\overline{a_n} \alpha^n + \cdots + \overline{a_1} \alpha + a_0} = \overline{\overline{a_n} \alpha^n} + \cdots + \overline{\overline{a_1} \alpha} + \overline{a_0} =$$

$$= a_n \bar{\alpha}^n + \cdots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = f(\bar{\alpha})$$

тобто многочлен $f(z)$ має коренем комплексне число $\bar{\alpha}$, що й завершує доведення основної теореми.

## 1.4 Топологічне доведення основної теореми теорії многочленів

Можна дати ще одне, топологічне, доведення основної теореми теорії многочленів. Розглянемо довільний многочлен $f(z) = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0$ з кільця $C(z)$. Якщо $a_0 = 0$, то $f(0) = 0$, тобто $z = 0$ є його коренем, тому будемо вважати, що $a_0 \neq 0$. Позначимо найбільше серед чисел $|a_n|, \ldots, |a_1|, |a_0|$ через A (очевидно, A $> 0$). Виберемо додатне дійсне число $R_1$ таке, що $R_1 \leq 1$ і $R_1 < \frac{|a_0|}{10An}$. Покажемо, що якщо $|z| = R_1$, то $|a_n z^n + \cdots + a_1 z| < \frac{|a_0|}{10}$. Справді $|a_n z^n + \cdots + a_1 z| \leq |a_n| \cdot |z|^n + \cdots + |a_1||z| = |a_n| R_1^n + \cdots + |a_1| R_1 \leq |a_n| \cdot R_1 + + \cdots + |a_1| R_1 \leq nAR_1 < nA \frac{|a_0|}{10An} = \frac{|a_0|}{10}$. Візьмемо тепер дійсне число $R_2$ таке, що




$R_2 \geq 1$ і $R_2 > \frac{10An}{|a_n|}$. Якщо $|z| = R_2$, то $\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + + \frac{a_0}{z^n}\right| < \frac{|a_n|}{10}$. Справді, $\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| < \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^n} = = \frac{|a_{n-1}|}{R_2} + \cdots + \frac{|a_0|}{R_2^n} \leq \frac{|a_{n-1}|}{R_2} + \cdots + + \frac{|a_0|}{R_2} \leq \frac{nA}{R_2} < \frac{nA|a_n|}{10\, nA} = = \frac{|a_n|}{10}$. Коло, що задається рівнянням $z(t) = \cos(2\pi t) + +isin(2\pi t)$, де $t \in [0,1]$ і додатнім вважається напрям обходу проти годинникової стрілки, є неперервною замкненою лінією, оскільки $z(0) = z(1)$. Позначимо його через $C_R$. Тоді лінія $f(C_R) = f\big(z(t)\big)$, де $t \in [0,1]$ теж буде замкненою неперервною лінією, оскільки $f\big(z(0)\big) = f(z(1))$. Якщо точка $z(t)$ при $0 \leq t \leq 1$ проходить в додатному напрямку коло $C_R$ і $f\big(z(t)\big) \neq 0$ для всіх $t \in [0,1]$, то позначимо через $v(R)$ кількість обходів лінії $f(z(t))$ навколо початку координат. Якщо $|z| = R_1$, то, як було показано вище, $|f(z) - a_0| < \frac{|a_0|}{10}$, тому вся лінія $f(z(t))$ знаходиться всередині круга радіуса $\frac{|a_0|}{10}$ з центром в точці $a_0$ (див. мал.). Очевидно, що лінія $f(z(t))$ у цьому випадку жодного разу не обходить навколо початку координат, тому $v(R_1) = 0$. Якщо $|z| = R_2$ то, як встановлено вище, $\frac{f(z)}{z^n} - a_n < \frac{|a_n|}{10}$. Тому, як і при доведенні рівності $v(R_1) = 0$, отримуємо, що коли точка $z(t)$ пробігає коло $C_{R_2}$, приріст аргументу для $\frac{f(z)}{z^n}$ дорівнює нулю. Приріст же аргументу для $z^n$ в цьому випадку буде, як неважко зрозуміти, $2\pi n$. Оскільки $f(z) = \frac{f(z)}{z^n} z^n$ і $arg(f(z)) = arg\left(\frac{f(z)}{z^n}\right) + arg\ (z^n)$, то приріст аргументу для $f(z)$ теж буде дорівнювати $2\pi n$, тобто лінія $f(z)$, коли $z$ пробігає коло радіуса $R_1$, обходить навколо початку координат $n$ разів. Отже, $v(R_2) = n$. Останнє твердження допускає красиве геометричне доведення, яке в математичному фольклорі дістало назву "пані з собачкою". З отриманої вище нерівності випливає, що коли $|z| = R_2$, то $|f(z) - a_2 z^n| = |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots +$ $+ a_0| = \left|z^n \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)\right| < \frac{|a_n|}{10} R_2^n$. Позначивши $|a_n| R_2^n = R$, дістанемо, що при $|z| = R_2$ $|f(z) - a_n z^n| < \frac{R}{10}$. Коли точка $z$ один раз проходить коло радіуса $R_2$, точка $a_n z^n$ ("пані") пробігає $n$ разів коло радіуса $R$. Враховуючи отриману нерівність, бачимо, що відстань між точкою $f(z)$ ("собачкою") і точкою $a_n z^n$ ("пані") весь час залишається меншою за $\frac{R}{10}$. Але тоді, коли "пані" обходить навколо початку координат $n$ разів по колу радіуса $R$, то і "собачка" змушена обійти разом з нею навколо початку координат $n$ разів. Отже, $v(R_2) = n$.

Тепер перейдемо безпосередньо до доведення основної теореми. Будемо змінювати радіус $R$ кола $C_R$ неперервно від $R_1$ до $R_1$. При цьому лінія $f(C_R)$ буде неперервно деформуватися від положення $f(C_{R_1})$ до положення $f(C_{R_2})$. Якщо при деякому значенні $R$ лінія $f(C_R)$ не проходить через початок координат, то при досить малих змінах $R$ лінія $f(C_R)$ буде деформуватися в таких невеликих межах, що кількість її обходів навколо початку координат не буде змінюватися, тобто для таких значень $R$ функція $v(R)$ буде неперервною. Якби лінія $f(C_R)$ для всіх значень $R_1 \le R \le R_2$ не проходила через початок координат, то функція $v(R)$ була б неперервною на всьому проміжку $[R_1, R_2]$. Оскільки $v(R)$ приймає лише цілочислові значення і $v(R_1) = 0$, то ми повинні були б отримати, що в цьому випадку також $v(R_2) = 0$, що суперечить отриманому вище результату. Отже, для деякого $z_0 \in C$ повинна виконуватись умова $f(z_0) = 0$, тобто многочлен $f(z)$ має в полі $C$ принаймні один корінь.

## 1.5 Наслідки з основної теореми

З теореми 1 можна отримати ряд важливих наслідків.

***Наслідок 1.*** Поле С комплексних чисел є полем розкладу для довільного відмінного від константи многочлена $f(z) \in C[z]$ (тобто многочлен $f(z)$ розкладається над полем С в добуток лінійних множників). Іншими словами, поле С є алгебраїчно замкненим.

***Доведення.*** Справді, якщо дано многочлен $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ степеня $n$ з кільця $C[z]$, причому $n \geq 1$, то, згідно з теоремою 1, многочлен $f(z)$ має в полі С корінь $\gamma_1$.Тоді за теоремою Безу $f(z) = (z - \gamma_1) f_1(z)$. Коефіцієнти многочлена $f_1(z)$ знову є комплексними числами, і якщо $deg\ f_1 \geq 1$, то він має в полі С корінь $\gamma_2$, тобто $f(z) = (z - \gamma_1)(z - \gamma_2) f_2(z)$. Продовжуючи цей процес, через скінченну кількість кроків отримаємо розклад $f(z) = a_n((z - \gamma_1) \ldots (z - \gamma_n)$, де сталий множник у правій частині збігається із старшим коефіцієнтом многочлена $f(z)$.

Якщо серед лінійних множників в розкладі многочлена $f(z)$ над полем С є однакові, то збираючи їх в степінь, отримаємо канонічний розклад многочлена $f(z)$ на незвідні в полі С множники у вигляді:

$$f(z) = a_n (z - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_m)^{k_m}, \tag{4}$$

де $a_1, \dots, a_m$ – різні корені многочлена $f(z), k_1, \dots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1 + \dots + k_m = n$. Звідси безпосередньо отримується наступний наслідок.

***Наслідок 2.*** Довільний многочлен $f(z)$ степеня $n \geq 1$ з кільця $\mathrm{C}[z]$ має в полі C рівно $n$ коренів, якщо кожний корінь рахувати стільки разів, яка його кратність. Оскільки поле C є полем розкладу для довільного відмінного від константи многочлена $f(z)$ з кільця $C[z]$, то з теореми 3 отримується наступний наслідок.

***Наслідок 3.*** Якщо $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ – многочлен степеня $n \geq 1$ з кільця $\mathrm{C}[z]$ і $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – всі його корені в полі C, причому кожний корінь рахується стільки разів, яка його кратність, то справджуються формули Вієта:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_1\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2\alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = (-1)^{n-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \\
\alpha_1\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}
\end{gathered} \tag{5}$$

## Розділ 2. Застосування основної теореми теорії многочленів

Зображення многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ у вигляді добутку

$$f(x) = [p_1(x)]^{k_1}[p_2(x)]^{k_2} \cdots [p_m(x)]^{k_m},$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_m(x)$ - попарно взаємно прості і незвідні над полем $P$ многочлени називають **канонічним розкладом** многочлена $f(x)$ над полем $P$.

Канонічний розклад для будь-якого многочлена ненульового степеня $f\ (x)$ над полем $P$ завжди існує і єдиний з точністю до сталих множників та порядку нумерації множників.

Якщо многочлени $f\ (x)$ і g (х) розкладено в добуток незвідних множників над полем Р, то їхній найбільший спільний дільник $(f, g)$ дорівнює добутку всіх незвідних множників, які входять у розклад як $f$ (х), так і $g$ (х). Якщо таких спільних незвідних множників немає, то многочлени $f\ (x)$ і $g\ (x)$ є взаємно простими.

## 2.1 Розклад многочлена на незвідні множники над полем комплексних чисел.

З наслідку 1 випливає, що довільний многочлен $f(z)$ з кільця $C[z]$, степінь якого більший одиниці, є звідним в полі С, тобто незвідними в полі С є лише многочлени першого степеня. Якщо дано многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то, оскільки поле R є підполем поля С, $f(x)$ можна розглядати як многочлен з кільця С[x], тому для нього залишаються істинними всі раніше доведені твердження, зокрема, над полем С він розкладається в добуток лінійних множників.

***Приклад 1.*** Розкласти на незвідні над полем С множники многочлен

$$f(x) = (2i - 3)x^3 - 2 - 3i.$$

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо корені многочлена $f(x)$:

$$(2i - 3)x^3 - 2 - 3i = 0, \qquad x^3 = -i,$$

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{-i} \text{ або } x_{1,2,3} = \cos\frac{\frac{3}{2^{\pi}} + 2k\pi}{3} + \sin\frac{\frac{3}{2^{\pi}} + 2k\pi}{3}, \text{де } k = 0, 1, 2.$$

$$\text{Тому } x_1 = i, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Отже, $f(x) = (2i-3)(x-i)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

***Приклад 2.*** Знайти зведений многочлен за його коренями $x_1^2, x_1, x_2$ і $x_2^2$, якщо числа $x_1$ і $x_2$ є коренями рівняння

$$\boldsymbol{x^2 + (i+2)x = 0}.$$

Р о з в' я з а н н я. Нехай $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ – шуканий многочлен. За формулами Вієта маємо

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = -a, \\ x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^2 = b, \\ x_1^3x_2^3 = -c. \end{cases}$$

Проте $x_1 + x_2 = -i - 2$ і $x_1x_2 = -i.$ Тому

$$a = -(\,x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = -(-i-2)^2 - i = -3 - 5i,$$

$$b = x_1x_2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = x_1x_2|(x_1+x_2)^2 - x_1x_2 =$$

$$= -i|(i+2)^2 + i| = -5 - 3i.$$

$$c = -(x_1x_2)^3 = -i.$$

Отже,

$$f(x) = x^3 - (3+5i)x^3 - (5+3i)x - i.$$

***Приклад 3***. Знайти кількість коренів многочлена $f(z) = z^5 + 5z^2 - 3$ всередині кіл радіусів 1 та 2 з центрами в початку координат.

Р о з в' я з а н н я. Якщо $z$ пробігає одиничне коло, то $|z| = 1$. При цьому $|5z^2| = 5|z^2| = 5, |z^5 - 3| \le |z|^5 + 3 = 1^5 + 3 = 4$, і поки $z$ обходить один раз одиничне коло, $5z^2$ обійде два рази коло радіуса 5 з центром у початку координат, а $f(z)$, будучи "прив'язаним" до $5z^2$ вектором, що зображає, число $z^5 - 3$ і довжина якого не перевищує 4, змушене теж обійти навколо початку координат два рази. Тому многочлен $f(z)$ має всередині одиничного кола два корені. Якщо тепер $z$ пробігає коло радіуса 2 з центром в початку координат, то $|z| = 2$. При цьому $|z^5| = |z|^5 = 32, |5z^2 - 3| \le |5z^2| + |3| = 5|z^2| + 3 = 23,$ і поки $z$ обхо-дить один раз коло радіуса 2, $z^5$ п'ять разів обійде коло радіуса 32 з центром у початку координат, тому $f(z)$, віддаляючись від $z^5$ не більше, ніж на 23 одиниці, теж п'ять разів обійде початок координат. Отже, всередині кола радіуса 2 з центром в початку координат міститься 5 коренів многочлена $f(z)$.

$$|z^5| = |z|^5 = 32, |5z^2 - 3| \leq |5z^2| + |3| = 5|z^2| + 3 = 23$$

***Приклад 4.*** Розкласти многочлен $x^8 - 1$ та в добуток незвідних над полем С множників.

Р о з в' я з а н н я**. 1-й спосіб.** Застосовуючи відомі способи розкладання на множники, отримаємо:

$$x^8 - 1 = (x^4 - 1) \cdot (x^4 + 1) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2) =$$

$$= (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot ((x^2 + 1)2 - (\sqrt{2}\,x)^2) =$$

$$= (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1).$$

Враховуючи, що коренями $x^2 + 1$ є комплексні числа $i$ та $-i$, коренями $x^2 - \sqrt{2}x + 1 -$ числа $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, коренями $x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 -$ числа $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, остаточно будемо мати:

$$x^8 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times$$

$$\times \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

**2-й спосіб**. Знайдемо в полі С корені многочлена $x^8 - 1$, що є коренями 8-го степеня з одиниці. Їх можна обчислити за формулою

$$\varepsilon_{\text{k}} = \cos\frac{2\pi k}{8} + i\frac{2\pi k}{8}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 8: \ \varepsilon_0 = \cos 0 + \sin 0 = 1, \ \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \varepsilon_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \ \varepsilon_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \ \varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_6 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i, \ \varepsilon_7 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - {}^{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, будемо мати такий розклад:

$$x^8 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-i)\cdot(x+i)\cdot\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times$$

$$\times\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(x\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

## 2.2 Розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на незвідні в полі R множники.

З наслідку 1 випливає, що довільний многочлен $f(z)$ з кільця $C[z]$, степінь якого більший одиниці, є звідним в полі C, тобто незвідними в полі C є лише многочлени першого степеня. Якщо дано многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то, оскільки поле $R$ є підполем поля C, $f(x)$ можна розглядати як многочлен з кільця C[x], тому для нього залишаються істинними всі раніше доведені твердження, зокрема, над полем C він розкладається в добуток лінійних множників. Розглянемо тепер питання про розклад многочлена $f(x)$ на незвідні множники над полем $R$. Доведемо насамперед таку теорему.

***Теорема 2.*** Якщо комплексне число $z_0$ є коренем многочлена $f(z) = a_n \times$ $\times\ x^n + \ ... + a_1 x + a_0$, з дійсними коефіцієнтами, то спряжене комплексне число $\bar{z}_0$ теж є коренем цього многочлена.

***Доведення.*** Оскільки $z_0$ - комплексне число, то $f(z_0)$ теж є деяким комплексним числом: $f(z_0) = a_n z_0 n + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = A + Bi$. Враховуючи, що $z_0$ – корінь многочлена $f(x)$, дістанемо: $0 = f(z_0) = \mathrm{A} + Bi$, звідки $\mathrm{A} = \mathrm{B} =$ $= 0$. Обчислимо тепер значення $f(\bar{z}_0)$. Оскільки всі коефіцієнти $a_k$ – дійсні числа, то $\overline{a}_k = a_k$ і, користуючись властивостями спряжених чисел, дістанемо:

$$f(\bar{z}_0) = a_n \bar{z}_0^n + \cdots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = \bar{a}_n \overline{z_0^n} + \cdots + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0 =$$

$$= \overline{a_n z_0^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{A + Bi} = A - Bi = 0, \text{бо } A = B = 0.$$

Отже, $\bar{z}_0$ теж є коренем многочлена $f(x)$, оскільки $f(\bar{z}_0) = 0$.

***Наслідок.*** Якщо комплексне число $z_0$ є коренем кратності $k$ многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то спряжене комплексне число $\bar{z}_0$ є коренем мно-гочлена $f(x)$ тієї ж кратності $k$.

***Доведення.*** Оскільки $z_0$ є коренем $f(x)$ кратності $k$, то, $f(z_0) = f'(z_0) =$ $= \ ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0,\ f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Але всі похідні многочлена $f(x)$ теж мають дійсні коефіцієнти, тому, згідно з теоремою 2, $f(\bar{z}_0) = f'(\bar{z}_0) = \cdots =$ $f^{(k-1)}(\bar{z}_0) == 0$. При цьому $f^{(k)}\big((\bar{z}_0)\big) \neq 0$, бо інакше, як випливає з теореми 2, спряжене до $\bar{z}_0$ число $z_0$ було б коренем многочлена $f^{(k)}(x)$, а це не так. Отже, $\bar{z}_0$– корінь кратності $k$ многочлена $f(x)$.

***Теорема 3.*** Кожний многочлен з кільця $R[x]$ степеня $n > 2$ звідний в полі $R$.

***Доведення.*** Згідно з теоремою 1, многочлен $f(x)$ має корінь $z_0$ в полі C комплексних чисел. Якщо $z_0$ – дійсне число, то за теоремою Безу $f(x)$ ділиться на $x - z_0$ і тому є звідним у полі $R$. Якщо ж $z_0 \notin R$, то, згідно з теоремою 2, спряжене число $\bar{z}_0$ теж є коренем многочлена $f(\mathrm{x})$, отже, в цьому випадку $f(x) \vdots$ $\vdots$ $(x - z_0)$ $i$ $f(x) \vdots (x - \bar{z}_0)$. Оскільки $z_0 \neq \overline{z}_0$ то лінійні двочлени $x - z_0$ і $x - \bar{z}_0$ є взаємно простими, тому многочлен $f(x)$ ділиться на їхній добуток $\varphi(x) =$ $= (x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x^2 - (z_0 + \bar{z}_0)x + z_0\bar{z}_0$. Але многочлен $\varphi(\mathrm{x})$ має дійсні коефіцієнти, бо $z_0 + \bar{z}_0$ $i$ $z_0 \cdot \bar{z}_0$ є дійсними числами. Оскільки $degf > 2$ і $f(\mathrm{x}) \vdots$ $\vdots$ $\varphi(\mathrm{x})$, то многочлен $f(x)$ звідний в полі $R$ і в даному випадку. Теорему доведено.

Що ж стосується многочлена 2-го степеня $x^2 + \mathrm{p}x + q$ з дійсними коефіцієнтами, то, як неважко зрозуміти, він є незвідним у полі $R$ тоді і тільки тоді, коли його корені є різними комплексно спряженими числами, тобто якщо його дискримінант $D = p^2 - 4q$ від'ємний.

***Теорема 4.*** Для довільного многочлена $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ степеня $n > 0$ з кільця $R[x]$ його розклад на незвідні в полі $R$ множники має вигляд: $f(x) = a_n(x - a_1) \cdot \cdots \cdot (x - a_r)\left(x^2 - \left(\beta_1 + \bar{\beta}_1\right)x + \beta_1\bar{\beta}_1\right) \cdot \cdots \cdot (x^2 - \left(\beta_s + \bar{\beta}_s\right) \times\times x + \beta_s\bar{\beta}_s)$, де $a_1, \ldots, a_r$ – дійсні, а $\beta_1, \bar{\beta}_1, \cdots, \beta_s, \bar{\beta}_s$ – комплексні корені мно-гочлена $f(x)$, причому кожний з них рахується стільки разів, яка його крат-ність, $r + 2s = n$.

***Доведення.*** Згідно з наслідком 1 теореми 1, $f(x) = (x - \gamma_1) \cdot \ldots \cdot (x - \gamma_n)$, де $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ – корені многочлена $f(\mathrm{x})$ в полі С. Якщо корінь $\gamma_i$ не є дійсним числом, то за теоремою 2 і наслідком з неї в даний добуток разом із множником $x - \gamma_i$ буде входити також множник $x - \bar{\gamma}_i$. Замінюючи кожні два такі множники їхнім добутком $(x - \gamma_i)(x - \bar{\gamma}_i) = x^2 - (\gamma_i + \bar{\gamma}_i)x + \gamma_i\bar{\gamma}_i$, отримаємо шуканий розклад многочлена $f(x)$ на незвідні в полі $R$ множники.

***Приклад 5.*** Розкласти на незвідні в полі $R$ множники многочлени $x^{2n} - 1$ і $x^{2n} + 1$.

Р о з в' я з а н н я**.** Неважко перевірити, що дані многочлени взаємно прості із своїми похідними, тому вони не мають кратних коренів. Спочатку знайдемо розклади цих многочленів на лінійні множники в полі C комплексних чисел. Коренями многочлена $x^{2n} - 1$ є всі $2n$ різних значень кореня степеня $2n$ з одиниці. Вони, як відомо, обчислюються за формулою $x_k = \sqrt[2n]{1} = \sqrt[2n]{\cos 0 + i \cdot \sin 0} = = \cos\frac{\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\pi k}{n}$ при $k = 1,2, \dots ,2n$. Два з цих корені $x_n = -1$ $i$ $x_{2n} = 1$ є дійсними числами, а решта – попарно спряженими комплексними числами, причому, як неважко встановити, $\bar{x}_k = x_{2n-k}$ для всіх $k = 1, \dots , n-1$. Отже,

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{2n-1}) =$$

$$= (x-1)(x+1)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot \dots \cdot (x - \bar{x}_{n-1})(x - \bar{x}_1) =$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2 - (x_1 + \bar{x}_1)x + x_1\bar{x}_1) \cdot \dots \cdot (x^2 - (x_{n-1} + \bar{x}_{n-1})x + x_{n-1}\bar{x}_{n-1} =$$

$$= (x-1)(x+1) \cdot \dots \cdot \left(x^2 - \left(2\cos\frac{\pi}{x}\right)x + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(x^2 - \left(2\cos\frac{\pi(n-1)}{x}\right)x + 1\right).$$

Останній добуток і є розкладом многочлена $x^{2n} - 1$ на незвідні в полі $R$ множники. Коренями многочлена $x^{2n} + 1$ є всі $2n$ різних значень кореня степеня $2n$ з числа –1: $x_k = \sqrt[2n]{-1} = \sqrt[2n]{\cos\pi + i \cdot \sin\pi} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + i\sin \times\times\ \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, де $k = 1,2, \dots ,2n$. Серед них немає жодного дійсного значення і всі вони є попарно спряженими, причому, як неважко перевірити, $\overline{x_k} = x_{2n-k+1}$ для всіх $k = 1, \dots , n$. Отже,

$$x^{2n} + 1 = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)(x - x_{n+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{2n}) =$$

$$= (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)(x - \bar{x}_n) \cdot \dots \cdot (x - \bar{x}_1) =$$

$$= (x^2 - (x_1 + \bar{x}_1)x + 1) \cdot \ldots \cdot (x^2 - (x_n + \bar{x}_n)x + 1) =$$

$$= \left(x^2 - \left(2\cos\frac{\pi}{x}\right)x + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(x^2 - \left(2\cos\frac{\pi(2n-1)}{2n}\right)x + 1\right).$$

Останній добуток і є розкладом многочлена $x^{2n} + 1$ на незвідні в полі $R$ множники. Зокрема

$$x^8 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 - \left(2\cos\tfrac{\pi}{4}\right)x + 1)(x^2 - \left(2\cos\tfrac{\pi}{2}\right)x + 1) \times$$

$$\times \left(x^2 - \left(2\cos\tfrac{3\pi}{4}\right)x + 1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2 - \sqrt{2x} + 1\right)(x^2+1)\left(x^2 + \sqrt{2x} + 1\right).$$

Цей розклад можна було б отримати і безпосередньо:

$$x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)\left((x^4 + 2x^2 1) - 2x^2\right) =$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)((x^2+1)^2 - \left(\sqrt{2x}\right)^2\big) =$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)(\left(x^2 - \sqrt{2x} + 1\right)(x^2+1)\left(x^2 + \sqrt{2x} + 1\right).$$

Аналогічно, згідно із встановленою формулою,

$$x^8 + 1 = \left(x^2 - \left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)x + 1\right)\left(x^2 - \left(2\cos\frac{3\pi}{8}\right)x + 1\right) \times$$

$$\times (x^2 - \left(2\cos\tfrac{5\pi}{8}\right)x + 1(x^2 - \left(2\cos\tfrac{7\pi}{8}\right)x + 1).$$

З іншого боку, $x^8 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - 2x^4 = (x^4+1)^2 - (\sqrt{2}x^2)^2 =$

$$= \left(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1\right)\left(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1\right) =$$

$$= ((x^4 + 2x^2 + 1) - \left(2 - \sqrt{2}\right)x^2) \cdot ((x^4 + 2x^2 + 1) - \left(2 + \sqrt{2}\right)x^2 =$$

$$= ((x^2+1)^2 - (\sqrt{2 - \sqrt{2x}})^2((x^2+1)^2 - \left(\sqrt{2 + \sqrt{2x}})^2\right) =$$

$$= \left(x^2 - \sqrt{2 - \sqrt{2x}} + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2 - \sqrt{2x}} + 1\right) \times$$

$$\times \left(x^2 - \sqrt{2 + \sqrt{2x}} + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2 + \sqrt{2x}} + 1\right).$$

З порівняння цих розкладів, в силу їх однозначності, зокрема, випливають формули: $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{8} = \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

***Приклад 6.*** Знайти многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами і старшим коефіцієнтом, що дорівнює 5, якщо цей многочлен має потрійний корінь $1 - i$ і простий корінь 2.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки шуканий многочлен $f(x)$має потрійний корінь $1 + i$, то його розклад на незвідні множники над полем C має вигляд:

$$f(x) = 5(x - 1 + i)^3(x - 1 - i)^3(x - 2).$$

Звідси

$$f(x) = 5(x^2 - 2x + 2)^3(x - 2).$$

## 2.3 Розклад многочленів на незвідні в полі Q множники

Вкажемо деякі способи розкладу многочлена $f(x)$ з раціональними коефіцієнтами на незвідні в полі Q множники. Для многочленів 2-го і 3-го степеня це питання розв'язується досить просто. Якщо квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + +bx + c$ з раціональними коефіцієнтами звідний в полі Q, то він буде роз-кладатися в добуток двох лінійних множників: $f(x) = a(x - -$

$x_1)(x - x_2)$, де $x_1$ *і* $x_2$ раціональні числа, тобто він буде мати два раціональні корені. Навпаки, якщо квадратний тричлен $f(x)$ з раціональними коефіцієнтами має хоча б один раціональний корінь, то він, згідно з теоремою Безу, буде розкладатися над полем Q в добуток двох лінійних множників. Аналогічно, многочлен 3-го степеня $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ з раціональними коефіцієнтами звідний у полі Q тоді, коли він має хоча б один раціональний корінь. Справді, якщо вказаний многочлен $f(x)$ звідний в полі Q, то в його розклад над полем Q буде входити хоча б один множник першого степеня виду $px + q$. Але в цьому випадку многочлен $f(x)$ матиме раціональний корінь $x_0 = -\frac{q}{p}$. Навпаки, якщо $f(x)$ має раціональний ко-рінь, то $f(x) = (x - x_0)q(x)$, тобто $f(x)$ звідний в полі Q.

Для многочленів 4-го степеня теж можна вказати досить зручний спосіб розкладу на незвідні в полі Q множники, що грунтується на понятті кубічної резольвенти. Нехай $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ – многочлен 4-го степеня з раціональними коефіцієнтами. Щоб з’ясувати питання про його звідність або незвідність в полі Q, перетворимо многочлен $f(x)$ так, як і при роз’язуванні алгебраїчного рівняння 4-го степеня за способом Феррарі, щоб він подавався у вигляді різниці двох квадратів:

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left[\left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d\right] =$$

$$= \left(x^2 + \frac{ax}{2} + y\right)^2 + \left[\left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d - 2\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y - y^2\right] =$$

$$= \left(x^2 + \frac{ax}{2} + y\right)^2 - (Ax^2 + Bx + C)$$

де $A = 2y + \frac{a^2}{4} - b, B = ay - c, C = y^2 - d$. Тепер підберемо у так, щоб його дискри-мінант дорівнював 0, тобто $B^2 = 4AC$. Отже, шукане значення у має задовольняти умову:

$$(ay - c)^2 = 4\left(2y + \frac{a^2}{4} - b\right)(y^2 - d), \qquad (1)$$

тобто бути коренем рівняння (1) відносно змінної $y$. Рівняння (1) називається кубічною резольвентою многочлена $f(x)$. Якщо $y_0$ – один з коренів кубічної резольвенти, то многочлен $f(x)$ можна подати у вигляді:

$f(x) = \left(x^2 + \frac{ax}{2} + y_0\right)^2 - (\alpha x + \beta)^2$, де $\alpha = \pm\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b}$, $\beta = \pm\sqrt{y_0^2 - d}$.

Спосіб розкладу на незвідні в полі Q множники многочлена 4-го степеня з раціональними коефіцієнтами, що не має раціональних коренів, грунтується на наступному твердженні.

***Теорема 5.*** Многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ з раціональними коефіцієнтами, що не має раціональних коренів, тоді і тільки тоді звідний у полі Q, коли його резольвента має такий раціональний корінь $y_0$, що $\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b}$ і $\sqrt{y_0^2 - d}$ є раціональними числами.

***Доведення.*** Нехай резольвента (1) многочлена $f(x)$ має раціональний корінь $y_0$ такий, що $\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b}$ і $\sqrt{y_0^2 - d}$ є раціональними числами. Тоді на основі викладеного вище будемо мати:

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{ax}{2} + y_0\right)^2 - (\alpha x + \beta)^2 =$$
$$= \left[x^2 + \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)x + (y_0 + \beta)\right]\left[x^2 + \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)x + (y_0 - \beta)\right]$$

де $\alpha = \pm\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b}, \beta = \pm\sqrt{y_0^2 - d}$ – раціональні числа, тобто многочлен $f(x)$ звідний у полі Q. Оскільки $f(x)$ не має раціональних коренів, то він розкладається в добуток двох квадратних тричленів з раціональними коефіцієнтами: $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + +q_2)$, або $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 + (p_1 + p_2)x_3 + (p_1p_2 + q_1 + q_2)x_2 + (p_1q_2 + +p_2q_1)x + q_1q_2$. Зрівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів

$x$ отримаємо:

$$p_1 + p_2 = a; p_1 p_2 + q_1 + q_2 = b;\ p_1 q2 + p_2 q_1 = c;\ q_1 q_2 = d. \qquad (2)$$

Виходячи з (2) легко переконатися, що резольвента (1) має раціональний корінь $y_0 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$, причому числа $\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b}$ і $\sqrt{y_0^2 - d}$ є раціональними. Справді,

$$A = 2y_0 + \frac{a^2}{4} - b = q_1 + q_2 + \frac{(p_1 - p_2)^2}{4} - (p_1 p_2 + q_1 + q_2) =$$

$$= \frac{p_1^2 - 2p_1 p_2 + p_2^2}{4} = \left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2.$$

$$B = a y_0 - c = (p_1 + p_2)\frac{q_1 + q_2}{2} - (p_1 q_2 + p_2 q_1) =$$

$$= \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 - p_1 q_2 - p_2 q_1}{2} = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{2}.$$

$$C = y_0^2 - d = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4} - q_1 q_2 = \frac{q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2}{4} = \left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2.$$

Отже кубічна резольвента (1) при $y = y_0 = \frac{q_1 + q_2}{2}$ перетворюється в очевидну тотожність

$$\frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{2} = 4\left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2 \left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2,$$

тобто $y_0$ є коренем рівняння (1). При цьому $\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{A} = \left|\frac{p_1 - p_2}{2}\right|$ і $\sqrt{y_0^2 - d} = \sqrt{C} = \left|\frac{q_1 - q_2}{2}\right|$ є раціональними числами. Теорему доведено.

***Приклад*** *7*. Розкласти многочлен $f(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2$ на незвідні в полі Q множники.

Р о з в' я з а н н я. Легко переконатися, випробовуючи дільники вільного члена, що многочлен $f(x)$ не має раціональних коренів. Отже, якщо многочлен звідний в полі Q, то він повинен розкладатися в добуток квадратного тричлена $g(x) = x^2 + px + q$ і многочлена $h(x)$ 3-го степеня з цілими коефіцієнтами.

Звідси випливає, що для довільного m число $f(m)$ буде ділитися на $g(m)$. Оскільки $f(0) = 2$ і $f(-1) = -1$, то для $g(0)$ і $g(-1)$ можливі тільки наступні комбінації значень:

1) g(0) = 1, g(–1) = 1, 2) g(0) = 1, g(–1) = –1, 3) g(0) = –1, g(–1) = 1,

4) g(0) = –1, g(–1) = –1, 5) g(0 )= 2, g(–1)=1, 6) g(0) = 2, g(–1) = –1,

7) g(0) = –2, g(–1) = 1, 8) g(0) = –2, g(–1) = –1.

У випадку 1) g(0) = q = 1, g(–1) = 1 – p + q = 1, звідки $p = q = 1$ і g(x) = $x^2 + + x + 1$. Виконуючи ділення, знаходимо, що $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 + 2x + 2)$. Оскільки обидва отримані множники в розкладі $f(x)$ не мають раціональних коренів, то ми отримали розклад многочлена $f(x)$ на незвідні в полі Q множники.

***Приклад 8.*** Чи є звідним у полі Q многочлен

$$f\ (\mathrm{x}) = \mathrm{x}^4 + 2\mathrm{x}^3 — 3\mathrm{x}^2 — 5\mathrm{x} + 2\ ?$$

Розв'язання. Нехай многочлен $f$ (x) є звідним у полі Q, тобто його можна розкласти в добуток не менше як двох многочленів ненульового степеня з кільця Q[x]. Щоб розкласти многочлен $f$ (x) на множники, застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. При цьому досить розглянути два випадки можливого розкладу:

1. обидва множники мають степінь 2;

2. один множник має степінь 1, а другий 3.

Нехай

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + mx + n) \qquad (1)$$

Тоді з рівності $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = adx^4 + (am + bd)x^3 + (an + bm + +cd)x^2 + (bn + cm)x + cn$.

Маємо

$$\begin{cases} ad = 1, \\ am + bd = 2, \\ an + bm + cd = -3, \\ bn + cm = -5, \\ cn = 2. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь у цілих числах. З першого знаходимо $a = d = 1$ або $a = d = -1$, з останнього $c = 1$, n = 2; c = 2, $n = 1$; $c = -2$, n = -1; $c = -1$, $n = -2$. Розглянемо кожен з восьми можливих варіантів. Якщо $a = d = 1$ і $c = 1$, $n = 2$, то система набирає вигляду

$$\begin{cases} m + b = 2 \\ bm = -6 \\ 2b + m = -5 \end{cases}$$

Ця системи несумісна.

У кожному з решти варіантів несумісними також є системи рівнянь:

$$\begin{cases} m + b = 2 \\ bm = -6 \\ b + 2m = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} m + b = 2 \\ bm = 0 \\ -2b - m = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} m + b = 2 \\ bm = 0 \\ -2b - m = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} m + b = -2 \\ bm = 0 \\ 2b + m = -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + b = -2 \\ bm = 0 \\ b + 2m = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} m + b = -2 \\ bm = -6 \\ -b - 2m = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} m + b = -2 \\ bm = -6 \\ -2b - m = -5, \end{cases}$$

Це означає, що система рівнянь (2) несумісна і многочлен $f\ (x)$ не розкладається в добуток двох многочленів другого степеня з цілими коефіцієнтами. Припустимо, що розклад (1) виконується при дробових числа $a$, b, $c$, $d$, $m$, $n$. Зведемо до найменшого спільного знаменника коефіцієнти многочленів $g_1(x) = ax^2 + +bx + c$ і $g_2(x)$=$dx^2 + mx + n$ та винесемо за дужки ці знаменники і найбільші спільні дільники чисельників обох многочленів. Дістанемо розклад

$$f\ (x) = \frac{r}{s}(a_1x^2 + b_1x + c_1)(d_1x^2 + m_1x + n_1),$$

де $(r, s)$ = $(a_1, b_1, c_1)$ = $(d_1, m_1, n_1)$=1. Оскільки коефіцієнти многочлена $f\ (x)$ є цілими числами, то всі коефіцієнти многочлена

$$g(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(d_1x^2 + m_1x + n_1)$$

мають ділитися на число $s$, а тому й на кожен його простий дільник $p$. Разом з тим, серед кожної трійки чисел $a_1$, $b_1$, $c_1$ та $d_1$, $m_1$, $n_1$ знайдуться числа, які не діляться на $p$. Тому серед коефіцієнтів $a_1d_1$, $a_1\,m_1 + b_1\,d_1$, $a_1n_1 + b_1m_1 + c_1 \times\times d_1$, $b_1n_1 + c_1\,m_1$ і $c_1n_1$ многочлена $g(x)$ знайдеться такий, що не ділиться на р. Тому $s = 1$ і ми дістанемо розклад (1) з цілими коефіцієнтами, що неможливо.

Нехай

$$f\ (x) = (ax + b)(cx^3 + dx^2 + mx + n) \qquad (3)$$

Тоді з рівності $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = acx^4 + (ad + bc)x^3 +$

$$+(am + bd)x^2 + (an + bm)x + bn$$

маємо:

$$\begin{cases} ac = 1 \\ ad + bc = 2 \\ am + bd = -3 \\ an + bm = -5 \\ bn = 2 \end{cases} \qquad (4)$$

Одним з розв'язків системи (4) є a = c = n = 1, b = 2, d = 0 і m = -3. Отже, $f\ (x) = = (x\ +\ 2)(x^3 -\ 3x\ +\ 1)$, тобто многочлен $f\ (x)$ звідний у полі Q.

***Приклад 9.*** Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів

$$f\ (x)\ =\ (x\ -\ 2)(x\ - 3)^2(x\ +\ 1)$$

і

$$g\ (\mathrm{x})\ =\ x^{\,3} - 3x^2\ -\ 2x\ +\ 6 \text{ з кільця } Q\ [\mathrm{x}].$$

Розв'язання. Для многочлена $f\ (x)$ відомий канонічний розклад у полі $Q$. Щоб знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне даних многочленів, доцільно знайти канонічний розклад многочлена $g(x)$ у йолі $Q$. Це можна зробити групуванням його членів і винесенням спільного множника:

$$g\ (x) = (x^{\,3} - 3\ x^{\,2}) - (2\ x - 6) = x^2\ (x - 3) - 2\ (x - 3) = (x - 3)(\ x^{\,2} - 2).$$

Тепер за теоремою про знаходження найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного многочленів, розкладених на незвідні у полі $Q$ множники, маємо:

$$(f, g) = \boldsymbol{x-3};$$
$$[f, g] = (\boldsymbol{x-2})(\boldsymbol{x^2-2})(\boldsymbol{x-3})^2(\boldsymbol{x+1})$$

***Приклад 10.*** Довести, що фактор-кільце $Q[x]/< x^2-2 >$ кільця $Q[x]$ за головним ідеалом $< x^2-2 >$ є полем розкладу многочлена $f(x) = x^2-2$ з кільця $Q[x]$.

Р о з в' я з а н н я. Многочлен $f(x) = x^2-2$ не має раціональних коренів і тому є незвідним над полем $Q$. Ідеал $< f > = < x^2-2 >$ відіграє роль нуля у фактор-кільці $Q[x]/< x^2-2 >$, а елементи останнього мають вигляд $a = g(x) +$
$+ < f >$, де $g(x) \in Q(x)$. Оскільки в кільці $Q[x]$ можна виконувати ділення многочленів з остачею, вважатимемо, що $\deg g < 2$. Нехай $a = g(x) + < f > \neq <$
$< f >$. Тоді многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно простими. Тому існують многочлени $u(x),\ v(x) \in Q[x]$ такі, що $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$. Звідси $g(x) \times$
$\times\ v(x) = 1 - f(x)u(x)$, тому в кільці $Q[x]/< x^2-2 >$ виконується рівність $[g(x) + < f >] \cdot [v(x) + < f >>] = 1 + < f >$. Це означає, що для елемента $a \in$
$\in\ Q[x]/< x^2-2 >$ існує обернений елемент $a^{-1} = v(x) + < f >$. Отже, $Q[x]/<$
$< x^2-2 >$ є полем, яке містить поле $\bar{Q} = \left\{\frac{m}{n} + < f > \mid \frac{m}{n} \in Q\right\}$, ізоморфне $Q$. Ототожнимо число $\frac{m}{n} \in Q$ з класом $\frac{m}{n} + + < f >$.

Нехай $b = x + < f > \in Q[x]/< x^2-2 >$.

Вважаючи, що $-2 = -2 + < f >$, маємо:

$$f(b) = b^2 + < -2 >= [x + < f >]^2 + [-2 + < f \geq [x^2 + < f >] + [-2 + < f >=$$
$$= x^2 - 2 + < f \geq < f >.$$

Аналогічно $f(-b) = f(-x + < f >) =< f >$. Це означає, що многочлен $f(x) = x^2-2$ має в полі $Q[x]/< x^2-2 >$ два корені $x_1 = b$ і $x_2 = -b$. Тоді

$f(x) = (x-b)(x+b)$ і поле $Q[x]/<x^2-2>$ є полем розкладу многочлена $f(x) = x^2 - 2$.

***Приклад 11.*** Довести, що для довільного простого числа р многочлен $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x-1}$ незвідний у полі Q.

Р о з в' я з а н н я. До многочлена $f(x)$ критерій Ейзенштейна безпосередньо незастосовний. Зробимо заміну змінної, поклавши $x = y + 1$. В результаті отримаємо:

$$g(y) = f(y+1) = \frac{(y+1)^p - 1}{(y+1)-1} = \frac{1}{y}(y^p + py^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2!}y^{p-2} + \cdots +$$

$$+\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}y^{p-k} + \cdots + py) =$$

$$= y^{p-1} + py^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2!}y^{p-3} + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}y^{p-k+1} + \cdots + p.$$

Просте число $p$ входить множником у чисельники всіх коефіцієнтів многочлена $g(y)$, починаючи з другого, і є взаємно простим з відповідним знаменником $k!$ $(k = 1,2,\dots,p-1)$, тому всі коефіцієнти многочлена $g(y)$, починаючи з другого, діляться на $p$, вільний член $p$ не ділиться на $p^2$, а старший коефіцієнт не ділиться на $p$. Отже, згідно з критерієм Ейзенштейна, многочлен $g(y)$ незвідний в полі $Q$. Але тоді незвідним у полі $Q$ є також і многочлен $f(x)$. Справді, із звідності $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ у полі $Q$ многочлена $f(x)$ випливала б звідність в $Q$ многочлена $g(y)$: $g(y) = \varphi(y+1)\psi(y+1)$.

## 2.4 Відокремлення кратних множників та встановлення кратності коренів многочлена.

Довільний многочлен з кільця $P[x]$, відмінний від константи, може бути поданий в канонічному вигляді:

$$f(x) = c \cdot p_1^{k_1}(x) \cdot \cdots \cdot p_m^{k_m}(x) \qquad (5)$$

де $p_1(x), \dots, p_m(x)$ – неасоційовані і незвідні в полі $P$ многочлени, $k_1, \dots, k_m$ – деякі натуральні числа, $c \in P$. Якщо $k_i > 1$, то многочлен $p_i(x)$ називається кратним множником многочлена $f(x)$ кратності $k_i$, якщо ж $k_i = 1$ то многочлен $p_i(x)$ називається простим множником многочлена $f(x)$. Є досить простий спо-сіб, який дає змогу, користуючись похідною, встановити, чи має многочлен кратні множники. Надалі будемо вважати, що поле $P$, над яким розглядаються многочлени, має характеристику 0. Цей випадок найбільш важливий для зас-тосувань, оскільки всі числові поля мають характеристику 0.

***Теорема 6.*** Якщо незвідний у полі $P$ многочлен $p(x)$ є множником кратності $k$ для многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$, то він є множником кратності $k-1$ для його похідної $f'(x)$. Зокрема, якщо $p(x)$ є простим множником для $f(x)$, то $p(x)$ взагалі не входить у канонічний розклад $f'(x)$.

***Доведення.*** Справді, якщо незвідний многочлен $p(x)$ є множником кратності $k$ для многочлена $f(x)$, то $f(x)$ можна подати у вигляді $f(x) = p^k(x) \cdot g(x)$, де $g(x)$ не ділиться на $p(x)$, і тому многочлени $p(x)$ і $g(x)$ взаємно прості. Тоді

$$f'(x) = (p^k(x))' \cdot g(x) + p^k(x) \cdot g'(x) =$$

$$= p^{k-1}(x) \cdot \big(k \cdot p'(x) \cdot g(x) + p(x) \cdot g'(x)\big) = p^{k-1}(x) \cdot h(x).$$

Якби многочлен $h(x)$ ділився на $p(x)$, то й многочлен $k \cdot p'(x) \cdot g(x) = h(x) - -p(x) \cdot g(x)$ теж ділився б на $p(x)$. Оскільки $(p, g) = 1$ і $deg\, p' < deg\, p$, то многочлен $p'(x)) \cdot g(x)$ не ділиться на $p(x)$. Але тоді й многочлен $k \cdot p'(x) \cdot g(x)$, а отже, і многочлен $h(x)$, теж не діляться на $p(x)$. Таким чином, $p(x)$ є множником кратності $k-1$ для $f'(x)$. Зокрема, якщо $k = 1$, то $f'(x) = p'(x) \cdot g(x) + p(x) \times\times g'(x)$, і з попередніх міркувань випливає, що $f'(x)$ не ділиться на $p(x)$, тобто $p(x)$ взагалі не входить в канонічний розклад $f'(x)$.

Якщо многочлен $f(x)$ має канонічний розклад (5), то випливає, що НСД многочленів $f(x)$ і $f'(x)$буде мати канонічний розклад $(f, f' = p_1^{k_1-1}(x) \cdot \cdots \times\times\ p_m^{k_m-1}(x)$, де, зрозуміло, множник $p_i^{k_i-1}(x)$ слід вважати одиницею при $k_i - 1$. Отже, з теореми 6 безпосередньо випливає наступне твердження .

***Наслідок 1.*** Многочлен $f(x)$ з кільця $P[x]$ не має кратних множників тоді і тільки тоді, коли він взаємно простий із свою похідною.

Згідно з наслідком 1, якщо многочлен $f(x)$ не має кратних множників в кільці $P[x]$, то він не має кратних множників і в кільці $L[x]$, де $L$ – довільне розширення поля $P$, хоча над полем $L$ многочлен $f(x)$ може мати більше незвідних мно-жників, ніж над полем $P$. Справді, як випливає з алгоритму Евкліда, НСД многочленів $f(x)$ і $f'(x)$ буде одним і тим же як в кільці $P[x]$, так і в кільці $L[x]$, бо він визначається лише коефіцієнтами цих многочленів. Зокрема, якщо за $L$ взяти поле розкладу многочлена $f(x)$, то з наслідку 1 безпосередньо випливає наступне твердження.

***Наслідок 2.*** Многочлен не має кратних коренів тоді і тільки тоді, коли він взаємно простий із своєю похідною.

У ряді випадків буває зручно користуватися наступною ознакою кратності кореня.

***Теорема** 7*. Для того, щоб елемент $\alpha$, був коренем кратності $k$ многочлена $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \text{але } f^k(\alpha) \neq 0 \qquad (6)$$

***Доведення. Необхідність.*** Якщо елемент $\alpha$ є коренем кратності $k$ многочлена $f(x)$, то лінійний двочлен $x-\alpha$ буде його незвідним множником кратності $k$. Згідно з теоремою 6, $x-\alpha$ буде множником кратності $k-1$ для першої похідної $f'(x)$, тобто α є коренем кратності $k-1$ многочлена $f'(x)$. Міркуючи аналогічно, отримаємо, що $\alpha$ є коренем кратності $k-2$ другої похідної $f''(x)$, і т. д. Нарешті дістанемо, що $\alpha$ є простим коренем похідної $f^{(k-1)}(x)$, а $f^{(k)}(x)$ не ділиться на $x-\alpha$, тобто $f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$, але $f^{k}(\alpha) \neq 0$.

***Достатність.*** Нехай для многочлена $f(x)$ виконуються умови (6). Тоді $\alpha$ є коренем многочлена $f(x)$. Якщо кратність цього кореня дорівнює $n$, то, згідно з уже доведеним,

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0, \qquad \text{але } f^{n}(\alpha) \neq 0. \tag{7}$$

Якщо $n < k$, то, згідно з умовами (6), було б: $f^{n}(\alpha) = 0$, що суперечить умовам (7). У випадку $n > k$, згідно з умовами (7), отримали б: $f^{k}(\alpha) = 0$, що суперечить умовам (6). Отже, $n = k$ . Теорему доведено.

Нехай многочлен $f(x)$ з кільця $P[x]$ має канонічний розклад (5). На основі теореми 5 можна вказати практичний спосіб відокремлення добутків незвідних множників, що мають в цьому розкладі різні кратності. Виділимо у розкладі (5) ті незвідні множники, які мають кратність 1, і позначимо їхній добуток через $\varphi_1(x)$. Далі, добуток тих незвідних множників, які входять в розклад (5) з кратністю 2, позначимо через $\varphi_2(x)$ (зауважимо, що $\varphi_2(x)$ є добутком самих незвідних множників, а не їхніх квадратів, тому в розклад многочлена $f(x)$ буде входити $\varphi_2^2(x)$. Аналогічно, через $\varphi_3(x)$ позначимо добуток тих незвідних множників з розкладу (5), які мають кратність 3, і т. д. Тоді многочлен $f(x)$ запишеться у вигляді:

$$f(x) = c \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_2^2(x) \cdot \varphi_3^3(x) \cdot \cdots \cdot \varphi_n^n(x),$$

або, опускаючи для скорочення символ змінної,

$$f(x) = c \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2^2 \cdot \varphi_3^3 \cdot \cdots \cdot \varphi_n^n \tag{8}$$

Якщо при цьому множників кратності $k < n$ в канонічному розкладі $f(x)$ взагалі немає, то вважаємо що $\varphi_k = 1$. Наприклад, для многочлена $f(x) = x^5 \cdot (x-2)^3 \times\times (x+1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x-1)$, $\varphi_1(x) = (x^2+1) \cdot (x-1)$, $\varphi_2(x) = x+1$, $\varphi_3(x) == x-2$, $\varphi_4(x) = 1$, $\varphi_5(x) = x$, тому $f(x) = c \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2^2 \cdot \varphi_3^3 \cdot \varphi_4^4 \cdot \varphi_5^5$.

Задача зображення многочлена $f(x)$ у вигляді (8) називається відокремленням кратних множників. Ця процедура не тільки спрощує дослідження і знаходження коренів многочлена, але є також передумовою застосування наближених методів їх обчислення. Існує ефективний спосіб відокремлення кратних множників, що не вимагає знання самих незвідних множників, до викладу якого ми переходимо.

Оскільки в розкладі (8) многочлен $\varphi_1(x)$ є добутком незвідних множників многочлена $f(x)$ кратності 1, то, згідно з теоремою 6, в канонічний розклад похідної $f'(x)$ жодний з цих множників входити не буде. Аналогічно, $\varphi_2(x)$ є добутком незвідних множників многочлена $f(x)$ кратності 2, тому в розклад $f'(x)$ ці множники будуть входити з кратністю 1. Взагалі, в розклад $f'(x)$ многочлен $\varphi_k(x)$ буде входити з кратністю $k-1$. Отже, $f'(x)$ можна подати у вигляді: $f'(x) = c \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3^2 \cdot \cdots \cdot \varphi_n^{n-1} \cdot \psi_1$, де $\psi_1$ не ділиться на жодний з многочленів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. НСД многочленів $f(x)$ і $f'(x)$ є добутком всіх тих незвідних множників, які входять в канонічні розклади як $f(x)$, так і $f'(x)$, тому $d_1 = (f, f') = c \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3^2 \cdot \cdots \cdot \varphi_n^{n-1}$. Аналогічно отримуємо: $d_1' = c \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_4^2 \cdot \cdots \times\times \varphi_n^{n-2} \cdot \psi_2$, де $\psi_2$ не ділиться на жодний з многочленів $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, тому $d_2 == (d_1, d_1') = c \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_4^2 \cdot \cdots \cdot \varphi_n^{n-2}$. Продовжуючи обчислення, будемо мати: $d_3 = = (d_2, d_2') = c \cdot \varphi_4 \cdot \cdots \cdot \varphi_n^{n-3}, \cdots, d_{n-1} = (d_{n-2}, d_{n-2}') = \varphi_n, d_n = (d_{n-1}, d_{n-1}') == 1$.

Звідси $q_1 = \frac{f}{d_1} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \dots \cdot \varphi_n,\ q_2 = \frac{d_1}{d_2} = \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \dots \cdot \varphi_n, \cdots, q_{n-1} = \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} =$ $= \varphi_{n-1} \cdot \varphi_n,\ q_n = \frac{d_{n-1}}{d_n} = \varphi_n$, тобто $\varphi_1 = \frac{q_1}{q_2}, \varphi_2 = \frac{q_2}{q_3}, \cdots, \varphi_{n-1} = \frac{q_{n-1}}{q_n}, \varphi_n = q_n$. Отже, у довільного многочлена з кільця $P[x]$ завжди можна відокремити кратні множники.

***Приклад 12.*** Відокремити кратні множники многочлена

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2.$$

Р о з в' я з а н н я. Отримаємо $f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 8x + 1$. Застосовуючи алгоритм Евкліда, знаходимо: $d_1 = (f, f') = x^2 - 1$. Далі, $d_1' = 2x, d_2 = (d_1, d_1') = 1, q_1 = \frac{f}{d_1} == x^3 + 2x^2 - x - 2, q_2 = \frac{d_1}{d_2} = x^2 - 1$.

Отже, $\varphi_2 = q_2 = x^2 - 1, \varphi_1 = \frac{q_1}{q_2} = x + 2$ і $f(x) = (x+2)(x^2-1)^2 = (x+$ $2) \times\times (x-1)^2(x+1)^2$.

***Приклад 13.*** Визначити кратність кореня $x_0 = -2$ для многочлена

$f(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8.$

Р о з в’ я з а н н я.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 6 | 11 | 2 | -12 | 8 |
| -2 | 1 | 4 | 3 | -4 | -4 | $\underline{0 = f(-2)}$ |
| -2 | 1 | 2 | -1 | -2 | $\underline{0 = f'(-2)}$ | |
| -2 | 1 | 0 | -1 | $\underline{0 = \frac{f''(-2)}{2!}}$ | | |
| -2 | 1 | -2 | $\underline{3 \neq 0}$ | | | |

$\Rightarrow k = 3 -$ кратність кореня $x_0 = -2$ для многочлена $f(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+2)\left(x^4+4x^3+3x^2-4x-8\right) = \\
&= (x+2)^2\left(x^3+2x^2-x-2\right) = \\
&= (x+2)^3\underbrace{\left(x^2-1\right)}_{\not\vdots\,(x+2)}.
\end{aligned}
$$

## 2.5 Знаходження коренів многочлена з використанням формул Вієта

**Наслідок.** Многочлен степеня $n$ має не більше $n$ різних коренів.

Припустимо, що многочлен $n-$го степеня має $(n+1)$ різних коренів: $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$. Тоді $f(x)$ ділиться на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot \ldots\times\times\ (x-\alpha_{n+1})$ – многочлен степеня $(n+1)$, але це неможливо. Тому многочлен $n-$го степеня не може мати більше, ніж $n$ коренів.

Нехай тепер многочлен $n-$го степеня $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + {} + a_2x^2 + a_1x + a_0 (a_n \neq 0)$ має $n$ різних коренів. Тоді цей многочлен ділиться без остачі на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$ . Цей добуток є многочленом того самого степеня. Отже, у результаті ділення можна одержати тільки многочлен нульового степеня, тобто число. Таким чином,

$$
\begin{aligned}
&a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + +a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\
&= b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Якщо розкрити дужки в правій частині рівності (1) і прирівняти коефіцієнти при старших степенях, то одержимо, що , тобто

$$
\begin{aligned}
&a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + +a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\
&= a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Порівнюючи в тотожності (2 ) коефіцієнти при однакових степенях $x$ зліва і справа, одержуємо співвідношення між коефіцієнтами рівняння та його кореня-ми, які називаються **Формулами Вієта:**

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \qquad (3)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_1 a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Наприклад, при $n = 2$ маємо:

$$a_1 + a_2 = -\frac{a_1}{a_2}, a_1 a_2 = \frac{a_0}{a_2},$$

а при $n = 3$:

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 = \frac{a_1}{a_3} \qquad (4)$$

$$a_1 a_2 a_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Виконання таких рівностей є необхіною умовою того, щоб числа $a_1, a_2, \dots a_n$ були коренями многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 (a_n \neq 0).$$

Формули (2) і (3) справедливі не тільки для випадку, коли всі корені многочлена $f(x)$ різні. Введемо *поняття кратного кореня многочлена*.

*Якщо многочлен* $f(x)$ *ділиться без остачі на* $(x - a)^k$*, але не ділиться без остачі на* $(x - a)^{k+1}$*, то говорять, що число* $\alpha$ *є корінь кратності* $k$ *многочлена* $f(x)$.

При використанні формул Вієта у випадку кратних коренів необхідно кожен корінь записати стільки разів, яка його кратність.

***Приклад 14.*** Многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 18x + a$ з дійсними коефіцієнтами має суто уявний корінь, тобто корінь виду $x_1 = bi,$ де $b \in R$. Знайти кое-фіцієнт $a$ і всі корені многочлена.

Р о з в' я з а н н я. Згідно з теоремою 2, многочлен $f(x)$ також має коренем спряжене до $x_1$ число $x_2 = -bi$. Позначивши через $x_3$ і $x_4$ решту коренів цього многочлена, за формулами Вієта отримаємо такі співвідношення: $x_3 + x_4 = 2$, $b^2 + x_3x_4$=6, $b^2(x_3 + x_4)$=18, $b^2x_3x_4$=a. З першої і третьої рівностей дістанемо: $b^2 = 9, b = \pm 3,$ тобто можна взяти $x_1$=3i, $x_2$= –3i. Тоді для знаходження $x_3$, $x_4$ будемо мати систему рівнянь: $x_3 + x_4$=2, $x_3x_4$= –3, тобто $x_3$ і $x_4$ є коренями квадратного рівняння $t^2 - 2t - 3 = 0$ і, отже, $x_3 =$ –1, $x_4 = 3$ або $x_3 = 3,\ x_4 = 1$. Далі знаходимо: а $= -27$. Отже, $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 18x - 27$ і його коре-нями є числа $3i, -3i, -1, 3$.

***Приклад 15.*** Знайти суму, добуток і суму квадратів всіх коренів $n-$го степеня з 1 (n>2) в полі С комплексних чисел.

Р о з в' я з а н н я. Як відомо, в полі $\mathrm{C}$ існує $n$ різних значень $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ кореня $n-$го степеня з 1, причому всі вони є коренями многочлена $f(x) == x^n - 1$. Згідно з формулами Вієта, $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} = 0$, $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1} == (-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}$. Можна знайти також суму квадратів цих коренів:

$$\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}^2 = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1})^2 - 2(\varepsilon_0\varepsilon_1 + \varepsilon_0\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-2} \times\times\ \varepsilon_{n-1}) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0.$$

***Приклад 16.*** Знайти суму четвертих степенів коренів кубічного рівняння $x^3 - x^2 + 3x + 4 = 0$.

***Розв'язання.*** Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корені многочлена $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 4$ в деякому розширенні основного поля, то, згідно з формулами Вієта, $\sigma_1 = \alpha_1 +$

$+\alpha_2 + \alpha_3 = 1, \sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 3, \sigma_3 = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = -4.$ Тоді, дістанемо: $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 = 1^4 - 4 \cdot 1^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 4 \times\times\ 1 \cdot (-4) = -9.$ З отриманого результату випливає, що не всі корені даного рівняння є дійсними числами, бо інакше отримали б $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 \geq 0.$

## 2.6 Раціональні корені многочлена з цілочисловими коефіцієнтами

Наявність раціональних коренів у довільно взятого многочлена $f(x)$ з кільця $Q[x]$ – явище досить рідкісне. Але якщо $f(x)$ має раціональні корені, то їх можна легко знайти за допомогою елементарних методів. Розглянемо деякі з них. Зауважимо, що, як зазначалося вище, розгляд питання про раціональні корені многочлена $f(x) \in Q[x]$ можна звести до розгляду аналогічного питання для многочлена з цілими коефіцієнтами, що має ті самі раціональні корені.

***Теорема 8.*** Якщо нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x) = a_n x^n + {} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ з цілими коефіцієнтами, то $p$ є дільником вільного члена $a_0$, а $q$ дільником старшого коефіцієнта $a_n$.

***Доведення.*** Справді, нехай $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Тоді $a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + {} + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$, або $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Оскільки в останній рівності всі доданки, крім останнього, діляться на $p$, і їх сума (число 0) теж ділиться на $p$, то й останній доданок $a_0 q^n$ ділиться на $p$. Але з нескоротності дробу $\frac{p}{q}$ випливає, що $p\ i\ q$ – взаємно прості числа, тому взаємно простими будуть $p$ і $q^n$, отже $a_0 \vdots p$. Аналогічно, всі доданки, крім першого, діляться на $q$, тому й $a_n p^n$ діляться на $q$, звідки $a_n \vdots q$. Теорему доведено.

***Наслідок.*** Якщо старший коефіцієнт многочлена з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то, в разі наявності у нього раціональних коренів, всі вони є цілими числами, причому дільниками вільного члена.

Теорема 3 дає змогу за коефіцієнтами $a_0$ і $a_n$ даного многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами знайти всі раціональні числа, які можуть бути коренями даного многочлена. Далі, знаходячи значення многочлена при вказаних значеннях змінної, можна встановити, які з отриманих раціональних чисел є йо-го коренями. Таку перевірку зручно проводити за схемою Горнера, знаходячи значення $f(c)$ як остачу від ділення $f(x)$ на $x-c$. Доцільність використання схеми Горнера, крім спрощення обчислень, полягає в тому, що у випадку, коли $c$ є коренем многочлена $f(x)$, ми одразу отримуємо частку $q(x)$ від ділення $f(x)$ на $x-c$ і наступні випробування можна проводити вже для многочлена $q(x)$, який має менший, ніж $f(x)$, степінь.

Теорема 8 дає одну з необхідних умов того, щоб раціональне число $\frac{p}{q}$ було коренем многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами. Проте бажано мати декілька необхідних умов, щоб зменшити кількість випробувань при безпосередній перевірці того, чи будуть відібрані раціональні числа, що задовольняють основну необхідну умову, коренями многочлена $f(x)$. Такі необхідні умови даються у наступному твердженні.

***Теорема 9.*** Для того, щоб нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ був раціональним коренем многочлена $(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб при довільному цілому $k$ число $f(k)$ ділилося на $p-qk$ (якщо тільки $p-qk \neq 0$).

***Доведення.*** Поділивши в кільці $Z[x]$ многочлен $f(x)$ на двочлен $x-k$, отримаємо: $f(x) = (x-k)(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0)$, де всі коефіцієнти $b_i$ частки є цілими числами. Якщо нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$, тобто $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, то з попередньої рівності дістанемо: $-f(k)\left(\frac{p}{q} - k\right)\Big(b_{n-1} \times$

$\times \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + b_1\left(\frac{p}{q}\right) + b_0\Big)$, звідки, домноживши обидві частини на $q^n$, отримаємо:

$$-q_n f(k) = (x - q_k)(b_{n-1}p^{n-1} + \ \dots + b_1\, pq^{n-2} + b_0 q^{n-1}).$$

Звідси випливає, що коли $p - qk \neq 0$, то $q^n f(k)$ ділиться на $p - qk$. Покажемо, що числа $q^n$і $p - qk$ взаємно прості. Справді, якби це було не так, то числа $q\ i\ p - qk$ мали б деякий спільний дільник $d > 1$, а тоді на $d$ ділилося б і число $p = qk + +(p - qk)$, що неможливо, оскільки $(p, q) = 1$. Отже, $(q^n, p - qk) = 1$ і з попередньої подільності випливає, що $f(k) \vdots (p - qk)$, якщо тільки $p - qk \neq\ 0.$ Теорему доведено.

***Наслідок.*** Якщо старший коефіцієнт многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то його раціональними коренями можуть бути лише цілі числа $p$, для яких $f(k)$ ділиться на $p - k$ при всіх цілих $k$ таких, що $p - k \neq 0$.

Теорема 9 дає змогу отримати довільну кількість необхідних умов того, щоб число $\frac{p}{q}$ було коренем многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, надаючи числу $k$ довільних цілих значень, для яких $p - qk \neq 0$. Найпростішими з них є умови, що отримуються при $k = \pm 1$, бо значення $f(1)\ i\ f(-1)$ легко обчислити. Їх можна сформулювати так: щоб нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ був раціональним коренем много-члена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб $\frac{f(1)}{p-q}$ і $\frac{f(-1)}{p+q}$ були цілими числами.

***Приклад 17.*** Розв'зати рівняння, спочатку знайшовши його раціональні корені:

$$24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо спочатку раціональні корені цього рівняння (якщо вони є). Раціональними коренями тут можуть бути такі числа:

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{3}{4};\ \pm\frac{1}{6};\ \pm\frac{1}{8};\ \pm\frac{3}{8};\ \pm\frac{1}{12};\ \pm\frac{1}{24}. \quad (1)$$

Знайдемо межі дійсних коренів заданого рівняння. Оскільки $A = 19$ і $a_n = 24$, то $N_0 = 1 + \frac{19}{24} = 1\frac{19}{24}$. Отже, всі дійсні корені знаходяться в інтервалі $\left]-1\frac{19}{24}; 1\frac{19}{24}\right[$. Серед чисел ряду (1) у цей інтервал входять такі числа:

$$\pm 1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{3}{4};\ \pm\frac{1}{6};\ \pm\frac{1}{8};\ \pm\frac{3}{8};\ \pm\frac{1}{12};\ \pm\frac{1}{24} \tag{2}$$

Для заданого рівняння маємо: $f(1) = 15$ і $f(-1) = -2$. Поставимо умову, щоб числа $\frac{15}{p-q}$ і $-\frac{21}{p+q}$ були цілими. Тоді залишаться числа

$$\pm\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{6}. \tag{3}$$

Оскільки «кандидатів» на корені ще багато, то знаходимо $(-2) = -660$ і перевіряємо, для якого з чисел ряду (3) дріб $\frac{-660}{p+2q}$ є цілим числом. Цю умову задовольняють тільки числа

$$\pm\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{3}{4}. \tag{4}$$

Застосуємо схему Горнера для перевірки того, яке з останніх чисел є коренем заданого рівняння.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 24 | 10 | -1 | -19 | -5 | 6 |
| $\frac{1}{2}$ | 24 | 22 | 10 | -14 | -12 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 24 | 34 | 27 | $-\frac{1}{2}$ | $-12\frac{1}{4}$ | |
| $-\frac{1}{2}$ | 24 | 10 | 5 | $-16\frac{1}{2}$ | $-3\frac{1}{4}$ | |
| $-\frac{3}{2}$ | 24 | -14 | 31 | $-59\frac{1}{2}$ | $77\frac{1}{4}$ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{2}{3}$ | 24 | 6 | 6 | -18 | 0 |
| $-\frac{2}{3}$ | 24 | -10 | $\frac{38}{3}$ | $-26\frac{4}{9}$ | |
| $\frac{3}{4}$ | 24 | 24 | 24 | 0 | |

У схемі виділено коефіцієнти повних часток. Отже, задане рівняння має три раціональні корені: $-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}$ і $\frac{3}{4}$. Решту коренів рівняння знайдемо, прирівнюючи останню частку до нуля. Матимемо

$$24x^2 + 24x + 24 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

У цьому рівнянні комплексні корені $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. Тому задане рівняння має п'ять різних коренів:

$$-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

У деяких випадках при знаходженні раціональних коренів можуть бути корисними наступні твердження.

***Теорема 10.*** Многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами не має цілочислових коренів, якщо для деяких цілих $s$ $i$ $t$ $f(2s)$ $i$ $f(2t + 1)$ є непарними числами.

***Доведення.*** Припустимо, що при вказаних умовах многочлен $f(x)$ має цілочисловий корінь $x_0$. Тоді $f(x) = (x - x_0)q(x)$, де многочлен $q(x)$ теж має цілі коефіцієнти. Звідси $f(2s) = (2s - x_0)q(2s), f(2t + 1) = (2t + 1 - x_0)q(2t + 1)$. З першої з цих рівностей випливає, в силу непарності $f(2s)$, що число $2s - x_0$ має бути непарним. Оскільки $2s$ є парним числом, то $x_0$ – непарне число. З другої рівності випливає, що число $2t + 1 - x_0$ теж має бути непарним в силу непарності $f(2t+1)$, і, враховуючи непарність числа $2t+1$, що $x_0$ – парне число. Отримана суперечність показує, що многочлен $f(x)$ не має цілочислових коренів.

***Теорема 11.*** Многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами не має раціональних коренів, якщо можна вказати два такі цілі числа $k_1$ $i$ $k_2$, що $k_1 - k_2 > 2$ $i$ $f(k_1) = = \pm 1, f(k_2) = \pm 1$.

***Доведення.*** Припустимо, що при вказаних умовах нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$. Тоді, згідно з теоремою 9, $f(k_1) = \pm 1$ ділиться на $p - k_1 q$, $f(k_2) = \pm 1$ ділиться на $p - k_2 q$. Це можливо лише у випадку, коли $p - k_1 q = \pm 1$ $i$ $p - k_2 q = \pm 1$. Віднімаючи від другої рівності почленно першу, отримаємо, що $(k_1 - k_2)q = \pm 2$ або $(k_1 - k_2)q = 0$. Але остання рівність немо - жлива, оскільки $k_1 \neq k_2$ $i$ $q > 0$. З першої рівності випливає, що $2 \vdots (k_1 - k_2)$, що теж неможливо, бо $(k_1 - k_2) > 2$. Отримана суперечність показує, що при вказаних умовах многочлен $f(x)$ не має раціональних коренів.

***Приклад 18.*** Знайти раціональні корені многочлена:

$$f(x) = 2x^4 - 6x^3 - x^2 + 5x - 6 \quad / \cdot 2^3$$

Р о з в’ я з а н н я. $2^3 \cdot f(x) = 2^3 \cdot 2x^4 - 2^3 \cdot 6x^3 - 2^3 \cdot x^2 + 2^3 \cdot 5x - 2^3 \cdot 6$

$y = 2x$; $8f(x) = g(x)$, маємо $g(y) = y^4 - 6y^3 - 2y^2 + 20y - 48$

$g(1) = -35$; $g(-1) = 1 + 6 - 2 - 20 - 48 = -63$

Шукаємо цілі корені многочленна $g(y)$:

$a_4 = -48 \vdots$ $\pm 1, \pm 2$; $\pm 4, \pm 3$; $\pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24, \pm 48.$ $\Leftarrow k$ .

$\frac{g(1)}{k-1}$ та $\frac{g(-1)}{k+1}$; $\qquad \frac{-35}{k-1}$ та $\frac{-63}{k+1} \in Z$

Можливі корені: ; 2; -4; 6; 8. Перевіримо їх за допомогою схеми Горнера:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -6 | -2 | 20 | -48 |
| 2 | 1 | -4 | -10 | 0 | -48 |
| -4 | 1 | -10 | 38 | -132 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | -2 | 8 | 0 |
| 8 | 1 | 8 | 62 | 0 | |

Отже, $\alpha_1 = 6$. Цілих коренів $g(y)$: $y_1 = 6 \Rightarrow$ дробові корені $f(x)$: $x_1 = \frac{y_1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow$ решта ірраціональні або комплексні.

# Висновки

В дипломній роботі розглянуто доведення основної теореми теорії многочленів, основні наслідки з неї та її найважливіші застосування. Під час написання даної роботи я глибше познайомилася із властивостями многочленів з дійсними і комплексними коефіцієнтами, із найважливішими методами знаходження їх коренів та розкладу на незвідні множники.  Вказана теорема лежить в основі всієї класичної теорії многочленів і теорії алгебраїчних рівнянь, чим і пояснюється її назва. Вона стверджує, що всякий многочлен з будь-яким коефіцієнтами, степінь якого не менший одиниці, має хоча б один корінь, в загальному випадку комплексний.

Під час написання даної роботи було розглянуто три доведення основної теореми, з якими я ознайомилася більш детальніше, та дізналася що жодне з них не є чисто алгебраїчним. Спочатку було розглянуто доведення, яке грунтується на розгляді многочлена $f(x) \in C[x]$ та його модуля $|f(x)|$ як неперервних функцій від комплексної змінної і суттєво використовує властивості таких функцій, зокрема, лему Даламбера. Друге ж доведення є найбільш алгебраїчним з існуючих і грунтується на властивостях симетричних многочленів. Третє доведення використовує топологічні властивості полів дійсних і комплексних чисел. Було підібрано і розв'язано значну кількість прикладів на застосування основної теореми та її наслідків, зокрема, на знаходження коренів многочленів та розкладу їх на незвідні множники над основними числовими полями, виділення кратних множників та відшукання кратних коренів.

Результати роботи можуть бути використані в навчальному процесі університету при читанні курсів "Алгебра і теорія чисел", "Загальна алгебра", "Алгебра і геометрія", а також у школі при проведенні занять математичного гуртка або факультативу з математики.

## Список використаної літератури

1. В.Г.Болтянский, Н.Я.Виленкин. Симметрия в алгебре. М.: МЦНМО, 2002. 240 с.
2. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 2004.
3. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1980. 176 с.

4. Винберг Э.Б. Симметрия многочленов. М.: МЦНМО, 2001. 24 с.
5. Гашков С. Б. Современная элементарная алгебра в задачах и решениях. М.: МЦНМО, 2006.
6. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра, т.1. М.: Гелиос АРВ, 2003. 336 с.
7. Завало С.Т. Елементи аналізу. Алгебра многочленів. К.: Радянська школа, 1972.
8. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел, ч.2. К.: Вища школа, 1976. 384 с.
9. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О.. Алгебра і теорія чисел. Практикум, ч.2 К.: Вища школа, 1986. 264 с.
10. Збірник задач з теорії многочленів / за ред.. І.О.Рокіцького. Вінниця: 2004. 138 с.
11. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри. К.: Радянська школа, 1960.
12. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2004. 272 с.
13. Кудряшов Н.А. Симметрия алгебраических и дифференциальных уравнений. СОЖ. 1998. №9. с. 104 – 110.
14. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Просвещение, 1979. 559 с.
15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М..: Наука, 1975. 432 с.
16. Марач В.С., Крайчук О.В. Вибрані лекції з алгебри. Теорія многочленів. Рівне, 1995. 167 с.
17. Понтрягин Л.С. Основная теорема алгебры. Квант. 1982. №4. с. 3 – 9.
18. Практические занятия по алгебре и теории чисел / Лельчук М.П., Полевченко И.И., Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д.. Минск: Вышэйшая школа, 1986. 302 с.

19. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.
20. Проскуряков И.В. Числа и многочлены. М.: Просвещение, 1965. 284 с.
21. Сборник задач по алгебре / под ред. А.И.Кострикина. М.: Наука, 1987. 352 с.
22. Табачников С.Л. Многочлены. М.: Фазис, 2000. 200 с.
23. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.
24. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С.. Збірник задач з вищої алгебри. К.: Вища школа, 1971. 316 с.
25. Фаддеев Д.К., Соминский И.С.. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977. 288 с.