Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
Магістерського рівня
на тему:

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ ТИПУ «КОНВЕКІЯ-ДИФУЗІЯ-МАСООБМІН»

Виконав: студент II курсу магістратури
Групи М-М – 21
Спеціальності: 014
Середня освіта (Математика)
Демчук Микола Валерійович
Керівник: канд. техн. наук, доцент
Присяжнюк Ігор Михайлович
Рецензенти:
д.т.н., проф. Сафоник А.П.

Рівне – 2020

Зміст

Вступ

Актуальність теми. У сучасному світі різко постають багато запитань в області екології. Вирішення проблем із забрудненям повітря і води дуже важливе для людства. Достатня кількість вчених як і в україни так і за кордоном займаються даними питаннями. Свою увагу у достатній кількості привертають до дослідення підземних, ґрунтових та поверхневих вод. Важливу роль у цих дослідженнях відіграє математичне моделювання, яке допомагає знайти відповіді на значну кількість запитань.

При вивченні процесу міграції забруднюючих речовин у пористих середовищах нагальною проблемою є повне врахування всіх найважливіших внутрішніх взаємодій між компонентами забруднювачів, багато з яких мають просторовий характер. З цієї причини необхідно якомога детальніше розглянути внутрішню природу цих процесів, щоб визначити всі фізичні аспекти взаємодії, а також повний обсяг функціональних взаємозв'язків між основними елементами та визначеними системою параметрами.

В наш час математична модель дифузійно-адсорбційного масообміну в неоднорідних пористих середовищах, схильних до деформацій, добре відома. Так само існує проблема вивчення таких процесів за наявності основних компонентів механізму передачі, що призводить до появи малих параметрів у відповідній математичній моделі. Їх міркування призвели до особливостей, породжених малими параметрами, що призводить до складності математичної моделі процесу.

Тому все ще важливо моделювати подібні конвективні дифузійні процеси та розробляти нові або вдосконалювати відомі методи для вирішення відповідних крайових задач у різних порах.

Мета роботи – розглянути математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у двозв'язних областях та дослідити асимптотичні методи розв'язання відповідних задач.

Об'єкт дослідження – сингулярно збурені процеси типу «конвекція-дифузія-масообмін» у двозв'язних областях.

Предмет дослідження – сингулярно збурені крайові задачі конвективної дифузії у двозв'язних областях та числово-асимптотичні методи їхнього розв'язання.

Методи досліджень. Асимптотичний метод сингулярної теорії збурень, чисельний метод її наближеного розв'язання використовується для розв'язання поставлених задач.

Основні завдання :

- Опрацювати літературу по даній темі дослідження та розглянути асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії у двозв'язних областях;
- Розглянути сингулярно збурені моделі типу «конвекція-дифузія-масообмін»;
- Змоделювати сингулярно збурену задачу типу «конвекція-дифузія-масообмін» у двозв'язній криволінійній замкнутій області та процес очищення стічних вод.

Апробація результатів. Основні положення і результати роботи були повідомлені та обговорювалися на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2020 рік, та на X Міжнародній науково-практичній конференції «Пріоритетні напрямки наукових досліджень» (жовтень 26-27, 2020) ТОВ «Прімедіа Е-старт», США, Вашингтон. 2020. С. 100-103. (The 10st International scientific and practical conference «Priority Areas of Science Research» (October 26-27, 2020) Primedia E-launch LLC, USA, Washington. 2020. 100-103 p.)

РОЗДІЛ 1. АСИМТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ

1.1. Огляд літературних джерел з проблеми математичного моделювання процесів конвективної дифузії у пористих та біпористих середовищах

У сучасній науці велике прикладне значення мають задачі повязані з процесами переносу в пористих середовищах. Вивчаючи процеси тепломасообміну виникають проблеми із постановкою та розв’язанням задачі, так як потрібно враховувати багато факторів.

Масообмін – процес переносу деякої речовини, яка може бути представлена у різних формах (молекулах, атомах, іонах) в просторі з різною концентрацією або різною температураю чи тиском. Процес масообміну відбувається до настання деякого стану, який називається станом рівновачи. Даний стан полягає у тому, що відбувається перенесення маси з однієї фази в іншу в однаковій кількості. Також речовина може переноситися під впливом інших чиників. А саме: дифузією, конвекцією. Перенесення маси при дифузії відбувається в нерухомих потоках, або в пограничних шарах. Напрямок куди буде перенесена речовина визначається в окремих точках системи, і перехід речовини у фазах відбувається так, що концентрація з області де її більше переходтить в облость де її менше. Швидкість масообміну залежить від переходу ручовини між фазами.

Досить велика кількість видатних вчених займалися розробкою основних положень теорії масоперенесення. А саме С. Ф. Авер’янов [4], В. І. Аравін [8], Г. І. Бернблатт [10], С. М. Нумеров [14], Б. С. Шержуков [17], А. Фік, І. -Ж. Ленґмюр, А. Дарсі, П. Я. Полубаринова-Кочина, М. Є. Жуковський, Н. В. Герсеванов, Я. Бер, Р. Колінз, М. Шірато, А.В. Ликов, Н. Н. Веригін, Д. Ритвен, Ж. Каргер, С. Корнер, Д. Ф. Шульгін, Ж. Фресард, А. Шейдергер, В. Н. Ніколаєвський та інші. У працях слідуючих вчених, розглянуто моделювання переносу речовин в однорідних і неоднорідних пористих середовищах: А. М.

Когановсського, І. М. Федоткіна, Р. Лоренца, І. І. Ляшка, С. І. Ляшка, В. І. Лаврика, І. В. Сергієнка, В. В. Скопецького, Я. Г. Савули, В. С. Дейнеки, М. Р. Петрика, Є. Я. Чаплі. У їхніх роботах розглядаються проюлеми постановки різних крайових задач для рівнянь переносу в частиних похідних. Рівняння описують різні види переносу в одрорідних та неоднорідних середовищах, в більшості випадків на макрорівні та не враховується внутрішня структура пористих частинок.

Процеси міграції речовини у водонасичених простих середовищах при малій концентрації у розчині (до 10 г/л) та невеликих змінах температури описує слідуюча система диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \vec{v} = \kappa \cdot grad\,\varphi, div\,\vec{v} = 0; \\ \left(\sigma \cdot C_j\right)'_t = div\left(D_j \cdot grad\, C_j\right) - \vec{v} \cdot grad\, C_j + \sum_{k=1}^{m} f^*_{k,j}\left(C_k, C_j\right) - \\ -\sum_{k=1}^{m} f^*_{j,k}\left(C_j, C_k\right) - \tilde{f}_j\left(C_j, U_j\right) + \tilde{\tilde{f}}_j\left(U_j, C_j\right), \\ \left(\sigma \cdot U_j\right)'_t = \sum_{k=1}^{m} f^{**}_{k,j}\left(U_k, U_j\right) - \sum_{k=1}^{m} f^{**}_{j,k}\left(U_j, U_k\right) + \tilde{f}_j\left(C_j, U_j\right) - \tilde{\tilde{f}}_j\left(U_j, C_j\right), \\ j = \overline{1,m}, k = \overline{1,m}, m \in N, \end{cases} \tag{1.1}$$

де $\vec{v}$ і φ – відповідно вектор і потенціал швидкості фільтрації, $\kappa = \kappa(x, y, z, U_j)$ – коефіцієнт фільтрації, C_j і U_j – масові концентрації j-ї компоненти речовини у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища у точці (x, y, z) в момент часу t, $D_j = D_j(x, y, z, C_j)$ – коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії j-ї компоненти речовини у водному потоці ($j = \overline{1,m}$), $\sigma = \sigma(x, y, z, U_j)$ – пористість середовища, $f^*_{j,k}\left(C_j, C_k\right)$ і $f^{**}_{j,k}\left(U_j, U_k\right)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j-ю і k-ю компонентами речовини відповідно у фільтраційному розчині і на скелеті пористого середовища ($j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m}$), $\tilde{f}_j\left(C_j, U_j\right)$ і $\tilde{\tilde{f}}_j\left(U_j, C_j\right)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують швидкості протікання відповідно сорбційних і десорбційних процесів j-ї компоненти речовини ($j=\overline{1,m}$) [1].

В обмежених областях, як правило, протікають процеси фільтрації. Крайові умови задаються на границі S фільтраційної області чи на її частині. Найчастіше користуються слідуючими умовами:

а) $\varphi\big|_S=\tilde{\varphi}=const$ – на ділянках границі S, вхід або вихід фільтраційного потоку;

б) $\varphi'_{\vec{n}}\big|_S=0$ – на водонепроникних частинах границі S області фільтрування, та вектор $\vec{n}$ – нормаль до границі.

Умови рівності швидкостей та потенціалів на межах розділів сусідніх однорідних шарів з різними властивостями задають слідуючими умовами:

$\varphi\big|_{S_-}=\varphi\big|_{S_+}$, $v\big|_{S_-}=v\big|_{S_+}$ -

Під час постановки задач конвективної дифузії на вході $S*$ фільтраційної течії за допомогою граничних умов задають:

а) формула надходження і розподілу концентрації речовини, розчиненої у воді $C\big|_{S_*}=c_*$;

б) умова Данквертса $D\cdot C'_{\vec{n}}-v_n\cdot(C-c_*)\big|_{S_*}=0$ (яка враховує механізм підведення речовини конвективної чи дифузійної складови).

Умови $C\big|_{\tilde{S}}=c_*^*$ або $C'_{\vec{n}}\big|_{\tilde{S}}=0$ виконуються на водонепроникних ділянках границі $\tilde{S}$ фільтраційної області. Одна із наступних граничних умов можна примати на вході до фільтраційного потоку S^*:

а) $C\big|_{S^*}=c^*$ – формула розподілу величин концентрації речовини;

б) $D\cdot C'_{\vec{n}}-v_n\cdot(C-c^*)\big|_{S^*}=0$ – умова Данквертса (приймається, якщо немає інтенсивного відводу води на вході до фільтраційного потоку);

в) $C'_{\vec{n}}\big|_{S^*}=0$ – умова, що задається при врахуванні лише конвективного переносу через границю (для фільтраційних пототоків зі інтенсивним відводом вод на виході).

Рівність концентрацій і потоків з різними властивостями речовини на межах розділу сусідніх однорідних шарів задаються умовами:

$$C_{S^*_{*-}} = C_{S^*_{*+}},\ D_* \cdot C'_{\vec{n}} - v_n \cdot C\Big|_{S^*_{*-}} = D^* \cdot C'_{\vec{n}} - v_n \cdot C\Big|_{S^*_{*+}},$$

де D_*, D^* – коефіцієнти конвективної дифузії в сусідніх шарах, v_n- нормальна складова швидкості на межі розподілу концентрацій речовини в області фільтрації в момент часу t до настання процесу забруднення або промивання пористого середовища, M – довільна точка області фільтрації [1].

Вченими Власюком А. П., Мартинюком П. М. та їхніми учнями [11-13, 16] запропоновано описувати процеси однокомпонентного тепломасоперенесення при фільтрації сольових розчинів у недеформованих ґрунтових середовищах в загальноприйнятих позначеннях слідуючою системою диференціальних рівнянь:

$$div(D(C)grad\ C + D_T(C)grad\ T) - \vec{V}(C)grad\ C = \sigma\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\vec{V}(C) = -\kappa(C,T)grad\ \varphi + v(c)grad\ C + v_1 grad\ T, \quad div\vec{V} = 0, \tag{1.3}$$

$$div(\lambda grad\ T) - \rho c_\rho \vec{V}(C)grad\ T = c_n\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(C, N, C_*, N_*, T, \gamma_1, ..., \gamma_n). \tag{1.5}$$

Де у рівняння (1.2), (1.3) описуються масоперенесеня і фільтрування сольових розчинів у неізотермічних умовах, та рівняння (1.4) описує теплоперенесення в ґрунтових масивах, і рівняння (1.5) – масообмін між твердою і рідкою фазами.

У математичному моделюванні багатокомпонентних процесів часто виникає потреба враховувати додаткові фактори, які можуть бути спричинері реакцією забруднених речовин у фільтраційній теції. Ці реакції проходять з виділення чи поглинанням енергії. Тому потрібно врахувати зміну температури середовища, яка впливає на швидкість дифузійних та масообміних процесів.

Відповідно до кінетичного закону швидкість діючих мас елементарної реакції при конкретній температурі пропорційна добутку концентрацій реагуючих речовин в степінь, яки вказує на кількість моль речовини, яка вступає у реакцію:

$$\frac{dC}{dt} = k(T) \cdot C_1^{n_1} \cdot C_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_i^{n_i}, \qquad (1.6)$$

де $k(T)$ – швидкість хімічної реакції. Справедливим рівняння (1.6) є для елементарних реакцій. У складніших реакціях показники степеня у рівнянні (1.6) можуть приймати дійсні значення та називаються порядками реакції. Та від температури залежить константа швидкості хімічної реакці.

Отож, досліджуючи багатокомпонентне масоперенесення в пористих середлвищах у багатьх випадках потрібно враховувати температуру серкдовища на розподіл еонцентрації розчиних речовин з метою покращення процнсів очищення забруднених речовин.

Для видалення забруднених речовин з водних та газових потоків перспективним є напрямок використання мікропористих матеріалів. Для моделювання процесів масоперенесення в пористих каталітичних (біпористих) середовищах розроблено ряд підходів, за допомогою яких, з хорошою точністю, можна врахавати вплив масоперенесення на рівні частинок. Значна кількість вчених присвятила свої праці дослідженю процесів дифузійно-адсорбційного масоперенесення в біпористих середовищах. Закордоні автори – Н. Чена, Р. Бартера, Ж. Каргера, Ж. Фресарда, Д. Ритвена, Є. Воробйова, С. Леклерка, Є. Воробйова та ін., а також вітчизняних – К. В. Сергієнка, В. С. Дейнеки, М. Р. Петрика, В. С. Дейнеки. У їхніх працях розглядаються моделі молекулярного транспорту в кристалічних тілах, який спричиняється двома видами дифузії: дифузією в макропорах, за рахунок порожнин між кристалічними частинками адсорбенту і дифузією в мікропорах частинок. Системою диференціальних рівнянь представлено модель однокомпонентного адсорбційного масоперенесення в каталітичному середовищі частинок мікропористої структури:

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\mathrm{D}_{\mathrm{inter}}\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}-\theta_{\mathrm{intra}}\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)_{r=\mathrm{R}},\ \frac{\partial q}{\partial t}=\mathrm{D}_{\mathrm{intra}}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\right), \tag{1.7}$$

з крайовими та початковими умовами

$$c(t,z)\big|_{t=0}=0,\ q(t,r,z)\big|_{t=0}=0, \tag{1.8}$$

$$c(t,z)\big|_{z=l}=c_\infty,\ q(t,r,z)\big|_{r=R}=k\cdot c(t,z),\frac{\partial c(t,z)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial q(t,r,z)}{\partial r}\bigg|_{r=0}=0. \tag{1.9}$$

Перше з рівняння (1.7) описує масоперенесення у міжчастинковому просторі, друге описує внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове. Тут l– довжина зразка, R – радіус мікропористих частинок, дана методологія поширена на випадок моделювання та дослідження розв’язків крайових задач переносу з системою двофазного дворівневого і n – рівноважного масоперенесення в однорідних і багатоінтерфейсних неоднорідних середовищах пористої структури з мікро- і нанопористими просторово розподіленими диференціальними та інтегральними включеннями, а також на випадок моделювання та дослідження розв’язків двофазних інтегро-диференціальних крайових задач типу «фільтрація-консолідація» з системою двофазного дворівневого і n-рівноважного масоперенесення в однорідних і багатоінтерфейсних неоднорідних середовищах пористої структури. На цій основі для розглянутих моделей переносу з використанням їх аналітичних розв’язків градієнтних методів та даних фізичного експерименту запропоновані ефективні алгоритми і програмні процедури наближеного розв’язання зворотніх задач для визначення розподілів кінетичних коефіцієнтів (коефіцієнтів дифузії, коефіцієнтів консолідації на мікро- і макрорівнях). Модельну конструкцію (1.7) за додаткової умови рівноваги із (1.9) називатимемо системою диференціальних рівнянь з локально-іншорідними особливостями [1].

На даний час актуальним є питання конвективного масоперенесення в однорідних та шаруватих середовищах частинок мікропористої структури. Яке в свою чергу приводить до розв’язання сингулярно збурених задач, тому, що конвекційна складова процесу значно перевищує сорбцію та дифузію.

Для дослідження та моделювання масоперенесення різної природи використовують аналітичні методи [9,13] та наближені методи теорії крайових задач [6, 7, 11,]. Розв’язуючи аналітичними методами крайові задачі, які описуються рівняннями в частинних похідних, у більшості випадків використовують класичні методи (метод відокремлення змінних (метод Фур’є), метод характеристик, метод потенціалів, метод джерел (функцій Ґріна), метод Рімана) та методи інтеґральних перетворень. У працях [15,16] розроблено методику, у якій із класичними методами використано методи інтегральних перетворень Лапласа, Бесселя, Фур’є. Ці методи забезпечують високий ступінь достатності отриманих модельних рішень, збіжність початкових умов та граничних умов, а також можливість розглянути вплив різних фізичних та технічних факторів.

Використання чисельних методів забезпечує практичні алгоритми, які можуть побудувати приблизні рішення крайових задач для всієї області змінних параметрів. Чисельні методи, такі як: метод скінченної різниці (сітка) [5], метод варіаційної різниці, метод скінченних елементів, статистичний метод, можуть ефективно вирішити крайову задачу диференціальних рівнянь з частинними похідними. Серед цих методів метод скінченних різниць найбільш широко застосовується для побудови рішення моделі у вигляді крайової задачі диференціального рівняння в частинних похідних для моделі переносу. Серед варіаційних різницевих методів, які використовують варіаційну формулу для отримання дискретної моделі передачі, найбільш часто використовуються метод локальної конфігурації та метод скінченних елементів.

Твори І. В. Сергієнка, І. І. Ляшка, В. В. Скопецького, В. С. Дейнеки, М. З. Згуровського, А. П. Власюка, Я. Й. Бурака, В. М. Булавацького та ін. присвячені розробці методів чисельно-аналітичного та чисельного розв’язання одно- та двовимірних задач масоперенесення.

1.2. Асимптотичний метод розв’язання сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії в пористому середовищі

Розгладаючи математичне моделювання процесів фільтрування стикаються з тим, що компоненти (дифузія, масообмін, конвекція, різні співвідношення між параметрами) неоднакові та одні переважають над іншими. Таким чином диференціальні рівняння, що описують ці процеси мають досить малі параметри, і доцільно відповідні задачі розвязувати за допомогою теорії сингулярних збурень.

Асимтотичні методи є ефективними при дослiджені сингулягно збурених задач. Французькі вчені А. Пуанкаре і П. Лаплас були одними із творців асимтотичної теорії. П. Лаплас у працях пов’язаних із завданнями небесної механіки, розробляв і застосовував асимтотичні методи для наближеного обчислення знвчення функції в околі її особливої точки. А вчиний А. Пуанкаре заклав основи сучасної асимтотичної теорії, сформулював основні терміни та довів фундаментальні теореми. Також історичний внесок у асимтотичні методи вніс російський вчений А.М.Ляпунов. Теорія стійкості по суті є теорією асимптотичного дослідження систем диференціальних рівнянь[7].

Із робіт А. Н. Тихонова беруть початок дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь методами теорії збурення. Його роботи присвячені системам нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, де в одному із рівнянь, при старшій похідній, множник є малим параметром. Роз`язок такої системи містить діві компоненти "швидку" і "повільну" (нині відомі як системами Тихонівського типу). Також А. Н. Тихонов розробив умови, якщо малий параметр прямує до нуля, то розв’язок невиродженої задачі прямує до розв’язку виродженої задачі. Для донного напрямку прикладної математики ці статті мали історичний вплив. Невдовзі після цих статей зявилися роботи М. І. Вішика і Л. А.Люстерніка [20, 22]. Вони сформулювали загальний підхід до побудови асимптотичних розвинень розв’язків лінійних рівнянь в частинних похідних з малими параметрами при деяких з старших похідних. Даний підхід отримав назву Вішика-Люстерника.

В. Ф. Бутузова у своїх роботах розглядала різні крайові задачі для рівнянь в частинних похідних гіперболічного, параболічного та еліптичного типу областях з негладкою границею; для наближення розв’язку в околі кутових точок розроблені методи: ідея згладжування членів асимптотики та метод кутових примежових функцій. А. Б. Васильева присвятила свої роботи великому класу задач, для звичайних диференціальних рівнянь, а також для рівнянь в частинних похідних. Вона розробила методи асимптотичного розв’язання початкових і крайових задач для лінійних і нелінійних сингулярно збурених рівнянь та їх систем – метод примежових функцій, досліджені питання, пов'язані з періодичними рішеннями і стійкістю рішень. В. Ф. Бутузовим, А. Б. Васильевою, та їх учнями розроблена й стрімко розвивається теорія стійкості та існування контрастних структур для крайових задач.

В. Ф. Бутузова та А. Б. Васильєвої у своїх роботах розвивали та застосовували метод пограничних функції та метод згладження “негладкостей”. Розберемо суть методу на прикладі задачі

У працях В. Ф. Бутузова і А. Б. Васильєвої використовувався та розвивався метод пограничних функцій, а також метод згладження “негладкостей”. Слідуюча задача ілюструє суть методу [19]:

$$\varepsilon^2 \Delta u - v^2(x,y)u = g(x,y,\varepsilon), (x,y) \in (0,a)*(0,b) = \Omega, \left. u \right|_{\partial\Omega} = 0$$

Тут $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $v(x,y)$ і $g(x,y,\varepsilon)$ – достатньо гладкі функції, $v(x,y) > 0$ в області Ω.

Асимптотичний розклад розв’язку задачі В. Бутузовим одержав у виді:

$$u_\varepsilon = \overline{u} + \Pi + P,$$

де $\overline{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{u}_i(x,y)$ – регулярна частина асимптотики, Π – примежові функції, великий вплив біля сторін прямокутника, а P – кутові функції, великий вплив біля вершин прямокутника. Згідно кількості сторін прямокутника функції Π – складаються із чотирьох доданків:

$$\Pi = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left(\widehat{\Pi}_i\,(x,\eta) + \underset{\frown}{\Pi}_i\,(\xi,y) + \widehat{\widehat{\Pi}}_i\,(x,\eta_*) + \underset{\frown\frown}{\Pi}_i\,(\xi_*,y) \right),$$

де $h = y / e, x = x / e, h_* = (b - y) / e, x_* = (a - x) / e$ – примежові змінні-розтяги.

Функції $\widehat{\Pi}_i\,(x,\eta)$, в околі сторони $y = 0$ служать для опису примежового шару, визначаються оператором $\partial^2_{\eta\eta} - v^2(x,0), \eta > 0$ та граничними умовами $\widehat{\Pi}_i\,(x,0) = -\overline{u}_i(x,0),\quad \widehat{\Pi}_i\,(x,\infty) = 0$. Таким чином $\widehat{\Pi} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widehat{\Pi}_i\,(x,\eta)$ функції ліквідовують нев’язку, яка виникла при граничних умовах на стороні $y = 0$ регулярної частини асимптотики. Для $\widehat{\Pi}_0\,(x,\eta)$ отримаємо вираз:

$$\widehat{\Pi}_0\,(x,\eta) = -\overline{u}_0(x,0)e^{-v(x,0)\eta}\,. \tag{1.11}$$

Далі послідовно можна знайти у явному вигляді $\widehat{\Pi}_i\,(x,\eta)$ для $i = 1,2,...$ Усі ці функції мають експоненціальну оцінку: $\left|\widehat{\Pi}_i\,(x,\eta)\right| \le \alpha e^{-\chi\eta}$.

Так само шукаються функції $\underset{\frown}{\Pi}_i\,(\xi, y)$, $\widehat{\widehat{\Pi}}_i\,(x,\eta_*)\; i\; \underset{\frown}{\underset{\frown}{\Pi}}_i\,(\xi_*, y)$.

Звернемо увагу, що примежові функції $\widehat{\Pi}_i\,(x,\eta)$, усуваючи нев’язку у граничній умові на стороні $y = 0$, на сторонах $x = a$ та $x = 0$ вносять додаткові умови. Дані нев’язки суттєві біля кутових точок (а,0) та (0,0), а далі з ростом y вони експоненціально затухають. Такі ж нев’язки вносять функції $\underset{\frown}{\Pi}_i\,(\xi, y)$ на сторони $y = b$ та $y = 0$, функції $\widehat{\widehat{\Pi}}_i\,(x,\eta_*)$ – на сторони $x = a$ та $x = 0$, а функції $\underset{\frown}{\underset{\frown}{\Pi}}_i\,(\xi_*, y)$ на сторони $y = b$ та $y = 0$.

Кутові функції водяться для усування цих неузгодженостей. Так само ізкількістю вершин прямокутника P–функції складаються з чотирьох доданків:

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\widehat{P}_i(\xi,\eta) + \underset{\frown}{P}_i(\xi,\eta_*) + \widehat{\widehat{P}}_i(\xi_*,\eta_*) + \underset{\frown}{\underset{\frown}{P}}_i(\xi_*,\eta))\,. \tag{1.12}$$

Таким чином, функції $\widehat{P}_i(\xi,\eta) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widehat{P}_i(\xi,\eta)$ потрібні для ліквідації неузгодженостей, визваних функціями $\widehat{\Pi}_i\,(x,\eta)$ у граничну умову на стороні $x = 0$ та функціями $\underset{\frown}{\Pi}_i\,(\xi, y)$ у граничну умову на стороні $y = 0$. Із вихідного рівняння (1.10) отримується рівняння для функцій $\widehat{P}_i(\xi,\eta)$ (а точніше, із однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (1.10)) стандартним способом: заміною змінних $\eta = y/\varepsilon,\ \xi = x/\varepsilon,$ розкладом коефіцієнта $v^2(\varepsilon\xi,\varepsilon\eta)$ у ряд по степеням ε та прирівнюванням коефіцієнтів у однакових степенях ε в двох частинах рівняння. Отож матимемо наступні задачі:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\widehat{P}_i(\xi,\eta)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\widehat{P}_i(\xi,\eta)-v^2(0,0)\widehat{P}_i(\xi,\eta)=p_i(\xi,\eta),\xi>0,\eta>0,$$

$$\widehat{P}_i(0,\eta)=-\widehat{\varPi}_i\,(0,\eta),\widehat{P}_i(\xi,0)=-\underset{\frown}{\varPi}_i\,(\xi,0),$$

$$\widehat{P}_i(\xi,\eta)\to 0\ при\ (\xi+\eta)\to\infty\,, \tag{1.13}$$

де $p_i(\xi,\eta)$ рекурентно виражаються функцією $\widehat{P}_s(\xi,\eta)$ з номерами $s<i$, особливо $p_0(\xi,\eta)=0$. Через функцію Гріна послідовно можна визначити розв'язки задач. Особливо, автори показали, що вони мають слідуючу експоненціальну оцінку:

$$\left|\widehat{P}_i(\xi,\eta)\right|\le ce^{-\chi(\xi+\eta)}.$$

Так само знаходяться і решта кутових функцій які мають цю ж оцінку.

Одночасно розвиваються інші методи теорії збурень. Вченим С. А. Ломовим було розроблено для сингулярно збурених диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь метод регуляризації. Цей метод перетворився в самостійний напрям теорії сингулярних збурень і розвивався у роботах учнів С. А. Ломовим, става відомий як метод «зрощування».

Серед методів обґрунтування справедливості побудованих асимптотичних розв'язків можна назвати принцип максимуму, метод бар'єрних функцій, метод апріорних оцінок, метод інтегральних нерівностей, метод послідовних наближень. С. А. Чаплигін, М. Нагумо, С. Н. Бернштейн значний внесок зродили у розробку цих методів. Воне використовуються при обґрунтувані асимптотичних розвинень, а також у деяких випадках для доведення існування точного розв'язку крайових задач.

А. Я. Бомба, А. П. Власюк та їх учні розв'язали ряд нелінійних сингулярно-збурених крайових задач масоперенесення при фільтрації в неоднорідних анізотропних пористих середовищах використовуючи ідеї переходу до координат області комплексного потенціалу у рівнянні конвективної дифузії та відповідних крайових і початкових умовах. І. М. Присяжюком, Д. О. Пригорницьким та С. С. Каштаном у своїх роботах поширили цю методику на випадки багатозв'язних областей. Ю. Є. Климюком в [18, 21, 23, 24], за допомогою поєднання асимптотичного методу та методу квазіконформних відображень знайдено наближення розв'язків сингулярно збурених задач конвективної дифузії для просторових криволінійних областей.

Досі асимптотична теорія сингулярно збурених диференціальних рівнянь не сформована. Досить багато питань які виникають при розв'язані задач залишаються не вирішеними. Хоча іде стрімкий розвиток чисельних методів дослідження сингулярно здурених диференціальних рівнянь, асимптотичні методи також продовжують розвиватися.

РОЗДІЛ 2. СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ МОДЕЛІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ-МАСООБМІН”

2.1. Асимптотичне наближення розв’язків сингулярно збурених крайових задач процесів міграції речовини двома шляхами

У двозв’язній криволінійній області (пористого пласту) $G=G_z\times(0,\infty)$, де G_z ($z=x+iy$) – обмежена двома замкненими гладкими контурами $L^*=\{z: f^*(x,y)=0\}$ – зовнішній та $L_*=\{z: f_*(x,y)=0\}$ – внутрішній (рис. 2.1, а), розглядається процес конвективної геодифузії [2]:

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial y^2}\right)+\varepsilon_2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)-$$

$$-v_x(x,y)\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial x}-v_y(x,y)\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial y}-\varepsilon^* a_1(x,y)\cdot c(x,y,t)+$$

$$+a_2(x,y)\cdot u(x,y,t)=\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial t}, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_3\left(\frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial y^2}\right)+\varepsilon_4\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)+$$

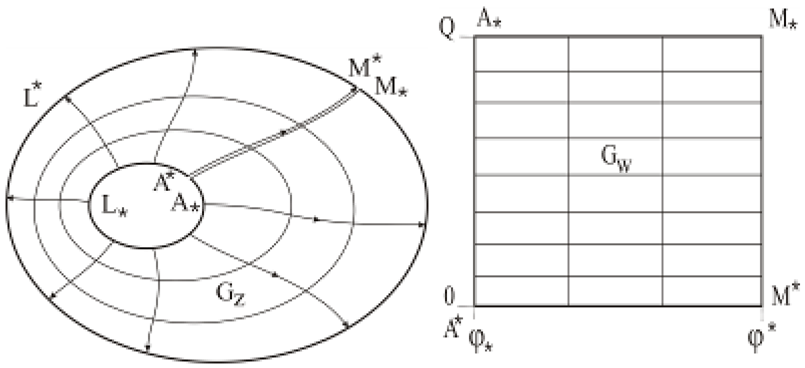
$$+\varepsilon^* a_1(x,y)\cdot c(x,y,t)-a_2(x,y)\cdot u(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$c|_{L_*}=c_*(M,t),\quad c|_{L^*}=c^*(M,t),\quad c(M,0)=c_0^0(M),\quad u|_{L_*}=u_*(M,t),$$

$$u|_{L^*}=u^*(M,t),\quad u(M,0)=u_0^0(M), \tag{2.3}$$

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\quad \Delta\varphi=0,\quad \varphi|_{L_*}=\varphi_*,\quad \varphi|_{L^*}=\varphi^*, \tag{2.4}$$

де $c(x,y,t)$ – у фільтраційної течії концентрація розчинної речовини в точці (x,y) у момент часу t, $u(x,y,t)$ – на поверхні скелету концентрація розчинної речовини (у зв’язаних зі скелетом поляризованих шарах води), M - біжуча точка відповідної кривої, $\varepsilon_1=k_1\varepsilon$, $\varepsilon_2=k_2\varepsilon$, $\varepsilon_3=k_3\varepsilon$, $\varepsilon_4=k_4\varepsilon$, $\varepsilon^*=k^*\varepsilon$, де k_1, k_2, k_3, k_4, k^* – задані дійсні додатні числа, ε ($\varepsilon>0$) - малий параметр (що характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (в пористому середовищі G_z швидкості фільтрації), $\sqrt{v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)}>v_*>>\varepsilon$, $a_1(x,y)$, $a_2(x,y)$ – концентраційні коефіцієнти інтенсивності процесів переходу з одного шляху міграції на інший [26], $a_i(x,y)>a>>\varepsilon$ ($i=1,2$), $c_*(M,t)$, $c^*(M,t)$, $c_0^0(M,t)$, $u_*(M,t)$, $u^*(M,t)$, $u_0^0(M,t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G.



а) **б)**

Рис. 2.1. Фізична область G_z та область

комплексного потенціалу G_w

У моделі враховано факт, що сполуки розчиненої речовини одного сорту які можуть знаходяться на поверхні скелету виділеного фізично малого елемента ґрунту чи можуть бути в розчині фільтраційної течії (рис. 2.2).

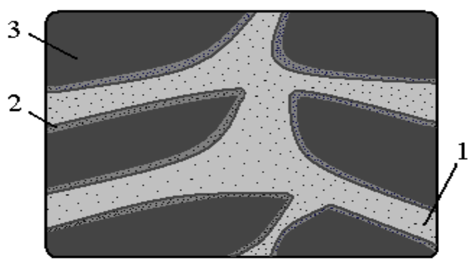


Рис. 2.2. Структура фізично малого елемента ґрунту:

1 - водний поровий розчин фільтраційного потоку;

2 - адсорбовані на скелеті ґрунту шари води;

Перейдемо до відповідної "гетеродифузійної задачі" для області G_w (рис. 2.1 б). Для цього шляхом конформного відображення $G_z^* \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z^*$), та задача (2.4) є розв’язана. Вважаємо, поле швидкостей є відоме $(v_x(x,y), v_y(x,y))$. У рівняннях (2.1), (2.2) та умовах (2.3) зробивши заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$, будемо мати:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(k_1\left(\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)+\right.$$

$$\left.+k_2\left(\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)\right)-v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi}-$$

$$-\varepsilon\cdot k^* a_1(\varphi,\psi)\cdot c(\varphi,\psi,t)+a_2(\varphi,\psi)\cdot u(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial c(\varphi,\psi,t)}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(k_3\left(\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)+k_4\left(\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)\right)+$$

$$+\varepsilon\cdot k^* a_1(\varphi,\psi)\cdot c(\varphi,\psi,t)-a_2(\varphi,\psi)\cdot u(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\ c(\varphi^*,\psi,t)=c^*(\psi,t),\ c(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi),$$

$$u(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t),\ u(\varphi^*,\psi,t)=u^*(\psi,t),\ u(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi). \quad (2.7)$$

З точністю $O(\varepsilon^n)$ $(n = 2)$ будемо шукати щодо змінної ψ розв’язок (c, u) даної періодичної задачі у вигляді наступних асимптотичних рядів:

$$c(\varphi,\psi,t)=c_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon c_1(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i \ddot{I}_i(\xi,\psi,t)+R_2^1(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \quad (2.8)$$

$$u(\varphi,\psi,t)=u_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon u_1(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^{i/2}P_i(\eta,\psi,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^{i/2}\Gamma_i(\mu,\psi,t)+R_2^2(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \quad (2.9)$$

де R_2^1, R_2^2 - залишкові члени, $c_i(\varphi,\psi,t)$, $u_i(\varphi,\psi,t)$ ($i=0,1$) – члени регулярної частини асимптотики. $\ddot{I}_i(\xi,\psi,t)$, $P_i(\eta,\psi,t)$ $i=\overline{0,3}$ – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (корекція на виході фільтраційного потоку пласта G_z), $\tilde{A}_i(\mu,\psi,t)$

$i=\overline{0,3}$ – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi_*$ (корекція на вході L_* в G_z). $\xi=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\eta=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mu=\dfrac{\varphi-\varphi_*}{\sqrt{\varepsilon}}$ – певні перетворення для регуляції.

Далі робимо підстановку (2.8) та (2.9) у (2.5), (2.6) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо наступні задачі для відшукання $c_i(\varphi,\psi,t)$ та $u_i(\varphi,\psi,t)$, $i=0,1$ та оцінки залишкових членів:

$$\begin{cases} u_{0t}(\varphi,\psi,t)+a_2(\varphi,\psi)\cdot u_0(\varphi,\psi,t)=0, \\ u_0(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi); \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{0t}(\varphi,\psi,t)+v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{0\varphi}(\varphi,\psi,t)=g_1(\varphi,\psi,t), \\ c_0(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi), c_0(\varphi^*,\psi,t)=c^*(\psi,t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1t}(\varphi,\psi,t)+a_2(\varphi,\psi)\cdot u_1(\varphi,\psi,t)=g_2(\varphi,\psi,t), \\ u_1(\varphi,\psi,0)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{1t}(\varphi,\psi,t)+v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{1\varphi}(\varphi,\psi,t)=g_3(\varphi,\psi,t), \\ c_1(\varphi,\psi,0)=0, c_1(\varphi^*,\psi,t)=0, \end{cases}$$

де $g_1(\varphi,\psi,t)=a_2(\varphi,\psi)\cdot u_0(\varphi,\psi,t)$, $g_2(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)\times$

$\times(k_3(c_{0\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{0\psi\psi}(\varphi,\psi,t))+k_4(u_{0\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+u_{0\psi\psi}(\varphi,\psi,t)))+$

$+k^*a_1(\varphi,\psi)\cdot c_0(\varphi,\psi,t)$, $g_3(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)\times$

$\times(k_1(c_{0\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{0\psi\psi}(\varphi,\psi,t))+k_2(u_{0\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+u_{0\psi\psi}(\varphi,\psi,t)))-$

$-k^*a_1(\varphi,\psi)\cdot c_0(\varphi,\psi,t)+a_2(\varphi,\psi)\cdot u_1(\varphi,\psi,t)$.

Під час покрокового розв'язуваня отримаєм:

$u_0(\varphi,\psi,t)=u_0^0(\varphi,\psi)\cdot\exp(-a_2(\varphi,\psi)\cdot t)$,

$$c_0(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_1(\tilde\varphi,\psi,f(\tilde\varphi,\psi)+t-f(\varphi,\psi))}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}d\tilde\varphi+ \\ +c_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\ t\ge f(\varphi,\psi), \\ \displaystyle\int_0^t g_1(f^{-1}(\tilde t+f(\varphi,\psi)-t),\psi,\tilde t)d\tilde t+ \\ +c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi),t<f(\varphi,\psi), \end{array}\right.$$

$$u_1(\varphi,\psi,t)=\int_0^t g_2(\varphi,\psi,t)\cdot\exp\left(a_2(\varphi,\psi)\cdot t\right)d\tilde{t}\cdot\exp\left(-a_2(\varphi,\psi)\cdot t\right),$$

$$c_1(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_3(\tilde{\varphi},\psi,f(\tilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi))}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}d\tilde{\varphi},\ t\ge f(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g_3(f^{-1}(\tilde{t}+f(\varphi,\psi)-t),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

де $f\left(\varphi,\tilde{\psi}\right)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\tilde{\psi})}$ – вздовж лінії течії $\psi=\tilde{\psi}$ час проходження виділеної частинки, від точки $(\varphi_*,\tilde{\psi})$ до точки $(\varphi,\tilde{\psi})$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ.

Для усування неузгодженостей, які виникли при регулярних частинах $c=\sum\limits_{i=0}^{1}c_i\,\varepsilon^i$, $u=\sum\limits_{i=0}^{1}u_i\,\varepsilon^i$ у околах ділянок $\varphi=\varphi^*$, $\varphi=\varphi_*$ (виходу та входу фільтраційної течії) використовують функції $\ddot{I}=\sum\limits_{i=0}^{2}\ddot{I}_i\,\varepsilon^i$, $P=\sum\limits_{i=0}^{2}P_{i/2}\varepsilon^{i/2}$, $\tilde{A}=\sum\limits_{i=0}^{2}\tilde{A}_{i/2}\varepsilon^{i/2}$. Тому, мають виконуватися умови $(c+\ddot{I})\big|_{\varphi=\varphi^*}=c^*+O(\varepsilon^2)$, $(u+P)\big|_{\varphi=\varphi^*}=u^*+O(\varepsilon^2)$, $(u+\tilde{A})\big|_{\varphi=\varphi_*}=u_*+O(\varepsilon^2)$. Наступні задачі маємо для відшукання цих функцій:

$$k_1\ddot{I}_{i\xi\xi}+\ddot{I}_{i\xi}=d_i(\xi,\psi,t);\ \ddot{I}_i\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ \ddot{I}_i\left(0,\psi,t\right)=p_i\left(\psi,t\right),\ i=\overline{0,2};$$

$$P_{it}-k_4v^2(\varphi^*,\psi)P_{i\eta\eta}+a_2(\varphi^*,\psi)P_i=\alpha_i(\eta,\psi,t),$$

$$P_i\underset{\eta\to\infty}{\to}0,\ P_i\left(0,\psi,t\right)=\gamma_i\left(\psi,t\right),\ i=\overline{0,3};$$

$$\tilde{A}_{it}-k_4v^2(\varphi_*,\psi)\tilde{A}_{i\mu\mu}+a_2(\varphi_*,\psi)\tilde{A}_i=\beta_i(\mu,\psi,t),$$

$$\tilde{A}_i\underset{\mu\to\infty}{\to}0,\ \tilde{A}_i\left(0,\psi,t\right)=\rho_i\left(\psi,t\right),\ i=\overline{0,3};$$

де $d_0(\xi,\psi,t)=0$, $\alpha_0(\eta,\psi,t)=0$, $\beta_0(\mu,\psi,t)=0$, $p_0(\psi,t)==c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)$, $\gamma_0(\psi,t)=u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)$, $\rho_0(\psi,t)==u_*(\psi,t)-u_0(\varphi_*,\psi,t)$, $p_1(\psi,t)=-c_1(\varphi^*,\psi,t)$,

$$\gamma_1(\psi,t)=-u_1(\varphi^*,\psi,t),\ \rho_1(\psi,t)=-u_1(\varphi_*,\psi,t),\ p_2(\psi,t)=0,\ \gamma_2(\psi,t)=0,\ \rho_2(\psi,t)=0,$$

$$\gamma_3(\psi,t)=0,\ \rho_3(\psi,t)=0,$$

$$d_1(\xi,\psi,t)=v^{-2}(\varphi^*,\psi)\cdot\Big(\ddot{I}_{0t}(\xi,\psi,t)-a_2(\varphi^*,\psi)\cdot(\tilde{A}(\varphi^*,\psi,t)+P(\varphi^*,\psi,t))\Big),$$

$$d_2(\xi,\psi,t)=v^{-2}(\varphi^*,\psi)\cdot\Big(\ddot{I}_{1t}(\xi,\psi,t)+2v(\varphi^*,\psi)\cdot v_\xi(\varphi^*,\psi)\cdot\xi\cdot d_1(\xi,\psi,t)-$$

$$-k_1v^2(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{0\psi\psi}(\xi,\psi,t)-k_2\Big(\tilde{A}_{\varphi\varphi}(\varphi^*,\psi,t)+P_{\varphi\varphi}(\varphi^*,\psi,t)+\tilde{A}_{\psi\psi}(\varphi^*,\psi,t)+$$

$$+P_{\psi\psi}(\varphi^*,\psi,t))+k^*a_1(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_0(\xi,\psi,t)+a_{2\xi}(\varphi^*,\psi)\xi(P(\varphi^*,\psi,t)+$$

$$+\tilde{A}(\varphi^*,\psi,t))-a_2(\varphi^*,\psi)(P_\xi(\varphi^*,\psi,t)\xi+\tilde{A}_\xi(\varphi^*,\psi,t)\xi),$$

$$\alpha_1(\eta,\psi,t)=a_{2\eta}(\varphi^*,\psi)\eta P_0-2k_4v(\varphi^*,\psi)\cdot v_\eta(\varphi^*,\psi)\cdot\eta\cdot P_{0\eta\eta}(\eta,\psi,t),$$

$$\alpha_2(\eta,\psi,t)=v^2(\varphi^*,\psi)(k_3(\ddot{I}_{0\varphi\varphi}+\ddot{I}_{0\psi\psi})+k_4P_{0\psi\psi})+k_4(v(\varphi^*,\psi)v_{\eta\eta}(\varphi^*,\psi)+$$

$$+v_\eta^2(\varphi^*,\psi))\Big)\eta^2P_{0\eta\eta}-2k_4v(\varphi^*,\psi)v_\eta(\varphi^*,\psi)\eta P_{1\eta\eta}+$$

$$+k^*a_1(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_0+a_{2\eta}(\varphi^*,\psi)\eta P_1-2^{-1}a_{2\eta\eta}(\varphi^*,\psi)\eta^2P_0,$$

$$\alpha_3(\eta,\psi,t)=k_4(-2v(\varphi^*,\psi)v_\eta(\varphi^*,\psi)\mu P_{2\eta\eta}+(v(\varphi^*,\psi)v_{\eta\eta}(\varphi^*,\psi)+$$

$$+v_\mu'^2(\varphi^*,\psi))\eta^2P_{1\eta\eta}-6^{-1}(v_{\eta\eta\eta}v+3v_{\eta\eta}v_\eta)\eta^3P_{0\eta\eta}+k_4v^2(\varphi^*,\psi)P_{1\psi\psi}-$$

$$-2k_4v(\varphi^*,\psi)v_\eta(\varphi^*,\psi)\eta P_{0\psi\psi}-a_{2\eta}(\varphi^*,\psi)\eta P_2-2^{-1}a_{2\eta\eta}(\varphi^*,\psi)\eta^2P_1-$$

$$-6^{-1}a_{2\eta\eta\eta}(\varphi^*,\psi)\eta^3P_0-k_3v^2(\varphi^*,\psi)\eta(\ddot{I}_{0\varphi\varphi_\eta}+\ddot{I}_{0\psi\psi_\eta})-2k_3v(\varphi^*,\psi)\times$$

$$\times v_\eta(\varphi^*,\psi)\eta(\ddot{I}_{0\varphi\varphi}+\ddot{I}_{0\psi\psi})-k^*\eta(a_1(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{0\eta}-a_{1\eta}(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_0),$$

$$\beta_1(\mu,\psi,t)=a_{2\mu}(\varphi_*,\psi)\mu\tilde{A}_0+2k_4v(\varphi_*,\psi)\cdot v_\mu(\varphi_*,\psi)\cdot\mu\cdot\tilde{A}_{0\mu\mu}(\mu,\psi,t),$$

$$\beta_2(\mu,\psi,t)=k_4v^2(\varphi_*,\psi)\tilde{A}_{0\psi\psi}+k_4\Big(v(\varphi_*,\psi)v_{\mu\mu}(\varphi_*,\psi)+v_\mu^2(\varphi_*,\psi))\Big)\times$$

$$\times\mu^2\tilde{A}_{0\mu\mu}+2k_4v(\varphi_*,\psi)v_\mu(\varphi_*,\psi)\mu\tilde{A}_{1\mu\mu}-a_{2\mu}(\varphi_*,\psi)\mu\tilde{A}_1-2^{-1}a_{2\mu\mu}(\varphi_*,\psi)\mu^2\tilde{A}_0.$$

$$\beta_3(\mu,\psi,t)=k_4(2v(\varphi_*,\psi)v_\mu(\varphi_*,\psi)\mu\tilde{A}_{2\mu\mu}+(v(\varphi_*,\psi)v_{\mu\mu}(\varphi_*,\psi)+v_\mu'^2(\varphi_*,\psi))\mu^2\tilde{A}_{1\mu\mu}+$$

$$+6^{-1}(v_{\mu\mu\mu}v+3v_{\mu\mu}v_\mu)\mu^3\tilde{A}_{0\mu\mu}+v^2(\varphi_*,\psi)\tilde{A}_{1\psi\psi}+2v(\varphi_*,\psi)v_\mu(\varphi_*,\psi)\mu\tilde{A}_{0\psi\psi}-$$

$$-a_{2\mu}(\varphi_*,\psi)\mu\tilde{A}_2-2^{-1}a_{2\mu\mu}(\varphi_*,\psi)\mu^2\tilde{A}_1-6^{-1}a_{2\mu\mu\mu}(\varphi_*,\psi)\mu^3\tilde{A}_0 .$$

Розв'язки останніх задач отримуємо в явному вигляді, так як мали задачі звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та параболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами (з параметром ψ).

Наступну задачу маємо для відшукання залишкових членів:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(k_1\left(\frac{\partial^2 R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)+\right.$$

$$\left.+k_2\left(\frac{\partial^2 R_2^2(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 R_2^2(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)\right)-v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi}-$$

$$-\varepsilon\cdot k^* a_1(\varphi,\psi)\cdot R_2^1(\varphi,\psi,t)+a_2(\varphi,\psi)\cdot R_2^2(\varphi,\psi,t)=$$

$$=\frac{\partial R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial t}-b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2 ,$$

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(k_3\left(\frac{\partial^2 R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 R_2^1(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)+\right.$$

$$\left.+k_4\left(\frac{\partial^2 R_2^2(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 R_2^2(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)\right)+\varepsilon\cdot k^* a_1(\varphi,\psi)\cdot R_2^1(\varphi,\psi,t)-$$

$$-a_2(\varphi,\psi)\cdot R_2^2(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial R_2^2(x,y,t)}{\partial t}-b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2 ,$$

$$R_2^i(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi,Q,t,\varepsilon)=$$

$$=R_2^i(\varphi,0,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0 ,$$

де $b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=\ddot{I}_{2t}-k_1v^2(c_{1\varphi\varphi}+c_{1\psi\psi})-k_2v^2(u_{1\varphi\varphi}+u_{1\psi\psi})+$

$$+k^*K_1c_1-k_1v^2(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{1\psi\psi}-\varepsilon k_1v^2\ddot{I}_{2\psi\psi}+2vv'_\xi\xi k_1(\ddot{I}_{0\psi\psi}+$$

$$+\ddot{I}_{2\xi\xi}+\varepsilon^2\ddot{I}_{2\psi\psi}+\varepsilon\ddot{I}_{1\psi\psi})+2vv'_\xi\xi\ddot{I}_{2\xi}-\xi^2(v''v+v'^2)\times$$

$$\times(\ddot{I}_{1\xi}+\varepsilon\ddot{I}_{2\xi})-K'_{1\xi}v'_\xi\xi k^*(\ddot{I}_0+\varepsilon\ddot{I}_1)+v^2\xi k_2(P_{\varphi\varphi_\xi}(\varphi^*,\psi,t)+$$

$$+P_{\psi\psi_\xi})+2vv'\xi k_2(P_{\varphi\varphi}-\varepsilon\xi P_{\varphi\varphi_\xi}+P_{\psi\psi}-\varepsilon\xi P_{\psi\psi_\xi})-$$

$$-K'_{2\xi}\xi^2 P'_\xi(\varphi^*,\psi,t)+v^2\xi k_2(\tilde{A}_{\varphi\varphi_\xi}(\varphi^*,\psi,t)+\tilde{A}_{\psi\psi_\xi})+$$

$$+2vv'\xi k_2(\tilde{A}_{\varphi\varphi}-\varepsilon\xi\tilde{A}_{\varphi\varphi_\xi}+\tilde{A}_{\psi\psi}-\varepsilon\xi\tilde{A}_{\psi\psi_\xi})-K'_{2\xi}\xi^2\tilde{A}'_\xi,$$

$$b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=-\eta^3 6^{-1}(v'''v+3v''v')(\sqrt{\varepsilon}k_3(\ddot{I}_{\varphi\varphi}+\ddot{I}_{\psi\psi})+$$

$$+k_4(\sqrt{\varepsilon}P_{\psi\psi}+P_{\eta\eta}+\sqrt{\varepsilon}P_{2\eta\eta}+\varepsilon P_{3\eta\eta})+\eta^2(v''v+v'^2)(k_3(\ddot{I}_{\varphi\varphi}+\ddot{I}_{\psi\psi})+$$

$$+k_4(P_{\psi\psi}+P_{2\eta\eta}+\sqrt{\varepsilon}P_{3\eta\eta})-2vv'\eta(k_3(\sqrt{\varepsilon}(\ddot{I}_{1\varphi\varphi}+\ddot{I}_{1\psi\psi})+$$

$$+\varepsilon^{3/2}(\ddot{I}_{2\varphi\varphi}+\ddot{I}_{2\psi\psi}))+k_4(P_{3\eta\eta}+P_{1\psi\psi}+\sqrt{\varepsilon}P_{2\psi\psi}+\varepsilon P_{3\psi\psi}))+$$

$$+v^2(k_3(\ddot{I}_{1\varphi\varphi}+\ddot{I}_{1\psi\psi}+\varepsilon(\ddot{I}_{2\varphi\varphi}+\ddot{I}_{2\psi\psi}))+k_4(P_{2\psi\psi}+\sqrt{\varepsilon}P_{3\psi\psi}))-$$

$$-k^*\eta^3K'''_{1\eta\eta\eta}\sqrt{\varepsilon}\ddot{I}+k^*\eta^2K''_{1\eta\eta}\ddot{I}-k^*\eta K'_{1\eta}(\sqrt{\varepsilon}\ddot{I}_1+\varepsilon^{3/2}\ddot{I}_2)+$$

$$+k^*K_1(\ddot{I}_1+\varepsilon\ddot{I}_2))+\eta^3K'''_{2\eta\eta\eta}(P_1+\sqrt{\varepsilon}P_2+\varepsilon P_3)-\eta^2K''_{2\eta\eta}(P_2+$$

$$+\sqrt{\varepsilon}P_3)+\eta K'_{2\eta}P_3+k_4\mu^3 6^{-1}(v'''v+3v''v')(\sqrt{\varepsilon}\tilde{A}_{\psi\psi}+\tilde{A}_{\mu\mu}+\sqrt{\varepsilon}\tilde{A}_{2\mu\mu}+$$

$$+\varepsilon\tilde{A}_{3\mu\mu})+k_4\mu^2(v''v+v'^2)(\tilde{A}_{\psi\psi}+\tilde{A}_{2\mu\mu}+\sqrt{\varepsilon}\tilde{A}_{3\mu\mu})+$$

$$+2vv'\mu k_4(\tilde{A}_{3\mu\mu}+\tilde{A}_{1\psi\psi}+\sqrt{\varepsilon}\tilde{A}_{2\psi\psi}+\varepsilon\tilde{A}_{3\psi\psi})+v^2k_4(\tilde{A}_{2\psi\psi}+\sqrt{\varepsilon}\tilde{A}_{3\psi\psi}))+$$

$$+\mu^3K'''_{2\mu\mu\mu}(\tilde{A}_1+\sqrt{\varepsilon}\tilde{A}_2+\varepsilon\tilde{A}_3)-\mu^2K''_{2\mu\mu}(\tilde{A}_2+\sqrt{\varepsilon}\tilde{A}_3)+\mu K'_{2\mu}\tilde{A}_3.$$

Вимагаючи достатню гладкість початкової та граничних умов і коефіцієнтів системи рівнянь (2.1), (2.2) (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно) та їх узгодженість вздовж ребер $L_*\times 0$, $L^*\times 0$ паралелепіпеда $\bar{G}_T=\bar{G}_z\times[0,T]$ ($[0,T]$ – фіксований проміжок часу), на основі принципу максимуму приходимо до справедливості такого твердження:

$R_2^i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$ ($i=1,2$, $(\varphi,\psi,t)\in\bar{G}_T$).

2.2. Нелінійні моделі процесів типу "конвекція-дифузія-масообмін" (залежність масообміну від сполуки забруднюючих речовин)

Для області $G=G_z\times(0,\infty)$ (див. п. 2. 1), де G_z ($z=x+iy$) – двозв'язна криволінійна область (рис. 2.1, а) розглянемо модельну задачу конвективної дифузії [27] :

$$D\left(\frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial y^2}\right)-v_x(x,y)\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial x}-$$

$$-v_y(x,y)\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial y}-k_1\cdot c(x,y,t)\cdot u(x,y,t)=\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial t}, \qquad (2.10)$$

$$D^*\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)-v_x(x,y)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}-$$

$$-v_y(x,y)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}-k_2\cdot c(x,y,t)\cdot u(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}, \qquad (2.11)$$

$$c\big|_{L_*}=c_*\left(M,t\right),\ c\big|_{L^*}=c^*\left(M,t\right),\ c(M,0)=c_0^0\left(M\right),$$

$$u\big|_{L_*}=u_*\left(M,t\right),\ u\big|_{L^*}=u^*\left(M,t\right),\ u(M,0)=u_0^0\left(M\right), \qquad (2.12)$$

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi=0,\ \varphi\big|_{L_*}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{L^*}=\varphi^*. \qquad (2.13)$$

Тут $c(x,y,t)$ та $u(x,y,t)$ – відповідно концентрації двох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x,y) в момент часу t, M - біжуча точка відповідної кривої, $D=a\cdot\varepsilon$, $D^*=a^*\cdot\varepsilon$, $k_1=k_1^*\cdot\varepsilon$, $k_2=k_2^*\cdot\varepsilon$, де k_1^*, k_2^*, a, a^* – задані дійсні додатні числа, ε ($\varepsilon>0$) - малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (в пористому середовищі G_z швидкості фільтрації), $\sqrt{v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)}>v_*>>\varepsilon$, $c_*\left(M,t\right)$, $c^*\left(M,t\right)$, $c_0^0\left(M,t\right)$, $u_*\left(M,t\right)$, $u^*\left(M,t\right)$, $u_0^0\left(M,t\right)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G.

Така модель у фільтраційному середовищі опису процес руху частинок двох сортів забруднюючої речовини. Також при взаємодії речовина одного сорту з іншою втрачає свої частинки (як приклад взаємодії, хімічна реакція). Відмітимо, що k_1^* - концентраційний коефіцієнт інтенсивності зменшення кількості речовини c із-за взаємодії з речовиною u, k_2^* - концентраційний коефіцієнт інтенсивності зменшення кількості речовини u через взаємодію з речовиною c, $k_i^*(x,y)>k^*>>\varepsilon$ ($i=\overline{1,2}$). Де над іншими складовими переважають явища конвекції.

Задачу фільтрації (2.13) будемо вважати розв'язаною, згідно п. 2. 1. Також поле швидкостей відоме. Перейдемо до відповідної задачі для області G_w (рис. 2.1, б) зробивши заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, ε в рівняннях (2.10), (2.11) і умовах (2.12). Маємо:

$$\varepsilon\cdot a\cdot v^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)-v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi}-$$

$$-\varepsilon\cdot k_1^*\cdot c(\varphi,\psi,t)\cdot u(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial c(\varphi,\psi,t)}{\partial t}, \qquad (2.14)$$

$$\varepsilon\cdot a^*\cdot v^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)-v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial u(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi}-$$

$$-\varepsilon k_2^*\cdot c(\varphi,\psi,t)\cdot u(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial u(\varphi,\psi,t)}{\partial t}, \qquad (2.15)$$

$$c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\ c(\varphi^*,\psi,t)=c^*(\psi,t),\ c(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi),$$

$$u(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t),\ u(\varphi^*,\psi,t)=u^*(\psi,t),\ u(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi). \qquad (2.16)$$

У виді слідуючих асимптотичних рядів шукаємо розв'язок (c,u) задачі (2.14) - (2.16) з точністю $O(\varepsilon^2)$:

$$c(\varphi,\psi,t)=c_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon^1 c_1(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i \ddot{I}_i(\xi,\psi,t)+R_2^1(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \qquad (2.17)$$

$$u(\varphi,\psi,t)=u_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon^1 u_1(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i P_i(\xi,\psi,t)+R_2^2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\quad, \qquad (2.18)$$

де R_2^1, R_2^2 – залишкові члени, $c_i(\varphi,\psi,t)$, $u_i(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{0,1}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: c_0, u_0 – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу) ; c_1, u_1 – відповідні поправки, що враховують "вклад" дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони), $\ddot{I}_i(\xi,\psi,t)$, $P_i(\xi,\psi,t)$ ($i=\overline{0,2}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (відповідні поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z), $\xi=(\varphi^*-\varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (змінна розтягу).

Виконавши підстановки (2.17) та (2.18) у (2.14) – (2.15) та використовуючи прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, для відшукання функцій c_i та u_i ($i=\overline{0,1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{i\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{it}(\varphi,\psi,t)=g_i(\varphi,\psi,t), \\ v^2(\varphi,\psi)\cdot u_{i\varphi}(\varphi,\psi,t)+u_{it}(\varphi,\psi,t)=\gamma_i(\varphi,\psi,t), \\ c_i(\varphi,\psi,0)=h_i(\varphi,\psi), c_i(\varphi_*,\psi,t)=b_i(\psi,t), \\ u_i(\varphi,\psi,0)=l_i(\varphi,\psi), u_i(\varphi_*,\psi,t)=p_i(\psi,t), \end{cases} \qquad (2.19)$$

$g_0(\varphi,\psi,t)=0$, $\gamma_0(\varphi,\psi,t)=0$, $h_0(\varphi,\psi)=c_0^0(\varphi,\psi)$, $l_0(\varphi,\psi)=u_0^0(\varphi,\psi)$, $h_1(\varphi,\psi)=0$, $b_0(\psi,t)=c_*(\psi,t)$, $p_0(\psi,t)=u_*(\psi,t)$, $l_1(\varphi,\psi)=0$, $b_1(\psi,t)=0$, $p_1(\psi,t)=0$, ρ_i, $\gamma_i(\varphi,\psi,t)=a^* v^2(\varphi,\psi)(u_{i-1\varphi\varphi}+u_{i-1\psi\psi})-k_2^* c_0 u_0$.

В ході розв'язання отримаємо:

$$c_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} c_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\ t\geq f(\varphi,\psi), \\ c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,t)\ ,t<f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$u_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} u_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\ t\geq f(\varphi,\psi), \\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,t)\ ,t<f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$\tilde{n}_1(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi},\psi)\cdot g_1(\tilde{\varphi},\psi,f(\tilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi))d\tilde{\varphi},\ t\geq f(\varphi,\psi),\\ \int\limits_{0}^{t} g_1(f^{-1}(\tilde{t}+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$u_1(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi},\psi)\cdot \gamma_1(\tilde{\varphi},\psi,f(\tilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi))d\tilde{\varphi},\ t\geq f(\varphi,\psi),\\ \int\limits_{0}^{t} \gamma_1(f^{-1}(\tilde{t}+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

де $f\left(\varphi,\tilde{\psi}\right)=\int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}\left(s,\tilde{\psi}\right)ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi=\tilde{\psi}$ від еквіпотенціальної лінії $s=\varphi_*$ до еквіпотенціальної лінії $s=\varphi$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ.

Для усунення неузгодженостей, які виникли при регулярних частинах $c=\sum_{i=0}^{1} c_i\,\varepsilon^i$, $u=\sum_{i=0}^{1} u_i\,\varepsilon^i$ в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ (виходу фільтраційної течії), маємо функції $\ddot{I}=\sum_{i=0}^{2} \ddot{I}_i\,\varepsilon^i$, $P=\sum_{i=0}^{2} P_i\,\varepsilon^i$. Тому, мають виконуватися умови: $P=\sum_{i=0}^{n+1} P_i\,\varepsilon^{i/2}$, $(u+P)\big|_{\varphi=\varphi^*}=u^*+O(\varepsilon^2)$. Розв'язавши наступні задачі, знайдемо ці функції:

$$a\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{i\xi\xi}(\xi,\psi,t)+v^2(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{i\xi}(\xi,\psi,t)=d_i(\xi,\psi,t),$$

$$a^*\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\left(P_{i\xi\xi}(\xi,\psi,t)\right)+v^2(\varphi^*,\psi)P_{i\xi}(\xi,\psi,t)=d^*{}_i(\xi,\psi,t),$$

$$\ddot{I}_i\to 0,\ P_i\to 0\ \text{ї ðè}\ \xi\to\infty,\ \ \ddot{I}_i\left(0,\psi,t\right)=q_i\left(\psi,t\right),$$

$$P_i\ \left(0,\psi,t\right)=q^*{}_i\left(\psi,t\right),\ i=\overline{0,2},$$

де $q_0(\psi,t)=c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)$, $q_0^*(\psi,t)=u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)$, $q_1(\psi,t)=-c_1(\varphi^*,\psi,t)$, $q_1^*(\psi,t)=-u_1(\varphi^*,\psi,t)$, $q_2(\psi,t)=0$, $q_2^*(\psi,t)=0$, $d_0(\xi,\psi,t)=d_0^*(\xi,\psi,t)=0$, $d_1(\xi,\psi,t)=\ddot{I}_{0t}(\xi,\psi,t)$, $d_1^*(\xi,\psi,t)=P_{0t}(\xi,\psi,t)$, $d_2(\xi,\psi,t)=\ddot{I}_{1t}(\xi,\psi,t)-v^2(\varphi^*,\psi)(\ddot{I}_{0\psi\psi}(\xi,\psi,t)+$

$$+k_1^*\ddot{I}_{\,0}(\xi,\psi,t)P_0(\xi,\psi,t))+v^{-1}(\varphi^*,\psi)v_\xi(\varphi^*,\psi)\ \xi\ddot{I}_{\,0t}(\xi,\psi,t)+k_1^*(c_0P_0+u_0\ddot{I}_{\,0}),$$

$$d_2^*(\xi,\psi,t)=P_{1t}(\xi,\psi,t)-v^2(\varphi^*,\psi)(P_{0\psi\psi}(\xi,\psi,t)+k_2^*\ddot{I}_{\,0}(\xi,\psi,t))\times$$

$$\times P_0(\xi,\psi,t)\big)+v^{-1}(\varphi^*,\psi)v_\xi(\varphi^*,\psi)\xi P_{0t}(\xi,\psi,t)+k_2^*(c_0P_0+u_0\ddot{I}_{\,0}).$$

Після розв’язання, маємо:

$$\ddot{I}_{\,0}(\xi,\psi,t)=\left(c^*(\psi,t)-c_0\left(\varphi^*,\psi,t\right)\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{a}},$$

$$P_0(\xi,\psi,t)=\left(u^*(\psi,t)-u_0\left(\varphi^*,\psi,t\right)\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{a^*}},$$

$$\ddot{I}_{\,1}(\xi,\psi,t)=-c_1\left(\varphi^*,\psi,t\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{a}}-\frac{a\xi\ddot{I}_{\,0t}(\xi,\psi,t)}{v^2(\varphi^*,\psi)},$$

$$P_1(\xi,\psi,t)=-u_1\left(\varphi^*,\psi,t\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{a^*}}-\frac{\xi P_{0t}(\xi,\psi,t)}{v^2(\varphi^*,\psi)},$$

$$\ddot{I}_{\,2}(\xi,\psi,t)=\frac{a}{2}\zeta_2(\psi,t)\left(e^{\frac{-2\xi}{a}}-e^{\frac{-\xi}{a}}\right)-\xi e^{\frac{-\xi}{a}}(\zeta_3(\psi,t)+$$

$$+a\zeta_1(\psi,t))-\xi^2e^{\frac{-\xi}{a}}\zeta_1(\psi,t)/2,$$

$$P_2(\xi,\psi,t)=\frac{a^*}{2}\zeta_2^*(\psi,t)\left(e^{\frac{-2\xi}{a^*}}-e^{\frac{-\xi}{a^*}}\right)-\xi e^{\frac{-\xi}{a^*}}(\zeta_3^*(\psi,t)+$$

$$+a^*\zeta_1^*(\psi,t))-\xi^2e^{\frac{-\xi}{a^*}}\zeta_1^*(\psi,t)/2,$$

де $$\zeta_1(\psi,t)=\frac{2v'_\xi(\varphi^*,t)}{v^3(\varphi^*,t)}\left(c_t^*(\psi,t)-c_{0t}(\varphi^*,\psi,t)\right)-v^{-4}(\varphi^*,t)\left(c_{tt}^*(\psi,t)-c_{0tt}(\varphi^*,\psi,t)\right),$$

$$\zeta_2(\psi,t)=k_1^*\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\left(u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)\right),$$

$$\zeta_3(\psi,t)=-v^{-2}(\varphi^*,\psi)c_{1t}(\varphi^*,\psi,t)-a\left(c_{\psi\psi}^*(\psi,t)-c_{0\psi\psi}(\varphi^*,\psi,t)\right)+$$

$$k_1^*(u_0(\varphi,\psi,t)(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t))-c_0(\varphi,\psi,t)(u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t))),$$

$$\zeta_1^*(\psi,t)=\frac{2v'_\xi(\varphi^*,t)}{v^3(\varphi^*,t)}\left(u_t^*(\psi,t)-u_{0t}(\varphi^*,\psi,t)\right)-v^{-4}(\varphi^*,t)\left(u_{tt}^*(\psi,t)-u_{0tt}(\varphi^*,\psi,t)\right),$$

$$\zeta_2^*(\psi,t)=k_2^*\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\left(u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)\right),$$

$$\zeta_3^*(\psi,t)=-v^{-2}(\varphi^*,\psi)u_{1t}(\varphi^*,\psi,t)-a\left(u^*_{\psi\psi}(\psi,t)-u_{0\psi\psi}(\varphi^*,\psi,t)\right)+$$

$$+k_2^*(u_0(\varphi,\psi,t)(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t))-c_0(\varphi,\psi,t)(u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t))).$$

Наступну задачу маємо для оцінки залишкових членів:

$$\varepsilon a v^2(\varphi,\psi)\left(R^1_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+R^1_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\right)-v^2(\varphi,\psi)R^1_{2\varphi}(\varphi,\psi,t)-$$

$$-\varepsilon\cdot k_1^*\cdot R_2^1(\varphi,\psi,t)\cdot R_2^2(\varphi,\psi,t)=R^1_{2t}(\varphi,\psi,t)-b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2,$$

$$\varepsilon\cdot a^*\cdot v^2(\varphi,\psi)(R^2_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+R^2_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t))-v^2(\varphi,\psi)R^2_{2\varphi}(\varphi,\psi,t)-$$

$$-\varepsilon\cdot k_2^*\cdot R_2^1(\varphi,\psi,t)R_2^2(\varphi,\psi,t)=R^2_{2t}(\varphi,\psi,t)-b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2,$$

$$R_2^i(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0\ \ (i=\overline{1,2}).$$

Тут $b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=av^2(c_{1\varphi\varphi}+c_{1\psi\psi})-k_1^*c_1u_0-k_1^*c_0u_1-\varepsilon k_1^*c_1u_1-$

$$+2avv_\xi\xi\ddot{I}_{2\xi\xi}+av^2(\ddot{I}_{1\psi\psi}+\ddot{I}_{2\psi\psi}\varepsilon)-2avv_\xi(\xi\ddot{I}_{0\psi\psi}+\xi\ddot{I}_{1\psi\psi}\varepsilon+\ddot{I}_{2\psi\psi}\varepsilon^2)+$$

$$+a((v''v+v'^2)/2)\xi^2(\ddot{I}_{1\xi\xi}+\ddot{I}_{2\xi\xi}\varepsilon+\ddot{I}_{0\psi\psi}\varepsilon+\ddot{I}_{1\psi\psi}\varepsilon^2+\ddot{I}_{2\psi\psi}\varepsilon^3)-$$

$$-2vv_\xi\xi\ddot{I}_{2\xi}+((v''v+v'^2)/2)\xi^2(\ddot{I}_{1\xi}+\ddot{I}_{2\xi}\varepsilon)-k_1^*(\ddot{I}_0P_1+\ddot{I}_0P_2\varepsilon+$$

$$\ddot{I}_1P_0+\ddot{I}_1P_1\varepsilon+\ddot{I}_1P_2\varepsilon^2+\ddot{I}_2P_0\varepsilon+\ddot{I}_2P_1\varepsilon^2+\ddot{I}_2P_2\varepsilon^3)-k_1^*(c_0(P_1+P_2\varepsilon)+$$

$$+u_0(\ddot{I}_1+\ddot{I}_2\varepsilon)+c_1(P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2P_2)+u_1(\ddot{I}_0+\ddot{I}_1\varepsilon+\ddot{I}_2\varepsilon^2)),$$

$$b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=a^*v^2(u_{1\varphi\varphi}+u_{1\psi\psi})-k_2^*c_1u_0-k_2^*c_0u_1-\varepsilon k_2^*c_1u_1-$$

$$-2a^*vv_\xi\xi P_{2\xi\xi}+a^*v^2(P_{1\psi\psi}+P_{2\psi\psi}\varepsilon)-2a^*vv_\xi(\xi P_{0\psi\psi}+\xi P_{1\psi\psi}\varepsilon+P_{2\psi\psi}\varepsilon^2)+$$

$$+a^*((v''v+v'^2)/2)\xi^2(P_{1\xi\xi}+P_{2\xi\xi}\varepsilon+P_{0\psi\psi}\varepsilon+P_{1\psi\psi}\varepsilon^2+P_{2\psi\psi}\varepsilon^3)-$$

$$-2vv_\xi\xi P_{2\xi}+((v''v+v'^2)/2)\xi^2(P_{1\xi}+P_{2\xi}\varepsilon)-k_2^*(\ddot{I}_0P_1+\ddot{I}_0P_2\varepsilon+$$

$$+\ddot{I}_1P_0+\ddot{I}_1P_1\varepsilon+\ddot{I}_1P_2\varepsilon^2+\ddot{I}_2P_0\varepsilon+\ddot{I}_2P_1\varepsilon^2+\ddot{I}_2P_2\varepsilon^3)-k_2^*(c_0(P_1+P_2\varepsilon)+$$

$$+u_0(\ddot{I}_1+\ddot{I}_2\varepsilon)+c_1(P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2P_2)+u_1(\ddot{I}_0+\ddot{I}_1\varepsilon+\ddot{I}_2\varepsilon^2)).$$

Вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (2. 10), (2.12) та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^{*}\times 0$, $L_{*}\times 0$ області $G=G_{z}\times[0,T]$, де $[0,T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь приходимо до справедливості такого твердження: $R_{2}^{i}(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{2})$ ($i=1,2$, $(\varphi,\psi,t)\in G$).

2.3. Дослідження одного типу нелінійного сингулярно збуреного процесу трикомпонентної конвективної дифузії з урахуванням малого масообміну та утворення речовини, що випадає в осад

Для області $G=G_z\times(0,\infty)$, де G_z ($z=x+iy$) – двозв'язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_*=\{z: f_*(x,y)=0\}$ – внутрішній та $L^*=\{z:\ f^*(x,y)=0\}$ – зовнішній (рис. 2.3, а), розглянемо модельну задачу типу „конвекція-дифузія-масообмін”:

$$D_i\left(\frac{\partial^2 c_i(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_i(x,y,t)}{\partial y^2}\right)-v_x(x,y)\frac{\partial c_i(x,y,t)}{\partial x}-v_y(x,y)\frac{\partial c_i(x,y,t)}{\partial y}-$$

$$-k_i\cdot H_i(x,y,t)=\frac{\partial c_i(x,y,t)}{\partial t}, \qquad (2.20)$$

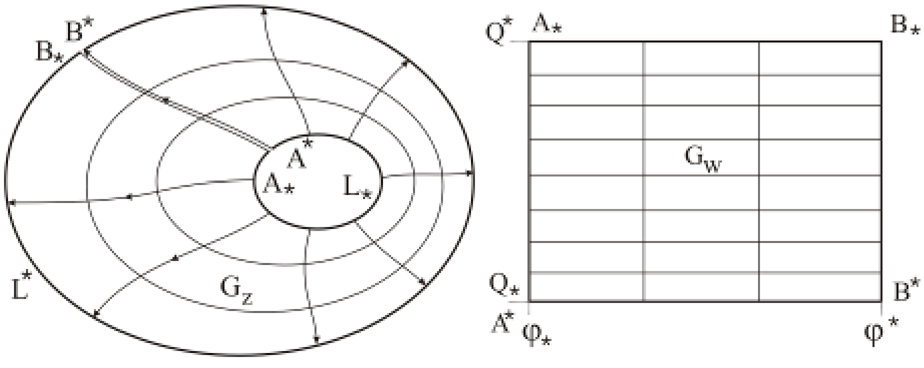
$$\frac{\partial N(x,y,t)}{\partial t}=\sum_{l=1}^{3}k_i\cdot H_i(x,y,t), \qquad (2.21)$$

$$c_i\big|_{L_*}=c_{i*}(M,t),\quad c_i\big|_{L^*}=c_i^*(M,t),\quad c_i(M,0)=c_{i0}^0(M),\quad N(M,0)=N_0^0(M),$$

(2.3.3)(2.22)

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi=0,\ \varphi\big|_{L_*}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{L^*}=\varphi^*. \qquad (2.23)$$

Тут $c_i(x,y,t)$ $(i=1,2,3)$ – відповідно концентрації трьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x,y) в момент часу t, $H_i(x,y,t)$ $(i=1,2,3)$ – концентрація речовини і-того сорту в точці (x,y) у момент часу t, яка випадає в осад в наслідок хімічної взаємодії речовин c_1, c_2 та c_3, $H_1(x,y,t)=c_2\cdot c_3$, $H_2(x,y,t)=c_1\cdot c_3$, $H_3(x,y,t)=c_1\cdot c_2$, M - біжуча точка відповідної кривої, $D_i=a_i\cdot\varepsilon$, $k_i=k_i^*\cdot\varepsilon$, де k_i^*, a_i – задані додатні дійсні числа, ε $(\varepsilon>0)$ - малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)} > v_* >> \varepsilon$, $c_{i*}(M,t)$, $c_i^*(M,t)$, $c_{i0}^0(M,t)$ ($i=1,2,3$) - достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G, $N(x,y,t)$ – концентрація осаду в точці (x,y) у момент часу t.



а) **б)**

Рис. 2.3. Фізична двозв'язна область G_z та

область комплексного потенціалу G_w.

У фільтраційному середовищі така модель описує процес поширення частинок трьох сортів забруднюючої речовини. Також при взаємодії речовина одного сорту з іншою втрачає свої частинки (як приклад взаємодії, хімічна реакція), при цьому виникає речовина $N(x,y,t)$, яка іде в осад.

Задачу фільтрації (2.23) будемо вважати розв'язаною. Також поле швидкостей відоме. Перейдемо до відповідної задачі для області G_w (рис. 2.3, б) зробивши заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ у рівняннях (2.20), (2.21) та умовах (2.22). Маємо:

$$\varepsilon \cdot a_i \cdot v^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial^2 c_i(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c_i(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)-v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c_i(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi}-$$

$$-\varepsilon \cdot k_i \cdot H_i(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial c_i(\varphi,\psi,t)}{\partial t}, \qquad (2.24)$$

$$\frac{\partial N(\varphi,\psi,t)}{\partial t}=\sum_{l=1}^{3}k_i\cdot H_i(\varphi,\psi,t) \tag{2.25}$$

$$c_i(\varphi_*,\psi,t)=c_{i*}\left(\psi,t\right),\ c_i(\varphi^*,\psi,t)=c_i^*\left(\psi,t\right),\ c_i(\varphi,\psi,0)=c_{i0}^0\left(\varphi,\psi\right),\ N(\varphi,\psi,0)=N_0^0\left(\varphi,\psi\right), \tag{2.26}$$

.

У виді слідуючих асимптотичних рядів шукаємо розв'язок (c_1,c_2,c_3) задачі (2.24) - (2.26) з точністю $O(\varepsilon^2)$:

$$c_i\left(\varphi,\psi,t\right)=c_{i0}\left(\varphi,\psi,t\right)+\varepsilon c_{i1}\left(\varphi,\psi,t\right)+\sum_{l=0}^{2}\varepsilon^i \ddot{I}_{il}\left(\xi,\psi,t\right)+R_2^i\left(\varphi,\psi,t,\varepsilon\right), \tag{2.27}$$

де R_2^i – залишкові члени, $c_{ij}\left(\varphi,\psi,t\right)$, ($j=0,1$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: c_{i0} – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу) ; c_{i1} – відповідні поправки, що враховують "вклад" дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони), $\ddot{I}_{iq}\left(\xi,\psi,t\right)$, ($q=\overline{0,2}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (відповідні поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z), $\xi=(\varphi^*-\varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (змінна розтягу), $i=1,2,3$.

Виконавши підстановки (2.27) у (2.24) та використовуючи прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, для відшукання функцій функцій c_{ij} ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{0,1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{ij\,\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{ijt}(\varphi,\psi,t)=g_{ij}(\varphi,\psi,t), \\ c_{ij}(\varphi,\psi,0)=h_{ij}(\varphi,\psi), c_{ij}(\varphi_*,\psi,t)=b_{ij}(\psi,t), \end{cases} \tag{2.28}$$

$g_{i0}(\varphi,\psi,t)=0$, $\quad g_{i1}(\varphi,\psi,t)=a_i v^2(\varphi,\psi)(c_{i0\varphi\varphi}+c_{i0\psi\psi})-k_i\prod_{m=1,\, m\neq i}^{3}c_{m0}$,

$h_{i0}(\varphi,\psi)=c_{i0}^0(\varphi,\psi)$, $h_{i1}(\varphi,\psi)=0$, $b_{i0}(\psi,t)=c_{i*}(\psi,t)$, $b_{i1}(\psi,t)=0$.

В ході розв'язання отримаємо:

$$c_{i0}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} c_{i*}(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\ t\geq f(\varphi,\psi), \\ c_{i0}^{0}(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,t)\ ,t<f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$\tilde{n}_{i1}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi},\psi)\cdot g_{i1}(\tilde{\varphi},\psi,f(\tilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi))\,d\tilde{\varphi},\ t\geq f(\varphi,\psi), \\ \int\limits_{0}^{t} g_{i1}(f^{-1}(\tilde{t}+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,\tilde{t})\,d\tilde{t},\ t<f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

де $f\left(\varphi,\tilde{\psi}\right)=\int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}\left(s,\tilde{\psi}\right)ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi=\tilde{\psi}$ від еквіпотенціальної лінії $s=\varphi_*$ до еквіпотенціальної лінії $s=\varphi$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ.

Для усунення неузгодженостей, які виникли при регулярних частинах $c_i=\sum_{j=0}^{1} c_{ij}\varepsilon^j$ в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ (виходу фільтраційної течії), маємо функції $\ddot{I}_{\,i}=\sum_{j=0}^{2}\ddot{I}_{\,ij}\varepsilon^j$. Розв'язавши наступні задачі, знайдемо ці функції:

$$a_i\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{\,ij\xi\xi}(\xi,\psi,t)+v^2(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{\,ij\xi}(\xi,\psi,t)=d_{ij}(\xi,\psi,t),$$

$$\ddot{I}_{\,ij}\to 0,\ \text{ïðè}\ \xi\to\infty,\ \ddot{I}_{\,ij}\left(0,\psi,t\right)=q_{ij}\left(\psi,t\right),\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{0,2},$$

де $q_{i0}(\psi,t)=c_i^*(\psi,t)-c_{i0}(\varphi^*,\psi,t)$, $q_{i1}(\psi,t)=-c_{i1}(\varphi^*,\psi,t)$, $q_{i2}(\psi,t)=0$, $d_{i0}(\xi,\psi,t)=0$, $d_{i1}(\xi,\psi,t)=\ddot{I}_{\,i0t}(\xi,\psi,t)$,

$$d_{i2}(\xi,\psi,t)=\ddot{I}_{\,i1t}(\xi,\psi,t)-v^2(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{\,i0\psi\psi}(\xi,\psi,t)+$$

$$+k_i\prod_{m=1,\,m\neq i}^{3}\ddot{I}_{\,m0}(\xi,\psi,t)+v^{-1}(\varphi^*,\psi)v_{\xi}(\varphi^*,\psi)\ \xi\ddot{I}_{\,i0t}(\xi,\psi,t)+k_i\prod_{m=1,\,m\neq i}^{3}\ddot{I}_{\,m0}(\xi,\psi,t)+$$

$$+k_i\sum_{l=1,\,l\neq i}^{3}\left(c_{l0}\ddot{I}_{\,(3-l)0}\right).$$

У явному вигляді отримали розв'язки останніх диференціальних рівнянь. Отож, маємо:

$$\ddot{I}_{i0}(\xi,\psi,t)=\left(c_i^*(\psi,t)-c_{i0}(\varphi^*,\psi,t)\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{a_i}},$$

$$\ddot{I}_{i1}(\xi,\psi,t)=-c_{i1}(\varphi^*,\psi,t)\cdot e^{\frac{-\xi}{a_i}}-\frac{a_i\xi\ddot{I}_{i0t}(\xi,\psi,t)}{v^2(\varphi^*,\psi)},$$

Наступну задачу маємо для оцінки залишкових членів:

$$\varepsilon a_i v^2(\varphi,\psi)\left(R^i_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+R^i_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\right)-v^2(\varphi,\psi)R^i_{2\varphi}(\varphi,\psi,t)-$$

$$-\varepsilon\cdot k_i\cdot\prod_{m=1,\,m\neq i}^{3}R_2^m(\varphi,\psi,t)=R^i_{2t}(\varphi,\psi,t)-b_i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2,$$

$$R_2^i(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0\ \ (i=\overline{1,3}).$$

Тут $b_i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ - відома функція, що є сумою добутків членів ряду (2.27), їх частинних похідних, а також коефіцієнти при ε розкладу функції $v^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi^*$.

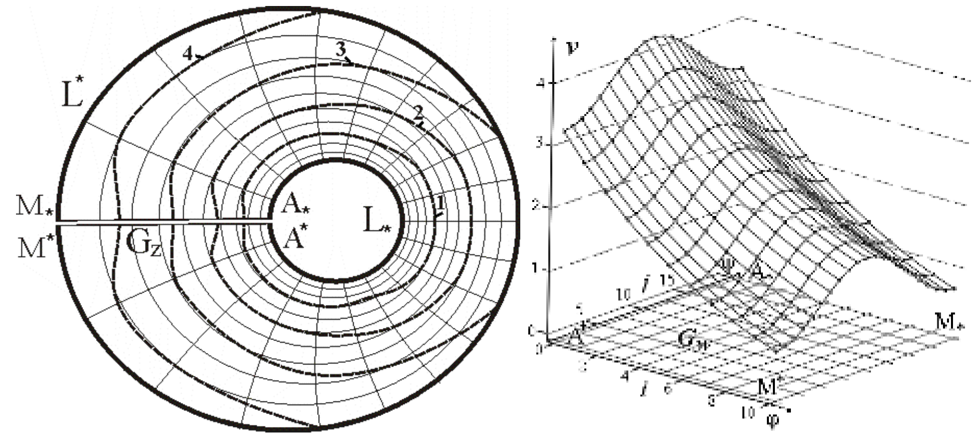
Вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (2.20), та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^*\times 0$, $L_*\times 0$ області $G=G_z\times[0,T]$, де $[0,T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь приходимо до справедливості такого твердження: $R_2^i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$ ($i=\overline{1,3}$, $(\varphi,\psi,t)\in G$).

Знайшовши розв’язок (c_1,c_2,c_3), та за формулою:

$$N(\varphi^*,\psi^*,t^*)=\int_0^{t^*}\sum_{l=1}^{3}\left(k_i\cdot H_i(\varphi^*,\psi^*,\tilde{t})\right)d\tilde{t}$$

легко знаходимо концентрацію осаду N в точці $(\varphi^*,\psi^*)\in G_w$ у момент часу $t=t^*$

Далі розглянемо конкретний приклад для описаного процесу типу “конвекція-дифузія-масообмін” на ідеальному плоско паралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого – $w=(Q_0/2\pi)\cdot\ln((z-z_1)/(z-z_2))$, при $\varphi_*=-2.7$, $\varphi^*=-1.5$, $AD=\{z:\psi(x,y)=0\}$, $BC=\{z:\psi(x,y)=2\pi\}$. Так на рис. 2.4 а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z: $\varphi(x,y)=\overline{\varphi}_i\overset{df}{=}\varphi_*+((\varphi^*-\varphi_*)\cdot i)/10$, $\psi(x,y)=\overline{\psi}_j\overset{df}{=}(Q_*\cdot j)/20$, $i=\overline{0,10}$, $j=\overline{0,20}$, величину швидкості фільтрації $v=\left((dz/dw)(\overline{dz/dw})\right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i,ψ_j), та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi,\psi)=t_k$, $k=\overline{1,4}$ при $t_1=0.035$, $t_2=1.098$, $t_3=0.213$, $t_4=0.432$, (криві 1-4 відповідно).



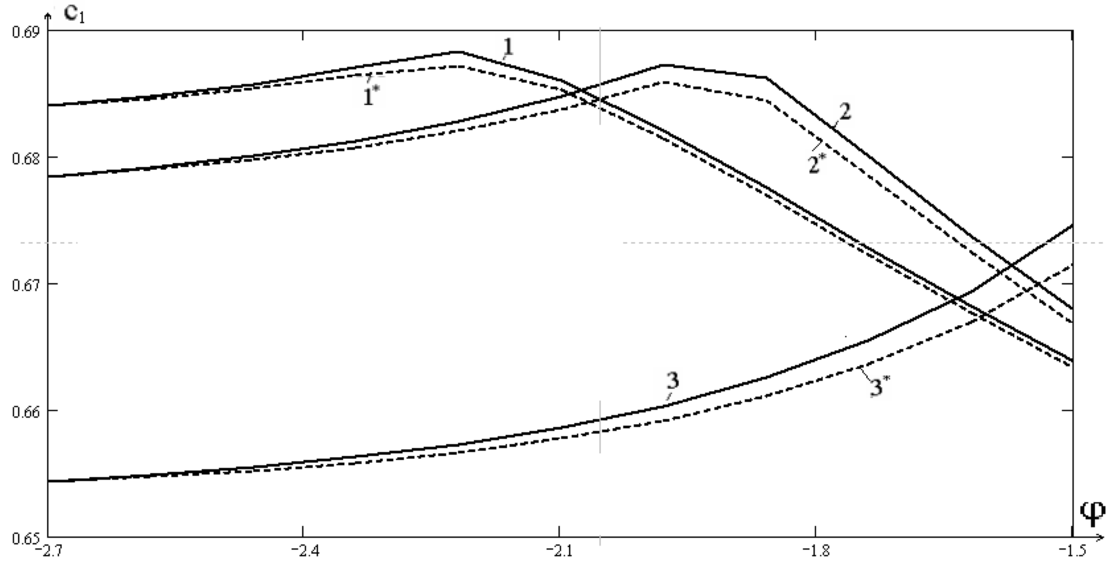
а) **б)**

Рис. 2.4. Фізична область G_z та поле швидкостей над відповідною їй областю комплексного потенціалу G_w

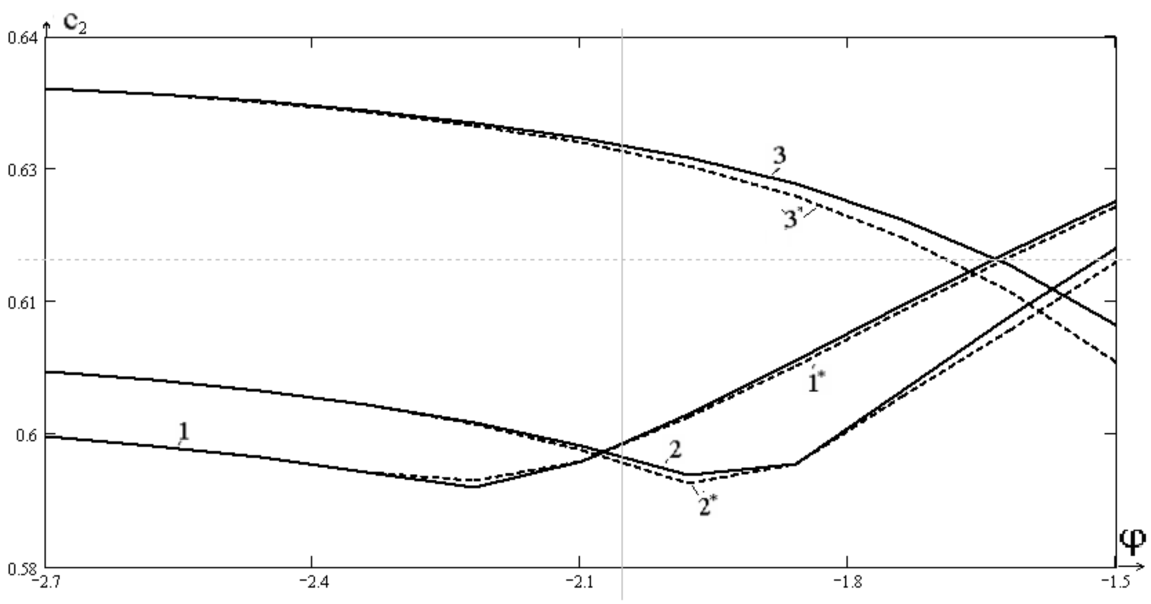
Розподіли концентрацій $c_i(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{1,3}$) розчинних речовин при $a_1=1, a_2=2,\ a_3=3$, $k_1=2, k_2=3,\ k_3=4$, $c_{10}^0(\varphi,\psi)=0.6+(1/4)\cdot\sin(\psi)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $c_{20}^0(\varphi,\psi)=0.7+(1/3)\cdot\cos(\psi+\pi/2)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $c_{30}^0(\varphi,\psi)=0.5+\sin(\psi+\pi/6)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $c_{1*}(\psi,t)=0.6+(1/4)\cdot\sin(\psi)\cdot \mathrm{e}^{-t}\cdot 3^{-1}$, $c_{2*}(\psi,t)=0.7+(1/3)\cdot\cos(\psi+\pi/2)\cdot \mathrm{e}^{-t}\cdot 3^{-1}$, $c_{3*}(\psi,t)=0.5+\sin(\psi+\pi/6)\cdot \mathrm{e}^{-t}\cdot 3^{-1}$, $c_1^*(\psi,t)=0.6+(1/4)\sin(\psi)\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$,

$c_2^*(\psi,t)=0.7+(1/3)\cos(\psi+\pi/2)\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$, $c_3^*(\psi,t)=0.5+$

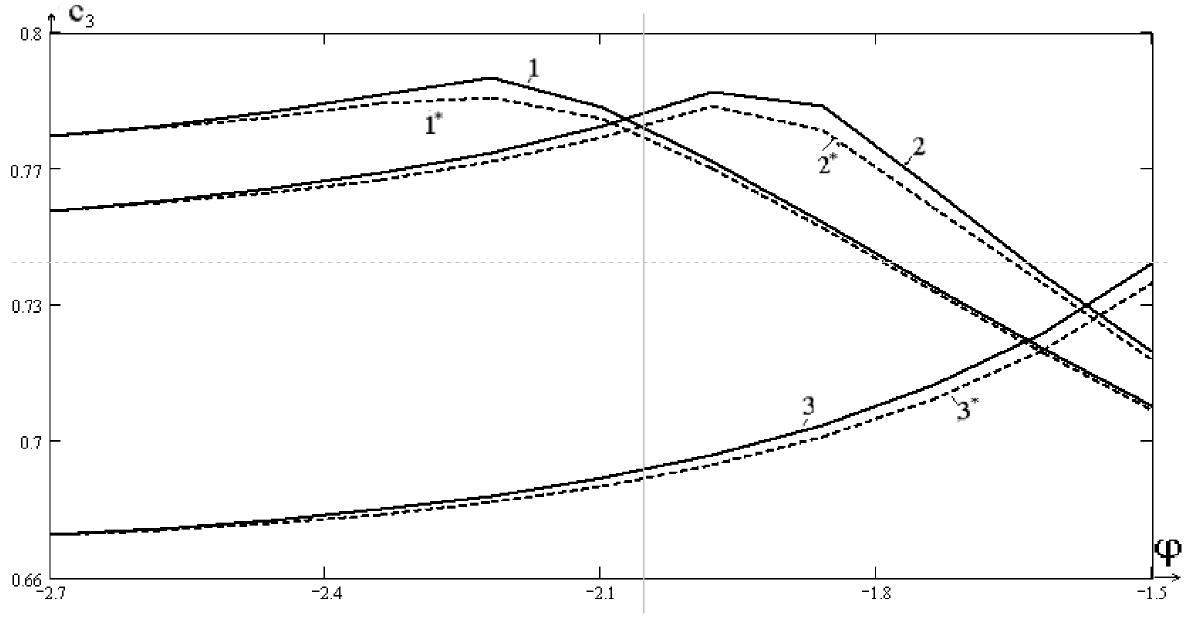
$+\sin(\psi+\pi/6)\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$ зображено на рис. 2.5.



а)



б)



в)

Рис. 2.5. Вплив дифузійних поправок на розподіл концентрації забруднюючих речовин

Так на рис. 2.5 а) зображено регулярні частини c_{10}, $c_{10}+\varepsilon c_{11}$, на рис. 2.5 б) та на рис. 2.5 в) – відповідно регулярні частини c_{20}, $c_{20}+\varepsilon c_{21}$ та c_{30}, $c_{30}+\varepsilon c_{31}$ (криві $1-3$ та 1^*-3^* відповідно в моменти часу $t_1=0.0537$, $t_2=0.1265$, $t_3=0.5236$ вздовж лінії течії $\psi=1.57$) розв'язку поставленої задачі при $\varepsilon=0.01$.

Розділ 3. Засточування сингулярно збурених задач типу «конвекія-дифузія-масообмін» до моделювання процесів очистки води

3.1. Постановки сингулярно збуреної задачі типу «конвекія-дифузія-масообмін» у двозв'язній області

У двозв'язній криволінійній області $G = G_z \times (0,\infty)$, де G_z ($z = x + iy$) – обмежена двома замкненими контурами $L_* = \{z : f_*(x,y) = 0\}$ та $L^* = \{z : \; f^*(x,y) = 0\}$ (рис. 6 а), розглядається модельна задача конвективної дифузії із урахуванням масообмінних процесів [2]:

$$D_i\left(\frac{\partial^2 C_i(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i(x,y,t)}{\partial y^2}\right) - v_x(x,y)\frac{\partial C_i(x,y,t)}{\partial x} - v_y(x,y)\frac{\partial C_i(x,y,t)}{\partial y} -$$

$$-\alpha_i \cdot H(x,y,t) = \frac{\partial C_i(x,y,t)}{\partial t}, \tag{3.1}$$

$$D_i^*\left(\frac{\partial^2 U_i(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i(x,y,t)}{\partial y^2}\right) - v_x(x,y)\frac{\partial U_i(x,y,t)}{\partial x} - v_y(x,y)\frac{\partial U_i(x,y,t)}{\partial y} -$$

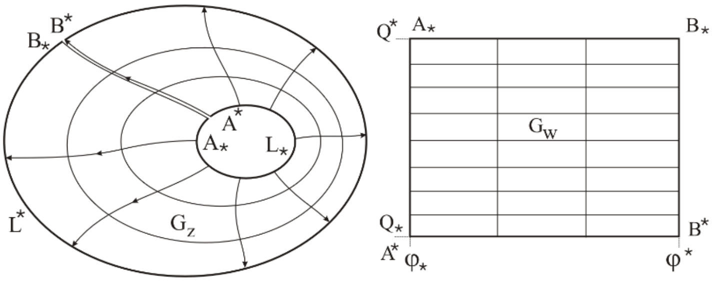
$$+\eta_i \cdot H(x,y,t) = \frac{\partial U_i(x,y,t)}{\partial t}, \tag{3.2}$$

$$C_i\Big|_{L_*} = C_{i*}(M,t),\; C_i\Big|_{L^*} = C_i^*(M,t),\; C_i(M,0) = C_{i0}^0(M),$$

$$U_i\Big|_{L_*} = U_{i*}(M,t),\; U_i\Big|_{L^*} = U_i^*(M,t),\; U_i(M,0) = U_{i0}^0(M),\; i = 1,2, \tag{3.3}$$

$$(v_x, v_y) = grad\,\varphi(x,y),\; \Delta\varphi = 0,\; \varphi\Big|_{L_*} = \varphi_*,\; \varphi\Big|_{L^*} = \varphi^*. \tag{3.4}$$

Тут $C_i(x,y,t)$ $(i = 1,2)$ – відповідно концентрації двох сортів умовно шкідливих для середовища розчинних у фільтраційній течії речовин в точці (x,y) в момент часу t, $U_i(x,y,t)$ $(i = 1,2)$ – концентрації розчинних не шкідливих для середовища речовин в точці (x,y) у момент часу t, які утворюються в наслідок хімічної взаємодії речовин C_1 та C_2, $H(x,y,t) = C_1 \cdot C_2$, M – біжуча точка відповідної кривої, D_i , D_i^* – коефіцієнти дифузії, $D_i = a_i \cdot \varepsilon$, $D_i^* = a_i^* \cdot \varepsilon$, $\alpha_i = \alpha_i^* \cdot \varepsilon$, $\eta_i = \eta_i^* \cdot \varepsilon$, де α_i^*, η_i^*, a_i, a_i^* – задані додатні дійсні числа, ε ($\varepsilon > 0$)– малий параметр, який характеризує переваги одних складових процесу над іншими, φ, v_x, v_y – потенціал та компоненти його швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z, $\sqrt{v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)} > v_* \gg \varepsilon$, $C_{i*}(M,t)$, $C_i^*(M,t)$, $C_{i0}^0(M), U_{i*}(M,t)$, $U_i^*(M,t)$, $U_{i0}^0(M)$, $i=1,2$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G, $H(x,y,t)=C_1(x,y,t)\cdot C_2(x,y,t)$.



а) *б)*

Рис. 6. Фізична двозв'язна область G_z та область комплексного потенціалу G_w.

Розв'язок (C_1,C_2,U_1,U_2) задачі (3.1) - (3.3) знаходимо у вигляді асимптотичних рядів [3] з точністю $O(\varepsilon^2)$, в відповідній G_z області комплексного потенціалу G_w (рис. 6 б), (задачу фільтрації (3.4) вважаємо розв'язаною; попередньо здійснюємо заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$):

$$C_i(\varphi,\psi,t)=C_{i0}(\varphi,\psi,t)+\varepsilon C_{i1}(\varphi,\psi,t)+\sum_{l=0}^{2}\varepsilon^i \Pi_{il}(\xi,\psi,t)+R_2^i(\varphi,\psi,t,\varepsilon),$$

$$U_i(\varphi,\psi,t)=U_{i0}(\varphi,\psi,t)+\varepsilon U_{i1}(\varphi,\psi,t)+\sum_{l=0}^{2}\varepsilon^i P_{il}(\xi,\psi,t)+R^{*i}_{\ 2}(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$$

де R_2^i, R^{*i}_2 – залишкові члени, $C_{ij}(\varphi,\psi,t)$, $U_{ij}(\varphi,\psi,t)$ $(j=0,1)$ – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $Ï_{iq}(\xi,\psi,t)$, $P_{iq}(\xi,\psi,t)$ $(q=\overline{0,2})$ – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$.

3.2. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод з використанням мікропористих частинок

При моделюванні процесу очищення забрудненого технологічного потоку, як правило, необхідно враховувати не тільки зміну концентрації забруднюючих речовин, але і самі частинки адсорбенту, що переносяться у фільтруючому потоці під дією конвекції. Візьмемо, що конвективно-дифузійна домішкова речовина переноситься разом із адсорбуючими мікропористими частинками. Тоді модель сингулярно збуреної задачі конвективно-адсорбційно-дифузійного масоперенесення в двопористому середовищі буде мати вигляд [28, 29]:

$$\sigma_1 \frac{\partial C}{\partial t} = \varepsilon D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v(x)\frac{\partial C}{\partial x} - D(Q)\int_0^R \frac{\partial U(x,\tilde{r},t)}{\partial t} d\tilde{r}\,, \tag{3.5}$$

$$\sigma_2 \frac{\partial U}{\partial t} = \varepsilon D_u \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} \right), \tag{3.5}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial Q}{\partial t} = -\alpha v(x) \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \tag{3.6}$$

$$C(x,0) = C_0^0(x),\; C(0,t) = C_*(t)\; C(l,t) = C^*(t)\,, \tag{3.7}$$

$$U(x,r,0) = U_0^0(x,r)\,,\; U(0,r,t) = U_*(r,t)\,,$$

$$U(x,R,t) = kC(x,t)\,,\; U_r'(x,r,t)\big|_{r=0} = 0\,, \tag{3.8}$$

$$Q(x,0) = Q_0^0(x)\,,\; Q(0,t) = Q_*(t)\,,\; Q_x(x,t)\big|_{x=L} = 0\,, \tag{3.9}$$

де $C(x,t)$ – концентрація забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі в точці з координатою x в момент часу t, $U(x,r,t)$ – концентрація забруднюючої речовини в мікропористих частинках, $Q(x,t)$ – концентрація мікропористих частинок, D_c та D_u – коефіцієнти дифузії відповідно в міжчастинковому просторі та в порах частинок, $D(Q)$ – коефіцієнт впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий, який залежить від об’ємної концентрації адсорбуючих частинок, $0 < \alpha \le 1$, σ_1, σ_2 – коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовищ, L – довжина фільтра.

Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (3.7)–(3.9) є достатньо гладкими та узгодженими між собою в кутових точках відповідної області, а також на поверхнях частинок ($U_0^0\left(x,R\right)=kC_0^0\left(x\right), U_*\left(R,t\right)=kC_*\left(t\right)$) [1].

Для того, щоб знайти концентрацію мікропористих частинок $Q\left(x,t\right)$, ми маємо задачі (3.6), (3.9), і рішення яких шукаємо у вигляді:

$$Q(x,t)=\begin{cases} Q_*((t-\frac{\sigma_1}{\alpha}f(x)), t\geq\frac{\sigma_1}{\alpha}f(x), \\ Q_0^0(f^{-1}(f(x)-\frac{\alpha t}{\sigma_1})), t<\frac{\sigma_1}{\alpha}f(x), \end{cases} \tag{3.10}$$

де $f\left(x\right)=\int\limits_0^x \frac{d\tilde{x}}{v\left(\tilde{x}\right)}$ – час проходження виділеної частинки від точки з координатою $\tilde{x}=0$ до точки $\tilde{x}=x$; f^{-1} – функція, обернена до функції f (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція $v^{-1}(\tilde{x})$ – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

У виді слідуючих асимптотичних рядів, знайдемо розв'язок задач (3.5), (3.5) та (3.7), (3.8):

$$C(x,t)=C_0\left(x,t\right)+\varepsilon C_1\left(x,t\right)+...\varepsilon^n C_n\left(x,t\right)+\Pi_0\left(\xi,t\right)+\varepsilon\Pi_1\left(\xi,t\right)+... \\ +\varepsilon^{n+1}\Pi_{n+1}\left(\xi,t\right)+R_n^1(x,t,\varepsilon), \tag{3.10}$$

$$U(x,r,t)=U_0(x,r,t)+\varepsilon U_1(x,r,t)+...+\varepsilon^n U_n(x,r,t)+R_n^2(x,r,t,\varepsilon), \tag{3.11}$$

де $C_i\left(x,t\right)$, $U_i\left(x,r,t\right)$, ($i=\overline{0,n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_p\left(\xi,t\right)$ ($p=\overline{0,n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $x=L$, $\xi=(L-x)\cdot\varepsilon^{-1}$ – змінна розтягу, $R_n^1(x,t,\varepsilon)$ та $R_n^2(x,r,t,\varepsilon)$ – залишкові члени.

При підстановці (3.10)–(3.11) в (3.5)–(3.9), і прирівнюючи коефіцієнти у однакових степенях ε, одержимо задачі для відшукання регулярних частин асимптотики для кожного $i=\overline{0,n}$:

$$\begin{cases} \sigma_2 \dfrac{\partial}{\partial t} U_i\ (x,r,t) = D_u (\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} U_i\ (x,r,t) + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} U_i\ (x,r,t)), \\ v(x)\dfrac{\partial}{\partial x} C_i\ (x,t) + \sigma_1 \dfrac{\partial}{\partial t} C_i\ (x,t) = g_i\ (x,t), \\ U_i\ (x,r,0) = h_i^1(x,r),\ \dfrac{\partial}{\partial r} U_i\ (x,0,t) = 0,\ U_i\ (x,R,t) = h_i^2(x,t), \\ C_i\ (x,0) = w_i^1(x),\ C_i\ (0,t) = w_i^2(t), \end{cases} \qquad (3.12)$$

$h_0^1(x,r) = U_0^0(x,r)$, $h_i^1(x,r) = 0$ при $i > 0$, $h_i^2(x,t) = kC_i(x,t)$ при $i \geq 0$;

$g_0(x,t) = \quad = -D(Q)\int\limits_0^R \dfrac{\partial U_0(x,\tilde{r},t)}{\partial t} d\tilde{r}$, $w_0^1(x) = C_0^0(x)$, $w_0^2(t) = C_*(t)$,

$g_i\ (x,t) = D_c \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} C_{i-1}(x,t) - D(Q)\dfrac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r=R}$, $w_i^1(x) = 0$, $w_i^2(t) = 0$ при $i > 0$.

Для задачі, буде такий алгоритм числового розв’язку:

1. Введемо рівномірну сітку $\left\{\left(x_j, r_m, t_j\right): x_j = j \cdot \Delta x, r_m = m \cdot \Delta r, t_j = f(x_j);\right.$ $\left. j = \overline{1,N}, m = \overline{1,M}\right\}$, та виконаємо слідуюче присвоєння: $I = 0$, де I – лічильник.

2. Запишемо початкові умови $C_i\left(x,t_0\right) = w_i^1(x)$, $U_i\left(x,r,t_0\right) = h_i^1(x,r)$.

3. Для кожного $j = \overline{1,N}$:

3.1. Знаходимо $U_i\ (x,r,t_k)$ методом сіток з допомогою явної різницевої схеми при умові на границі $U_i(x,R,t_k) = h_i^2(x,t_{k-1})$; після цього, за допомогою методу характеристик, знаходимо:

$$C_i\ (x,t_k) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^x \frac{g_i\ (\tilde{x},(t_k - \sigma_1 f(x) + \sigma_1 f(\tilde{x})))}{v(\tilde{x})} d\tilde{x} + \varphi_i^1(t_k - \sigma_1 f(x)),\ t_k \geq \sigma_1 f(x), \\ \displaystyle\frac{1}{\sigma_1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} g_i(f^{-1}(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{t}{\sigma_1} + f(x)),\tilde{t})d\tilde{t} + C_i(f^{-1}(f(x) - \frac{t_k}{\sigma_1}),t_{k-1}),\ t_k < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

де $\varphi_0(t_k) = C_*(t_k)$, $\varphi_i\ (t_k) = 0$ при $i > 0$.

3.2. Враховуємо зміщення адсорбуючих частинок за рахунок конвективного перенесення:

$$U_i(x,r,t_k)=\begin{cases} U_*(r,t_k-\dfrac{\sigma_1}{\alpha}f(x)),\ t_k\ge\dfrac{\sigma_1}{\alpha}f(x), \\ U_i(f^{-1}(f(x)-\dfrac{\alpha t_k}{\sigma_1}),r,t_k),t_k<\dfrac{\sigma_1}{\alpha}f(x). \end{cases}$$

4. Якщо $I=0$ то робимо присвоєння $cr_i^1(x,t)=C_i\ (x,t)$, $ur_i^1(x,r,t)=U_i(x,r,t)$, $I=I+1$, $N=2N$, переходимо до пункту 1. Якщо $I\ne 0$, то $cr_i^2(x,t)=C_i\ (x,t)$, $ur_i^2(x,r,t)=U_i(x,r,t)$;

5. Якщо $\left\|cr_i^1(x,t)-cr_i^2(x,t)\right\|<\varepsilon$ і $\left\|ur_i^1(x,r,t)-ur_i^2(x,r,t)\right\|<\varepsilon$, то $cr_i^2(x,t)$ – шукана концентрація забруднень в міжчастинковому просторі, $ur_i^2(x,r,t)$ – концентрація забруднень в мікрочастинках інакше – здійснюємо присвоєння: $cr_i^1(x,t)=cr_i^2(x,t)$, $ur_i^2(x,r,t)=ur_i^1(x,r,t)$, $N=2N$. Переходимо до пункту 1.

Функції $\Pi(\xi,t)=\sum_{p=0}^{n+1}\varepsilon^p\Pi_p(\xi,t)$ використовуються для усунення неузгодженостей, винекших під час побудування регулярнчх частинок $c(x,t)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i c_i\ (x,t)$ в околі ділянки $x=L$ (вихід фільтраційної течії). Так, що має виконуватись умова: $\left(C(L,t)+\Pi(0,t)\right)\Big|_{x=L}=C^*(t)+O\left(\varepsilon^n\right)$. При розв’язані наступних задач, знайдемо ці функції:

$$\begin{cases} D_c\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\Pi_p(\xi,t)+v(L)\dfrac{\partial}{\partial\xi}\Pi_{p\xi}(\xi,t)=\mu_p(\xi,t), \\ \Pi_p\left(0,t\right)=\upsilon_p(t),\ \Pi_p(\xi,t)\Big|_{\xi\to\infty}\to 0, \end{cases}$$

$\mu_0(\xi,t)=0$,

$$\mu_p(\xi,t)=\sigma_1\frac{\partial}{\partial t}\Pi_{p-1}(\xi,t)+v'(l)\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\Pi_{p-1}(\xi,t)-\frac{1}{2}v''(l)\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}\Pi_{p-2}(\xi,t)+...+$$

$$+(-1)^p v^{(p)}(l)\xi^p\frac{\partial}{\partial\xi}\Pi_0\ (\xi,t)$$ при $p>0$, $\upsilon_p(t)=-c_p(L,t)$ при $p=\overline{0,n}$, $\upsilon_{n+1}(t)=0$.

Вирішуючи їх, ми отримуємо:

$$\Pi_0(\xi,t)=D_c\frac{\partial}{\partial\xi}C_0(L,t)v^{-1}(L)e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi},$$

$$\Pi_1(\xi,t)=v^{-1}(L)e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}(v'(L)\frac{\partial}{\partial\xi}C_0(L,t)(\frac{\xi^2}{2D_c}+$$

$$+\frac{\xi}{v(L)}+\frac{D_c}{v^2(L)})-\sigma_1 v^{-1}(L)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial t}C_0(L,t)(\xi+\frac{D_c}{v(L)})),$$

$\Pi_2(\xi,t)=\xi^4 e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}s_1+\xi^3 e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}s_2+\ +\xi^2 e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}s_3+\xi e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}s_4+s_5$, де $s_1=\frac{(v'(L))^2}{v(L)D_c^3}\frac{\partial C_0}{\partial\xi}$,

$$s_2=(\frac{v'(L)}{2v(L)D_c}-\frac{\sigma_1}{3v(L)D_c})\frac{v'(L)}{v(L)D_c}\frac{\partial C_0}{\partial\xi}-\frac{\sigma_1 v'(L)}{6v^2(L)D_c^2}\frac{\partial C_0}{\partial\xi\partial t},$$

$$s_3=(\frac{3v'(L)}{v(L)D_c}-1)\frac{v'(L)}{2v(L)^2}\frac{\partial C_0}{\partial\xi}-\frac{2\sigma_1 v'(L)}{v^3(L)D_c}\frac{\partial^2 C_0}{\partial\xi\partial t}-\frac{\sigma_1^2}{2v^3(L)D_c}\frac{\partial^3 C_0}{\partial\xi\partial t^2},$$

$s_4=(-\frac{3v'(L)}{v(L)D_c}-1)\frac{v'(L)}{v(L)^3}\frac{\partial C_0}{\partial\xi}-\frac{5\sigma_1 v'(L)}{v^4(L)}\frac{\partial^2 C_0}{\partial\xi\partial t}+(\frac{1}{v(L)}-1)\frac{\sigma_1^2}{v^3(L)}\frac{\partial^3 C_0}{\partial\xi\partial t^2}$, $s_5=-(\frac{3}{v(L)}+$

$$+D_c)\frac{v'(L)D_c}{v(L)^4}\frac{\partial C_0}{\partial\xi}e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}-\frac{5\sigma_1 v'(L)D_c}{v^5(L)}\frac{\partial^2 C_0}{\partial\xi\partial t}e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}+(\frac{1}{v(L)}-1)\frac{\sigma_1^2 D_c}{v^4(L)}\frac{\partial^3 C_0}{\partial\xi\partial t^2}e^{-\frac{v(L)}{D_c}\xi}.$$

Висновки

У даній роботі було розглянуто математичні моделі сингулярно збурених процесів конвективної дифузії у двозв'язних областях та асимптотичні методи розв'язання відповідних задач.

Основні результати роботи:

- Опрацьовано літературу по даній темі дослідження та знайдено асимптотичний розв'язок сингулярно збуреної задачі конвективної дифузії у двопористому середовищі.

- Розглянуто сингулярно збурені моделі типу «конвекція-дифузія-масообмін»;

- Показано приклад постановки сингулярно збуреної задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін», та процес очищення стічних вод.

Результати досліджень показують, що для більш ефективного вирішення практичних проблем, ніж раніше, необхідно побудувати більш повну, точну та відповідну модель для опису особливого процесу збурень багатокомпонентного масообміну в пористих середовищах, а також розглянути рішення та методи дослідження. Взаємодія між характеристиками досліджуваного процесу.

Перспективою є поширення запропонованого методу вирішення таких проблем, як «конвекційно-дифузійний перенос маси», на проблеми, що застосовуються до просторових областей, та розробка нового методу вирішення ситуації, коли конвекція та масообмін кращі за дифузійні процеси.

Враховуючи процеси масообміну, адсорбції та десорбції, отримані результати будуть використані для математичного моделювання розподілу забруднюючих речовин у пористих середовищах, особливо при експлуатації та розробці фільтрів зворотної засипки, що передбачають однорідне навантаження.

Список використаних джерел

1. Присяжнюк О. В. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИФУЗІЙНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В ПОРИСТИХ ТА МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ : дис. канд. техн. наук : 01.05.02. / Присяжнюк Олена Вікторівна – Рівне, 2016. – 152 с.
2. Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І.М. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія». Монографія – Рівне: НУВГП, 2008. – 252 с.
3. Prysiazhniuk I. Mathematical Modeling of Wastewater Treatment From Multicomponent Pollution by Using Microporous Particles. / I . Prysiazhniuk, A. Bomba, Yu. Klymiuk, O. Prysiazhniuk, A . Safonyk // AIP Conf. Proc. 1773, 040003 (2016). P. 1-11.
4. Авер'янов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод / С. Ф. Авер'янов. – М.: Колос, 1982. – 237 с.
5. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
6. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
7. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – 1990. – Т. 1. – 384 с.; – Т. 2. – 392 с.
8. Аравин В. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. – М.: Гостехиздат, 1953. – 616 с.
9. Арсенин В. Я. Математическая физика / В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
10. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. Н. Ентов, В. М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 303 с.

11. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 451с.

12. Берман В.С. Об асимптотическом решении одной нестационарной задачи о распространении фронта химической реакции / В. С. Берман // Докл. АН СССР. – 1978. – Т.242. – №2. – С.265–267.

13. Берс Л. Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. – М.: Мир, 1966. – 351 с.

14. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.

15. Бомба А. Я. Асимптотический метод решения задач массопереноса растворимых веществ при плановой фильтрации подземных вод: Дис... канд. физ.– мат. наук: 01.02.05. – К., 1984. – 135 с.

16. Бомба А. Я. Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збурених задач процесу масоперенесення в різнопористих середовищах / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 28–34.

17. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних сингулярно збурених процесів очищення стічних вод від двокомпонентного забруднення в різнопористому середовищі / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Сучасні комп'ютерні інформаційні технології: Матеріали ІІІ Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів ACIT'2013. – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – С.16–17.

18. Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія. / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк. – Рівне: «Асоль», 2014. – 273 с.

19. Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М. : Высшая школа, 1990. – 208 с.

20. Вишик М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных

дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи матем. наук. – 1957. – Т. 12 –С. 3–122.

21. Климюк Ю. Є. Математичне моделювання просторових процесів фільтрації рідин у одного класу двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 10 (19). – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – С. 49–65.
22. Люстерник Л. А. Некоторые задачи для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр / Л. А. Люстерник, О. А. Олейник // Тр. 3 матем. съезда. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – Т. 2. – С. 158–169.
23. Сівак В. М. Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах / В. М. Сівак, Ю. О. Шепетько, Ю. Є. Климюк // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія «Технічні науки». – Вип. 4 (56). – Рівне: ВИД-ВО НУВГП, 2011. – С. 37–55.
24. Сівак В. М. Побудова просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із тришаровою засипкою / В. М. Сівак, Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія «Технічні науки». – Вип. 4 (56). – Рівне: ВИД-ВО НУВГП, 2011. – С. 70–82.
25. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных // УМН. – 1952. – Т. 7, вып. 1 (47). – С. 140-142.
26. Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Про врахування нелінійного зв′язку між хімічними потенціалами і концентраціями в задачах гетеродифузії // Волинський математичий вісник. – Рівне. – 2001. – Випуск 8. – С. 98- 104.
27. Бомба А. Я., Присяжнюк І. М. Асимптотичне розвинення розв’язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” із запізненням // Доповіді НАН України. -2005. -№3-С. 60-66.

28. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк, В. М. Сівак // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія «Технічні науки». – 2014. – Вип. 1(64). – С. 106–114.
29. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк // Праці міжнар. наук. конф. "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)", присв. 90-річчю від дня народж. акад. В.М. Глушкова. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ (Кацивелі, 2013). – С. 41.