Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

бакалаврського рівня

на тему:

Застосування методу усереднення для знаходження розв'язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

Виконала: студентка IV курсу
групи МІФ-41
спеціальності: 014 Середняосвіта (Математика)
Дикун Тетяна Володимирівна

Керівникд.т.н., проф. Власюк А.П.

Рецензент к.т.н., доц. Батишкіна Ю.В.

Рівне – 2020 року

Зміст

Вступ ... 3

Розділ I. Метод усереднення ... 5

1.1. Поняття про метод усереднення. Постановка задачі ... 5

1.2. Рівняння першого наближення методу усереднення ... 7

1.3.Рівняння другого наближення методу усереднення ... 11

1.4. Обґрунтування методу усереднення М.М. Боголюбова для рівнянь в стандартній формі ... 17

Розділ II. Методи знаходження розв’язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь ... 19

2.1.Поняття звичайних нелінійних диференціальних рівнянь ... 19

2.2. Лінеаризація за допомогою розкладання в ряд Тейлора для розв’язання звичайних нелінійних диференціальних рівнянь ... 20

2.3. Особливі точки та особливі лінії диференціальних рівнянь ... 23

Розділ III. Застосування методу усереднення для знаходження розв’язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь ... 31

3.1.Усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінюваними параметрами ... 31

3.2. Метод усереднення для рівнянь вищого порядку ... 37

3.3. Застосування методу усереднення для дослідження диференціальних рівнянь з «періодичними» коефіцієнтами ... 42

Висновки ... 51

Список використаної літератури ... 52

Вступ

Сучасна теорія диференціальних рівнянь займає важливе місце серед інших математичних дисциплін. Біологія,механіка, машинобудування, фізика, радіоелектроніка, хімія – це далеко не весь перелік наук, в яких дуже широко застосовуються диференціальні рівняння. Чітке та лаконічне поєднання суто математичного й прикладного аспектів, робить її однаково цікавою як для теоретиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань.

Актуальність теми. Багато наукових, технічних, економічних та інших задач приводять до необхідності розв'язування диференціальних рівнянь, в тому числі і нелінійних. Нелінійні диференціальні рівняння виникли із задач нелінійної механіки, в яких фігурували координати тіл, їх швидкості та прискорення, розглянуті як функції від часу.

Задачі, що зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь є екстремально різноманітними, і від цього залежать методи розв'язування або аналізу. Дані рівняння, у загальному випадку, не мають розроблених методів розв'язування, крім деяких часткових випадків. В деяких випадках (із застосуванням тих чи інших наближень) вони можуть бути зведені до лінійних.

Серед багатьох підходів до розв'язування звичайних нелінійних диференціальних рівнянь особливе місце займає і метод усереднення, який спочатку виник в небесній механіці. На першому етапі розвитку його пов'язують, здебільшого, із задачами небесної механіки, для розв'язування яких застосовувалися різні схеми усереднення та поступово розширювалося коло задач, що можна розв'язати даним методом. Суть методу полягає в заміні правих частин диференціальних рівнянь, які описують коливальні або обертальні рухи, «згладженими» усередненими функціями, що не містять явного часу t і швидко змінюваних параметрів системи. Це дозволяє спростити рівняння і в деяких випадках їх проінтегрувати.

Саме тому застосування методу усереднення є доречним для даного виду рівнянь і сприяє полегшенню процесу їх розв’язування, а дослідження методу актуальним.

Метою даної роботи є детально розглянути метод усереднення для знаходження розв’язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, та його застосування.

З даною метою поставлені наступні **завдання** дослідження:

- ✓ проаналізувати наявну наукову та методичну літературу з теми;
- ✓ дослідити методи розв’язування звичайних нелінійних диференціальних рівнянь;
- ✓ узагальнити та систематизувати відомості про метод усереднення;
- ✓ розглянути застосування методу усереднення для знаходження розв’язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь.

Об’єкт дослідження: звичайні нелінійні диференціальні рівняння.

Предмет дослідження: застосування методу усереднення для знаходження розв’язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь.

Розділ I. Метод усереднення

1.1. Поняття про метод усереднення. Постановка задачі

Метод усереднення спочатку виник в небесній механіці і на першому етапі розвитку його пов'язують, здебільшого, із задачами небесної механіки, для розв'язування яких застосовувалися різні схеми усереднення. Суть методу полягає в заміні правих частин диференціальних рівнянь, які описують коливальні або обертальні рухи заміняли «згладженими» усередненими функціями, що не містять явного часу t і швидко змінюваних параметрів системи. Це дозволяє спростити рівняння і, в деяких випадках, їх проінтегрувати [10].

Розглянемо нелінійні рівняння, припускаю чи, що вони вже зведені до стандартної форми

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)(k = 1, 2, \dots, n), \tag{1.1}$$

де ε - малий параметр, а X_kможе бути представлені за допомогою суми :

$$X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{h\nu}(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1.2}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

в яких ν – сталі частоти.

Необхідно відмітити, що рівняння (1.1) розглядається виключно в дійсній області, комплексна форма представлення синусоїдальних коливань, що застосовується в (1.2) введена лише для спрощених позначень [15].

Іноді при розгляді вищих наближень доцільно враховувати в диференціальних рівняннях також члени вищого порядку по відношенню ε. При цьому отримаємо, наприклад :

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + e^2 Y_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots \tag{1.3}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

де Y_k– функції того ж виду, що і X_k. Цей тип рівняння також називають стандартним.

Перепозначимо сукупність n величини $x_1, x_2, \dots, x_n$, однією буквою x. Тоді рівняння (1.1) запишуться у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \tag{1.4}$$

де

$$X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(x) \tag{1.5}$$

Формули диференціювання складених функцій

$$\frac{dF_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} = \frac{\partial F_k}{\partial t} + \sum_{g=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_g} \cdot \frac{dx_g}{dt} \tag{1.6}$$

в прийнятих позначеннях можна записати у вигляді

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right) + F, \tag{1.7}$$

де $\frac{\partial F}{\partial x}$ - трактується як матриця

$$\left\|\frac{\partial F_k}{\partial x_g}\right\|,$$

прикладена до вектора$\frac{\partial x}{\partial t}$, і $\left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right)$– операторний скалярний добуток

$$\sum_{g=1}^{n} \frac{dx_g}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_g}. \tag{1.8}$$

Нехай, надалі, *F (t,x)* – сума виду

$$F(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} F_\nu(x) \ , \tag{1.9}$$

Тоді, увівши позначення,

$$\begin{cases} \underset{t}{\mathrm{M}}\{F(t,x)\} = F_0(x), \\ \tilde{F}(t,x) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} F_\nu(x), \\ \tilde{\tilde{F}}(t,x) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{(i\nu)^2} F_\nu(x) \end{cases} \quad (1.10)$$

отримаємо тотожність

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}}{\partial t} = F, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = F - \underset{t}{\mathrm{M}}\{F\} \quad (1.11)$$

Оператор $\sim$ називають інтегруючим оператором, $\underset{t}{\mathrm{M}}$– оператором усереднення при сталихx або оператором усереднення, що містить час $[2, \text{ст. } 298 - 300]$.

1.2. Рівняння першого наближення методу усереднення

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (1.4), де ε – малий додатній параметр і вираз X як функції часу t представляються сумами (1.5).

Беручи до уваги, що форма наближеного розв'язку системи рівнянь (1.4) може бути знайдена, оскільки перші похідні $\frac{dx}{dt}$ пропорційні малому параметру, природно вважати x повільно змінюваними величинами. Тому представимо x як суперпозицію плавно змінюваного члена ξ і суми малих вібраційних членів і через малість останніх в першому наближенні покладемо $x = \xi$. Тоді

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x) = \varepsilon X(t.\xi) = \varepsilon \sum_{\nu} x_\nu(\xi) e^{i\nu \mathrm{t}} \quad (1.12)$$

тобто

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \text{малі синусоїдальні коливальні члени} \quad (1.13)$$

Вважаючи, що ці синусоїдальні коливальні члени викликають лише малі вібрації x біля ξ і не впливають на систематичні зміни x, приходимо до рівняння першого наближення у вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi)\} \tag{1.14}$$

Для отримання другого наближення необхідно взяти до уваги у виразі x також і вібраційні члени; враховуючи в (1.13) доданок $\varepsilon e^{i\nu t} X_\nu(\xi)$, що викликає в розв'язку x коливання виду

$$\frac{\varepsilon e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi).$$

Приходимо до наближеного виразу

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{\varepsilon e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi) \tag{1.15}$$

Підставивши вираз (1.15) урівняння (1.14), отримаємо:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X\big(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}\big), \tag{1.16}$$

Тобто

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi+\varepsilon\tilde{X})\} + \text{ малі синусоїдальні коливальні члени,}$$

звідки, нехтуючи впливом синусоїдальних коливальних членів на систематичну змінуξ, отримаємо рівняння другого наближення

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi+\varepsilon\tilde{X})\} = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{X(t,\xi + \varepsilon\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}. \tag{1.17}$$

Наведеним міркуванням неважко надати цілком обґрунтованої форми і показати, що в дійсності, застосовуючи усереднення, у перетворених рівняннях можна нехтувати величинами вищого порядку малості.

Виконаємо для цього в рівняннях (1.4) заміну змінних (де ξ будемо розглядати як нові змінні).

$$x = \ \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi) \tag{1.18}$$

Диференціюючи (1.18), отримаємо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial t} \tag{1.19}$$

Враховуючи властивість (1.11) інтегруючого оператора

$$\frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial t} = X(t,\xi) - X_0(\xi)$$

та підставивши (1.8) та (1.19) в рівняння (1.4), отримаємо:

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon X(t,\xi) - \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon X\{t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi)\}$$

або

$$\left\{1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon\left\{X\left(t, \xi + \tilde{X}\right) - X(t,\xi)\right\}, \tag{1.20}$$

де 1 розглядається як одинична матриця.

Помноживши співвідношення (1.20) зліва на

$$\left\{1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1}, \tag{1.21}$$

Зауважимо,що нові невідомі ξ задовольняють рівняння виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon \left\{1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1} X_0(\xi) + \varepsilon \left\{1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1} \left\{X\left(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}\ \right) - X(t,\xi)\right\}, \tag{1.22}$$

Розкладаючи (1.21) в ряд за степенямиε, отримаємо

$$\left\{1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1} = 1 - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \ldots,$$

деε^m означають величини порядку малості ε^m. Тому рівняння (1.22) можемо записати так:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{1.23}$$

Отже, якщо ξ задовольняє рівняння (1.23) права частина яких відрізняється від правої частини рівняння

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{1.24}$$

на величини другого порядку малості , то вираз

$$x = \xi + \tilde{X}(t, \xi) \tag{1.25}$$

є точним розв'язком розглянутих рівнянь (1.4). Тому в якості першого наближення можемо прийняти

$$x = \xi, \tag{1.26}$$

взявши за ξ розв'язок рівнянь першого наближення (1.24).

Вираз (1.25), в якому ξ задовольняє це ж рівняння, називають покращеним першим наближенням.

Підставивши покращене перше наближення в точне рівняння(1.4), неважко переконатися, що це наближення задовольняє його з точністю до величини другого порядку малості $[2, \text{ст.} \, 300 - 302]$.

Повертаючись до рівняння (1.24), помітимо, що, згідно означення оператора усереднення

$$X_0(\xi) = \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t, \xi)\}$$

і, відповідно, рівняння першого наближення можуть бути представлені у вигляді

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t, \xi)\}. \tag{1.27}$$

Отже, рівняння першого наближення (1.27) отримано з точних рівнянь (1.4) шляхом усереднення останніх по явному часу t. При виконанні усереднення ξ трактуються як постійні .

Цей формальний процес, що полягає в заміні точних рівнянь усередненими, іноді називається принципом усереднення [22].

1.3.Рівняння другого наближення методуусереднення

При побудові першого наближення шляхом заміни змінних (1.18) рівняння (1.4) були перетворені до вигляду

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2.$$

Для отримання другого наближення знайдемо аналогічну заміну змінних, перетворюючу змінну x у ξ, яка задовольняє рівняння виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) \ + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^3 \dots \tag{1.28}$$

Щоб прийти до цієї заміни змінних найбільш природнім шляхом, знайдемо вираз

$$x = \Phi(t, \xi, \varepsilon), \tag{1.29}$$

який для ξ, яке задовольняє рівняння виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) \ + \varepsilon^2 P(\xi), \tag{1.30}$$

задовольняв би (1.4) з точністю до величини порядку малості ε^3. Так як при ξ, визначеної з рівняння першого наближення

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi),$$

вираз

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi) = \ \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$$

задовольняє рівняння(1.4) з точністю до величини порядку малості ε^2, то розв’язок (1.29) будемо шукати в формі

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + e^2 F(t, \xi) \tag{1.31}$$

де F представляється сумами

$$F(t,\xi)=\sum_{\mu} e^{i\mu t}F_{\mu}(\xi), \tag{1.32}$$

але для

$$\varepsilon X(t,x)=\varepsilon X\big(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}\big)+e^{2}\ldots=\varepsilon X(t,\xi)+e^{2}\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)+e^{3}\ldots \tag{1.33}$$

З іншого боку, диференціюючи вираз (1.31) і беручи до уваги рівняння (1.30), знаходимо

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\varepsilon^{2}\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial t}+\varepsilon^{2}\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t}=\varepsilon X_{0}(\xi)+$$

$$+\varepsilon^{2}P(\xi)++\varepsilon^{2}\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_{0}(\xi)+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial t}+\varepsilon^{2}\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t}+\varepsilon^{3}\ldots,$$

звідки

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,\xi)+\varepsilon^{2}P(\xi)+\varepsilon^{2}\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_{0}(\xi)+\varepsilon^{2}\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t}+\varepsilon^{3}\ldots, \tag{1.34}$$

оскільки

$$\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial t}=X(t,\xi)-X_{0}(\xi).$$

Таким чином, вираз (1.33) буде рівний виразу (1.34) з точністю до величин порядку малості ε^{3}, якщо підібрати функціїP(ξ)і F(t,ξ), так щоб виконувалося співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_{0}(\xi)-P(\xi). \tag{1.35}$$

Враховуючи, що

$$\tilde{X}(t,\xi)=\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}X_{\nu}(\xi);\quad X(t,\xi)=\sum_{\nu}e^{i\nu t}X_{\nu}(\xi) \tag{1.36}$$

можемо записати

$$\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi)=\sum_{\nu',\nu''(\nu'\neq 0)}e^{i(\nu'+\nu'')t}\frac{1}{i\nu'}\times$$

$$\times\left(X_{\nu'}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X_{\nu''}(\xi)-\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}\frac{\partial X_\nu}{\partial\xi}X_0(\xi), \tag{1.37}$$

де сумування розповсюджується на всі параметри (ν',ν'') частот ν, в сумах (1.36).

Вираз (1.37) можемо представити у вигляді суми

$$\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\frac{\partial X}{\partial\xi}X_0(\xi)=\sum_{\substack{\mu\\(\mu=\nu,\nu'+\nu'')}}e^{i\mu t}\Phi_\mu(\xi)$$

і співвідношення (1.35) буде виконуватись, якщо

$$P(\xi)=\Phi_0(\xi)=\underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi)\right\}=\underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}$$

$$F(t,\xi)=\sum_{\mu\neq 0}\frac{e^{i\mu t}}{i\mu}\Phi_\mu(\xi)=\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi) \tag{1.38}$$

В результаті, можемо стверджувати, що при ξ, яке визначене з рівняння

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\varepsilon\underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi)\}+\varepsilon^2\underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} \tag{1.39}$$

вираз

$$x=\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi)+\varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi) \tag{1.40}$$

задовольняє рівняння (1.4) з точністю до величини порядку ε^3.

Покажемо тепер, що якщо розглядати отриманий вираз (1.40) як формулу заміни змінних, перетворюючи невідому x, визначену точним рівнянням (1.4), до нової невідомої ξ, то вона буде задовольняти рівняння вигляду

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(X \frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3. \qquad (1.41)$$

Для цього продиференціємо вираз (1.40), приймаючи до уваги позначення (1.38). Тоді отримаємо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t,\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t} =$$

$$= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t}, \qquad (1.42)$$

де 1 – одинична матриця.

Але, згідно визначеного інтегруючого оператора,

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t} = \varepsilon X(t,\xi) - \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi)\} - \varepsilon^2 \left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t,\xi) -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) - \varepsilon^2 \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t,\xi)\right\}$$

і тому з (1.42) випливає

$$\frac{dx}{dt} = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t,\xi) -$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) - \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t,\xi)\right\}.$$

Зауважимо, що в силу рівняння (1.4) цей вираз повинен дорівнювати наступному

$$\varepsilon X(t,\xi) = \varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon \tilde{X} + \varepsilon^2 F\right) = \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t,\xi) + \varepsilon^3 \ldots$$

Таким чином, змінна ξ задовольняє рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(1 + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^{-1}\left(\varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}\ X_0(\xi) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^2 \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}\right) + \varepsilon^3 \dots \qquad (1.43)$$

Очевидно, що

$$\left(1 + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^{-1} = 1 - \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2 \dots,$$

тому рівняння (1.43) може бути представлене у формі

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3 \dots\ ,$$

що співпадає з (1.41).

Отже, якщо ξ задовольняє рівняння (1.41), права частина якого відрізняється від правої частини рівняння (1.39) на величини порядку малості ε^3, то вираз (1.40) виражає точний розв’язок рівняння (1.4) [11].

В якості другого наближення використаємо вираз:

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\ , \qquad (1.44)$$

де ξ визначається рівнянням (1.39). За друге наближення приймемо форму покращеного першого наближення, в якій ξ задовольняє рівняння вже не першого наближення, а другого наближення.

Вираз (1.40) в якому ξ знайдено з рівняння (1.39) називається покращеним другим наближенням.

Покращене друге наближення задовольняє точне рівняння (1.4) з похибкою порядку малості ε^3.

Все сказане безпосередньо узагальнюється і на рівняння виду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x) + e^2 Y(t,x) \qquad (1.45)$$

в яке входять члени другого порядку малості.

В даному випадку рівняння другого наближення матиме вигляд

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{\mathrm{M}}\{Y(t,\xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}, \qquad (1.46)$$

а вираз другого наближення буде:

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi) \qquad (1.47)$$

Для покращеного другого наближення знаходимо:

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon^2\tilde{Y}(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) \qquad (1.48)$$

Зауважимо тепер, що

$$\underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\varepsilon X\left(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}\right) + \varepsilon^2 Y\left(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}\right)\right\} = \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\varepsilon X\left(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}\right)\right\} + \varepsilon^2 Y(t,\xi) + \varepsilon^3 \ldots =$$

$$= \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) + e^2 Y\ (t,\xi)\right\} + \varepsilon^3 \ldots, \qquad (1.49)$$

оскільки в рівняннях другого наближення члени порядку малості ε^3 не враховуються, (1,49) можна записати в будь-якій формі

$$\frac{d\xi}{dt} = \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\varepsilon X\left(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}\right) + \varepsilon^2 Y(t,\xi)\right\} \qquad (1.50)$$

або

$$\frac{d\xi}{dt} = \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\varepsilon X\left(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}\right) + \varepsilon^2 Y\left(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}\right)\right\}. \qquad (1.51)$$

Таким чином, рівняння другого наближення можуть бути отримані безпосередньо з точних рівнянь (1.45), якщо в їх праві частини підставити замість *x*форму покращеного першого наближення і усереднити по явно отриманому часу *t*, вважаючи в процесі усереднення змінні ξ як сталі, при цьому величини третього порядку можуть відкидатися $[2, \text{ст.}\, 304 - 307\,]$.

Даний принцип може бути сформульований також наступним чином: рівняння другого наближення отримують усередненням точних рівнянь (1.45), в обидві частини яких підставлено покращене перше наближення, по явному часу. Рівняння другого наближення випливає з співвідношення

$$\underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\} = \underset{t}{\mathrm{M}}\{\varepsilon X(t,x) + \varepsilon^2 Y(t,x)\}, \qquad (1.52)$$

де в обох частинах замість x стоїть $\left(\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\right)$, при цьому в процесі усереднення $\frac{d\xi}{dt}$, ξ трактуються як сталі, і величини порядку малості можуть не прийматися до уваги [18].

1.4. Обґрунтування методу усереднення М.М. Боголюбова для рівнянь в стандартній формі

Метод усереднення отримав широке застосування після популяризації Л.І. Мандельштамом і Н.Д. Папалексі метода Ван-дер-Поля. Але створення строгої теорії методу усереднення належить М.М. Боголюбову, який показав, що даний метод пов'язаний з використанням методу деякої заміни змінних, і дозволяє знехтувати часом *t*з правих частин рівнянь з довільним степенем точності відносно малого параметра ε [14].

Розглянемо метод усереднення М.М. Боголюбова для рівнянь в стандартній формі (рівняння, праві частини, яких пропорційні параметру ε).

Розглянемо систему диференціальних рівнянь в векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x) \tag{1.53}$$

де ε– малий додатний параметр; *t*- час; *x* – вектор n-вимірного евклідового простору E_n

$$X(t,x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_0(x)$$

Метод усереднення Н.Н. Боголюбова полягає в тому, що при окремих умовах, що накладаються на праву частину векторного рівняння (1.53), за допомогою заміни

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t,\xi) + \varepsilon^2 F_2(t,\xi) + \cdots + \varepsilon^m F_m(t,\xi) \tag{1.54}$$

зводять рівняння (1.22) до еквівалентного

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \cdots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t,\xi). \tag{1.55}$$

Нехтуючи складовою $\varepsilon^{m+1}R(t,\xi)$ в рівнянні (1.55), отримаємо усереднене рівняння mнаближення. Функції $X_0(\xi)$, $P_2(\xi)$, $P_m(\xi)$ визначаються в результаті усереднення правої частини рівняння (1.53) після підстановки виразу (1.54).

В першому наближенні розв'язком рівняння (1.53) є $x = \xi$, (де ξ знаходять з усередненої системи, $\underset{t}{\mathrm{M}}$ - оператор усереднення по явному часу t)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi)\} \qquad (1.56)$$

в покращеному першому наближені

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu} \frac{\varepsilon^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi) \qquad (1.57)$$

де ξ визначають з (1.56), а знак $\sim$ означає операцію інтегрування по явному часі.

В другому наближенні розв'язок визначається виразом (1.57), але ξ слід знаходити з усередненої системи другого наближення

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{X(t,\xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} \qquad (1.58)$$

Таким чином, рівняння (1.25) отримують безпосереднім усередненням правих частин початкового точного рівняння, а рівняння другого наближення (1.58) - підстановкою в точні рівняння (1.53) формули покращеного першого наближення (1.57) і подальшим усередненням по явному часу. При усередненні змінну ξ вважають сталою і складові вищого порядку відкидаються [12].

Для ефективної побудови наближеного розв'язку необхідно завчасно розв'язати рівняння першого і другого наближення (усереднених рівнянь). Але дані рівняння (як і точні) є диференціальними, що накладає певні умови на можливість застосування даного методу. В більшості випадків усереднені рівняння, особливо рівняння першого наближення, простіші і піддаються дослідженню. В багатьох випадках, в яких загальний розв'язок не вдається отримати, можна знайти важливі часткові розв'язки, які відповідають, наприклад, усталеним коливальним процесам [3, ст 85 − 86].

Розділ ІІ. Методи знаходження розв’язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

2.1. Поняття звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння – розділ математики, який вивчає теорію та способи розв’язування рівнянь, що містять шукану функцію та її похідні різних порядків одного аргументу (звичайні диференціальні) чи кількох аргументів (диференціальні рівняння в частинних похідних). Диференціальні рівняння широко використовують на практиці, зокрема для опису перехідних процесів[35].

Розрізняють звичайні диференціальні рівняння і диференціальні рівняння з частинними похідними, складнішими є інтегро-диференціальні рівняння.

Нелінійні диференціальні рівняння – розділ математики, який вивчає теорію та способи розв’язування нелінійних рівнянь, що містять шукану функцію та її похідні різних порядків одного аргументу (звичайні нелінійні диференціальні рівняння) чи кількох аргументів (нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних) [7].

Звичайне нелінійне диференціальне рівняння — це рівняння, в якому невідомою величиною є деяка функція та у диференціальне рівняння входить не лише вона, але й різні її похідні в нелінійному виді.

Розрізняють звичайні нелінійні диференціальні рівняння і нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних.

Нелінійні диференціальні рівняння виникли із задач нелінійної механіки, в яких фігурували координати тіл, їх швидкості та прискорення, розглянуті як функції від часу [4].

Задачі, які приводять до розв’язування нелінійних диференціальних рівнянь є відмінні одна від одної, і тому цей факт призводить до вибору різних методів розв'язку, або аналізу. Дані рівняння у широкому не мають розроблених загальних методів розв'язування, крім деяких часткових випадків. В окремих випадках (із застосуванням тих чи інших наближень) вони можуть бути зведені до лінійних.

Наприклад, лінійне рівняння гармонічного осцилятора $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ може розглядатись як наближення нелінійного рівняння математичного маятника $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 \sin y = 0$ для випадку малих амплітуд, коли $y \approx \sin y$, також прикладами нелінійних диференціальних рівнянь є рівняння Нав'є-Стокса із гідродинаміки і рівняння Лотки-Вольтерри з біології [14].

До загальних методів якісного аналізу розв'язування звичайних нелінійних диференційних рівнянь відносять:

- ✓ дослідження будь-яких консервативних величин, особливо у Гамільтонових системах;
- ✓ дослідження дисипативних величин аналогічно консервативним величинам;
- ✓ лінеаризація за допомогою розкладання в ряд Тейлора;
- ✓ заміна змінних з метою отримати форму, яку легшее вивчати;
- ✓ теорія біфуркацій;
- ✓ методи теорії збурень (можуть застосовуватися і до алгебраїчних рівнянь)[4].

2.2. Лінеаризація за допомогою розкладання в ряд Тейлора для розв'язання звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

Дослідження нелінійних диференціальних рівнянь суттєво важче і складніше, ніж лінійних. Тому в тих випадках, коли це можливо, завжди прагнуть лінеаризувати нелінійне диференціальне рівняння, тобто наближено замінити його деяким лінійним диференціальним рівнянням, розв'язок якого досить близький до розв'язку початкового нелінійного рівняння. Головною ознакою, що дозволяє зробити лінеаризацію рівнянь, є відсутність розривних, неоднозначних або різко змінних характеристик, що визначають залежність змінних рівнянь від різних факторів, тобто існування похідних функцій по всіх змінних.

Найпростіший спосіб лінеаризації полягає в розкладанні нелінійної функції в ряд Тейлора з подальшим відкиданням нелінійних членів розкладу$[6, \text{ст.} 93]$.

Так, формула Тейлора для нелінійної функції двох змінних x і y має наступний вигляд:

$$F(x,y) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right)_0^{(2)} + \cdots + R_{n+1} \qquad (2.1)$$

де (x_0, y_0) - значення змінних; $(\Delta x, \Delta y)$ - відхилення змінних від x_0, y_0; $x = x_0 + \Delta x,\ y = \ y_0 + \Delta y$ – поточні значення змінних .

У формулі (2.1) всі похідні обчислюються в точках з координатами і тому є сталими величинами. Зазвичай, якщо величини відхилень малі, обмежуються членами першого порядку малості, тобто нехтують залишковим членом ряду. Тоді з точністю до членів другого порядку малості отримаємо формулу Тейлора у вигляді

$$F(x,y) \approx F(x_0, y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \cdot \Delta y, \qquad (2.2)$$

Однак при лінеаризації рівнянь зручніше користуватися не формулою (2.2), а виразом для приросту функції $F(x,y)$, як більш простим. Цей приріст визначається різницею між поточним значенням функції і її значенням у фіксованій точці з координатами $F(x,y)$, тобто

$$\Delta F(x,y) = F(x,y) - F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \cdot \Delta y. \qquad (2.3)$$

Для того щоб формулу (2.3) застосувати безпосередньо до лінеаризації нелінійного рівняння, необхідно з вихідних рівнянь динаміки елементів відкинути рівняння статики. Потім в отримані рівняння підставити вирази для збільшення нелінійних функцій, що визначаються за формулою (2.3).

В результаті отримаємо лінеаризовані рівняння у відхиленнях, які є лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами і використовуються для дослідження динамічних властивостей елементів. Невідомими тепер будуть не самі шукані змінні, а їх відхилення від встановлених значень [27].

Розглянемо порядок лінеаризації на конкретному прикладі.

Приклад. Лінеаризувати рівняння:

$$a_2x^{(2)} + a_1xx^{(1)} + a_0xg = b_0g.$$

Позначимо

$$F\left(x^{(2)}, x^{(1)}, x, g\right) = a_2x^{(2)} + a_1xx^{(1)} + a_0xg - b_0g$$

тоді запишемолінеаризоване рівняння в загальному вигляді:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(2)}}\right)_0 \Delta x^{(2)} + \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(1)}}\right)_0 \Delta x^{(1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g = 0.$$

Визначимо похідні, враховуючи, що

$$x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = \cdots = x_0^{(n)} = g_0^{(1)} = g_0^{(2)} = \cdots = g_0^{(n)} = 0:$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x^{(2)}}\right|_0 = a_2, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x^{(1)}}\right|_0 = a_1x_0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 = a_0g, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial g}\right|_0 = a_0x_0 - b_0,$$

так , як$a_1x_0^{(1)} = 0$.

Відповідно до загального правила для лінеаризації рівнянь (2.3) отримаємо рівняння у відхиленнях:

$$a_2\Delta x^{(2)} + a_1x_0\Delta x^{(1)} + a_0g\Delta x + (a_0x_0 - b_0)\Delta g = 0$$

або

$$a_2\Delta x^{(2)} + a_1x_0\Delta x^{(1)} + a_0g\Delta x = (b_0 - a_0x_0)\Delta g.$$

Зведемо рівняння до стандартної форми:

$$T_2\Delta x^{(2)} + T_1\Delta x^{(1)} + \Delta x = k\Delta g,$$

де

$$T_2 = \frac{a_2}{a_0 g_0}, \qquad T_1 = \frac{a_1 x_0}{a_0 g_0}, \qquad k = \frac{b_0 - a_0 x_0}{a_0 g_0}.$$

Вважаючи, що відхилення є змінними щодо їх сталих значень, лінеаризоване рівняння можна записати

$$T_2 x^{(2)} + T_1 x^{(1)} + x = kg. \quad [30]$$

2.3.Особливі точки та особливі лінії диференціальних рівнянь

Нехай точка P знаходиться всередині області G, де ми розглядаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.4}$$

і відповідно

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x,y), \tag{2.5}$$

або на її межі, де рівняння (2.4) та (2.5) також можуть бути задані.

Якщо можна вказати такий окіл λ точки P,що через кожну точку даного околу проходить одна і тільки одна інтегральна лінія, і принаймні одна із функцій $f(x,y)$ і $f_1(x,y)$ в λнеперервна, то точку Pназиваютьзвичайною точкою рівняння (2.4) або (2.5).

Щоб точка P була звичайною, достатньо, щоб в λ функція $f(x,y)$ була неперервна по x і задовольняла умову Ліпшиця по y, або функція $f(x,y)$ була неперервна по y і задовольняла умову Ліпшиця по x.

Якщо точка P не звичайна, то вона називається особливою точкою для рівняння (2.4) або (2.5). Таким чином, точка P може бути особливою в трьох випадках:

1) точка P лежить на межі області G; будь яка така межова точка є особливою;

2) може виявитися, що точка P є точкою неєдиності, тобто такою точкою, що в будь-якому її околі через неї проходить більш ніж одна інтегральна лінія. Точка P також може бути граничною для точок неєдиності.

3) Саме задання поля напрямків може мати в точці P розрив (даний випадок зустрічається дуже рідко).

Також можлива і комбінація даних трьох випадків [25].

Ізольовані особливі точки (тобто такі особливі точки, в деякому околі яких немає інших особливих точок) в задачах частіше всього зустрічаються при дослідженні рівнянь виду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

де$M(x,y)$ і$N(x,y)$–функції, які мають неперервні частині похідні по x і y вищого порядку. Зауважимо, що для таких рівнянь всі внутрішні точки розглянутої області $M(x,y)\neq 0$ або $N(x,y)\neq 0$, є звичайними точками [28].

Розглянемо тепер деяку внутрішню точкуx_0,y_0, де $M(x,y)=0$ і $N(x,y)=0$. Для спрощеного запису припустимо, що $x_0=0$, $y_0=0$.Розкладаючи $M(x,y)$ і $N(x,y)$ по степенях x і y та обмежуючись при цьому членами другого порядку, отримаємо в околі точки (0;0)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M'_x(0,0)+M'_y(0,0)+O(x^2+y^2)}{N'_x(0,0)+N'_y(0,0)+O(x^2+y^2)}. \tag{2.6}$$

Це рівняння не визначає $\frac{dy}{dx}$ при $x=0$ і $y=0$, але якщо

$$\begin{vmatrix} M'_x(0,0) & M'_y(0,0) \\ N'_x(0,0) & N'_y(0,0) \end{vmatrix}\neq 0,$$

то, як би не задавати $\frac{dy}{dx}$ у початку координат, даний початок координат буде точкою розриву для значень $\frac{dy}{dx}$таособливою точкою для досліджуваного диференціального рівняння.

Відомо, що на характер поведінки інтегральних ліній біля ізольованої особливої точки (у даному випадку – початку координат) члени $O(x^2 + y^2)$, які знаходяться в чисельнику і знаменнику, не мають суттєвого впливу, якщо тільки дійсні частини обох коренів рівняння

$$\begin{vmatrix} M'_x(0,0) & M'_y(0,0) \\ N'_x(0,0) & N'_y(0,0) \end{vmatrix} \neq 0$$

відмінні від нуля. Розглянемо поведінку в початку координат інтегральних ліній рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

для якого

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо лінійним неособливим перетворенням є:

$$\begin{cases} x = k_{11}\xi + k_{12}\eta, \\ y = k_{21}\xi + k_{22}\eta, \end{cases}$$

де k_{ij} - дійсні, то дане рівняння зводиться до одного з наступних трьох видів:

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{d\xi} = k\dfrac{\eta}{\xi}, \quad (k \neq 0) & \text{(а)} \\ \dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{\xi + \eta}{\xi}, & \text{(б)} \\ \dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{\xi + k_\eta}{k_\xi - \eta}. & \text{(в)} \end{cases} \qquad (2.7)$$

Розглянемо детально кожен із трьох випадків та візьмемо до уваги, що якщо осі Oxі Oy – взаємно перпендикулярні, то осі $O\xi$ і $O\eta$ вже не будуть між собою створювати прямий кут, (але для спрощення виконання малюнків, $O\xi$ і $O\eta$зображають взаємно перпендикулярними).

У випадку (2.7 а) загальним інтегралом є рівняння $a\eta + |b\xi|^k = 0$. В даному випадку поведінка інтегральних ліній зображено на рисунках 2.1, 2.2, 2.3.

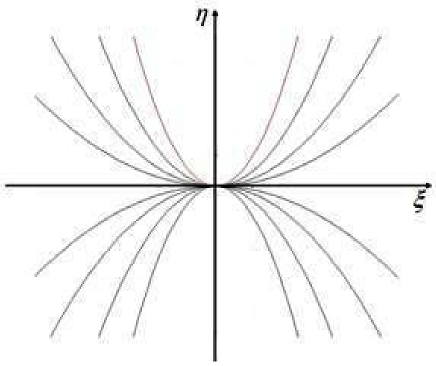


Рис.2.1

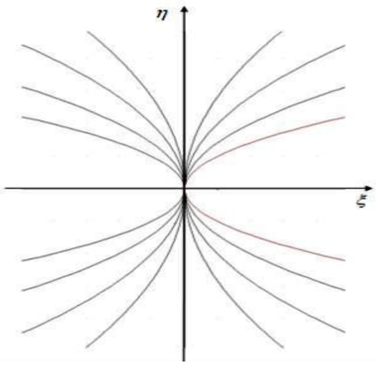
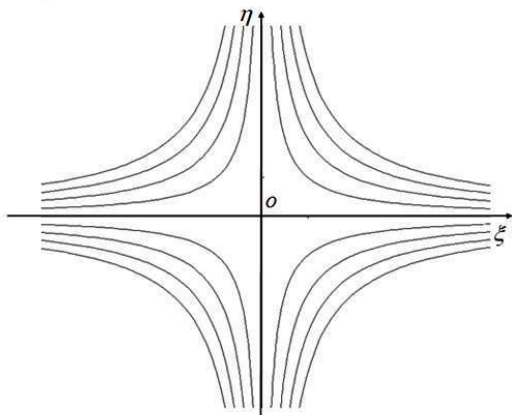


Рис.2.2

Рисунок 2.1 відноситься до випадку коли $k > 1$.Всі інтегральні лінії дотикаються в точці O осі $O\xi$ за виключеннями тільки обох половин осі $O\eta$.Дані осі $O\xi$ і $O\eta$ є інтегральними лініями всюди, за винятком самої точки O, де рівняння (2.7 (а)), не визначає ніякого напрямку.

При $0 < k < 1$ (рис.2.2) всі інтегральні лінії, за винятком тільки обох половин осі $O\xi$дотикаються $O\eta$.

В усіх випадках, коли $k > 0$, будь-яка інтегральна лінія наближається доO у визначеному напрямку, тобто має в точціO певну дотичну. Взагалі, будь яка інтегральна лінія, що має точки, достатньо близькі до O, наближається до точки O як завгодно близько і при цьому у визначену напрямку, то точку O називають вузлом. При $k > 0$точка O є вузлом для інтегральних ліній рівняння (2.7(а)).



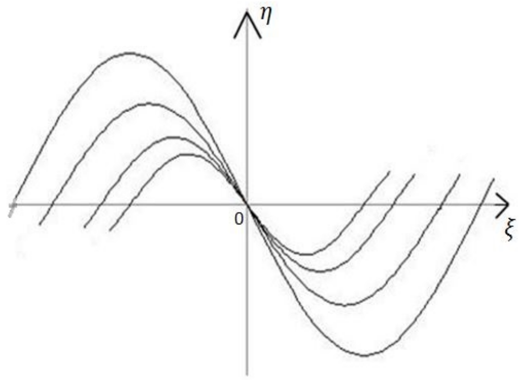


Рис.2.3 *Рис.2.4*

Поведінку інтегральних ліній $\eta|\xi|^{-k} = c$, коли $k < 0$, зображено на рисунку 2.3. В даному випадку до точки O наближаються як завгодно близько тільки чотири інтегральні лінії, а саме: дві півосі $O\xi$ і дві півосі$O\eta$. Будь яка інша інтегральна лінія, яка досить близько наблизилася до точки O, потім починає від неї віддалятися. Точку такого виду називають сідлом.

У випадку (2.7б) загальним інтегралом є рівняння виду $b_\eta = \xi(\alpha + {} +b\ln|\xi|)$ (рис.2.4), де всі інтегральні лінії дотикаються в точці O вісь $O\eta$. З координатних осей тільки вісь $O\eta$ є інтегральною лінією. Точка O в даному випадку також – вузол,як і при $k > 0$ в першому випадку.

Рівняння (2.7(в)) легше проінтегрувати, якщо перейти до полярних координат. Припустимо, що

$$\xi = \rho\cos\varphi\,, \qquad\qquad \eta = \rho\sin\varphi.$$

Тоді, після перетворень отримаємо

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = k\rho$$

і, відповідно

$$\rho = Ce^{k\varphi}.$$

Якщо$k > 0$, то всі інтегральні криві наближаються до точки O, нескінченно навиваючись на дану точку, коли $\varphi \to -\infty$ (рис. 2.5); при $k < 0$, теж саме відбувається, коли $\varphi \to +\infty$. В даних випадках точку O називають фокусом.

Якщо $k > 0$, сімейство інтегральних кривих рівняння (2.7(в)) складається з кола з центром в точці O. Взагалі якщо деякий окіл точки O повністю заповнений замкнутими інтегральними лініями, які містять O, то таку точку називають центром. Центр може легко перейти в фокус,якщо в чисельнику і знаменнику правої частини рівняння (2.6) дописати члени будь якого високого порядку; відповідно в даному випадку поведінка інтегральних кривих поблизу точки O не визначається членами 1-го порядку.

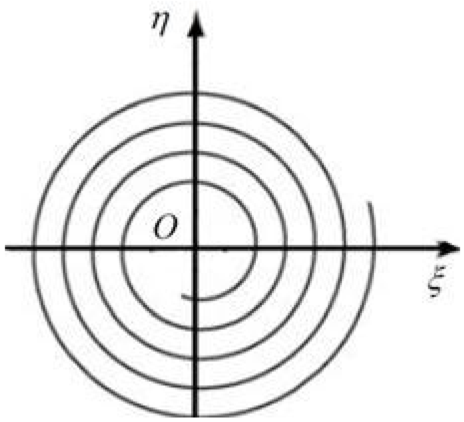


Рис. 2. 5

Лінію всі точки, якої є особливими для рівняння (2.4) або (2.5), називають особливою.

Якщо особлива лінія є інтегральною для рівняння (2.4) або (2.5), то будемо її називати особливою інтегральною лінією даного рівняння [21].

Прикладом особливої, але не інтегральної лінії може бути будь-яка не інтегральна лінія рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) .$$

Вісь Ox є особливою інтегральною лінією для рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} y\ln^2|y|, & \text{якщо } y \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } y = 0; \end{cases}$$

це інтегральна лінія неєдиності.

Будь-яка лінія, яка є частиною межі області G, де визначена одна із функцій $f(x,y)$і $f_1(x,y)$в рівнянні (2.4) або (2.5) і є особливою лінією для даного рівняння. Можливий і випадок, коли ця лінія є й інтегральною, якщо рівняння (2.4) або (2.5) задано і на границі G (тоді це буде гранична інтегральна лінія).

В якості прикладу інтегральної лінії, на якій в полі напрямків є розрив, можна взяти вісь x для рівняння

$$y' = sgn\, y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y > 0, \\ 0, & \text{якщо } y = 0, \\ -1, & \text{якщо } y < 0. \end{cases}$$

На рисунках (2.1) – (2.5) зображено схожі схеми для поведінки інтегральних ліній в околі ізольованої особливої точки. Якщо всі точки однозв'язної області G, де задана права частина диференціального рівняння (2.4), звичайні, то сімейство інтегральних ліній можна схематично зобразити сімейством відрізків паралельних прямих, так як в даному випадку через кожну точку області G проходить інтегральна лінія і ніякі дві інтегральні лінії не перетинаються.

Для рівняння загального виду (2.4) або (2.5), яке до того ж має особливі точки або лінії, структура інтегральних ліній може бути значно складнішою. Однією з фундаментальних задач теорії диференціальних рівнянь є задача – знайти по можливості більш простий спосіб побудови схеми поведінки сімейства інтегральних ліній заданого диференціального рівняння на всій його області визначення, тобто вивчення загальної поведінки інтегральних ліній даного рівняння. Ця задача, яка відноситься до так названої якісної теорії диференціальних рівнянь, ще далека від свого розв'язку, навіть для рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

де$M(x,y)$ і$N(x,y)$ – многочлен вище 1-го степеня.

В зв'язку з цим, розглянемо теорію про так названі «граничні цикли». Для цього розглянемо приклад диференціального рівняння

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - 1, \tag{2.8}$$

де ρ іφ - полярні координати на площині (x,y). Загальний інтеграл даного рівняння має вид

$$\rho = 1 + Ce^{\varphi},$$

де C - довільна стала; щоб ρ було невід'ємним, необхідно, щоб φ набувало значень не більших за $\ln|C|$; якщо $C < 0$. Сімейство інтегральних ліній складається (рис. 2.6) із:

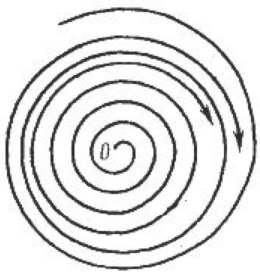


Рис. 2. 5

1) окола $\rho = 1$ $(C = 0)$;

2) спіралей, які виходять з початку координат, а зсередини наближаються до кола $\rho = 1$, коли $\varphi \to -\infty (C < 0)$.

3) нескінченних спіралей, які наближаються зовні до кола $\rho = 1$, коли $\varphi \to -\infty (C > 0)$.

Коло $\rho = 1$ називається граничним циклом для рівняння (2.8). Замкнута інтегральна лінія L називається граничним циклом, якщо всі її точки звичайні і до неї асимптотично наближена деяка інша інтегральна лінія.

Зауважимо, що всі точки кола$\rho = 1$ є звичайними для рівняння (2.8). В цьому можна впевнитися, якщо від полярних координат перейти до декартових.

Отже, малий окіл будь якої точки граничного циклу нічим не відрізняється від малого околу будь якої іншої неособливої точки [13].

Розділ III. Застосування методу усереднення для знаходження розв'язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

3.1.Усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінюваними параметрами

Як відомо, дослідження нестаціонарних коливальних процесів у багатьох випадках зводиться до застосування диференціальних рівнянь, в яких деякі параметри – маса системи, жорсткість, частоти і амплітуди зовнішніх впливів сил – змінюються з часом. Якщо дані параметри змінюються повільно (порівняно з так званою «природною» одиницею часу – періодом власних коливань), то для отримання наближених розв'язків можна скористатися методом усереднення [34].

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння з повільно змінюваними параметрами

$$\frac{d}{dt}\left[m(y)\frac{dx}{dt}\right]+c(y)x=\varepsilon F\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right), \qquad (3.1)$$

де ε - малий додатній параметр,$\frac{d\theta}{dt}=\nu(y)>0, m\ (y)$ і$c\ (y)$ - функції, при будь якиху; функція $F\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)$ періодична по θ з періодом 2π і може бути представлена в вигляді суми

$$F\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)=\sum_{n=-N}^{n=N}e^{in\theta}F_n\left(y,x,\frac{dx}{dt}\right), \qquad (3.2)$$

при цьому коефіцієнти $F_n\left(y,x,\frac{dx}{dt}\right)$ – деякі поліноми xта $\frac{dx}{dt}$.

Припустимо, що в рівнянні (3.1) параметр y повільно змінюється з часом, причому характер його зміни залежить від руху самої системи, описаної рівнянням (3.1) .

Нехай повільно змінювана величина y визначається рівнянням

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon f\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right), \qquad (3.3)$$

де$f\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)$– періодична функція по θ з періодом 2π, яка також може бути представлена в вигляді суми (3.2).

Для застосування принципу усереднення для системи рівнянь (3.1) – (3.3),в першу чергу необхідно звести її до стандартного вигляду. Для цього припустимо, що в даній системі відсутній резонанс, тобто при будь яких y

$$\nu(y) \neq \omega(y), \text{ де } \omega(y) = \sqrt{\frac{c(y)}{m(y)}}\,.$$

Тоді в рівняння (3.1), (3.3) ведемо нові зміні a, φіувідповідно до формул

$$x = acos\psi$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega(y)sin\psi, \tag{3.4}$$

$$y = y, \psi = \int \omega(y)\, dt + \varphi,$$

замість системи рівнянь (3.1) - (3.3) отримаємо систему рівнянь в стандартній формі

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{m(y)\omega(y)}\left\{a\frac{d[m(y)\omega(y)]}{dy}f(y,\theta,acos\psi - a\omega(y)sin\psi)sin^2\psi +\right.$$

$$\left. +F(y,\theta,acos\psi,-a\omega(y)\sin\psi)sin\psi\,\right\} \tag{3.5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{m(y)\omega(y)}\left\{\frac{d[m(y)\omega(y)]}{dy}f(y,\theta,acos\psi,-a\omega(y)sin\psi)sin\psi cos\psi +\right.$$

$$\left. +\frac{1}{a}F(y,\theta,acos\psi,-a\omega(y)sin\psi)cos\psi\right\},$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f(y,\theta,acos\psi,-a\omega(y)sin\psi) \qquad \left(\psi = \int \omega(y)dt + \varphi\right)$$

Якщо розглянути систему в резонансній зоні: $\omega(y) \approx \nu(y)$ (для визначеності в зоні основного резонансу), необхідно ввести змінні a, ψіувідповідно до формул

$$x = \mathrm{a}\cos(\theta + \psi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega(y)\sin(\theta + \psi), \tag{3.6}$$

$$y = y$$

після деяких простих перетворень перейдемо до системи рівнянь в стандартній формі

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{m(y)\omega(y)}\left\{a\frac{d[m(y)\omega(y)]}{dy}f\,(y, \theta, acos(\theta + \psi)\,, -a\omega(y)sin(\theta + \right.$$

$$\left. +\psi))sin^2(\theta + \psi) + F(y, \theta, acos(\theta + \psi) - a\omega(y)sin\,(\theta + \psi)sin(\theta + \psi)\right\}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon\Delta(y) - \frac{\varepsilon}{m(y)\omega(y)}\left\{a\frac{d[m(y)\omega(y)]}{dy}f\,(y, \theta, acos(\theta + \psi)\,, -a\omega(y)sin(\theta + \right.$$

$$+\psi))sin(\theta + \psi)\cos(\theta + \psi) + \frac{1}{a}F(y, \theta, acos(\theta + \psi) - a\omega(y)\sin(\theta + \psi) \times$$

$$\left. \times\, cos(\theta + \psi)\right\} \tag{3.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f(y, \theta, acos(\theta + \psi)\,, -a\omega(y)\,sin(\theta + \varphi))\big(\varepsilon\Delta(y) = \omega(y) - \nu(y)\big).$$

Для отримання усереднених рівнянь першому наближені в резонансному випадку, усереднюючи праві частини системи (3.7) по θ, отримаємо систему диференціальних рівнянь виду:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(y, a, \psi), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega(y) - \nu(y) + \varepsilon B_1(y, a, \psi),$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon D_1(y, a, \psi), \tag{3.8}$$

де

$$\omega(y) = \sqrt{\frac{c(y)}{m(y)}}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \nu(y)$$

і

$$A_1(y, a, \psi) = \frac{-1}{2\pi m(y)\omega(y)}\left\{\int_0^{2\pi} F(y, \theta, acos(\psi + \theta)\,, -a\omega(y)\,sin(\theta + \psi)) \times \right.$$

$$\times\, sin(\theta + \psi)d\theta +$$

$$+\frac{d[m(y)\omega(y)]}{dy}a\int_0^{2\pi}f(y,\theta,acos(\theta+\psi),-a\omega(y)\,sin(\theta+\psi))sin^2(\theta+\psi)d\theta\Bigg\},$$

$$B_1(y,a,\psi)=\frac{-1}{2\pi m(y)\omega(y)}\left\{\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}F(y,\theta,acos(\psi+\theta),-a\omega(y)\,sin(\theta+\psi))\times\right.$$

$$\times cos(\theta+\psi)d\theta+\frac{d[m(y)\omega(y)]}{dy}\int_0^{2\pi}f(y,\theta,acos(\theta+\psi),-a\omega(y)sin(\theta+\psi))\times$$

$$\left.\times cos(\theta+\psi)\,sin(\theta+\psi)d\theta\right\}, \qquad (3.9)$$

$$D_1(y,a,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y,\theta,acos(\theta+\psi),-a\omega(\mathrm{y})\sin(\theta+\psi))d\theta.$$

Розглянемо деякі окремі випадки системи (3.1) – (3.3), для яких інтегроване усереднення системи значно спрощується і може бути зведене до квадратур.

В першу чергу досліджуємо випадок,колив правій частині рівняння (3.3) маємо константу. Для визначеності припустимо, що$f\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)=1$. Тоді рівняння (3.1) матиме вигляд

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+c(\tau)x=\varepsilon F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right), \qquad (3.10)$$

де $\tau=\varepsilon t$ - «повільний» час.

Введемо нові позначення a іψза допомогою формул(для основного резонансу$\omega(\tau)\approx\nu(\tau)$)

$$x=aco\,s(\theta+\psi),$$
$$\frac{dx}{dt}=-a\omega(\tau)si\,n(\theta+\psi), \qquad (3.11)$$

отримаємо рівняння в стандартній формі

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{m(y)\omega(y)}\left\{a\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}sin^2(\theta+\psi)+F(\tau,\theta,\mathrm{a}co\,s(\theta+\psi),-\right.$$

$$\left.-a\omega(\tau)sin(\theta+\psi))\sin(\theta+\psi)\right\}, \qquad (3.12)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\varepsilon\Delta(\tau)-\frac{\varepsilon}{m(\tau)\omega(\tau)}\left\{\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}sin(\theta+\psi)cos(\theta+\psi)+\right.$$

$$+\frac{1}{a}F(\tau,\theta,acos(\theta+\psi),-a\omega(y)sin(\theta+\psi))cos(\theta+\psi)\Big\},$$

де $\varepsilon\Delta(\tau)=\omega(\tau)-\nu(\tau)$.

Усереднюючи праві частини по θ, знаходимо

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,a,\psi),$$
$$\frac{d\psi}{dt}=\varepsilon\Delta(\tau)+\varepsilon B_1(\tau,a,\psi), \qquad (3.13)$$

де $A_1(\tau,a,\psi)$ і $B_1(\tau,a,\psi)$ визначаються формулами (3.9).

Якщо в рівнянні (3.10) права частина задовольняє умову

$$F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)=F(\tau,x), \qquad (3.14)$$

усереднені рівняння (3.13) матимуть вигляд

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon a}{m(\tau)\omega(\tau)}\cdot\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau},$$
$$\frac{d\psi}{dt}=\omega(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi m(y)\omega(y)}\int_0^{2\pi}F(\tau,\theta,acos\,\psi)\,cos\psi\,d\psi. \qquad (3.15)$$

Система рівнянь (3.15) може бути проінтегрована до кінця. З першого рівняння знаходимо

$$a(\tau)=a_0\sqrt{\frac{m(0)\omega(0)}{m(\tau)\omega(\tau)}}\,, \qquad (3.16)$$

де a_0 – початкове значення амплітуди при $t=0$. Підставимо знайдені значення амплітуди в друге рівняння системи (3.15), отримаємо

$$\psi=\int_0^t\omega_e[a(\tau),\tau]dt, \qquad (3.17)$$

де введені позначення

$$\omega_e[a(\tau),\tau]=\omega(\tau)-\frac{\varepsilon[m(0)\omega(0)]^{-\frac{1}{2}}}{2\pi[m(\tau)\omega(\tau)]^{\frac{1}{2}}a_0}\int_0^{2\pi}F\left(\tau,a_0\sqrt{\frac{m(0)\omega(0)}{m(\tau)\omega(\tau)}}\,cos\psi\right)cos\psi\,d\psi.$$

Таким чином, коливання, описані рівнянням (3.10) при умові (3.14) в першому наближені «синусоїдальні» з амплітудою, повільно змінюються обернено пропорційно величині $\sqrt{m(\tau)\omega(\tau)}$, і фазою, яка змінюється відповідно формули (3.17). Розглянемо другий випадок, нехай

$$F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) = F\left(\tau, \frac{dx}{dt}\right). \tag{3.19}$$

Усередненні рівняння набувають вигляду

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \cdot \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} F(\tau, -a\omega(\tau) sin\psi) \times$$

$$\times\, sin\psi\, d\psi, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau).$$

З другого рівняння знаходимо закон змінення повної фази коливань

$$\psi = \int_0^t \omega(\tau) dt.$$

Очевидно, частота коливань, описаних рівнянням (3.10) при умові (3.19), в першому наближенні не залежить від амплітуди коливань, а залежить лише від характеру повільного змінення маси і жорсткості системи. Якби маса і жорсткість були сталими,то, як відомо, отримали б коливання, які називаються квазіізохронними (частота яких в першому наближенні стала і не залежить від амплітуди, як у більшості нелінійних коливальних систем) [24].

Розглянемо ще один окремий випадок, коли права частина рівняння (3.3) не залежить від вибору траєкторії (3.4) (рішення незбуреної системи), відносно якої виконується усереднення. Тоді третє рівняння системи (3.8) набуде вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}(y), \tag{3.22}$$

де

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y, \theta) d\theta.$$

З рівняння (3.22) знаходимо $y = y(\tau)$, після чого отримуємо знову рівняння (3.10) [29].

3.2. Метод усереднення для рівнянь вищого порядку

Більшість задач нелінійної механіки зводяться до дослідження диференціального рівняння m-го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної, виду

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f\left(\omega t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right), \tag{3.23}$$

де $f\left(\omega t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right)$ - періодична функція $\tau = \omega t$ з періодом $2\pi, \omega$ - «великий» параметр.

За допомогою заміни змінних

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x_2, \quad \dots \quad , \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} x_{m-1}, \omega t = \tau$$

рівняння (3.23) може бути зведене до системи рівнянь в стандартній формі

$$\frac{dx_\alpha}{d\tau} = \varepsilon x_{\alpha+1}\left(\alpha = 0,1,2, \dots, m-2; x = x_{0,} \ \varepsilon = \frac{1}{\omega}\right),$$
$$\frac{dx^{m-1}}{d\tau} = \varepsilon f(\tau, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, \varepsilon). \tag{3.24}$$

На детальному прикладі розглянемо побудову усередненої системи для рівнянь вищого порядку**.** Застосовуючи до системи (3.23) метод усереднення, за допомогою заміни змінних

$$x_\alpha = \xi_\alpha + \sum_{k \geq 1}^{n} \varepsilon^k u_{\alpha k}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})(\alpha = 0,1, \dots, m-1), \tag{3.25}$$

де $u_{\alpha k}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})(\alpha = 0,1, \dots, m-1; k = 1,2, \dots)$ - періодичні функції τ з періодом 2π, систему (3.24) зводять до усередненої системи рівняння першого порядку

$$\frac{d\xi_\alpha}{d\tau} = \varepsilon \Phi_\alpha^{(1)}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) + \dots + \varepsilon^n \Phi_\alpha^{(n)}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) +$$

$$+\varepsilon^{n+1} \Phi_\alpha^{(n+1)}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}, \tau, \varepsilon)(\alpha = 0, 1, 2, \dots, m-1). \tag{3.26}$$

При розв'язанні багатьох задач нелінійної механіки, особливо задач, пов'язаних з якісним аналізом диференціальних рівнянь (дослідження точок рівноваги, стійкості та ін.) доцільно розглядати не систему усереднених рівнянь першого порядку (систему (3.26)), а одне усереднене рівняння m-го порядку (аналогічно розглянутому окремому випадку коливань маятника з вібруючою точкою підвісу, де замість системи двох усереднених рівнянь переходили до аналізу одного усередненого рівняння другого порядку) [26].

В зв'язку з цим М.М. Боголюбов та Б.І. Садовніков [39] розробили варіант методу усереднення, який дає можливість отримати для системи (3.24) відповідну усереднену системуn-го наближення виду

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \varepsilon\xi_1,$$

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \varepsilon\xi_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad (3.27)$$

$$\frac{d\xi_{m-2}}{d\tau} = \varepsilon\xi_{m-1},$$

$$\frac{d\xi_{m-1}}{d\tau} = \varepsilon\Phi_1((\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) + \dots + \varepsilon^n\Phi_n(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}).$$

Переходячи до змінної *t*, систему (3.27) можна звести до одного рівнянняm-го порядку

$$\frac{d^m\xi}{dt^m} = \Phi_1\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}\xi}{dt^{m-1}}\right) + \dots + \varepsilon^{n-1}\Phi_n\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}\xi}{dt^{m-1}}\right)(\xi = \xi_0).$$

Ідея розробленого варіанту методу усереднення для рівнянь (3.24), зводиться до визначення функції $u_{\alpha k}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})(\alpha == 0,1, \dots, m-1; k = 1,2, \dots n)$і функції $\Phi_q(g = 1,2, \dots n)$ таких, щоб ряди (3.25) в яких ξ_α визначається з системи усереднених рівнянь (3.27), задовольняли системи рівнянь (3.24) з точністю до величин порядку малості ε^n. При цьому слід вимагати, щоб виконувались додаткові умови (вводяться для однозначності визначення шуканих функцій $u_{\alpha k}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})(\alpha = 0,1, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots n)$; вони повинні бути періодичними τ з періодом 2π і середнє значення від них по τ повинно дорівнювати нулю:

$$\int_0^{2\pi} u_{\alpha k} d\tau = 0).$$

Нехай праві частини системи (3.24) неперервні і мають частині похідні належного порядку.

Розглянемо формальний розклад рівняння (3.25) тільки як джерело отриманих наближених формул, не зупиняючись на питані збіжності.

Перейдемо до відшукання виразів для

$$u_{\alpha k}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}), \quad \Phi_k u_{\alpha k}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, m-1; \;\; k = 1, 2, \dots, n).$$

Диференціюючи ряди (3.25), знаходимо

$$\frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{d\xi_\alpha}{d\tau} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k \frac{\partial u_{\alpha k}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial u_{\alpha k}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{d\tau}$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, m-1). \tag{3.29}$$

Підставляючи вираз (3.29) і (3.27) у рівняння (3.24) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримуємо відношення для визначення шуканих функцій (3.28)

$$\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial \tau} = u_{\alpha+1,k-1} - \sum_{j=1}^{m-2} \frac{\partial u_{\alpha,k-1}}{\partial \xi_j} \xi_{j+1} - \sum_{\substack{r+q=k \\ r\geq 1, q\geq 1}} \frac{\partial u_{\alpha r}}{\partial \xi_{m-1}} \times$$
$$\times \Phi_{\mathrm{q}}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \tag{3.30}$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, m-2; k = 1, 2, \dots, n);$$

$$\frac{\partial u_{m-1,k}}{\partial \tau} = F_k - \Phi_k - \sum_{k-1}^{n} \sum_{j-1}^{m-2} \frac{\partial u_{m-1,k-1}}{\partial \xi_j} \xi_{j+1} - \tag{3.31}$$
$$- \sum_{\substack{r+q=k \\ r\geq 1, q\geq 1}} \frac{\partial u_{m-1,k}}{\partial \xi_{m-1}} \Phi_q(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$$

$$(k = 2, 3, \dots, n).$$

Тут F_k відображаються через задані функції $f(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ і $u_{ar}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})(a = 0,1, \dots, m-1; r = 1, 2, \dots, k-1)$. Відповідно з систем (3.30) і (3.31) можемо знайти $u_{ar}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ і $\Phi_k(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})(a = = 0,1, \dots, m-1;\ k = 1, 2, \dots, n)$

При *k=1* із системи (3.30) слідує,що

$$\frac{\partial u_{\alpha 1}}{\partial \tau} = 0 \qquad (\alpha = 0,1, \dots, m-2), \qquad (3.32)$$

з відношення (3.31) –

$$\frac{\partial u_{m-1,1}}{\partial \tau} = f(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) - \Phi_1(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \qquad (3.33)$$

Згідно додаткової умови відсутності нульової гармоніки в функціях$u_{ak}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$, із співвідношення (3.32) знайдемо

$$u_{a1}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) = 0 \qquad (a = 0,1, \dots, m-1)\,,$$

а із (3.33) –

$$\Phi_1(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})d\tau.$$

Інтегруючи рівняння (3.33), отримаємо

$$u_{m-1,1}\,(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) = f(\tau, \xi_0, \widetilde{\xi_1, \dots}, \xi_{m-1}),$$

де знак $\sim$означає інтегрування по явно вхідному часу.

Процес визначення функцій (3.28) може бути продовжений до як завгодно великого *k*.

Розглянемо окремий випадок – рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(\omega t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{3.34}$$

де функція $f\left(\omega t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ може бути представлена в вигляді

$$f(\tau, x, x) = \bar{f}(x, x) + \sum_{\sigma} a_\sigma \cos\sigma\tau + \ b_\sigma \sin\sigma\tau).$$

Для цього рівняння розв'язки значно спрощуються.

Скориставшись наведеними рекурентними рівняннями (3.30), (3.31), можемо виписати явні вирази для усереднених рівнянь першого і другого наближення (з точністю до величини порядку ε^2 включно, вже в змінних *t*).

Після деяких спрощень, знаходимо

$$\Phi_i(\xi, \xi_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_i\,(\tau, \xi, \xi_1)\, d\tau \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$F_1(\tau, \xi, \xi_1) = f(\tau, \xi, \xi_1), \quad F_2(\tau, \xi, \xi_1) = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} u_{11} \tag{3.35}$$

$$F_3(\tau, \xi, \xi_1) = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} u_{12} + \frac{\partial f}{\partial \xi} u_{02} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}(u_{11})^2,$$

де $u_{ak}(\tau, \xi, \xi_1)$ $(a = 0{,}1; k = 1, 2)$ визначаються виразами

$$u_{11}(\tau, \xi, \xi_1) = f(\widetilde{\tau, \xi, \xi_1}), \qquad u_{02}(\tau, \xi, \xi_1) = f(\widetilde{\widetilde{\tau, \xi, \xi_1}}),$$

$$u_{12}(\tau, \xi, \xi_1) = F_2(\tau, \xi, \xi_1) - \Phi_2(\tau, \xi, \xi_1) - \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi}\xi_1 - \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi_1}\Phi_1.$$

Усереднення рівняння першого наближення (у змінних *t*)–

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Phi_1\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right) + \varepsilon\Phi_2\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right),$$

другого наближення –

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Phi_1\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right) + \varepsilon\Phi_2\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right) + \varepsilon^2\Phi_3\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right). \tag{3.36}$$

Якщо в рівнянні (3.34)

$$f\left(\omega t, x, \frac{dx}{dt}\right) = m\frac{dx}{dt} + f(\omega t, x),$$

вираз (3.35) суттєво спроститься і рівняння другого порядку(3.36) в змінних *t* матиме вигляд:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = F_1(\xi) - m\frac{d\xi}{dt} - \varepsilon^2 \sum_{\sigma \geq 1} \frac{a'_{\sigma\xi}(\xi)a_\sigma(\xi) + b'_{\sigma\xi}(\xi)b_\sigma(\xi)}{2\sigma^2}$$

3.3. Застосування методу усереднення для дослідження диференціальних рівнянь з «періодичними» коефіцієнтами

При розв'язуванні багатьох задач приходять до систем диференціальних рівнянь типу

$$\frac{dx_1}{dt} + \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t)x_k = \varepsilon f_i(t, x_{1,\dots,}x_{n)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \qquad (3.37)$$

де $p_{ik}(t)(i =, k = 1,2, \dots, n)$ – періодична функція часу з загальним періодом *T*. Будемо вважати,що ці функції неперервні, а функції $f_i(t, x_i, \dots, x_n)$ періодичні по *t* з періодом *T*.

Незбурену систему, відповідну до системи (3.37), при деяких обмеженнях за допомогою заміни змінних можна звести до системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами за допомогою тої самої заміни змінних,збурену систему (3.37) – до системи, близької до лінійної зі сталими коефіцієнтами.

Звівши отриману систему до стандартної форми, можемо застосувати метод усереднення [37].

Цілий ряд важливих фізичних проблем приводить до необхідності відшукання наближеного розв'язання більш складних систем з «періодичними» коефіцієнтами виду

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(\tau, \theta)x_k = \varepsilon f_i(\tau, \theta, x_1, \dots, x_a)(i = 1, 2 \dots., n), \qquad (3.38)$$

де $\tau = \varepsilon t,\ \frac{d\theta}{dt} = v(\tau),\ P_{ik}(\tau, \theta)(i, k = 1, 2, \dots, n)$ - періодичні функції θ.

Система (3.38) шляхом введення нових змінних також може бути зведена до стандартного вигляду, після чого, для відшукання наближеного розв'язку, необхідно скористатися методом усереднення для рівнянь вищого порядку.

Детально зупинимося на розгляді диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(\tau,\theta)x=\varepsilon F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right), \tag{3.39}$$

де функції $p(\tau,\theta), F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)$ періодичні по θ з періодом 2π; $\frac{d\theta}{dt}=v(\tau)$; $p(\tau,\theta), v(\tau)$і$F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)$необмежено диференційовані по τ для будь яких скінченнихτ, $\tau=\varepsilon t$. Крім того, функції $F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)$ можуть бути представлені в вигляді скінченних сум Фур'є по θ з коефіцієнтами, які є поліномами відносно $x,\frac{dx}{dt}$.

На прикладі рівняння (3.39) покажемо, що за допомогою спеціальної заміни змінних дане диференціальне рівняння зручно звести до стандартного виду і застосувати метод усереднення.

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)x=0, \tag{3.40}$$

де $p(t)$– періодична функція tз періодом 2π.

Припустимо, що для рівняння (3.40) відомі два лінійно незалежні випадкові розв'язки$x_1(t)$, $x_2(t)$, які задовольняють початкові умови

$$x_1(0)=1,\quad x_1(0)=0,$$

$$x_2(0)=0,\quad x_2(0)=1.$$

Характер загального розв'язку рівняння (3.40) повністю визначається характером коренів рівняння

$$\sigma^2-[x_1(2\pi)+x_2(2\pi)]\sigma+1=0. \tag{3.41}$$

Зокрема, якщо виконується умова

$$A=|x_1(2\pi)+x_2(2\pi)|<2,$$

то корені рівняння (3.41) будуть комплексними і спряженими:

$$\sigma_1=e^{ia},\ \ \sigma_2=e^{-ia},$$

і загальний розв'язок рівняння (3.40) може бути записаний у виді

$$x(t) = C_1 e^{ia\frac{t}{2\pi}} u_1(t) + \ C_2 e^{-ia\frac{t}{2\pi}} u_2(t),$$

де $u_1(t)$, і $u_2(t)$– періодичні функції *t*з періодом 2π, визначені виразами

$$u_1(t) = \left\{ x_1(t) + \frac{\sigma_1 - x_1(2\pi)}{x_2(2\pi)} x_2(t) \right\} e^{-ia\frac{t}{2\pi}},$$

$$u_{12}(t) = \left\{ x_1(t) + \frac{\sigma_2 - x_1(2\pi)}{x_2(2\pi)} x_2(t) \right\} e^{-ia\frac{t}{2\pi}},$$

а C_1 і C_2 – довільні сталі .

Розглянемо побудову усередненої системи рівнянь**,** для цього припустимо, що в рівнянні (3.39) $\varepsilon = 0$ і $\tau = const$, отримаємо

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p[\tau, \nu(\tau)t]x = 0, \tag{3.42}$$

яке називають незбуреним рівнянням, де $p = [\tau, \nu(\tau)t]$- періодична функція *t*з періодом $\frac{2\pi}{\nu(\tau)}$.

Припустимо, що для рівняння (3.42) відомі два лінійно-незалежні випадкові розв'язки$x_1(\tau, t)$, $x_2(\tau, t)$, залежні від τ як від параметра, які задовольняють початкові умови

$$\begin{aligned} x_1(\tau, 0) = 1, \quad x_1(\tau, 0) = 0, \\ x_2(\tau, 0) = 0, \quad x_2(\tau, 0) = 1. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Рівняння (3.41) в розглянутому випадку буде мати вигляд

$$\sigma^2 - \left[x_1\left(\tau, \frac{2\pi}{\nu(\tau)}\right) + x_2\left(\tau, \frac{2\pi}{\nu(\tau)}\right) \right] \sigma + 1 = 0. \tag{3.44}$$

Також розглядають випадок, коли виконуються умови, аналогічні умові (3.40)

$$A(\tau) = \left| x_1\left(\tau, \frac{2\pi}{\nu(\tau)}\right) + x_2\left(\tau, \frac{2\pi}{\nu(\tau)}\right) \right| < 2,$$

для будь яких τ на проміжку $0 \le \tau \le L$. Коренями рівняння (3.44) будуть

$$\sigma_1 = \sigma_1(\tau) = e^{ia(\tau)}, \quad \sigma_2 = \sigma_2(\tau) = e^{-ia(\tau)} \tag{3.45}$$

загальний розв'язок рівняння (3.42) буде матиме вигляд

$$x(t) = C_1 e^{i\alpha(\tau)\frac{\nu(\tau)}{2\pi}t} u_1(\tau, t) + C_2 e^{-i\alpha(\tau)\frac{\nu(\tau)}{2\pi}t} u_2(\tau, t) \qquad (3.46)$$

де $u_1(\tau, t)$ і $u_2(\tau, t)$ - періодична функція tз періодом $\frac{2\pi}{\nu(\tau)}$, визначені виразами

$$u_1(\tau, t) = \left[x_1(\tau, t) + \frac{\sigma_1(\tau) - x_1\left(\tau, \frac{2\pi}{\nu(\tau)}\right)}{x_2\left(\tau, \frac{2\pi}{\nu(\tau)}\right)} x_2(\tau, t) \right] e^{-i\alpha(\tau)\frac{\nu(\tau)}{2\pi}t}$$
$$u_2(\tau, t) = \left[x_1(\tau, t) + \frac{\sigma_2(\tau) - x_1\left(\tau, \frac{2\pi}{\nu(\tau)}\right)}{x_2\left(\tau, \frac{2\pi}{\nu(\tau)}\right)} x_2(\tau, t) \right] e^{i\alpha(\tau)\frac{\nu(\tau)}{2\pi}t} \qquad (3.47)$$

Зауважимо, що вираз (3.46) при $\tau = const$ задовольняє рівняння (3.40). Якщо в рівнянні (3.42), а також в виразі (3.46) введемо змінну $\tau = \varepsilon t$, то вираз (3.46) буде задовольняти рівняння (3.42) на проміжку $0 \le t \le \frac{L}{\varepsilon}$, наближено з точністю до величини порядку ε.

Після цих попередніх міркувань відносно розв'язку незбуреного рівняння (3.42) перейдемо до перетворення і побудови методом усереднення наближеного розв'язку рівняння (3.39).

Припустимо, що у проміжку часу $0 \le t \le \frac{L}{\varepsilon}$ виконується умова (3.45) та розглянемо питання побудови наближеного розв'язку рівняння (3.39) в області стійких розв'язки незбуреного рівняння (3.42). Крім того, позначимо $\alpha(\tau)\frac{\nu(\tau)}{2\pi} = \alpha_1(\tau)$.

Розглянемо випадок резонансу, коли на інтервалі часу $0 \le \tau \le L$, $\alpha_1(\tau)$ може наблизитись до величини$\frac{p}{q}\nu(t)$, де p і q - цілі взаємно прості числа, або співпадають з нею.

При даних припущеннях зведемо рівняння (3.39) до стандартного виду. Для цього введемо в рівняння (3.39) нові змінні a і ψ за допомогою формул

$$x = ae^{i\left(\frac{p}{q}\theta + \psi\right)} u_1(\tau, t) + ae^{-i\left(\frac{p}{q}\theta + \psi\right)} u_2(\tau, t) \qquad (3.48)$$

$$\frac{dx}{dt} = ae^{i\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)}[i\alpha_1(\tau)u_1(\tau,t) + u_1(\tau,t)] -$$
$$-ae^{-i\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)}[i\alpha_1(\tau)u_2(\tau,t) + u_2(\tau,t)] \quad (3.49)$$

де $u_i(\tau,t)$ $(i = 1{,}2)$ похідні по часу t. Структура формул прийнятої заміни змінних (3.48) – (3.49) повністю випливає з формули (3.46).

Продиференціюємо праву частину виразу (3.46), врахувавши при цьому, що $a = a(t), \psi = \psi(t), \tau = \varepsilon t$, отримані результати прирівняємо з правою частиною (3.49).

Продиференціюємо вираз (3.49) і результат, а також значення x відповідно формули (3.48) підставимо у рівняння (3.39). Врахувавши, що (3.46) – розв'язок незбуреного рівняння (3.42), після ряду перетворень отримаємо систему рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon F_1(\tau,\theta,a,\psi)$$
$$\frac{d\psi}{dt} = a_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon F_2(\tau,\theta,a,\psi) \quad (3.50)$$

де $F_1(\tau,\theta,a,\psi)$і $F_2(\tau,\theta,a,\psi)$ – відомі функції, періодичні по θ і ψ з періодом 2π.

Для резонансного випадку, коли $\alpha_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)$на всьому інтервалі зміни τ, $0 \le \tau \le L$, - величина порядку ε, усереднюючи праві частини системи (3.50) по t, вважаючи при цьому t, a, ψ сталими параметрами, а $\theta = \int_0^t \nu(\tau)dt$, отримаємо усереднену систему першого наближення

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{F_1(\tau,\theta,\bar{a},\bar{\psi})\} \quad (3.51)$$
$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = a_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon \underset{t}{\mathrm{M}}\{F_2(\tau,\theta,\bar{a},\bar{\psi})\}$$

Визначивши із системи (3.51) – $\bar{a} = \bar{a}(t)$і $\bar{\psi} = \bar{\psi}(t)$ і підставивши результати в праву частину (3.46), отримаємо розв'язок рівняння (3.39) в першому наближені

$$x_1(t) = \bar{a}(t)e^{i(p\varphi+\bar{\psi}(t))}u_1(\tau,t) + \bar{a}(t)e^{-i(p\varphi+\bar{\psi}(t))}u_2(\tau,t)$$

де $\varphi = \frac{1}{q}\theta$.

В якості найпростішого прикладу лінійного рівняння з періодичними коефіцієнтами розглянемо коливальну систему, рух якої описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n(\tau)\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \qquad (3.52)$$

де $n(\tau)$ - повільно змінюваний коефіцієнт тертя, і є малою величиною, $\tau = \varepsilon t, p(t)$- періодична функція tз періодом 2π, змінюється за формулами

$$p(t) = k^2, \qquad 2n\pi \le t \le (2n+1)\pi$$

$$p(t) = 0, \quad (2n+1)\pi \le t \le (2n+2)\pi \ (n = 0,1,2, \dots)$$

де k – стала .

Незбурене рівняння , відповідне до збуреного (3.52), матиме вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0 \qquad (3.53)$$

Для рівняння (3.53) знаходимо відповідні розв'язки, які задовольняють початкові умови (3.43). Матимемо

$$x_1(t) = \cos kt, \quad 0 \le t \le \pi \qquad (3.54)$$

$$x_1(t) = \cos k\pi + (\pi - t)k\sin k\pi, \quad \pi \le t \le 2\pi$$

$$x_2(t) = \frac{\sin kt}{k}, \qquad 0 \le t \le \pi$$

$$x_2(t) = \frac{\sin kt}{k} + (t-\pi)\cos k\pi\,, \quad \pi \le t \le 2\pi \qquad (3.55)$$

Рівняння (3.53) яке визначає характер загального розв'язку рівняння (3.53) в розглянутому випадку буде мати вид

$$\sigma^2 - (2\cos k\pi - k\pi\sin k\pi)\sigma + 1 = 0, \qquad (3.56)$$

а умови комплексності коренів даного рівняння (умова (3.45))

$$|2\cos k\pi - k\pi\sin k\pi| < 2. \qquad (3.57)$$

Умова (3.57) буде виконуватися, зокрема, при $k = \frac{1}{2}$. В цьому випадку рівняння (3.56) можна записати наступним чином:

$$\sigma^2 + \frac{2}{\pi}\sigma + 1 = 0.$$

Звідси знайдемо

$$\sigma_1 = e^{2,475i}, \qquad \sigma_2 = e^{-2,475i}. \tag{3.58}$$

Розв'язки (3.54) і (3.55) для випадку $k = \frac{1}{2}$ будуть мати вигляд

$$x_1(t) = \cos\frac{t}{2}, \qquad x_2(t) = 2\sin\frac{t}{2}, \;\; 0 \le t \le \pi$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(\pi - t), \quad x_2(t) = 2, \qquad \pi \le t \le 2\pi.$$

Тепер знайдемо загальний розв'язок рівняння(3.53). Згідно з співвідношення (3.46) і (3.58), маємо

$$x(t) = C_1 e^{2,475i\frac{t}{2\pi}} u_1(t) + C_2 e^{-2,475i\frac{t}{2\pi}} u_2(t), \tag{3.59}$$

де C_1і C_2 - довільні сталі, $u_1(t)$ і $u_2(t)$ -функції, періодичні по *t*з періодом 2π, які визначаються відповідно до формул (3.47) виразами

$$u_1(t) = \left\{x_1(t) + \left(\frac{\pi}{8} + i0,309\right)x_2(t)\right\}e^{-i\frac{2,475t}{2\pi}}$$
$$u_2(t) = \left\{x_1(t) + \left(\frac{\pi}{8} - i0,309\right)x_2(t)\right\}e^{i\frac{2,475t}{2\pi}} \tag{3.60}$$

Підставивши значення $u_1(t)$ і $u_2(t)$ відповідно до формул (3.60) у вираз (3.59), отримаємо

$$x(t) = C_1\left\{x_1(t) + \left(\frac{\pi}{8} + i0,309\right)x_2(t)\right\} + C_2\left\{x_1(t) + \left(\frac{\pi}{8} - i0,309\right)x_2(t)\right\},$$

де $x_1(t)$ і $x_2(t)$ визначаються за формулами (3.54) та (3.55).

Задавшись початковими значеннями

$$x(0) = x_0, \qquad x(0) = 0 \tag{3.61}$$

для сталих C_1і C_2 знайдемо :

$$C_1 = \frac{x_0}{2}(1 + 1{,}271i), \qquad C_2 = \frac{x_0}{2}(1 - 1{,}271i),$$

після чого розв'язки збуреного рівняння (3.53), яке задовольняє початкові умови (3.61) для t, яке змінюється на проміжку $[0; 2\pi]$, буде мати вид

$$x(t) = x_0 x_1(t),$$

а для наступних моментів часу –

$$x(t + 2\pi n) = x_0\{x_1(t)[\cos 2{,}475n - 1{,}271 \sin 2{,}475n] - x_2(t) 0{,}808 \sin 2{,}475n\}$$

де $n = 1,2,3, \ldots$ [40]

Розглянемо збурене рівняння (3.52). Для зведення його до стандартного вигляду введемо нові змінні η_1 і η_2 відповідно до формул

$$x = \eta_1 e^{\frac{i\alpha}{2\pi}t} u_1(t) + \eta_2 e^{-\frac{i\alpha}{2\pi}t} u_2(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \eta_1 \frac{ia}{2\pi} e^{\frac{i\alpha}{2\pi}t} u_1(t) + \eta_1 e^{\frac{i\alpha}{2\pi}t} u_1(t) - \eta_2 \frac{ia}{2\pi} e^{-\frac{i\alpha}{2\pi}t} u_2(t) + \eta_2 e^{-\frac{i\alpha}{2\pi}t} u_2(t),$$

де $\alpha = 2{,}475, u_1(t)$ і $u_2(t)$ визначаються відповідно до формул (3.60).

Після перетворень отримаємо систему рівнянь в стандартній формі

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{2n(\tau)}{D(0)} u_2(t) \left\{\frac{ia}{2\pi}\eta_1 u_1(t) + \eta_1 u_1(t) - \frac{ia}{2\pi}\eta_2 u_2(t) + \eta_2 u_2(t)\right\}, \tag{3.62}$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{2n(\tau)}{D(0)} u_1(t) \left\{\frac{ia}{2\pi}\eta_1 u_1(t) + \eta_1 u_1(t) - \frac{ia}{2\pi}\eta_2 u_2(t) + \eta_2 u_2(t)\right\},$$

де $D(0)$ матиме вигляд

$$D(0) = 2i\left[u_1(0)u_2(0) - u_1(0)u_2(0) + \frac{ia}{\pi} u_1(0)u_2(0)\right].$$

Усереднюючи праві частини системи (3.62), отримаємо систему

$$\frac{d\overline{\eta_1}}{dt} = \overline{\eta_1}|n(\tau)(a + bi)| + \overline{\eta_2}|n(\tau)(c + id)|,$$

$$\frac{d\overline{\eta_2}}{dt} = \overline{\eta_1}|n(\tau)(c + id)| + \overline{\eta_2}|n(\tau)(a - ib)|. \tag{3.63}$$

При цьому

$$a = -1, \qquad b = 0{,}1929, \qquad c = -0{,}3125, \qquad d = 0{,}04537.$$

Отримана усереднена система (3.63) є лінійна і може бути елементарно проінтегрована. Після її інтегрування легко можемо проаналізувати вплив малого повільно змінюваного тертя на процес коливань, що виникають в системі (3.53) [19].

Висновки

Під час дослідження було проаналізовано наукову та методичну літературу та досліджено різні методи розв’язування звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Систематизовано основні відомості про метод усереднення та застосування цього методу для знаходження розв’язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь.

Одним із загальних методів якісного аналізу для даного виду рівнянь є лінеаризація. Встановлено, що найпростіший спосіб лінеаризації полягає в розкладанні нелінійної функції в ряд Тейлора з подальшим відкиданням нелінійних членів розкладу.

Метод усереднення є одним із асимптотичних методів розв’язування сингулярно збурених задач. Для обґрунтування методу усереднення за теорією М.М. Боголюбова для рівнянь в стандартній формі було введено поняття рівнянь першого та другого наближення.

Розглянуто методику застосування методу усереднення для знаходження розв’язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Проведено дослідження усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінюваними параметрами та методу усереднення вищих порядків.

Матеріал даної бакалаврської роботи може бути використаний при викладанні предмету диференціальні рівняння у вищому навчальному закладі. Наукові положення, висновки і рекомендації, сформульовані в бакалаврській є достовірними і всебічно обгрунтованими, що підтверджується використанням широкого спектру сучасних методів досліджень, повнотою джерел використаної інформації.

Список використаної літератури

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособ. Изд. 7-е, испр. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 296с.

2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний: Гос. изд-во физико-мат. лит.Москва, 1958. 408 с.

3. Вибрации в технике: Справочник. Т. 2. Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.

4. Найфэ А.Х. Методы возмущений. Москва: Мир, 1996. 456 с.

5. Пономарев В.М., Литвинов А.П. Основы автоматического регулирования и управления. Лекции: учеб. пособ. Москва1974. 440 с.

6. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник. Москва: КомКнига, 207. 204с

7. Клочко Т.В., Кондратьєв Б.В., Лесік Н.І. Дослідження особливих розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку: навч.-метод. посб. Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2012. 44 с.

8. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособ. Москва: Высш. шк., 1989. 383с.

9. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособ. Москва: Мир, 1986. 463с.

10. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладних задачах:учеб. изд. Москва: Наука, 1986. 256с.

11. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: уч.-изд. Москва: Наука 1978. 304с.

12. Айнс Э.Л. Обыкновенны дифференциальные уравнения. пер. з англ. под..ред.А.М. Эфроса. Харьков,1939. 719с.

13. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений: пер. з немец. Макарова Н.П. Москва,1974.319 с.

14. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнение. пер. з англ.Жукова А.Ф. под.ред. С.И. Похожаева.Москва: Наука,1988, 304с.

15. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости: Иследование резонансних многочастотных систем: учеб. пособ. Москва: Наука, 1986. 192с.

16. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учеб. пособ. Москва,1967. 471с.

17. Хартман Ф. Обыкновенны дифференциальные уравнения. пер. з англ.Сабитова И.Х. и Егорова В.Ю. под. ред. В.М. Алексеева. Москва: Мир, 1970. 719с.

18. Калякин Л.А. Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности. Уфимский математический журнал. 2009. №2 с.29-52.

19. Щербаков В.С. Теория автоматического управления. Линейные непрерывные системы: учеб.пособ.Омск: СиБаДи,2019.142с.

20. Егоров В. И. Обыкновенное дифференциальные уравнения с приложениями. Изд. 2-е. Москва: ФИЗМАЛИТ, 2005. 384с.

21. Понтрягин Л.С. Обыкновенное дифференциальные уравнения. Изд. 4-е. Москва: Наука,1974. 331с.

22. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. Киев: Либидь,1992. 188с.

23. Гутер Р.С. Янпольский А.Р. Дифференцыальные уравнения.Изд. 2-е. Москва: Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 1976. 304 с.

24. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ю.К. Рудавський та ін. Львів: Вища школа,2001. 244с.

25. Жегалов В.И. Обыкновенное дифференциальные уравнения в научных теориях. Казань: Казанское математическое сообщество,2003. 100с.

26. Головатий Ю.Д.,Кирилич В.М., Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь: навч. посіб. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. 470с.

27. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений: учеб.пособ. Москва: Физматгиз,1959. 468 с.

28. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні та інтегральні рівняння: навч.посіб. Вид. 2-ге, випр. та доп. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014.360 с.

29. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Київ: Техніка, 2003. 368с.

30. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф.С. Гудименко та ін. Київ: Вища школа,1972. 154с.

31. АндреевА.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Минск: Высшая школа ,1979. 136с.

32. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб.пособ. Изд. 6-е. Москва: УРСС, 2003. 272с.

33. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / Филиппов А.В. Москва: Ижевск: Изд-во РХД, 2000.175с.

34. Митропольський Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике: монография. Киев: «Наукова думка», 1971.443с.

35. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: ФИЗМАЛИТ, 2001. 576 с

36. Тихонов А., Васильева, А Дифференциальные уравнения: учебник для вузов. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256с.

37. Матвеев Н.В. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособ. Москва: Высшая школа, 1976. 303с.

38. Боголюбов Н.Н., Садовников Б.И. Об одномварианте метода усреднения. Вестник МГУ.1961.№3.с.24-34.

39. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М.Диференціальні та інтегральні рівняння: навч. посіб. Київ: Либідь, 2004. 408с.

40. Федевич О. Ю. Інформаційна технологія аналізу та прогнозування трафіку в комп’ютерних мережах : дис. … с. канд. техн. наук : 05.13.06 / нац. ун-т. Львів, 2018. 214 с.