Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

α-Метод розв'язування рівнянь в частинних похідних

Виконала: студентка ІІ курсу,
групи ММ-21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Кідун Тетяна Андріївна
Керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики РДГУ
Сапіліді Тамара Михайлівна
Рецензенти:
- кандидат фізико-математичних наук, доктор технічних наук, професор, завідуючий кафедрою інформатики НУВГП
Турбал Юрій Васильович
- кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та прикладної математики РДГУ
Шахрайчук Микола Іович

Рівне-2020 року

Зміст

Вступ

Багато вчених досліджували та вивчали різні методи розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних**.**

Актуальність дослідження.

Дана робота присвячена вивченню α-методу ефективного наближення розв'язків ряду важливих інтегральних та диференціальних рівнянь, як звичайних, так і в частинних похідних.

Дослідженням цього методу займалися такі вчені як, В. К. Дзядик, В.І.Біленко, В.П.Бурлаченко, П.Н.Денисенко, В.В.Конєв, та інші. [9; 12; 24]

Апроксимаційні метод (α-метод) наближеного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами дає можливість, наприклад, в загальних випадках задачі Коші і крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь просто і ефективно будувати на $[-h, h]$ многочлени $y_n(x)$.

α -метод є строго теоретично обгрунтованим. Наприклад, отримана теорема існування многочленів $y_n(x)$, а також якісне уявлення для різниці $y(x) - y_n(x)$ і, зокрема встановленої рівності виду

$$\|y(x) - y_n(x)\| = (1 + \varepsilon_n)\, E_n(y)_{\|\cdot\|},\ \varepsilon_n \to 0,$$

є більш гнучким у розв'язанні задач. [11]

Об'єкт – диференціальні рівняння в частинних похідних

Предмет – α-метод розв'язування рівняння в частинних похідних

Мета роботи: вивчити методи розв'язування рівняння в частинних похідних, а зокрема α-метод.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі ***завдання****:*

1. Розглянути диференціальні рівняння в частинних похідних;
2. Вивчити методи, одержані шляхом застосування послідовностей лінійних операторів до наближеного розв'язування диференціальних рівнянь. α-метод зокрема;

3. Розв’язати завдання Діріхле для лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами еліптичного типу на прямокутнику;

4. Знайти наближене рішення початкової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами параболічного типу на півсмузі;

5. Розглянути застосування α-методу до лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами гіперболічного типу;

6. Вивчити AI-метод наближеного розв'язання нелінійних задач Коші, Дарбу і Гурса для диференціальних рівнянь гіперболічного типу.

***Методи дослідження*:** вивчення і аналіз наукової літератури; вивчення і узагальнення вітчизняної та зарубіжної практики; аналіз та синтез вивченої інформації.

Практичне значення одержаних результатів

α-метод можна застосовувати в різних типах розв'язання задач вищої математики. Зокрема задачі Гурса, задачі Коші, мішаної задачі та інших.

***Структура роботи*.** Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (46 найменувань).

В першому розділі розглядається α-метод розв’язування лінійних диференціальних рівнянь. Розглянули, що таке диференціальні рівняння в частинних похідних. Вивчили методи, за допомогою яких можна знайти наближені розв’язки диференціальних рівнянь. Розглянули α-Метод наближення многочленами розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами.

В другому розділі розглядається задача Діріхле для лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами еліптичного типу на прямокутнику. Знайшли наближене рішення початкової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами параболічного типу на півсмузі. Розглянули застосування α-методу до лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами гіперболічного типу. Застосували отриманні знання при розв'язанні прикладів.

РОЗДІЛ І. α-метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь

1.1. Диференціальні рівняння в частинних похідних

Рівняння для функції двох або більше змінних, що містить хоча б одну частинну похідну цієї функції називають диференціальним рівнянням в частинних похідних. При цьому сама функція і незалежні змінні можуть і не входити в рівняння явно. Будь-яке рівняння в частинних похідних може бути представлено у вигляді

$$F\,(x,y,\ldots;\, u,\, u_x,\, u_y,\ldots;\, u_{xx},\, u_{yy},\ldots) = 0, \qquad (1)$$

де x,y, ... - незалежні змінні; u=u (x, y, ...) - шукана функція

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y},\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\ldots$$

Порядок диференціального рівняння визначається порядком старшої похідної, що міститься в рівнянні. Наприклад, рівняння $u_x(x,y)=y$, є рівнянням першого порядку, тоді як порядок рівняння $u_{yy}+u_x=x-y+3$ дорівнює двом.

Під розв'язком диференціального рівняння (1) розуміють функцію u(x, y, ...), яка перетворює рівняння в тотожність щодо змінних x, y, ...

Загальний розв'язок диференціального рівняння в частинних похідних містить довільні функції. Кількість цих функцій дорівнює порядку рівняння. Число аргументів цих функцій на одиницю менше числа аргументів розв'язку u. Загальний розв'язок, представлений в неявному вигляді і називається загальним інтегралом рівняння. Конкретний вибір довільних сталих дає частинний розв'язок рівняння.

Будь-яке диференціальне рівняння в частинних похідних має безліч розв'язків. Найбільший інтерес представляє розв'язок, що задовольняє додаткові умови. Ці умови називаються крайовими умовами, вони характеризують поведінку розв'язку на деякій граничній лінії (поверхні) або в її безпосередній близькості. З цієї точки зору початкові умови є крайовими умовами. Крайові умови використовуються для вибору часткового розв'язку з нескінченної кількості розв'язків. Практично будь-яка задача, що описує фізичний процес і сформульоване в термінах диференціальних рівнянь в частинних похідних, включає в себе крайові умови. [23]

1.2. Допоміжні факти

1.2.1. Стандартні і робочі оператори.

Визначення 1. Лінійний оператор $\widetilde{U} = \widetilde{U_n} = \widetilde{U_n}\ (\tilde{\varphi};\ \tilde{x})$: C$[a,\ b] \rightarrow C_n[a,b]$ називають стандартним. Він переводить множину неперервних функцій C [a, b] на [a, b] функцій $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ в його скінченновимірну підмножину $C_n[a,\ b]$ розмірності n. Підкреслимо, що оператор заданий на деякому стандартному сегменті $[a,\ b]$ (наприклад, на [- 1, 1] або на [0,l] і т. д.).

Визначення 2. Якщо U=U(φ; x), φ= φ (x) є $C[x_o,\ x_o+\ h]$, то на будь-якому сегменті $[x_o,\ x_o+\ h]$ лінійний оператор $U:C[x_o,x_o+h]\rightarrow C^0[x_o,x_o+\ h]$ є лінійним перетворенням стандартного лінійного оператора Ũ = Ũ (φ; ẋ). При цьому оператор U відображає множину неперервних функцій на $[x_o,x_o+h]$ в деяку підмножину $C°[x_o,\ x_o+\ h]$.

Оператор U назвемо робочим.

Кожне лінійне відображення сегмента [a, b] на сегмент $[x_o,x_o+h]$ є оберненим відображення. Вони здійснюються за допомогою формул

$x = x_0 + \frac{h}{b-a}(\tilde{x} - a)$: $[a,\ b] \rightarrow [x_o,\ x_o+\ h]$ => $\tilde{x} = a + \frac{b-a}{h}(x - x_0)$:

$[x_o,\ x_o+\ h] \rightarrow [a,\ b]$. (1)

З цього випливає, що кожна функція φ (x) є $C[x_o,\ x_o+\ h]$ породжує функцію

$\tilde{\varphi}(\tilde{x})$: = φ $[x_0 + \frac{h}{b-a}(\tilde{x} - a)]$ є $C[a,\ b]$ (1')

Тому, перетворення оператора $\tilde{U}(\tilde{\varphi};\ \tilde{x})$ на сегмент $[x_o,\ x_o+\ h]$ природно визначити за допомогою формули

$U(\varphi;\ x) = \tilde{U}(\tilde{\varphi};\ \tilde{x}) := \tilde{U}\ \{\varphi\ [x_0 + \frac{h}{b-a}(\tilde{x} - a)];\ a + \frac{b-a}{h}\ (x - x_0)\}$ (2). [11,с.121]

1.2.2. Апроксимаційна характеристика операторів.

Визначення 3 (класів Ліпшиця - Гельдера). Позначимо при довільному M>0 через MH=MH[a, b] = M Lip 1 [a, b] клас будь-яких неперервних на [a,b] функцій $(\tilde{\varphi};\ \tilde{x})$, для кожної з яких $\forall\ \tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2 \in [a,\ b]$ виконується нерівність

$$|\tilde{\varphi}(\tilde{x}_2) - \tilde{\varphi}(\tilde{x}_1)| \leq M\ |\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1|, \qquad (3)$$

і назвемо його класом Ліпшиця або ж класом Гельдера з константою M.

Зауваження 1. Якщо $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \in C^1\ [a, b]$ і $\|\ \tilde{\varphi}(\tilde{x})\ \|\ C\ [a, b] \leq M$. То $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \in$ MH, або в цьому випадку $\forall\ \tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2 \in [a, b]$ отримуємо

$$|\tilde{\varphi}(\tilde{x}_2) - \tilde{\varphi}(\tilde{x}_1)| = |\int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{\varphi}'(t)dt| \leq M\ |\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1|.$$

2. Якщо $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \in$ MH, то $\tilde{\psi}(\tilde{x}) := \frac{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}{M} \in 1$ H, або $\forall\ \tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2 \in [a,\ b]$ отримуємо

$$|\tilde{\psi}(\tilde{x}_2) - \tilde{\psi}(\tilde{x}_1)| = \frac{1}{M}\ |\tilde{\varphi}(\tilde{x}_2) - \tilde{\varphi}(\tilde{x}_1)| \leq\ |\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1|.$$

Визначення 4. Для будь-якого лінійного стандартного оператора $\tilde{U}$:C[a,b] → C_n [a, b] його апроксимаційною характеристикою буде величина

$$\varepsilon\ (\tilde{U}) := \sup_{\tilde{f} \in\ 1H\ [a,b]} \left|\left|\ \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{U}\ \left(\tilde{f};\ \tilde{x}\right)\right|\right|_{C[a,\ b]} \qquad (4)$$

Вона представляє собою максимальну похибку наближення функцій $\tilde{f}$ класу 1 H[a, b] = 1 Lip 1[a, b] за допомогою значень оператора $\tilde{U} = \tilde{U}\ (\tilde{f})$ на цих функціях. [11]

1.2.3. Лема Гронуолла.

Нехай функція g (x) є на деякому сегменті [x_o, x_o+ h] невід'ємною інтегровною за Лебегом. Нехай функція u(x) має ті ж властивості. Тобто, ∀ x∊[x_o,x_o+h]: $\int_{xo}^{x}|u(t)|g(t)dt = M(x) < \infty$. Звідси випливає, що при довільних G=const, функція u(x) задовольняє нерівність

$$u(x) \le C+\int_{xn}^{x} u(t)g(t)dt, \qquad (5)$$

Тоді ∀ x ϵ [x_o, x_o+ h] при якому справедлива нерівність

$$u(x) \le Ce^{G(x)},\ G(x){:}\ \int_{xo}^{x} g(\sigma)d\sigma=. \qquad (5')$$

Наслідок. Нехай g (x) ≡ A = const. Тоді функція u (x) задовольняє нерівності

$$u(x) \le C+A\int_{x0}^{x} u(t)dt, \qquad C=const. \qquad (\hat{5})$$

З цього випливає, що функція u (x) також задовольняє нерівність

$$u(x) \le Ce^{A(x-x_0)}. \qquad (\hat{5}')$$

З нерівності (5)

$$u(x) \le C + \int_{x_0}^{x} u(t_1)dG(t_1) \le C + \int_{x_0}^{x}[\ C\ + \int_{x_0}^{t_1} u(t_2)dG(t_2)\ \ dG(t_1) \le$$

$$C+CG(x)+\int_{x_0}^{x}\{\int_{x_0}^{t_1}[\ C + \int_{x_0}^{t_2} u(t_3)dG(t_3)]\ dG(t_1)\}dG(t_1) \le C+CG(x)+$$

$$C\frac{[G(x)]^2}{2!}+\int_{x_0}^{x}\{\int_{x_0}^{t_1}\{\int_{x_0}^{t_2}(C + \int_{x_0}^{t_3} u(t_4)dG(t_4))\ dG(t_3)]\ dG(t_2)\}\times dG(t_1) \le$$

$$C\ [1 + G(x) + \frac{[G(x)]^2}{2!} + \frac{[G(x)]^3}{3!} + \dots + \frac{[G(x)]^n}{n!}] + r_n(x),$$

=> твердження леми справедливе. Що і слід було довести, бо при будь-якому фіксованому x ϵ [x_o, x_o+ h] і t ϵ [x_0, x] отримуємо

$$|u(t)| \le M(t) + C \le M(x)+C \le M_1=const,$$

так що остача r_n= r_n(x) задовольняє нерівність

$$|r_n(x)|:=|\int_{x_0}^{x} dG(t_1)\int_{x_0}^{t_1} dG(t_2)\ \dots \int_{x_0}^{t_n} u(t_{n+1})dG(t_{n+1})| \le$$

$$M_1\int_{x_0}^{x} dG(t_1)\int_{x_0}^{t_1} dG(t_2)\ \dots \int_{x_0}^{t_n} dG(t_{n+1}) \le \frac{M_1\, G^{n+1}(x)}{(n+1)!} \to 0$$

при n→∞.

1.2.4 Зважена норма.

Визначення 4. При довільному фіксованому k > 0 зваженною (стислою) k-нормою функції y(x) є C $[x_o, x_o+h]$ називається її норма $||y||_*$ яка визначається наступним чином:

$$\| y \|_* = \max_{x_0 \le t \le x_0+h} \{e^{-k(t-x_0)}|y(t)|\} \qquad (6)$$

Не важко бачити, що вираз в правій частині (6) задовольняє всім умовам норми. Відзначимо, що оскільки справедливі очевидні нерівності

$$e^{-kh}||y||_{C[x_0,x_0+h]} \le \| y \|_* \le ||y||_{C[x_0,x_0+h]} \qquad (7)$$

тому норми $\| y \|_*$ і $\| y \|_{C[xo, xo+h]}$ еквівалентні в тому сенсі, що існують дві додатні константи $A_1 > 0$ і $A_2 > A_1$ такі, що

$$A_1\| y \| \le \| y \|_* \le A_2\| y \|. \qquad (8)$$ [11, с.123]

1.3. Методи, одержані шляхом застосування послідовностей лінійних операторів до наближеного розв’язування диференціальних рівнянь

Методи, одержані шляхом застосування послідовностей лінійних операторів, грають важливу роль в багатьох областях математики. Зокрема в обґрунтуванні і розвитку теорії рядів Фур'є, в теорії наближення функцій, теорії підсумовування розбіжних рядів і інших теоріях, де вони називаються лінійними методами підсумовування рядів.

Нехай задано задачу Коші про застосування послідовностей лінійних операторів для операторів диференціальних рівнянь. [11]

Має місце теорема.

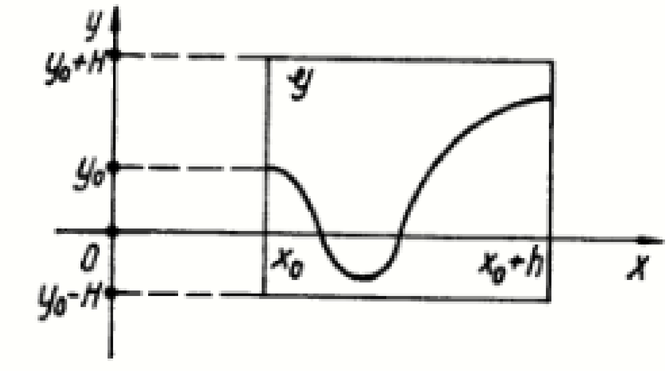

Рис. 1.1

Теорема 1. Нехай задані:

1) Задача Коші для оператора диференціальних рівнянь

$y'=f(x, y),\ y(x_0)=y_0 \leftrightarrow y(x)= y_0+\int_{xo}^{x} f\ [t, y(t)]dt,$ (1)

в якій при деяких A, h, H>0 (Рис. 1.1):

a) $f(x,y) \in C_\xi,\ \xi= [x_o, x_o+ h] * [y_0-H, y_0+H]$;

b) $f \in A\ Lip_y 1$;

c) $||f||_{C\xi} h < H^2$;

2) Така послідовність стандартних лінійних операторів $\{\tilde{U}(\tilde{\varphi};\ \tilde{x})\}$[3]. Область визначення D=C[a,b][4] – фіксована. Послідовністю апроксимаційних характеристик буде

$$\varepsilon(\widetilde{U_n}) := \sup_{\tilde{\varphi}\in\ 1Lip1} \left|\left|\ \tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \widetilde{U_n}\ \{\tilde{\varphi}(\cdot);\ \tilde{x}\right|\right|_{C[a,\ b]} \rightarrow 0 \qquad (2)$$

при $n\rightarrow\infty$.

Тоді:

A. Операторне рівняння

$y_n(x) = U_n\{y_0 + \int_{x_0}^{\xi} f[t, y_n(\mathrm{t})]dt; x\} =: A_n(y_n; x)^5,$ (3)

побудоване за допомогою інтегрального рівняння (1) і послідовності $\{U_n\}$ на сегменті $[x_o, x_o+ h]$ при

$y_n(x) \in C_n[x_o, x_o+ h]$,

буде розв’язуватися методом послідовних наближень побудованих за формулою

$$y_n^{[0]}(x) = y_0;\ y_n^{[v+1]}(x) = A_n\ (y_n^{[v]};\ x),\ v = 0, 1, 2, \dots \qquad (3')$$

для всіх n, при яких

$$q := \min_{k>0}\{A\ \frac{1-e^{-kh}}{k} + e^{kh}\frac{ϒ_n}{b-a}\} < 1;\ ϒ_n := Ah\varepsilon\ (\widetilde{U_n}) \qquad (3'')$$

Б. Отриманий розв’язок $y_n(x) = y_n(\tilde{U}_n;\ f;\ h;\ x)$ операційного рівняння (3) наближається до невідомого розв’язку y(x) задачі Коші (1) на $[x_o, x_o + h]$. Тому, виконується наступна нерівність:

$$||y(x) - y_n(x)||_{C[x_0,x_0+\text{h}]} \le (1+\alpha_n)e^{Ah}\ ||y(x) - U_n(y;x)||_{C[x_0,x_0+\text{h}]}, \qquad (4)$$

де $\delta_n := e^{Ah}\ ϒ_n$,

$$\alpha_n = \frac{\delta_n}{b-a-\delta_n} \to 0 \text{ якщо } n\to\infty. \qquad (5)$$

Доведемо твердження Б. Припускаючи спочатку, що рівняння (3) має розв’язок і при цьому графіки всіх $y_n(x)$ містяться в C_ξ, встановимо оцінку (4). Враховуючи, що оператор U_n – лінійний, а також користуючись рівністю (3) і (1), отримаємо

$$y(x) - y_n(x) = y(x) - U_n\{y_0 + \int_{x_0}^{\xi} f[t, y_n(t)]dt; x\} =$$

$$y(x) - U_n(y;\ x) + U_n\{y_0 + \int_{x_0}^{\xi} f[t, y(t)]dt; x\} -$$

$$U_n\{y_0 + \int_{xo}^{\xi} f[t, y_n(t)]dt; x\} = y(x) - U_n(y;\ x) +$$

$$U_n\{\beta(\bullet);\ x\} - \beta(x) + \beta(x), \qquad (6)$$

де $\beta(x) = \beta(x, y, y_n) := \int_{x_0}^{x}[f\left(t, y(t)\right) - f\left(t, y_n(t)\right)]\,dt. \qquad (7)$

Із співвідношення (6) випливає нерівність

$$y(x) - y_n(x) \le ||y(x) - U_n(y;\ x)|| + ||\beta(x) - U_n\{\beta(\bullet);\ x\}|| + |\beta(x)|. \qquad (8)$$

Оцінимо другу і третю складові в правій частині цієї нерівності. Оскільки згідно (2.1), (2.1') і (2.2)

$$\beta(x) = \beta[x_0 + \frac{\text{h}}{\text{b}-a}(\tilde{x} - a)] =: \tilde{\beta}(\tilde{x}) \text{ і } U_n(\beta;\ x) = \widetilde{U_n}(\tilde{\beta};\ \tilde{x}), \qquad (9)$$

тоді

$$||\beta(x) - U_n\{\beta(\bullet);\ x\}||_{C[x_0,x_0+\text{h}]} = ||\tilde{\beta}(\tilde{x}) - \widetilde{U_n}(\tilde{\beta};\ \tilde{x})||_{C[\text{a,b}]}. \qquad (10)$$

Згідно (9), (7) і тому факту, що f(x, y) ϵ Lip_y 1 (умова b),

$|\frac{d}{d\tilde{x}}\tilde{\beta}(\tilde{x})| = |\beta'(x)|\,|\frac{dx}{d\tilde{x}}| = |f(x, y(x)) - f(x, y_n(x))|\,\frac{h}{b-a} \leq$

A $\|y(x) - y_n(x)\|\frac{h}{b-a} =: M_1$, (11)

покладемо, що

$\tilde{\beta}(\tilde{x}) \epsilon\ M_1H \Rightarrow \frac{1}{M_1}\,\tilde{\beta}(\tilde{x})\ \epsilon\ 1\ H.$

Звідси, відповідно до визначення апроксимаційної характеристики лінійного оператора $\tilde{U}_n$ (2.4) і рівності (10), з врахуванням (11) отримуємо

$\|\beta(x) - U_n(\beta;\ x)\|_{C[x_0, x_0+h]} = \|\tilde{\beta}(\tilde{x}) - \widetilde{U_n}(\tilde{\beta};\ \tilde{x})\|_{C[a,b]} = M_1\,\|\frac{\tilde{\beta}(\tilde{x})}{M_1} - \widetilde{U_n}(\frac{\tilde{\beta}}{M_1};\ \tilde{x})\| \leq M_1 \sup\limits_{\tilde{\varphi}\epsilon\ 1H1} \|\tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \widetilde{U_n}(\tilde{\varphi};\ \tilde{x})\|_{C[a,\ b]} = M_1\ \varepsilon(\widetilde{U_n}) = A\ \|y(x) - y_n(x)\|_{C[x_0, x_0+h]}\frac{h}{b-a}\,\varepsilon(\widetilde{U_n}).$

Підставимо цю оцінку в (8) і з врахуванням (7) і того факту, що f(x, y) ϵ $Lip_y 1$, отримуємо

$|y(x) - y_n(x)| \leq \|y(x) - U_n(y;\ x)\| + A\frac{h}{b-a}\,\varepsilon(\widetilde{U_n}) \times \|y(x) - y_n(x)\| + A\int_{x_0}^{x}|y(t) - y_n(t)|\,dt$ (12)

або $u(x) \leq c + \int_{x_0}^{x} Au(t)\,dt$

де $u(x) := |y(x) - y_n(x)|$, $c := \|y(x) - U_n(y;\ x)\|_{C[x_0, x_0+h]} + \frac{Ah}{b-a}\,\varepsilon(\widetilde{U_n})\,\|y(x) - y_n(x)\|$.

Звідси в силу наслідку до нерівності Гронуолла маємо

$u(x) \leq Ce^{A(x-x_0)} \leq Ce^{Ah}$

або

$\|y(x) - y_n(x)\|_{C[x_0, x_0+h]} = \max|y(x) - y_n(x)| = \max|u(x)| \leq Ce^{Ah} = \{\|y(x) - U_n(y;\ x)\|_{C[x_0, x_0+h]} + \frac{Ah}{b-a}\,\varepsilon(\widetilde{U_n}) \times \|y(x) - y_n(x)\|_{C[x_0, x_0+h]}\}e^{Ah} \Rightarrow \|y(x) - y_n(x)\|_{C[x_0, x_0+h]} \leq (1 - \frac{Ahe^{Ah}}{b-a}\,\varepsilon(\widetilde{U_n}))^{-1}\,e^{Ah}\,\|y(x) - U_n(y;\ x)\|_{C[x_0, x_0+h]} = (1 - \frac{\delta_n}{b-a})^{-}$

^{1} e^{Ah} $||y(x) - U_n(y; x)||_{C[x_0,x_0+h]} = \frac{\delta_n}{b-a-\delta_n} e^{Ah}$ $||y(x) - U_n(y;x)||_{C[x_0,x_0+h]} = (1 + \alpha_n)$ e^{Ah} $||y(x) - U_n(y;x)||_{C[x_0,x_0+h]}$,

або

$$\frac{b-a}{b-a-\delta_n} = 1 + \frac{\delta_n}{b-a-\delta_n} = 1 + \alpha_n.$$

Згідно вище сказаного твердження Б) теореми 1 - доведено.

Доведемо твердження А. Встановимо, що операторне рівняння (3) при виконанні умови (3 ") має розв'язок. Виберемо k для виразу у фігурних дужках (3"), яке буде менше одиниці. Нехай, в такому випадку в метричному просторі, що задається стислою k-нормою

$$||y||_* = \max_{x_0 \le t \le x_0+h} \{e^{-k(t-x_0)}|y(t)|\},$$

оператор A_n (y; x), який визначається рівністю (3), є оператором стиску. Тоді, в цьому випадку при будь-яких y (t), z (t) Є C $[x_o, x_o+ h]$ аналогічно (6) маємо

$$\rho_*(A_n y, A_n z) := ||U_n\{ y_o + \int_{x_0}^{\xi} f[t, y(t)]dt; x\} -$$

$$U_n\{y_0+\int_{x_0}^{\xi} f[t, z(t)]dt; x\}||_* \le U_n(\beta(\xi); x) - \beta(x)||_* + \beta(x)||_*,$$

$$\beta(x) := \int_{x_0}^{\xi} \big[f\big(t, y(t)\big) - f(t, z(t))\,\big]dt. \qquad (13)$$

Оцінимо спочатку перший доданок (з урахуванням рівня b).

$$\beta(x) = \int_{x_0}^{\xi} \{f\big(t, y(t)\big) - f\big(t, z(t)\big)\}dt \Rightarrow |\beta'(x)| =$$

$$f\big(x, y(x)\big) - f\big(x, z(x)\big) \le A\,|y(x) - z(x)| \Rightarrow \beta(x) \in M\ Lip\ 1,$$

$$M = A\,||y(x) - z(x)||_{C[x_0,x_0+h]} \qquad (14)$$

Тоді, оскільки (див. 2.1)

$$\tilde\beta(\tilde x) = \beta\,(x_0 + \frac{h}{b-a}(\tilde x - a)) = \beta(x),$$

то

$$||\tilde\beta'(\tilde x)|| = \frac{h}{b-a}\,||\,\beta'(x)|| = \frac{Ah||y(x) - z(x)||}{b-a} := M_1 \Rightarrow \tilde\beta(\tilde x) \in M_1\ Lip\ 1.$$

Звідси, згідно (2.7) і (2.4) маємо

$||U_n(\beta(\xi); x) - \beta(x)||_* \leq ||\beta(x) - U_n(\beta(\bullet); x)||_{C[x_0, x_0+h]} = ||\tilde{\beta}(\tilde{x}) - \widetilde{U_n}(\tilde{\beta};\tilde{x})|| \leq$

$M_1\, \varepsilon(\widetilde{U_n}) = \frac{Ah}{b-a}\, \varepsilon(\widetilde{U_n})\, ||y(x) - z(x)||_{C[x_0, x_0+h]}$

$$\leq e^{Ah} \frac{Ah}{b-a}\, \varepsilon(\widetilde{U_n})\, ||y - z||_* = \frac{\delta_n}{b-a}||y - z||_* e^{(k-A)h}. \qquad (15)$$

При оцінюванні правої частини другого доданку, візьмемо до уваги, що на основі (14) і (2.6)

$$||\beta(x)||_* = \max_{x_0 \leq t \leq x_0+h} \{e^{-k(t-x_0)} \int_{x_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds\} \leq$$

$$A \max_{x_0 \leq t \leq x_0+h} \int_{x_0}^{t} e^{-k(t-s)} e^{-k(s-x_0)} |y(s) - z(s)|\, ds \leq$$

$$A\, ||y - z||_* \max_{x_0 \leq t \leq x_0+h} \int_{x_0}^{t} e^{k(s-t)} ds = \frac{A}{k}\, ||y - z\, ||_* \times$$

$$\max_{x_0 \leq t \leq x_0+h} (1 - e^{k(x_0-t)}) \leq \frac{A}{k}\, ||y - z\, ||_* (1 - e^{-kh}). \qquad (16)$$

Підставимо оцінки (15) і (16) в праву частину (13), тоді отримуємо

$$\rho_* (A_n y, A_n z) \leq ||y - z\, ||_* \left[\frac{\delta_n e^{(k-A)h}}{b-a} + \frac{A}{k}(1 - e^{-kh})\right] = \tilde{q}\, ||y - z\, ||_*,\ \tilde{q}<1.$$

З цієї рівності випливає, що A_n - оператор стиску. Отже, розв'язок $y_n(x)$ операційного рівняння (3) існує і послідовні наближення збігаються до нього зі швидкістю геометричної прогресії. Знаменник цієї прогресії рівний q<1.

Зауваження. 1. Доведена нерівність (4) показує. що з точністю до множника $(1+\alpha_n)e^{Ah} \to 1$ при $n \to \infty$ і $h \to 0$ маємо

$$||y(x) - y_n(x)||_{C[xo,\, xo+h]} \approx ||y(x)-U_n(y;x)||_{C[xo,\, xo+h]}.$$

Тому, многочлени $y_n(x)$, які ми можемо побудувати методом послідовних наближень, ефективно наближають невідомий розв'язок y(x). Це відбувається майже з такою ж точністю, з якою цей розв'язок наближали б лінійні оператори U_n (y;x), за умови, якби розв'язок y(x) був нам відомий. Тому принципове значення теореми 1 полягає в наступному:

а) для ефективного наближення розв'язку задачі Коші (1) в загальному випадку, доцільно попередньо замінити цю задачу еквівалентним їй інтегральним рівнянням;

б) отримане інтегральне рівняння після цього замінюємо операторним рівнянням (3). Розв'язуємо його методом проб і помилок.

Вибір лінійних операторів U_n, (не обов'язково проекційних) вимагає в кожному конкретному випадку спеціального дослідження. Переважно, щоб знайти відповідь на це запитання, необхідно визначити гладкість розв'язку y(x). Вона, в свою чергу, тісно пов'язана з гладкістю правої частини f(x, y) по обох змінних (гладкість розв'язку y(x) має бути на одиницю вища гладкості функції f (x, y)). [11,с. 128]

У встановленні можливості розв'язання рівняння (3) при великих n крім Дзядика В.К. взяли участь В.В.Крочук, П.Н.Денисенко і П.Д.Литвинець [29]

2. Доведена теорема узагальнена Дзядиком В.К., а також на випадок систем звичайних диференціальних рівнянь та інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)F\big(t,y(t)\big)dt, \qquad (17)$$

де y(x) – шуканий розв'язок; f, K, F – задані функції; λ – параметр.

Ці сформульовані результати були використані В. І. Біленко. А саме, він побудував і дослідив алгоритм наближення поліномами розв'язків інтегральних рівнянь виду (17) з ядрами К (x, t), що породжують цілком неперервні оператори з L_p ($p \geq 1$) (або з $C_{[a,b]}$) в $C_{[a,b]}$. Вони мають вигляд функцій Гріна крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$K(x,t) = \begin{cases} K_1(x,t) \text{ при } a \leq t \leq x \leq b, \\ K_2(x,t) \text{ при } a \leq x \leq t \leq b. \end{cases} \qquad (18)$$

Відзначимо, що К. Аткінсон побудував алгоритм і навів результати розв'язку лінійного інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду при

$K_1(x,t) = K_2\ (t,\ x) = (x\ -\ 1)\ t$ і аналітичним вільним членом за допомогою електронно обчислювального апарату.

При застосуванні квадратичної формули Гаусса, похибка розв'язування за алгоритмом К. Аткінсона з 256 вузлами і λ, = -10 і λ = 30 дорівнює відповідно $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ і $2{,}1 \cdot 10^{-4}$. В той час, як за алгоритмом В.І.Біленко для отримання точності 10^{-8} потрібно застосувати квадратичну формулу і оператор інтерполяції з 8-ма вузлами в екстремальних точках поліномів Чебишева 1-го роду. [11]

1.4. α-Метод наближення многочленами розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами

1. Вступні зауваження. Будемо досліджувати питання про наближення многочленами на довільному сегменті [-h, h], h>0, розв'язок у (х) задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами виду

$a_0(x)y^{(k)}+a_1(x)y^{(k-1)}+\ldots+a_k(x)y=p(x),\quad y^{(j)}(0)=y_j,\quad j=\overline{0,k-1},$ (1)

де, $a_i(x)$ і $p(x)$- многочлени і при цьому $a_0(x)\geq c>0$ $\forall x\in[-h, h]$.

Щоб пояснити ідею, яка лежить в основі запропонованого нижче методу, розглянемо спочатку найпростішу задачу Коші для лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами виду

$y'=y,\ y(0)=1\rightarrow y(x)=e^x,\ x\in[-h, h].$ (1′)

Для того щоб знайти наближений розв'язок задачі Коші (1') на сегменті [-h, h] (згідно з принципом, що випливає з теореми про застосування послідовностей лінійних операторів) доцільно:

1) замінити цю задачу еквівалентним їй інтегральним рівнянням

$y(x)=1+\int_0^x y(t)dt;$

2) замінити отримане інтегральне рівняння операторним рівнянням виду:

$y_n(x)=U_n\{1+\int_0^{\xi} y_n(t)dt;x\}$, (2)

де лінійний оператор U_n являє собою перенесення на [-h, h] деякого стандартного оператора $\tilde{U}_n$.

Відзначимо, що розв’язок y(x) будь-якої задачі Коші (1) є аналітичною функцією в деякому еліпсі $\varepsilon_r = \varepsilon_r(h)$ з фокусами в точках -h і h.

r - це таке найменше число, більше 1, при якому на границі $\partial\varepsilon$, еліпса ε, знаходиться принаймні один нуль багаточленного коефіцієнта $a_0(x)$ при $y^{(k)}$. Тобто, на $\partial\varepsilon$ є принаймні одна особлива точка рівняння (1) і y(x) яка є цілою функцією, якщо a_0= const. Тому,. величина найкращого наближення $E_n(y)$ розв’язку y (x) (відповідно до теореми Бернштейна I) за допомогою многочленів степеня не вище n дуже швидко (зі швидкістю загального члена q^n геометричної прогресії зі знаменником, рівним q, де $q=r^{-1}<1$) прямує до нуля при $n\to\infty$.

Має місце теорема Кантора — Бернштейна (також теорема Кантора — Бернштейна — Шредера),

Наведемо її формулювання. Якщо в множині A елементів не менше, ніж в множині B (тобто, якщо в множині A існує підмножина, рівнопотужна множині B), а в множині B елементів не менше, ніж в множині A, то насправді елементів порівну. Це означає, що існує взаємно однозначна відповідність між множинами A та B. Тобто: що якщо існують ін'єктивні відображення $f: A \to B$ і $g : B \to A$ між множинами A і B, то існує бієкція $h : A \to B$. Іншими словами, потужності множин A і B збігаються: $|A| = |B|$

Отже, із $\alpha \le \beta$ і $\beta \le \alpha$, випливає, що $\alpha = \beta$. В даних нерівностях α і β - кардинальні числа.[45]

В якості операторів U_n в (2) (на підставі теореми Лебега I. 3.1') доцільно взяти:

1. послідовність яких-небудь лінійних проективних операторів. Норми $||U_n||$ є можливо меншими, бо в цьому випадку кожен лінійний оператор $U_n(y;\ x)$ буде наближати (невідомий нам) розв'язок y(x) з точністю до невеликого множника ($||\ U_n\ ||$ +1) найкращим чином.

2. серед таких лінійних проективних операторів U_n бажано вибрати оператори, при яких операторне рівняння (2) можна було легко розв'язати. Переконаємося, що такі оператори існують. Ними є, наприклад, оператори взяття частинних сум S_n ряду Фур'є-Чебишева, в яких на сегменті [-h, h] розглядається функція (многочлен степеня n+1)

$$\varphi(x)=\varphi(n;x)= 1+\int_0^x y_n\,(t)dt.$$

Дійсно, оскільки функція φ(n;x) являє собою многочлен степеня n+1, то і її ряд Фур'є-Чебишева, як це випливає з виду многочленів Чебишева, обірветься на (n+1)-му члені.

$$1 + \int_0^x y_n\,(t)dt = \varphi(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \tau_j T_j(\tfrac{x}{h}), \qquad (3)$$

де

$$\tau_j = \frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h} \frac{\varphi(t) T_{j\,(\frac{x}{h})}}{\sqrt{1-(\frac{x}{h})^2}}\,dt. \qquad (4)$$

З (3) випливає, що

$$S_n\ \{1 + \int_0^{\xi} y_n(t)dt; x\} = S_n\,(\varphi;\ x) = \sum_{j=0}^{n} \tau_j T_j(\tfrac{x}{h}) =$$

$$1 + \int_0^x y_n(t)dt - \tau_{n+1}T_{n+1}\,(\tfrac{x}{h}). \qquad (5)$$

Також, в більш загальному випадку, в правій частині (3) і (5) можна взяти також частинні суми n-го порядку будь-якого ряду. Вони утворені в результаті розкладу функції за якою-небудь іншою ортогональною базою системи многочленів. Наприклад, многочленів Лежандра, Якобі, Коркіна - Золотарьова та ін [1; 19].

Для того, щоб отримати операторне рівняння (2) для визначення многочлена $y_n(x)$ у вигляді

$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)dt - \tau_{n+1} T_{n+1} \left(\frac{x}{h}\right)$ (6)

необхідно, підставити вираз (5) у праву частину (2). [11, с.130-131]

Загальний випадок. Закономірності, виявлені при розгляді задачі Коші

$y' = y,\ y(0)=1 \Leftrightarrow y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt,$

носять загальний характер. В даний час розроблений апроксимаційний або α-метод наближення розв'язку будь-якої задачі Коші виду (1). Суть його полягає в наступному.

Щоб побудувати многочлен найкращого наближення розв'язку задачі Коші (1), необхідно:

1. Шляхом послідовного інтегрування частинами на проміжку [0, x] рівняння (1) замінити вихідну задачу Коші еквівалентним їй інтегральним рівнянням Вольтерра виду

$a_0(x)y(x)=\int_0^x P_l(x,t)y(t)dt + \tilde{p}(x),$ (11)

де l – «параметр» задачі (1), який знаходиться за формулою

$l = \max_{0 \le j \le k} \{deg a_j(x) + j - 1\}$

$P_l(x,t)$ – многочлен зі змінними x і t виду $P_l(x,t) = \sum_{s=0}^{l} \sum_{i+j=s} \gamma_{ij} * t^i x^j$, сума показників при x і t в кожному доданку якого не перевищує l; ṗ(x) – сума k-того інтеграла від p(x) на проміжку [0, x]:

$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-t)^{k-1} p(t)dt,$

з деяким многочленом степеня не вище k-1.

2. Рухаючись від інтегрального рівняння (11), побудуємо операторне рівняння виду

$a_0(x)y_n(x)=\int_0^x P_l(x,t)y(t)dt + \tilde{p}(x) - \varepsilon_n(x),\ n \ge deg p(x) + k,$ (11′)

де $\varepsilon_n(x) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_{n+i} T_{n+i} \left(\frac{x}{h}\right)$, $y_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ (12)

і c_j і τ_{n+i} - невідомі величини.

В випадку, коли h – будь-яке комплексне число, яке має ті ж властивості, що при всіх z із сегмента [0, h] a 0(z)≠0, рівняння (11 '), (12) набувають вигляду

$$a_0(z)y_n(z)=\int_0^x P_l(z,\zeta)y_n(\zeta)d\zeta+\tilde{p}(z)-\varepsilon_n(z), \qquad (11'_z)$$

де

$$\varepsilon_n(z):=\sum_{i=1}^{l+1}\tau_{n+i}T^*_{n+i}\left(\frac{z}{h}\right), \qquad y_n(z)=\sum_{j=0}^{n}c_jz^j \qquad (12_z)$$

Інтегруючи ($11_z'$) і прирівнюючи в обох частинах коефіцієнти при однакових степенях z, отримуємо, як і раніше, для визначення невідомих c_j і τ_{n+i} систему (С – Т), що складається з $n+l+2$ лінійних рівнянь. [11]

У статті [12] встановлено, що матриця з коефіцієнтів при невідомих c_j; є трикутною. В силу цього коефіцієнти c_j з системи (С – Т) відразу виражаються через $l+1$ параметрів τ_{n+i}, $i=1, 2, \ldots, l+1$, які вже визначаються з системи (Т) $l+1$ лінійних рівнянь.

Відносно цих систем наведемо без доведення наступні дві теореми існування (див. [12]).

Теорема 1. Для кожного натурального n існує число

$H \geq An^{\frac{1}{l+2}}$ (A = const > 0) таке, що при будь-якому h Є [0, H) визначники системи (С – Т) і (Т) є відмінними від нуля.

Теорема 2. Для довільного H>0 існує число N (як правило невелике: $N \leq A(1+H^{2l+2})$, $A=const>0$) таке, що при всіх $n \geq N$ визначники системи (С-Т) відмінні від нуля.[11,с.136]

РОЗДІЛ II. Наближені розв'язки в частинних похідних

2.1. Задача Діріхле для лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами еліптичного типу на прямокутнику.

2.1.1. Акпроксимаційний метод для задачі Діріхле в разі одного з найпростіших її формулювань та редукція до інтегрального рівняння.

Розглянемо задачу Діріхле

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x)u = f(x), \qquad (1)$$

$$u=0 \text{ на } \partial\Pi, \qquad (2)$$

В якій $u=u(x)$, $x=(x_1, x_2) Є \Pi$, $\Pi=(0, h_1)*(0, h_2)$, $h_1>0$, $h_2>0$. Припустимо, що виконується умова рівномірної еліптичності

$$M_0 (\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq M_1(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

де M_0, M_1 – додатні сталі, і крім того, виконуються наступні умови виду

$0<M_2\leq a(x)\leq M_3$, $a_{ij}=a_{ji}$, M_2, $M_3=const$

Припустимо ще, що в рівнянні (1) a_{ij}, a і f-многочлени.

Відомо, що для даної задачі існує єдиний аналітичний в Π, неперервний на $\overline{\Pi}$ розв'язок u.

Редукція до інтегрального рівняння. .

Припустимо, що u - розв'язок задачі Діріхле. Замість того, щоб шукати невідомий розв'язок u(x) задачі Діріхле, будемо спочатку шукати його другу частинну похідну

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \tilde{u} \Rightarrow u = \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{x_2} \tilde{u}(s_1, s_2) ds_2$$

При цьому задача Діріхле (1), (2) еквівалентна наступній задачі для інтегрального рівняння:

$$\mathscr{L}\tilde{u} \equiv - \sum_{i,j=1}^{2} [\int_0^{x_i{}'} a_{ij}(s) ds_i, (\int_0^{s_j{}'} \tilde{u}(s') ds_j{}' |_{s_j'=s_i})]|_{s_i=0}^{s_i=x_i} +$$

$$\int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{x_2} a(s) ds_2 \int_0^{s_1} ds_1 \int_0^{s_2} \tilde{u}(s') ds_2 = \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{x_2} f(s) ds_2 =: F, \quad (3)$$

$\int_0^{h_1} \tilde{u}(x)dx_1=0, \int_0^{h_2} \tilde{u}(x)dx_2=0,$ (4)

де $\tilde{u} = \tilde{u}(x)$, s = (s_1, s_2), $s' = (s_1, s_2')$, $i' = 3 - i, j' = 3 - j$. [12, с.25]

2.1.2. Апроксимаційні многочлени та порядок збіжності α-многочленів.

Розв'язок задач (3), (4) шукатимемо у вигляді многочлена

$\widetilde{u_n} = \widetilde{u_n}(x) = \sum_{i,j=0}^{n_1,n_2} c_{ij} x_1^i x_2^j, \quad n = (n_1, n_2),$ (5)

що задовольняє умовам (4), де c_{ij}, деякі дійсні числа.

Після формального виконання обчислень і підстановки многочлена (5), отримаємо многочлен $L\tilde{u}_n$, степінь якого відносно x_1, не перевищує n_1+l_1, а відносно x_2 – $(n_2 + l_2)$.

Невязку задачі (3), (4) шукаємо у вигляді

$\tilde{\varepsilon}_{n,l}(x) = \sum_{i,j=0}^{n_1+l_1, n_2+l_2} \tau_{ij} P_i(x_1) P_j(x_2),$ (6)

де $P_i(x_1)$, $P_j(x_2)$ многочлени Лежандра, зміщені відповідно на відрізку $[0, h_1]$ і $[0, h_2]$. Штрих над знаком суми вказує на те, що $\tau_{ij} = 0$, якщо $1 \le i \le n_1$ і $1 \le j \le n_2$. Введемо тепер такі важливі визначення.

Визначення 1. α-Многочленом задачі (3), (4) назвемо такий многочлен $\tilde{u}_n(x)$ виду (5), для якого мають місце рівності

$\int_0^{h_1} \tilde{u}_n(x)dx_1=0, \qquad \int_0^{h_2} \tilde{u}_n(x)dx_2=0$ (4′)

і існує така нев'язка $\tilde{\varepsilon}_{n,l}(x)$ виду (6), при якій виконується рівність (рівності функції)

$\mathscr{L}n = F - \tilde{\varepsilon}_{n,l}$ (7)

Доведено, що $\forall$ n = (n_1, n_2), де $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ існує єдиний α-многочлен $\tilde{u}_n(x)$ і відповідна йому невязка $\tilde{\varepsilon}_{n,l}(x)$.

Визначення 2. α - Многочленом задачі (1), (2) назвемо многочлен

$$u_{n+1}(x)=\int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{x_1} \tilde{u}_n(s) ds_2, \quad (8)$$

де $\tilde{u}_n$ α-многочлен задачі (3), (4).

Відмітимо, що відповідно (4') α-многочлени u_{n+1} задачі Діріхле задовольняють крайову умову (2). [11]

Порядок збіжності α-многочленів.

Дамо наступне визначення.

Простір Соболєва - функціональний простір, який складається з функцій простору Лебега ($L^p(Q)$). Ці функції мають узагальнені похідні заданого порядку k з $L^p(Q)$.

Простір Соболєва W_p^k(Q) при 1 ≤ p ≤ ∞ є банаховим простором, а при p=2 - гільбертовим простором. Для гільбертових просторів Соболєва також використовують позначення $H^k(Q)$ = W_2^k(Q). [46]

Позначимо A - простір заданих в прямокутнику П дійсних функцій двох змінних, аналітичних по кожній змінній, які належать Соболевському простору $\mathbb{W}_2^2$ ($\overline{\Pi}$) і неперервні в $\overline{\Pi}$. Å підпростір тих функцій з A, які перетворюються в нуль на межі прямокутника П, $\mathfrak{M}^{n+1}$ - підпростір простору Å, що складається з многочленів бістепеня не вище n+1 = (n_1+1, n_2+1).

Визначимо скалярний добуток і норму для довільних дійсних функцій двох змінних u, u ϵ Å за формулою

$$[u, \boldsymbol{\upsilon}]_{Å}=\int_{\Pi} (\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{du}{dx_i}\frac{du}{dx_j} + a(x)uv)dx,$$

$$[u]_{Å}= [u, \upsilon]_{Å}^{\frac{1}{2}},$$

Таким чином підпростір Å перетворюється в передгільбертовий простір.

Нагадаємо, що задача Діріхле (1), (2) еквівалентна задачі на знаходження мінімуму квадратичного функціоналу виду $\mathcal{J}$(u) = [u, $\boldsymbol{\upsilon}$]$_{Å}$- $2(u, f)_{L_2(\Pi)}$ на просторі Å.

Теорема 1. α-многочлен u_{n+1}(x), n+1=(n_1+1, n_2+1), многочлен з $\mathfrak{M}^{\dot{n}+1}$найкращого наближення розв'язку u(x) в метриці простору Å для фіксованих натуральних $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ і многочлен, що доставляє мінімум функціоналу енергії $\mathcal{J}(u)$ на підпросторі $\mathfrak{M}^{\dot{n}+1}$, збігаються між собою.

Відзначимо, що α-многочлени стійкі в тому сенсі, що

$[u_{n+1}]_{\AA} \leq C\|f\|$, де C>0 – константа.

Порядок збіжності α-многочленів характеризується наступною теоремою.

Теорема 2. Якщо розв'язок задачі Діріхле (1), (2) має дробові похідні порядків α і β відповідно по x_1 і x_2 (за Ріманом-Ліувіллем), то для відхилення α-многочленів u_{n+1} від відповідного точного розв'язку мають місце такі оцінки:

$$[u - u_{n+1}]_{\AA} \leq C_1(n_1^{-\alpha+1} + n_2^{-\beta+1})$$

при α>1, β>1,

$$[u - u_{n+1}]_{C(\Pi)} \leq C_2\sqrt{(n_1^{-\alpha+1} + n_2^{-\beta+1})(n_1^{-\alpha+2} + n_2^{-\beta+2})}$$

при α>2, β>2.

Обчислювальні особливості α-методу.

α-Метод заснований на розв'язанні рівняння (7) щодо пари $(\tilde{u}_n, \tilde{\varepsilon}_{n,l})$. $\tilde{u}_n$– α-многочлен задачі для інтегрального рівняння; $\tilde{\varepsilon}_{n,l}$ - відповідна йому невязка. Після цього знаходиться α -многочлен u_{n+1} задачі Діріхле за формулою (8).

Ми отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Дану систему розв'язують застосуванням методу найшвидшого спуску. Тобто, необхідно в (7) прирівняти коефіцієнти при однакових многочленах $P_i(x_1)$ і $P_j(x_2)$. Послідовні наближення $(\tilde{u}_n^{(0)}, \tilde{\varepsilon}_{n,l}^{(0)})$, $(\tilde{u}_n^{(1)}, \tilde{\varepsilon}_{n,l}^{(1)})$, ... збігається до $(\tilde{u}_n, \tilde{\varepsilon}_{n,l})$, зі швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої приблизно дорівнює

$q=\frac{M_1-M_0}{M_1+M_0}$.

2.2. Наближене рішення початкової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами параболічного типу на півсмузі

α-метод може застосовуватися також при розв'язанні параболічних рівнянь. Наприклад, таким чином вирішується перша початково-крайова задача:

$\frac{\partial u}{\partial t}$=-$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + au + f,$

u (x,0) = u_0(x), u = 0 при x ϵ ∂П, де u = u (x, t), x = (x_1, x_2),

П=$(0, h_1) * (0, h_2)$.

Застосувавши α-метод, замінимо цю задачу еквівалентним їй інтегральним рівнянням. Потім приходимо до співвідношення, аналогічного (1.7). Як боло сказано вище, співвідношення (1.7) еквівалентно системі алгебраїчних рівнянь. А в разі параболічних рівнянь, подібне співвідношення еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку. Розв'язавши систему отримаємо наближений розв'язок виду

u_{n+1}=$\sum_{k}^{n_1+1} \sum_{i,j=0}^{n_2+1} c_{ijk} x_1^i \, x_2^i e^{\lambda_k t}$. [12]

2.3. Застосування α-методу до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з багаточленними коефіцієнтами гіперболічного типу

2.3.1. Постановка задачі Гурса та задачі Коші

1) Постановка задачі. На прямокутнику П: [0, H_1] x [O, H_2], H_i>0, розглянемо лінійне диференціальне рівняння з багаточленними коефіцієнтами гіперболічного типу виду

a_0(x,y) z_{xy} + a_1(x,y) z_x + a_2(x,y) z_y + a_3(x,y)z = f(x,y). (1)

Всі коефіцієнти a_i (x, y) і вільний член f (x, y) - многочлени по x і y і при цьому a_0 (x, y) ≥ c > 0 ∀ (x, y) Є П, де c=const.

Сформулюємо задачу Гурса. Знайдемо на прямокутнику П такий двічі неперервний розв'язок який диференціюється у z (x, y) рівняння (1). На відрізках характеристик y = 0 і x = 0 цього рівняння, що містяться в П, він задовольняє умовам

$z(x, 0) = p_1(x),\ z(0, y) = p_2(y),$ (2)

p_i - наперед задані многочлени, які мають в точці перетину характеристик рівні значення: $p_1(0) = p_2(0)$. Візьмемо довільну точку (x,y) є П. Інтегруючи рівняння (1) по прямокутнику [0, x] * [0, y] з урахуванням умови (2), для визначення розв'язку z (x, y) отримаємо наступне інтегральне рівняння, еквівалентне задачі Гурса (1), (2):

$$a_0(x,y)z(x,y)=\int_0^x P\,(s,y)z(s,y)\,ds + \int_0^y Q(x,t)z(x,t)dt + \int_0^x\int_0^y R(s,t)z(s,t)dsdt + F(x,y), \quad (3)$$

де P, Q, R, F - многочлени, що визначаються формулами

$$\left.\begin{aligned} P\,(x,y) &= [\mathrm{a}_0\,(\mathrm{x},\mathrm{y})]_x - \mathrm{a}_2(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = [\mathrm{a}_0\,(\mathrm{x},\mathrm{y})]_y - \mathrm{a}_1(\mathrm{x},\mathrm{y}),\\ R\,(x,y) &= [\mathrm{a}_1\,(\mathrm{x},\mathrm{y})]_x + [\mathrm{a}_2(\mathrm{x},\mathrm{y})]_y - [\mathrm{a}_0\,(\mathrm{x},\mathrm{y})]_{xy} - \mathrm{a}_3(\mathrm{x},\mathrm{y}),\\ F(x,y) &= a_0(x,0)p_1(x) - \int_0^x P(s,0)p_1(s)ds + a_0(0,y)p_2(y) -\\ &- \int_0^y Q(0,t)\,p_2(t)dt - a_0(0{,}0)p_1(0) + \int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt \end{aligned}\right\}$$

(4)

З цієї системи використаємо натуральні числа, що виражають собою прості функції від степенів по змінних x і y коефіцієнтів рівняння (1) і граничних умов (2).

Позначимо степені змінної x:

- для многочленів $a_j(x,y) - \alpha_{jx}$, j=0,1,2,3 (α_j - грецький аналог a_j)
- для многочлена $p(x,y)$ - π_x.

Нехай відповідні степені цих многочленів по змінній *y* будуть мати вигляд - α_{jy} і π_y, а степені многочленів $p_1(x)$ *і* $p_2(y)$ – π_{1x} і π_{2x}

Після цього введем натуральні числа:

$l_1 = max\{\alpha_{0x}, \alpha_{1x}, \alpha_{2x}+1, \alpha_{3x}+1\},$

$l_2 = max\{ \alpha_{0y}, \alpha_{1y}, \alpha_{2y}, \alpha_{3y}+1\},$ (5)

$m_1 = max\{ \alpha_{0x}+ \pi_{1x}, \alpha_{2x}+ \pi_{1x}+1, \pi_x +1\},$

$m_1 = max\{ \alpha_{0y}+ \pi_{2y}, \alpha_{1y}+ \pi_{2y}+1, \pi_y +1\},$ (6)

якими ми будемо користуватися далі. [14]

2). При довільних

$$m \geq \max \{0, m_1\text{-}l_1\} \text{ і } n \geq \max \{0, m_2\text{-}l_2\} \qquad (6')$$

знайдемо наближений розв'язок задачі (1), (2) на двохвимірному сегмені П або на деякому його підсегменті [0, h_1] x [0, h_2], де $h_i \leq H_i$, у вигляді многочлена з невизначеними коефіцієнтами виду

$$z_{mn}(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x^i y^j, \qquad (7)$$

який задовольняє операторне рівняння

$$a_0(x, y)\, z_{mn}(x, y) = \int_0^x P(s,y) z_{mn}(s,y) ds \int_0^y Q(x,t) z_{mn}(x,t) dt + .$$

$$\int_0^x \int_0^y R(s,t) z_{mn}(s,t) ds dt + F(x,y) - \varepsilon_{mn}(x,y) \qquad (8)$$

В цьому рівнянні $\varepsilon_{mn}(x,y)$ буде рівне

$$\varepsilon_{mn}(x,y) = \sum_{(k,l)\in\Gamma} \delta_{kl} \tau_{kl} T_k^*\left(\frac{x}{h_1}\right) T_i^*\left(\frac{y}{h_2}\right), \qquad (9)$$

де:

1) $\delta_{00}=\frac{1}{4}$, $\delta_0\delta_{k0}=\frac{1}{2}$, якщо k ≥ 1 і l ≥ 1 і δ_{kl}=1, якщо kl > 0;

2) $T_j^*(s) := T_j$ (2s-1) зміщені на [0, 1] многочлени Чебишева, а $T_k^*\left(\frac{x}{h_1}\right)$ і $T_i^*\left(\frac{y}{h_2}\right)$ зміщені многочлени Чебишева, «перенесені» відповідно на сегменти [0, h_1] і [0, h_2];

3) через Г (m, n, l_1, l_2) позначена в координатній площині XOY фігура, що представляє собою різницю двох прямокутників:

Г= [0, m + l_1] x [0, n + l_2] \ [0, m] x [0, n] (див. Рис. 2.2): Г = {(m +1, 0), …, (m +l_1, 0), …, (m +1, n), …,(m +l_1, n), (0, n+1), …, (m + l_1, n+1), …, (0,n+l_2), …, (m + l_1, n+ l_2)} і τ_{kl} - невідомі коефіцієнти.

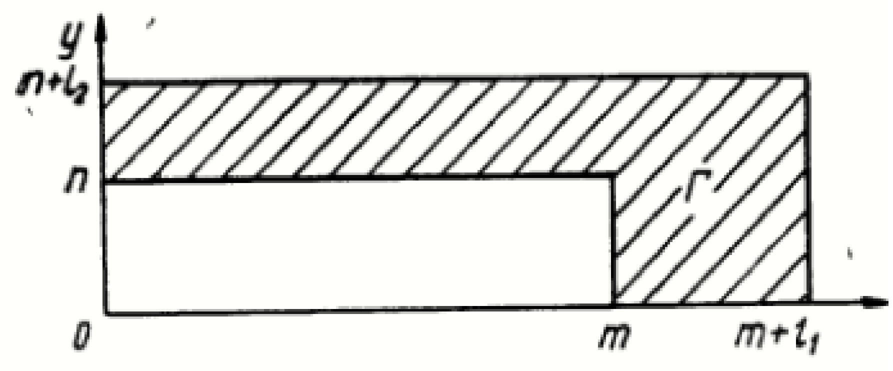

Рис. 2.2

Зауваження 1. Якщо хоча б одне з чисел l_1, l_2, m або n взяти меншими, ніж зазначено в (5) і (6'), то операторне рівняння (8), як правило, є нерозв'язним.

3) Теорема 1 (існування). Існують і притому єдині системи чисел $\{c_{ij}\}$ і $\{\tau_{kl}\}$, при довільних фіксованих натуральних m і n і достатньо малих $h_1 \in (0,H_1]$ і $h_2 \in (0, H_2]$, при яких рівняння (8) перетворюється в тотожність. Аналогічно існують $h_1^0 \in (0, H_1]$ і $h_2^0 \in (0, H_2]$ такі, що $\forall h_1 \in (0, h_1^0]$ і $\forall h_2 \in (0,h_2^0]$ та досить великі m і n при яких рівняння (8) розв'язується щодо c_{ij} і τ_{kl}.

4) Алгоритм побудови наближених багаточленних розв'язків z_{mn} (x,y) операторного рівняння (8) подібний випадку звичайного лінійного диференціального рівняння з багаточленними коефіцієнтами. Тобто:

1. У рівняння (8) підставляють значення z_{mn} (x,y) і $\varepsilon_{mn}(x,y)$ у вигляді сум (7) і (9) зневизначеними коефіцієнтами c_{ij} і τ_{kl}.

2. Після виконання операцій множення і інтегрування прирівнюють коефіцієнти при однакових членах x_iy_j.

3. В отриманих таким чином систем лінійних рівнянь, спочатку всі невідомі коефіцієнти c_{ij} виражають через τ_{kl}.

4. Останні обчислюють із знайденої для них системи лінійних рівнянь.

Теорема 2. Якщо при деяких $h_i \in (0, H_i]$, i=1, 2 і $m \geq m_1$, $n \geq n_1$ операторне рівняння (8) має розв'язки, то на $[0, h_1] \times [0, h_2]$ при зазначених m і n справедлива оцінка

$\| z(x,y) - z_{mn}(x,y) \| \leq \sum_{(k,l)\in\Gamma} \delta_{kl} |\tau_{kl}|$, (10)

де $K=K(h_1, h_2) = const$.

Теорема 2'. Існують скінченні числа $h_1^0 \in (0, H_1]$, i=1,2, і $B=B(h_1^0,\ h_2^0) = const$ такі, що $\forall h_i \in (0, h_i^0]$ і довільних натуральних m і n таких, що

$$\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} < \frac{B}{h_1^0 h_2^0},$$

справедливі твердження:

а) операторне рівняння (8) розв'язується;

б) на прямокутнику $\pi = [0,\ h_1^0] \times [0,\ h_2^0]$ мають місце оцінки

$| z(x,y) - z_{mn}(x,y)| \leq A\sqrt{m+n} E_{m,n}(z)_{C(\pi)}$,

$A=A(h_1^0,\ h_2^0) = const > 0$ (11)

Зауваження 2. Якщо початкові розміри H_1 і H_2 прямокутника $\Pi=[0,H_1] \times [0, H_2]$ нас не влаштовують, то робимо наступне:

1) Системою прямих, паралельних сторонам прямокутника П, розбивають його на систему більш дрібних прямокутників.

2) Послідовно шукають на менших прямокутниках наближені розв’язки задачі Гауса. На кожному кроці за граничні функції (див. (2)) приймають ті значення на відповідних сторонах, які або задані, або були отримані на попередніх кроках як багаточленні розв’язки задачі Гурса.

Зрозуміло, що отримані таким чином розв’язки є частково-многочленними.

5) Приклад. Потрібно розв’язати задачу Гурса:

$(1 + x)(1 + y)\, z''_{xy} = 1,\ z(x, 0) = z(0, y) = 0.$ (*)

При наближенні розв’язку цієї задачі на квадратах $\Pi_{\frac{1}{4}} = [0, \frac{1}{4}]^2$ і $\Pi_{\frac{1}{2}} = [0, \frac{1}{2}]^2$ з допомогою наведеного вище способу отримаємо відповідно многочлени $z_{33}(x, y)$ і $\widetilde{z_{33}}(x, y)$:

z_{33} (x, y) = 0,998619xy – 0,485516 (x^2y + xy^2) + 0,236052 x^2y^2 + 0,235402(x^3y + xy^3) – 0,11445 (x^3y^2 + x^2y^3) + 0,05549 x^3y^3,

$\widetilde{z_{33}}$ (x, y) = 0,991821xy – 0,45526 (x^2y + xy^2) + 0,208971 x^2y^2 + 0,173438 (x^3y + xy^3) – 0,079611 (x^3y^2 + x^2y^3) + 0,030328 x^3y^3

і з врахуванням теореми 2 знайдемо оцінки

|| z(x, y) - z_{33} (x, y)$||_{c(\Pi_{\frac{1}{4}})}\leq$ 0б000011, || z(x, y) - $\widetilde{z_{33}}$(x, y)$||_{c(\Pi_{\frac{1}{2}})}\leq$ 0,00067.

Функція z(x,y) = ln (1 + x) ln (1 + y) є розв'язком задачі Гурса.

Відмітимо, що якщо б розв'язок z(x, y) був заданий явно, тобто у вигляді z = ln (1 + x) ln (1 + y), то многочлен Тейлора t_{33} (x, y) наближав би його відповідно зі швидкістю

|| z(x, y) - t_{33} (x, y)$||_{c(\Pi_{\frac{1}{4}})}$ > 0,000362,

|| z(x, y) - t_{33} (x, y)$||_{c(\Pi_{\frac{1}{2}})}$ > 0,0092,

Тобто, відповідно в 32 і 13 разів гірше, ніж многочлени z_{33}(x, y) і $\widetilde{z_{33}}$(x, y).

б) Зауваження. 1. Для часткового випадку рівняння (1) виду

z''_{xy} + (a_1x + a_0) z'_x + (b_1y + b_0) z'_y + cz = f(x, y), (12)

z''_{xy} + a_1(y) z'_x + a_2(x) z'_y + a_3(x, y)z = f(x, y), (12′)

при будь-яких h_i ϵ (0, H_i], i = 1, 2, і достатньо більших m і n операторе рівняння (8) розв'язується. У випадку рівняння (12) маємо

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} \frac{||z(x,y)- z_{mn}(x,y)||_{L^2_{g(h_1,h_2)}}}{E^{h_1,h_2}_{m,n}(z)_{L^2_g}} \leq 2,$$

а у випадку рівняння (12′) отримаємо

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} \frac{||z(x,y)- z_{mn}(x,y)||_{L^2_{g(h_1,h_2)}}}{E^{h_1,h_2}_{m,n}(z)_{L^2_g}} = 1,$$

де $g(h_1,\ h_2)$ – чебишевська вага, така що

$$||\varphi(x,y)||_{L^2_{g(h_1,h_2)}} := \left\{ \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \frac{\varphi^2(x,y)}{\sqrt{1-(\frac{2x}{h_1}-1)^2}\sqrt{1-(\frac{2y}{h_2}-1)^2}} \times dxdy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

2. Можна показати, що наведений спосіб дозволяє наближати як розв'язок функції (1), (2), так і похідних цих функцій.

3. Л. А. Островецький провів узагальнення викладених вище результатів, як у випадку задачі Гурса для рівнянь більш високих порядків, так і для рівнянь з числом незалежних перемінних, більше двох. [11,с.177]

Задача Коші

1. Постановка задачі. На сегменті $[0, H_1]$ задамо монотонно зростаючий многочлен від 0 до H_2

$$y=\varphi(x): [0, H_1] \rightarrow [0, H_2] \qquad (13)$$

і многочлени $p_3(x)$ і $p_4(x)$. Знайдемо на криволінійному трикутнику (0,0), $(0,H_1)$, (H_1, H_2) розв'язок z (x, y) рівняння (1), яке задовольняє в точках кривої $y=\varphi(x)$ «початковим» умовам

$$z(x, \varphi(x)) = p_3(x),\ z'_y(x, \varphi(x)) = p_4(x) \qquad (14)$$

Вважатимемо, що $a_i(x, y)$ і $f(x, y)$ - многочлени, задані на зазначеному криволінійному трикутнику.

Не втрачаючи загальності можемо і будемо вважати, що

$$p_3(x) \equiv p_4(x) \equiv 0. \qquad (15)$$

Дійсно, якби це було не так, то після добре відомої заміни незалежної змінної

$$\tilde{z}(x,y) := z(x,y) - p_3(x) - [\varphi(x)-y]\, p_4(x)$$

ми отримали б задачу Коші для невідомої функції $\tilde{z}(x,y)$, всі коефіцієнти якої б знову були многочленами і разом з тим умова (15) виконувалася.

Вважатимемо так само, що $\varphi(x) \equiv x$. Якби ця умова не виконувалося, то ми, поклавши

$$\dot{z}(x,u):=z(x, \varphi(u)),$$

легко переконалися б, що функція $\dot{z}(x,u)$ задовольняє рівняння

$$b_0(x,u)\dot{z}''_{xu}+b_1(x,u)\dot{z}'_x+ b_2(x,u)\dot{z}'_u+ b_3(x,u)\dot{z}=\bar{f}(x,u), \qquad (16)$$

з багаточленними коефіцієнтами

$b_0(x,u)=a_0(x, \varphi(u)),\ b_1(x,u)=a_1(x, \varphi(u))\varphi'(u),\ b_2(x,u)=a_2(x, \varphi(u)),$
$b_3(x,u)=a_3(x, \varphi(u))\varphi'(u),\ \ \bar{f}(x,u)=f(x, \varphi(u))\varphi'(u)$

і «початковими» умовами

$$\dot{z}(x, u)|_{u=x}=\dot{z}'_x(x, u)|_{u=x}=\dot{z}'_u(x, u)|_{u=x}=0. \qquad (17)$$

Зауважимо при цьому, що якщо деякий многочлен $\mathring{z}_{mn}(x, u)$ на трикутнику $\mathring{D}_h = \{x, u\}$, $x \in [0, h]$, $0 \le u \le x$ $(h \le H)$ добре наближає функцію $\mathring{z}(x,u)$: $|\mathring{z}(x,u) - \mathring{z}_{mn}(x, u)| < \varepsilon$,$(x, u) \in \mathring{D}_h$, то на криволінійному трикутнику $D = \{x,y\}$, $x \in [0, h]$, $0 \le y \le \varphi(x)$, функція $\mathring{z}_{mn}(x, \varphi^{-1}(y))$ добре наближає на D розв'язок $z(x, y)$: $|z(x, y) - \mathring{z}_{mn}(x, \varphi^{-1}(y))| = |z(x, \varphi(u)) - \mathring{z}_{m,n}(x, u)| =|\mathring{z}(x, u) - \mathring{z}_{m,n}(x, u)|<\varepsilon$. [34]

2. Розглянемо задачу Коші

$$a_0(x, y)z''_{xy}+ a_1(x, y)z'_x+ a_2(x, y)z'_y+ a_3(x, y)z=f(x,y), \qquad (1)$$

$$z(x,x)=0,\ z_y(x,x)=0 \Rightarrow z_x(x,x)=0,\ x\in[0,h],\ h\in(0, H_1] \qquad (18)$$

Замінимо цю задачу еквівалентним їй інтегральним рівнянням. Для цього, враховуючи умову (18), проінтегруємо рівняння (1) двічі по трикутнику D_{xy} (рис. 2.3)

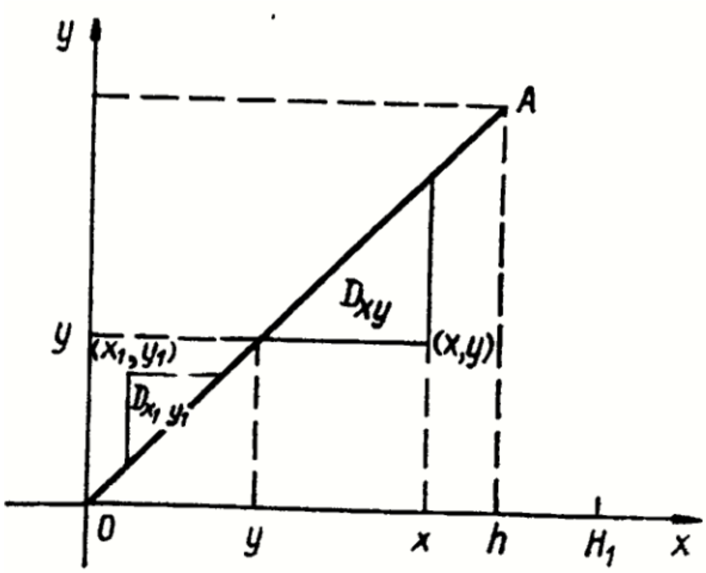

Рис. 2.3

$$a_0(x,y)z(x,y)=\int_y^x P(s,y)z(s,y)ds+\int_x^y Q(x,t)z(x,t)dt+$$

$$\int_y^x ds\int_s^y R(s,t)z(s,t)dt+\int_y^x ds\int_s^y f(s,t)dt, \qquad (3')$$

де P(x, y), Q(x, y), R(x, y) визначається за формулами (4). Легко перевірити, що формула (3′) залишається справедливою також у випадку, коли точка (x_1,y_1) знаходиться вище діагоналі OA (рис.2.3).

Візьмемо $m_1=\varphi_x+1$, $n_1=\varphi_y+1$, де числа φ_x і φ_y, як і раніше, позначають степені многочлена f(x, y) по x і відповідно по y. Тоді $\forall m, n \in N$, які задовольняють умову

$$m \geq \max\{0, m_1 - l_1\},\ n \geq \max\{0, n_1 - l_2\}, \qquad (6')$$

де l_1 і l_2 визначаються за формулами (5).

$$z_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x^i y^j, \qquad (7')$$

Наближені розв'язки многочлена z(x, y) задачі Коші (1), шукатимемо у вигляді розв'язку наступного операторного рівняння:

$$a_0(x, y)\, z_{m,n}(x, y) = \int_y^x P(s,y)\, z_{m,n}(s, y)\, ds + \int_x^y Q(x,t) z_{mn}(x, t)\, dt + \int_y^x ds\int_s^y R(s,t)\, z_{m,n}(s, t)\, dt + \int_y^x ds\int_s^y f(s,t)dt - \varepsilon_{m,n}(x, y), \qquad (8')$$

при цьому, невязка $\varepsilon_{m,n}(x, y)$ визначається за формулою

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Gamma 1} \delta_{kl}\tau_{kl}\, T^*_k\left(\frac{x}{h}\right) T^*_e\left(\frac{y}{h}\right), \qquad (9')$$

де $Г_1=Г_1$ (m, n, l_1, l_2) – фігура в координатній площині XOY, яка складається із фігури Г, зображеної на рис. 2.2, і двох відрізків:

1) $\{x, y\}$, x=0, $n + l_2 < y \le m + n + l_1 + l_2$;
2) $\{x, y\}$, $m + l_1 < x \le m + n + l_1 + l_2$, y=0.

Числа δ_{kl} визначаються за формулою (9); τ_{kl} – невідомі коефіцієнти.

3. Теорема 3 (існування). Якщо $h \le h_0$ = const > 0, а m, n ϵ N і задовольняє умову

$$(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} < \frac{A}{h^2}, \qquad (19)$$

де A=const > 0, то операторне рівняння (8′) має і при тому розв’язок єдиний.

Теорема 4 (оцінка похибки). Існує стала K=K(H) > 0 така, що кожний раз, коли операторне рівняння (8′) має розв’язок, то виконується нерівність

$$|z\,(x,y) - z_{m,n}\,(x,y)| \le K \sum_{(k,l)\epsilon Г1} |\tau_{kl}|. \qquad (10')$$

Теорема 4′. Якщо при деяких m і n виконується нерівність (19), то справедлива нерівність

$$|z\,(x,y) - z_{m,n}\,(x,y)| \le A'\sqrt{m+n}\, E_{m,n}(z)_{\,c[D_h^0]}. \qquad (11')$$

Зауваження. Оскільки розв’язок z (x,y) є очевидним (в зв’язку з теоремою 4′), аналітичним по x і y, то при $\ln m \asymp \ln n$ і довільному фіксованому kϵN справедлива нерівність

$E_{m,n}(z) \le \frac{A}{n^k}$, A=A(k)= const > 0. [11,c.180]

4. Приклад. Розглянемо задачу Коші

$z''_{xy} + z = -1$; $z\,(x,y)|_{\,y=x} = z'_x(x,y)|_{\,y=x} = z'_y(x,y)|_{\,y=x} = 0$.

Розв’яжемо операторне рівняння (8).

На квадраті $D = [0, \frac{1}{2}]^2$ при m = n = 2, знайдемо

$z_{2,2}\,(x,y) = 0{,}000289 - 0{,}005290\,(x + y) - 0{,}952230\,xy + 0{,}518436\,(x^2+y^2) - 0{,}126964\,(x^2y + xy^2) + 0{,}253928\,x^2y^2$,

$$||z\,(x,y) - z_{2,2}\,(x,y)||_{C[D]} < 0{,}00043.$$

Зауважимо, що оскільки точний розв'язок цієї задачі визначається за формулою

$z(x, y) = \mathrm{ch}(x - y) - 1$, то легко знайдемо

$$\|z(x, y) - t_{2,2}(x, y)\|_{C[D]} < 0{,}0156.$$

5. Зауваження. Оскільки точність розв'язку задачі Коші на квадраті Q значно вища, коли розміри H цього квадрата малі, то, коли H великі, доцільно:

1) розбити спочатку Q при деякому $k \in \mathbb{N}$ на k^2 рівних квадратів (рис.2.4)

2) розв'язати задачу Коші на кожному із «малих» діагональних квадратів q_{ij};

3) на інших квадратах q_{ij}, відштовхуються від діагональних квадратів, послідовно розв'язати задачу Гурса. [34]

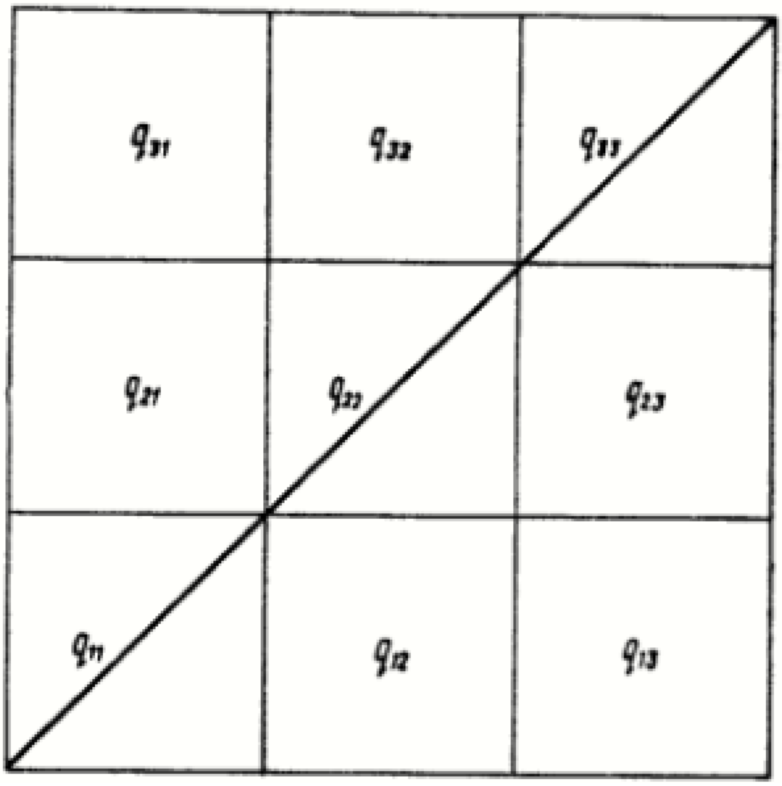

Рис. 2.4

2.3.2. Мішана задача

1. Постановка задачі. Нехай, заданий монотонно зростаючий многочлен $y=\varphi(x)$ на сегменті $[0, H_1]$ і многочлени $p_5(x)$ і $p_6(x)$ ($p_5(0)= p_6(0)$). На криволінійному трикутнику (0,0), $(0, H_1)$, (H_1, H_2) потрібно знайти розв’язок рівняння (1), відповідно до умови:

$z(x, 0) = p_5(x),\ z(x, y) \mid_{y=\varphi(x)} = p_6(x)$. (14′)

Аналогічно задачі Коші для отримання наближених розв’язків мішаної задачі достатньо вміти отримувати такі розв’язки в разі, коли в умовах (14') $\varphi(x)\equiv x$ і $p_6(x)\equiv 0$. Тобто, коли співвідношення (14') мають вигляд

$z(x, 0) = p_5(x),\ z(x, y) \mid_{y=x} = 0$. (14″)

Для заміни задачі (1), (14″) еквівалентним їй інтегральним рівнянням, необхідно проінтегрувати двічі рівняння (1) по прямокутнику S_{xy} (рис. 2.5), враховуючи при цьому умови (14").

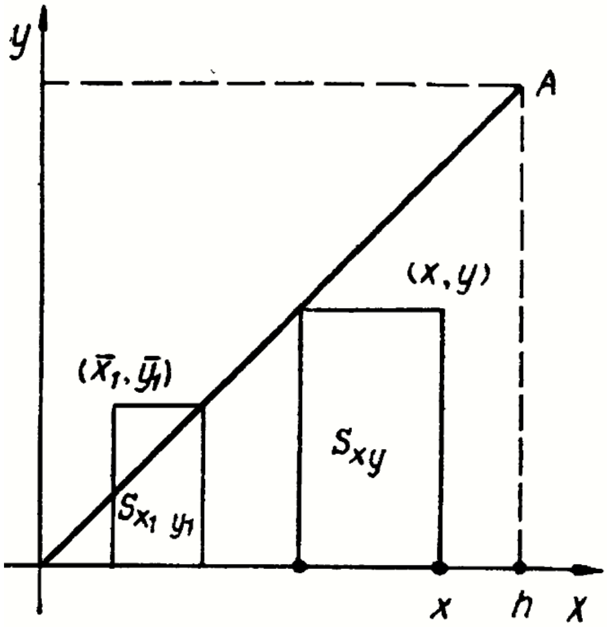

Рис. 2.5

Отримаємо

$a_0(x, y)\, z(x, y) = \int_y^x P(s,y)\, z(s, y)\, ds + \int_0^y Q(x,t) z(x, t)\, dt$ - $\int_0^y Q(y,t)\, z(y, t) dt + \int_y^x ds \int_0^y R(s,t)\, z(s, t) dt + F_1(x,y)$, (3″)

де многочлени P, Q і R знову визначаються за формулами (4), а $F_1(x) = a_0(x,0)\, p_5(x) - a_0(y, 0)\, p_5(y) - \int_0^x P(s,0)\, p_5(s)ds + \int_y^x ds \int_0^y f(s,t)dt$.

Коли точка (x_1, y_1) знаходиться вище діагоналі OA (див. рис. 2.5) формула (3″) залишається справедливою

Покладемо

$m_1 = \max\{ \alpha_{0x} + \pi_{5x}; \alpha_{2x} + \pi_{5x}+1; \varphi_x+1\}$, $n_1 = \varphi_y+1$,

де π_{5x} - степінь многочлена $p_5(x)$; α_{0x}, α_{2x}, φ_x, φ_y визначена вище.

2. При $\forall m, n \in N$, які відповідають умовам

$$m \geq \max\{0, m_1 - l_1\},\ n \geq \max\{0, n_1 - l_2\} \qquad (6")$$

де l_1 і l_2, як і для задач Гурса і Коші, визначаються за формулами (5), многочлен

$$z_{m,n}(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x^i y^j, \qquad (7")$$

добре наближає на квадраті $[0, h]^2$ розв'язок $z(x, y)$ мішаної задачі (1), (14"). Шукатимемо його у вигляді розв'язку інтегрального рівняння

$a_0(x, y)\, z_{m,n}(x, y) = \int_y^x P(s,y)\, z_{m,n}(s, y)\, ds + \int_0^y Q(x,t)\, z_{m,n}(x, t)\, dt - \int_0^y Q(y,t) z_{m,n}(y, t)\, dt + \int_y^x ds \int_0^y R(s,t)\, z_{m,n}(s, t)\, dt + F_1(x, y) - \varepsilon_{m,n}(x, y)$. (8″)

Тут невязка $\varepsilon_{m,n}(x, y)$ вираховується у вигляді

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) = = \sum_{(k,l)\epsilon\Gamma 2} \delta_{kl} \tau_{kl}\, T^*_k\left(\frac{x}{h}\right) T^*_l\left(\frac{y}{h}\right)$$

$\Gamma_2 = \Gamma_2(m, n; l, l_2)$ - фігура в координатної площині XOY, яка складається із фігури Г (див. рис. 2.2) і відрізка $\{x, y\}$, $x = 0$, $n+l_2+1 \leq y \leq m+n+l_1+l_2$. Числа δ_{kl} визначаються за формулою (9). τ_{kl} - невідомі параметри.

3. Теорема 5. *Якщо* $h \leq h_0 = const > 0$, то:

а) операторное рівняння (8") має і притому єдиний розв'язок;

б) при всіх $(x, y) \in [0, h]^2$ справедливі оцінки

$$|z(x,y) - z_{m,n}(x,y)| \leq K \sum_{(k,l)\epsilon\Gamma 2} |\tau_{kl}| \qquad (10″)$$

$$|z(x,y) - z_{m,n}(x,y)| \le A\sqrt{m+n}\, E_{m,n}(z)\, c_{([0,h]^2)}, \qquad (11'')$$

де K = K(H), A = A(H) - ефективно обчислювані константи.

Зауваження. 1 Як і нерівності (10), (10'), оцінка (10″) справедлива щоразу, коли рівняння (8″) має розв’язок. Тобто, не обов'язково при невеликих h.

2. На безлічі $D_h^0 = \{(x, y): 0 \le y \le x \le h\}$ у нерівності (10") можна записати замість K іншу ефективно обчислювальну константу $K_1 < K$.[54]

4. Приклад. Функція

$$z(x, y) = \left(x^2 - \frac{x}{2} - y^2 + \frac{y}{2}\right) e^{(y-\frac{1}{4})^2}.$$

служить точним розв'язком мішаної задачі

$$z''_{xy} - \left(2y - \frac{1}{2}\right) z_x = 0,$$

$$z(x, 0) = e^{1/16}\left(x^2 - \frac{x}{2}\right),\ z(x, y)|_{y=x} = 0$$

Для многочлена

$z_{2,2}(x, y) = 0{,}000508 - 0{,}532112x + 0{,}499935y + 0{,}257998xy + 1{,}064241x^2 - 0{,}999869y^2 - 0{,}515996(x^2y + xy^2) + 1{,}031992x^2y^2$,

побудованого за допомогою викладеного алгоритму, на $[0, \frac{1}{2}]^2$ і $D_{\frac{1}{2}}^0$ справедливі відповідні оцінки

$$|z(x, y) - z_{2,2}(x, y)| < 0{,}00232,$$

$$|z(x, y) - z_{2,2}(x, y)| < 0{,}00141.$$

Для порівняння зауважимо, що сума Тейлора $t_{2,2}(x, y)$ функції z (x, y) наближає її таким чином, що, як на множині $[0,\frac{1}{2}]^2$, так і на множині $D_{\frac{1}{2}}^0$ має місце нерівність

$$\max |z(x, y) - t_{2,2}(x, y)| \ge 0{,}0665$$

5. Оскільки, точність розв'язку задачі Дарбу на квадраті Q значно вищі, коли його розміри H малі, то, коли H великі, доцільно:

1) розбити спочатку Q при деякому $k \in N$ на k^2 рівних квадратів q_{ij} (див. рис. 2.3);

2) на кожному з «малих» діагональних квадратів q_{ij} розв'язувати задачу Дарбу, а на інших квадратах q_{ij}, задачу Гурса;

3) в кожному з горизонтальних шарів q_{ij}, $j = \overline{1,k}$, починаючи з першого, спочатку вирішується (на q_{ij}) задача Дарбу, а потім (на q_{ij}, $j \neq i$) задача Гурса.

Після знаходження розв'язку рівняння в усіх квадратах i-го шару потрібно перейти до (i + 1)-го шару.

Відповідні оцінки похибки є в [33].

2.4. AI-метод наближеного розв'язування диференціальних рівнянь гіперболічного типу

У цьому розділі AI-метод застосовується до наближення рішень нелінійних задач для рівнянь гіперболічного типу (див. [13], [14] і [37]).

2.4.1. AI-метод розв'язування задачі Коші.

- Побудуємо деяку систему функцій $\widetilde{z_v}$(n;x,y), $\widetilde{p_v}$(n;x,y),$\widetilde{q_v}$(n;x,y).

- Вона наближає розв'язок задачі Коші і відповідно похідні цього розв'язку $p=p(x,y)=z_x'(x,y)$ і $q=q(x,y)=z_y'(x,y)$.

- Оцінимо похибки одержуваних наближень.

1. Постановка задачі. Задамо на сегменті [0, H] неперервно монотонно зростаючу функція g(x), для якої $g'(x) \neq 0$ при всіх $x \in [0, H]$. g(0)=0, g(H)=K. Розглянемо на прямокутнику $[0, H] \times [0, K]$ рівняння

$$z_{xy}'' = \tilde{f}(x, y, p, q), \qquad (1)$$

в якому функція $\tilde{f}$ неперервна в паралелепіпеді

$\prod[0, H] \times [0, K] \times [-b, b] \times [-b', b'] \times [-b'', b'']$,

де b, b′, b″ - деякі додатні числа. Вони задовольняють умовам Ліпшиця: z, p, q з постійною A>0:

$|\tilde{f}(x, y, z', p', q') - \tilde{f}(x, y, z'', p'', q'')| \leq A(|z' - z''| + |p' - p''| + |q' - q''|)$.

Задачею Коші для рівняння (1) (див.[28]), є задача на знаходження розв’язку z(x, y) рівняння (1), який задовольняє умову

$$z(x, y)\,|_{\,y=g(x)} = a\,(x),\ z_x(x, y)\,|_{\,y=g(x)} = b(x),\ z_y'(x, y)|_{\,y=\varphi(x)} = c(x), \qquad (2)$$

де a(x), b(x) і c(x) – неперервні функції які задовольняють умову $a'(x) = b(x) + g'(x)c(x)$. Не втрачаючи загальності будемо вважати, що $a(x)=b(x)=c(x)\equiv 0$.

Замість невідомої функції z(x, y) введемо нову невідому функцію

$$\dot{z}(x, u) := z(x,y), \qquad (3)$$

де y=g(u). Так, як початкові умови задаються не на кривій y=g(x), а на прямій u=x, то ця функція має для нас ту перевагу, що

$\dot{z}(x, u)|_{u=x} = z(x, g(u))|_{u=x} = z(x, g(x)) = z(x, y)|_{y=g(x).}$

Замінимо (3). Тоді початкова задача знаходження функції z(x,y) (див.[34]) перетворюється в задачу для пошуку функції $\dot{z}(x, u)$. Ця функція задовольняє рівняння

$$\dot{z}_{xy}''(x, u) = f\,(x, u, \dot{z}(x, u), \dot{z}_x(x, u)\,\dot{z}_u'(x, u)), \qquad (4)$$

в якому

$f\,(x, u, \dot{z}(x, u), \dot{z}_x(x, u)\,\dot{z}_u'(x, u)) = g'(u)\tilde{f}(x, g(u), z(x, g(u)), z_x(x, g(u)), z_u(x, g(u))/g'(u))$,

і $\dot{z}(x, u)|_{u=x}=\dot{z}_x'(x, u)|_{u=x}=\dot{z}_u'(x, u)|_{u=x}=0. \qquad (5)$

Дійсно,

$\dot{z}$(x, u) = $\dot{z}$(x, g^{-1}(y)):=z(x,y); y=g(u)=> $\dot{z}_{xu}''$(x,u) = $\dot{z}_{xy}''g'(u)$=> $\dot{z}_{xy}''$ = $\frac{1}{g'(u)}\dot{z}_{xu}''$(x,u)=> (4)

Надалі функцію $\dot{z}$(x, u) і її похідні $\dot{z}_x'$(x, u) = $\dot{p}$(x,u), $\dot{z}_u'$(x, u) = $\dot{q}$(x,u) будемо позначати відповідно z (x, u), p(x, u), q(x,u). [11, с.185]

2.4.2. Метод Пікара.

Розв'язок z (x, y) задачі (4), (5) на квадраті [0, h] x [0, h], згідно з методом Пікара, є границею послідовності функцій z_v(x,u). Будуються вони, вирушаючи від еквівалентної задачі Коші (4), (5) системи інтегральних рівнянь

$$Z(x, u) = \int_u^x ds \int_s^u f\big(s,t,z(s,t),p(s,t),q(s,t)\big)dt,$$

$$p(x, u) = \int_x^u f\big(x,t,z(x,t),p(x,t),q(x,t)\big)dt, \qquad (6)$$

$$q(x, u) = \int_u^x f\big(s,u,z(s,u),p(s,u),q(s,u)\big)ds.$$

за допомогою наступного інтегрального процесу:

$$z_0(x, u) = p_0(x, u) = q_0(x, u) = 0,$$

$$z_v(x, u) = \int_u^x ds \int_s^u f(s, t, z_{v-1}(s, t), p_{v-1}(s, t), q_{v-1}(s, t))dt,$$

$$p_v(x, u) = \int_x^u f(x, t, z_{v-1}(x, t), p_{v-1}(x, t), q_{v-1}(x, t))dt,$$

$$q_v(x, u) = \int_u^x f(s, u, z_{v-1}(s, u), p_{v-1}(s, u), q_{v-1}(s, u))ds. \qquad (7)$$

З міркувань, близьких до тих, які містяться в роботі Ф.Трікомі [75], мають місце такі нерівності:

$$|z_{v+1}(x, u) - z_v(x, u)| + |p_{v+1}(x, u) - p_v(x, u)| + |q_{v+1}(x, u) - q_v(x, u)| \le$$

$$||f||_{сп} A^{-1}\frac{[Ah(4+h)]^{v+1}}{(v+1)!}, \qquad (8)$$

$$|z(x, u) - z_v(x, u)| + |p(x, u) - p_v(x, u)| + |q(x, u) - q_v(x, u)| \le$$

$$||f||_{сп}\, h\,(4+h)\,\frac{[Ah(4+h)]^{v}}{(v+1)!}\exp\,[Ah\,(4+h)] \qquad (9)$$

$|\frac{\partial^2 z(x,u)}{\partial x \partial u}$ - $\frac{\partial^2 z_v(x,u)}{\partial x \partial u}|$ = f$\big(x, u, z(x,u), p(x,u), q(x,u)\big)$ - f(x, u, z_{v-1}(x, u), p_{v-1}(x, u), q_{v-1}(x, u)) ≤ A (|z (x, u) - z_{v-1}(x, u)| + |p (x, u) - p_{v-1}(x, u)| + |q(x, u) - q_{v-1}(x,u)|) ≤ $||f||_{сп}\frac{[Ah(4+h)]^v}{v!}$ exp [Ah (4+h)] (10)

де $||f||_{сп} = \max\limits_{(x,u,z,p,q)\epsilon\Pi} |f(x,u,z,p,q)|$.

Зауваження. Надалі множник 4 + h замінимо на 2 + $\frac{h}{2}$.

Ітеративний процес (7) дуже швидко збігається до розв'язку задачі Коші відповідно до співвідношення (8) і (9). Цей розв'язок єдиний. Але, оскільки до формул (7) входить операція інтегрування, цей ітеративний процес дуже важко використовувати для ефективної побудови функцій z_v(x,u), p_v(x, u), q_v(x, u).

У зв'язку з цим, слідуючи статті [10] і відштовхуючись від деякого оператора інтерполяції Лагранжа $\mathcal{L}_{nn}^0$ (f^0; ξ; η) по вузлах (ξ_i; η_j), де

$\xi_i = \xi_i(n) = -\cos\frac{i\pi}{n}$, $i=\overline{0,n}$, $\eta_j = \eta_j(n) = -\cos\frac{i\pi}{n}$, $j=\overline{0,n}$, (11)

- екстремальні точки многочленів Чебишева $T_n(\xi)$ = cosn arccosξ і $T_n(\eta)$ = cosn arccosη, розташовані на [-1,l], вказуємо ітераційний спосіб побудови послідовностей функції $\widetilde{z_v}$(x, u) = $\widetilde{z_v}$(n; x, u), $\widetilde{p_v}$(x, u) = $\widetilde{p_v}$(n; x, u), $\widetilde{q_v}$(x, u) = $\widetilde{q_v}$(n; x, u). Ці функції мають такі властивості:

1) кожна з функцій $\widetilde{z_v}$(n; x, u), $\widetilde{p_v}$(n; x, u), $\widetilde{q_v}$(n; x, u) може бути (за певними формулами) індуктивно побудована за допомогою кінцевого числа арифметичних операцій над значеннями функції f(x, u) $\widetilde{z_{v-1}}$(n; x, u), $\widetilde{p_{v-1}}$(n;x,u) $\widetilde{q_{v-1}}$(n; x, u)) в деяких заданих точках (x_i, u_j), ν = 1, 2, ..., де $\widetilde{z_0}$(n;x,u) = $\widetilde{p_0}$(n; x, u) = $\widetilde{q_0}$(n; x, u): = 0 і деяких постійних;

2) похибки δ_v(x,u)=|z_v(x,u) - $\widetilde{z_v}$(n; x, u)| + |p(x,u) - $\widetilde{p_v}$(n; x, u)| + |q_v(x,u) - $\widetilde{q_v}$(n; x, u)| є досить малими і для них встановлені зручні для чисельного підрахунку апріорні оцінки. [11,с.187]

2.4.3. Алгоритми наближеного розв'язування задачі Коші

Оператор інтерполяції Лагранжа

$\mathcal{L}_{nn}^{0}$ (f^{0}; ξ; η) = $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f^{0}(\xi_i; \eta_j) l_i^0(\xi)\, l_j^0(\eta)$, (12)

заданий на стандартному квадраті $R^0 = \mathscr{I}^0 \times \mathscr{I}^0 = [-1, 1] \times [-1, 1]$, в якому вузли, ξ_i, $i=\overline{0,n}$, і η_j, $j=\overline{0,n}$, визначаються за формулами (11), а $\{l_i^0(\xi)\}_{i=0}^{n}$ і $\{l_i^0(\eta)\}_{j=0}^{n}$ - системи фундаментальних многочленів Лагранжа:

$l_i^0(\xi) = l_i^0(n, \xi) = \prod_{r=0, r\neq i}^{n} \dfrac{\xi - \xi_r}{\xi_i - \xi_r} \Rightarrow l_i^0(\xi_r) = \delta_{ir}$,

$l_j^0(\eta) = l_j^0(n, \eta) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \dfrac{\eta - \eta_k}{\eta_j - \eta_k} \Rightarrow l_j^0(\eta_k) = \delta_{jk}$,

де δ_{pq} - символ Кронекера.

Відзначимо, що норма цього оператора $\mathcal{L}_{nn}^{0}$ (f^{0}; ξ; η) по вузлах (11) задовольняє нерівностям [13]

$\frac{4}{\pi^2}\ln^2 n \leq \|\mathcal{L}_{nn}^{0}(f^{0}; \xi; \eta)\| \leq \frac{4}{\pi^2}\ln^2 n + \frac{4}{\pi}\ln n + 1.$

Щоб зробити «пересадку» операторів $\mathcal{L}_{nn}^{0}$ (f^{0}; ξ; η) на квадрат який нас цікавить R = [0,h] x [0,h], необхідно використати формули:

$f^{0}(\xi; \eta) = f^{0}(-1 + \frac{2}{h}x; -1 + \frac{2}{h}u) = f(x,u)$; $l_i^0(\xi) = l_i(u)$,

$l_j^0(\eta) = l_j(u)$,

$\xi = -1 + \frac{2}{h}x,\ \eta = -1 + \frac{2}{h}u : [0,h] \times [0,h] \to [-1, 1] \times [-1, 1]$,

$\mathcal{L}_{nn}^{0}$ (f^{0}; ξ; η) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f^{0}(\xi_i;\eta_j) l_i^0(\xi)\, l_j^0(\eta) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(x_i; u_j)\ l_i(x)\, l_j(u)$: $= \mathcal{L}_{nn}(f, x, u)$,

$x_i = x_i(n) = \frac{h}{2}(\xi_i(n) + 1)$, $l_i(x) = l_i^0(-1 + \frac{2}{h}x)$,

$u_j = u_j(n) = \frac{h}{2}(\eta_j(n) + 1)$, $l_j(u) = l_j^0(-1 + \frac{2}{h}u)$. (13)

Зауважимо, що $\eta_i = \xi_i$, $i=\overline{0,n}$, а значить і $u_i = x_i$. Відповідно до статті [10] побудуємо матриці чисел

$a_{ir} = a_{ir}(A_{nn}^0) = \int_{-1}^{E_r} l_i^0(\xi)d\xi,\ i,\ r = \overline{0,n}$

A_{ijr}=A_{ijr}(A^0_{nn})=$\int_{-1}^{E_r} l_i^0(\xi)d\xi \int_{-1}^{E} l_j^0(\eta)d\eta$, $i, j, r = \overline{0,n}$. (14)

Для того, щоб наблизити розв'язок задачі Коші (4), (5) можемо використовувати матриці сталих a_{ir}, A_{ijr}, та побудувати в точках (x_r, u_k) (див. (13)) систему наближених значень $\widetilde{z_v^{r,k}} \approx z(x_r, u_k)$, $\widetilde{p_v^{r,k}} \approx p(x_r, u_k)$, $\widetilde{q_v^{r,k}} \approx q(x_r, u_k)$ шуканого розв'язку z(x,u) і його похідних p(x,u), q(x,u) за наступними ітераційними формулами:

$$\widetilde{z_0^{r,k}} = \widetilde{p_0^{r,k}} = \widetilde{q_0^{r,k}} = 0,\ r = \overline{0,n},\ ,\ k = \overline{0,n}, \quad (15)$$

$$\widetilde{z_v^{r,k}} = \frac{h^2}{4}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\left(x_i, u_j, \widetilde{z_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{q_{v-1}^{\iota,J}}\right) \text{ x } \left(A_{ijk} - A_{ijr} + a_{jk}(a_{ir} - a_{ik})\right),$$
(16)

$$\widetilde{p_v^{r,k}} = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n} f\left(x_r, u_j, \widetilde{z_{v-1}^{r,\iota}}, \widetilde{p_{v-1}^{r,\iota}}, \widetilde{q_{v-1}^{r,\iota}}\right)(a_{jk} - a_{ir}), \quad (17)$$

$$\widetilde{q_v^{r,k}} = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n} f\left(x_i, u_k, \widetilde{z_{v-1}^{\iota,k}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,k}}, \widetilde{q_{v-1}^{\iota,k}}\right)(a_{ir} - a_{ik}), \quad (18)$$

$k = \overline{0,n}$; $r = \overline{0,n}$; v=1, 2, ….

Рівності (15) - (18) являють собою значення в точках (x_r, u_k) функцій (многочленів степеня не вище 2n + 2)

$$\widetilde{z_0}(n; x, u) = \widetilde{p_0}(n; x, u) = \widetilde{q_0}(n; x, u) \equiv 0, \quad (19)$$

$$\widetilde{z_v}(n;x,u) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\left(x_i, u_j, \widetilde{z_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{q_{v-1}^{\iota,J}}\right) \text{ x } \int_u^x l_i(s)ds \int_s^u l_j(t)dt,$$
(20)

$$\widetilde{p_v}(n;x,u) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\left(x_i, u_j, \widetilde{z_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{q_{v-1}^{\iota,J}}\right) \text{ x } l_i(x) \int_x^u l_j(t)dt,$$
(21)

$$\widetilde{q_v}(n;x,u) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\left(x_i, u_j, \widetilde{z_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{q_{v-1}^{\iota,J}}\right) \text{ x } l_i(u) \int_u^x l_i(s)ds,$$
(22)

так, що

$\widetilde{z_v}(n; x_v, u_k) = \widetilde{z_v^{r,k}}$, $\widetilde{p_v}(n; x_r, u_k) = \widetilde{p_v^{r,k}}$, $\widetilde{q_v}(n; x_r, u_k) = \widetilde{q_v^{r,k}}$,

$r = \overline{0,n}$; $k = \overline{0,n}$; v=0, 1, 2, …. (23)

Дійсно, рівності (23) безпосередньо випливають з (19), при v = 0 і $r = \overline{0,n}$; $k = \overline{0,n}$. Після цього, враховуючи, що в силу заміни

$$s = \frac{h}{2}(\xi + 1) \leftrightarrow \xi = -1 + \frac{2}{h}s,\ \ t = \frac{h}{2}(\eta + 1) \leftrightarrow \eta = -1 + \frac{2}{h}t$$

маємо

$$\int_0^{x_r} l_i(s)ds = \int_0^{x_r} l_i^0\,(-1 + \frac{2}{h}s)ds = \frac{h}{2}\int_{-1}^{\xi_r} l_i^0(\xi)d\xi = \frac{h}{2}a_{ir},\ i = \overline{0,n},\ r = \overline{0,n}$$

$$\int_0^{u_k} l_j(t)dt = \int_0^{u_k} l_j^0\,(-1 + \frac{2}{h}t)dt = \frac{h}{2}\int_{-1}^{\eta_k} l_i^0(\eta)d\eta = \frac{h}{2}\int_{-1}^{\xi_k} l_i(\eta)d\eta = \frac{h}{2}a_{jk},$$

$$\int_0^{x_r} l_i(s)ds\int_0^{s} l_j(t)dt = \int_0^{x_r} l_i^0\,(-1 + \frac{2}{h}s)ds\int_0^{s} l_j^0\,(-1 + \frac{2}{h}t)dt = \frac{h^2}{4}\int_{-1}^{\xi_r} l_i^0(\xi)d\xi \int_{-1}^{\xi} l_j^0(\eta)d\eta = \frac{h^2}{4}A_{ijr},$$

Перевіримо справедливість (23) послідовно для випадків v = 1, $r = \overline{0,n}$; $k = \overline{0,n}$, v=2, $r = \overline{0,n}$; $k = \overline{0,n}$ і т. д. На підставі (20), для першої з рівності (23), маємо:

$$z_v\,(n;\, x_r,\, u_k) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\,(x_i,\, u_j,\, \widetilde{z_{v-1}^{i,J}},\, \widetilde{p_{v-1}^{i,J}},\, \widetilde{q_{v-1}^{i,J}})$$

$$\int_{u_k}^{x_r} l_i(s)ds\int_{s}^{u_k} l_j(t)dt = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\,(x_i,\, u_j,\, \widetilde{z_{v-1}^{i,J}},\, \widetilde{p_{v-1}^{i,J}},\, \widetilde{q_{v-1}^{i,J}})$$

$$(\int_0^{u_k} l_i(s)ds\int_0^{s} l_j(t)dt + \int_0^{x_r} l_i(s)ds\int_0^{u_k} l_j(t)dt - \int_0^{u_k} l_i(s)ds\int_0^{u_k} l_j(t)dt -$$

$$\int_0^{x_r} l_i(s)ds\int_0^{s} l_j(t)dt) = \frac{h^2}{4}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\,(x_i,\, u_j,\, \widetilde{z_{v-1}^{i,J}},\, \widetilde{p_{v-1}^{i,J}},\, \widetilde{q_{v-1}^{i,J}})\,(A_{ijk} - A_{ijr} +$$

$$a_{jk}(a_{ir} - a_{ik})) = \widetilde{z_v^{r,k}}\,.$$

4. Оцінка відхилення. **Теорема 1**. Нехай на квадраті [0, H] x [0, H] задана задача Коші (4), (5). Якщо відправлятися від оператора інтерполяції Лагранжа $\mathcal{L}_{nn}^0$ (f^0; ξ; η) виду (12) з вузлами (11) і відповідними числовими матрицями a_{ir}, A_{ijr} (14), та побудувати за формулами (15) - (23) узагальнені поліноми $\widetilde{z_v}$(n;x,u), $\widetilde{p_v}$(n;x,u), $\widetilde{q_v}$(n;x,u) то в випадку, коли виконується нерівність

$$h \le \min\{H,\ \frac{b'}{||\mathcal{L}_{nn}^0|| f ||_{c\Pi}},\ \frac{b''}{||\mathcal{L}_{nn}^0|| f ||_{c\Pi}},\ \sqrt{\frac{b'}{||\mathcal{L}_{nn}^0|| f ||_{c\Pi}}}\},\quad (24)$$

де$||\mathcal{L}_{nn}^{0}||$ норма оператора $\mathcal{L}_{nn}^{0}$ для точок квадрата R = [0, h] x [0, h] буде справедлива оцінка

$|z(x,u) - \widetilde{z_v}(n;x,u)| + |p(x,u) - \widetilde{p_v}(n; x,u)| + |q(x,u) - \widetilde{q_v}(n;x,u)| \leq h(4+h)\{||f||_{C\Pi} e^{Ah(4+h)} \text{ x } [(1+||\mathcal{L}_{nn}^{0}||^{-1}) \; e^{||\mathcal{L}_{nn}^{0}||^{-1}} q_n^v + \frac{[Ah(4+h)]^v}{(v+1)!}] + \frac{1-q_n^v}{1-q_n} (1 + ||\mathcal{L}_{nn}^{0}||) \; E_{nn}(\frac{\partial^2 z(x,u)}{\partial x \partial u})_{CR}\} = : B(n,v),$

де $q_n = ||\mathcal{L}_{nn}^{0}|| \, Ah(4+h)$, $E_{nn}(f)$ - найкраще рівномірне наближення функції f.

Зауваження. 1. Обмеження на h в (24) є занадто жорсткими і можуть бути значно ослаблені.

2. Похибка наближення буде наближатися до нуля значно швидше, за умови аналітичності.

Доведення теореми. На підставі співвідношення (24) рекурентні формули (19) - (22) ніколи не виводять за межі паралелепіпеда П. Зауважимо, що це твердження справедливе в разі v = 1. В зв’язку з цим, все зводиться до доказу того факту, що воно справедливо для v щоразу, коли воно справедливо для v - 1.

Дійсно, оскільки завжди $||\mathcal{L}_{nn}|| = ||\mathcal{L}_{nn}^{0}||$, то

$|\widetilde{p_v}(n; x,u)| \leq ||\int_x^u \mathcal{L}_{nn}\{f(\cdot, \widetilde{z_{v-1}}(n; \cdot), \widetilde{p_{v-1}}(n; \cdot), \widetilde{q_{v-1}}(n; \cdot)); x,t\}dt|| \leq ||\mathcal{L}_{nn}|| \, ||f||_{C_\Pi}|u - x| \leq ||\mathcal{L}_{nn}|| \, ||f||_{C_\Pi} h \leq \frac{||\mathcal{L}_{nn}|| \, ||f||_{C_\Pi}}{||\mathcal{L}_{nn}|| \, ||f||_{C_\Pi}} b' = b',$

$|\widetilde{q_v}(n; x,u)| \leq ||\int_u^x \mathcal{L}_{nn}\{f(\cdot, \widetilde{z_{v-1}}(n; \cdot), \widetilde{p_{v-1}}(n; \cdot), \widetilde{q_{v-1}}(n; \cdot)); s, u\} \text{ x } ds|| \leq ||\mathcal{L}_{nn}|| \, ||f||_{C_\Pi}|x - u| \leq ||\mathcal{L}_{nn}|| \, ||f||_{C_\Pi} h \leq b'',$

$|\widetilde{z_v}(n; x,u)| \leq ||\int_u^x \int_s^u \mathcal{L}_{nn}\{f(\cdot, \widetilde{z_{v-1}}(n; \cdot), \widetilde{p_{v-1}}(n; \cdot), \widetilde{q_{v-1}}(n; \cdot)); s, t\} \text{ x } ds\,dt|| \leq ||\mathcal{L}_{nn}|| \, ||f||_{C_\Pi}|x - u| \, |u - x| \leq ||\mathcal{L}_{nn}|| \, ||f||_{C_\Pi} h^2 \leq b.$

Нехай, далі,

$\alpha(s,t) := \mathcal{L}_{nn}[f(\xi,\eta,\widetilde{z_{v-1}}(n;\xi,\eta), \widetilde{p_{v-1}}(n;\xi,\eta), \widetilde{q_{v-1}}(n;\xi,\eta)); s,t] - f(s, t, z_{v-1}, p_{v-1}, q_{v-1}),$

β(s,t): $= \mathcal{L}_{nn}$[f(·, $\widetilde{z_{v-1}}$ (n; ·), $\widetilde{p_{v-1}}$ (n; ·), $\widetilde{q_{v-1}}$ (n; ·) – f(·, $z_{v-1}(\cdot)$, $p_{v-1}(\cdot), q_{v-1}(\cdot)); s, t]$.

Тоді, враховуючи, що || β (s, t) || q≤ $\|\mathcal{L}_{nn}\|$ A $\|\delta_{v-1}$ (s, t)$\|$, і так само (7), (19) - (22), отримуємо

$$\delta_v (x, u) \le \|\int_u^x \int_s^u \alpha(s,t) ds dt\| + \|\int_x^u \alpha(x,t) dt\| + \|\int_u^x \alpha(s,u) ds\| =$$

$$\|\int_u^x \int_s^u \{\beta(s,t) + \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_v(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; s, t] - \frac{\partial^2 z_v(s,t)}{\partial s\, \partial t}\} ds\, dt\| +$$

$$\| \int_x^u \{\beta(x,t) + \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_v(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, t] - \frac{\partial^2 z_v(x,t)}{\partial x\, \partial t}\} dt\| +$$

$$\| \int_u^x \{\beta(s,u) + \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_v(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; s, u] - \frac{\partial^2 z_v(s,u)}{\partial s\, \partial u}\} ds\| \le$$

$$\|\mathcal{L}_{nn}^0\| A h(4+h) \| \delta_{v-1} (x, u) \|_{C_R} + h(4+h) \| \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_v(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, u] -$$

$$- \frac{\partial^2 z_v(x,u)}{\partial x\, \partial u} \|_{C_R} = q_n \|\delta_{v-1} (x, u) \|_{C_R} + h(4+h) \| \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_v(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, u] -$$

$$- \frac{\partial^2 z_v(x,u)}{\partial x\, \partial u} \|_{C_R} \le q_n \|\delta_{v-2} (x, u)\| + h(4+h) \text{ x}$$

$$\text{x } \|\mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_{v-1}(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, u] - \frac{\partial^2 z_{v-1}(x,u)}{\partial x\, \partial u}\|\} +$$

$$+ h(4+h) \|\mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_v(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, u] - \frac{\partial^2 z_v(x,u)}{\partial x\, \partial u}\| =$$

$$= q_n^2 \|\delta_{v-2} (x, u)\| + q_n h(4+h) \| \frac{\partial^2 z_{v-1}(x,u)}{\partial x\, \partial u} -$$

$$- \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_{v-1}(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, u]\| + h(4+h) \| \frac{\partial^2 z_v(x,u)}{\partial x\, \partial u} -$$

$$- \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_v(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, u]\| \le \ldots \le q_n^v \|\delta_0 (x, u)\| +$$

$$+ h(4+h) \sum_{j=1}^{v} q_n^{v-j} \|\frac{\partial^2 z_j(x,u)}{\partial x\, \partial u} - \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_j(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, u]\| =$$

$$= h(4+h) \sum_{j=1}^{v} q_n^{v-j} \|\frac{\partial^2 z_j(x,u)}{\partial x\, \partial u} - \mathcal{L}_{nn}[\frac{\partial^2 z_j(\xi,\eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}; x, u] \|_{C_R}.$$

Користуючись цією нерівністю і нерівністю Лебега (1.3.7), отримаємо

$$\delta_v (x, u) \le h(4+h) (1 + \|\mathcal{L}_{nn}^0\| \sum_{j=1}^{v} q_n^{v-j} E_{nn}(\frac{\partial^2 z_j(x,u)}{\partial x\, \partial u})_{C_R}. \quad (25)$$

Звідси, беручи до уваги, що згідно з (10)

$$|\frac{\partial^2 z_j(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}} - \frac{\partial^2 z(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}}| \le ||f||_{C_\Pi} \frac{[Ah(4+h)]^j}{j!} \exp[Ah(4+h)],$$

бачимо, що

$$\frac{\partial^2 z_j(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}} = \frac{\partial^2 z(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}} + \varepsilon(\mathrm{x,u})\ ||f||_{C_\Pi} \frac{[Ah(4+h)]^j}{j!}\ e^{Ah(4+h)},$$

де $|\varepsilon(\mathrm{x, u})| \le 1$, це означає,

$$E_{nn}(\frac{\partial^2 z_j(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}})_{C_R} \le E_{nn}(\frac{\partial^2 z(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}})_{C_R} + ||f||_{C_\Pi} \frac{[Ah(4+h)]^j}{j!}\ e^{Ah(4+h)} = E_{nn}(\frac{\partial^2 z(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}})_{C_R} + ||f||_{C_\Pi} \frac{q_n^j ||\mathcal{L}_{nn}^0||^{-j}}{j!}\ e^{Ah(4+h)}.$$

Підставляючи цю оцінку в (25) і враховуючи, що $e^{\xi} - 1 \le \xi e^{\xi}$, $\xi>0$, для будь-яких $\xi>0$ одержимо

$$\delta_v\ (\mathrm{x, u}) \le h(4+h)\ (1 + ||\mathcal{L}_{nn}^0||) \sum_{j=1}^{v} q_n^{v-j} \{E_{nn}(\frac{\partial^2 z_j(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}})_{C_R} + ||f||_{C_\Pi} \frac{q_n^j ||\mathcal{L}_{nn}^0||^{-j}}{j!}\ e^{Ah(4+h)}\} = h(4+h)\ (1 + ||\mathcal{L}_{nn}^0||) \frac{1-q_n^v}{1-q_n} \times E_{nn}(\frac{\partial^2 z(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}})_{C_R} + h(4+h)\ (1 + ||\mathcal{L}_{nn}^0||) ||f||_{C_\Pi} q_n^v e^{Ah(4+h)} \times \sum_{j=1}^{v} \frac{||\mathcal{L}_{nn}^0||^{-j}}{j!} \le h(4+h)\ (1 + ||\mathcal{L}_{nn}^0||) \frac{1-q_n^v}{1-q_n} E_{nn}(\frac{\partial^2 z(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}})_{C_R} + h(4+h)\ (1 + ||\mathcal{L}_{nn}^0||) ||f||_{C_\Pi} q_n^v e^{Ah(4+h)} (e^{||\mathcal{L}_{nn}^0||^{-1}} - 1) \le h(4+h)\ (1 + ||\mathcal{L}_{nn}^0||) \frac{1-q_n^v}{1-q_n} E_{nn}(\frac{\partial^2 z(\mathrm{x,u})}{\partial \mathrm{x}\ \partial \mathrm{u}})_{C_R} + h(4+h)\ (1 + ||\mathcal{L}_{nn}^0||^{-1}) \times ||f||_{C_\Pi} q_n^v \exp[Ah(4+h) + ||\mathcal{L}_{nn}^0||^{-1}]. \quad (26)$$

З огляду ще на (9) і (26), маємо

$|z(\mathrm{x,u}) - \widetilde{z_v}(\mathrm{n;x,u})| + |p(\mathrm{x,u}) - \widetilde{p_v}(\mathrm{n;\ x,u})| + |q(\mathrm{x,u}) - \widetilde{q_v}(\mathrm{n;x,u})| \le |z(\mathrm{x,u}) - z_v(\mathrm{x, u})| + |p(\mathrm{x,u}) - p_v(\mathrm{x, u})| + |q(\mathrm{x,u}) - q_v(\mathrm{x, u})| + |z_v(\mathrm{x,u}) - \widetilde{z_v}(\mathrm{n;x,u})| + |p_v(\mathrm{x,u}) - \widetilde{p_v}(\mathrm{n;\ x,u})| + |q_v(\mathrm{x,u}) - \widetilde{q_v}(\mathrm{n;x,u})| \le B(n,v)$, що і треба було довести.

5. Наближення розв'язку задачі (1), (2).

$g^{-1}(y)$ - функція, оберненена до g (x).

Нехай $\widetilde{z_v}$(n;x,u), $\widetilde{p_v}$(n;x,u), $\tilde{q}$(n;x,u) - многочлени, побудовані в п. 3 з метою наближення на квадраті [0, h] x [0, h] розв'язку задачі (4), (5). В силу теореми 1

$$|z(x,u) - \widetilde{z_v}(n;x,u)| + |p(x,u) - \widetilde{p_v}(n; x,u)| + |q(x,u) - \widetilde{q_v}(n;x,u)| \le B(n,v). \quad (27)$$

Після здійснення заміни, u = $g^{-1}(y)$, y Є [0, g(h)], і з огляду на визначення функції z (x, g(u)) = $\dot{z}$(x,u) і її похідних, робимо висновок, що агрегати $\widetilde{z_v}$(n; x, $g^{-1}(y)$), $\widetilde{p_v}$(n; x, $g^{-1}(y)$), $\tilde{q}$(n; x,$g^{-1}(y)$) здійснюють наближення розв'язку задачі (1), (2) на прямокутнику [0, h] x [0, g(h)]. Похибка цього наближення на підставі (27) і позначенні, прийнятих після (5), задовольняє нерівності

$$|z(x,y) - \widetilde{z_v}(n;x, g^{-1}(y))| + |p(x,y) - \widetilde{p_v}(n; x, g^{-1}(y))| + |q(x,y) - \widetilde{q_v}(n;x, g^{-1}(y))| \le B(n,v).$$

Для знаходження наближених розв'язків задачі (1), (2) на прямокутнику [0, H] x [0, K] (за умови , якщо h < H, і значить, g(h) < K) необхідно:

1) розбити цей прямокутник прямими, паралельними його сторонам, на часткові прямокутники.

2) На тих прямокутниках, через дві вершини яких проходить крива y = g(x), застосовуємо попередні міркування.

3) На інших прямокутниках задача зводиться до задачі Гурса, розглянутої нижче в п. 3^0 [13].

Приклад. Точним розв'язком задачі Коші

$$z''_{xy} = z'_x - 1,\ z(x, y)|_{y=x} = z'_x(x, y)|_{y=x} = z'_y(x, y)|_{y=x} = 0$$

є функція

$$z(x, y) = e^{y-x} + x - y - 1 = \frac{1}{2}(y - x)^2 + \frac{1}{6}(y - x)^3 + \frac{1}{24}(y - x)^4 + \dots$$

За допомогою наведеного вище алгоритму отримаємо многочлен

z_4 (3; x, y) = 0,5(y - x)^2 + 0,16669y^3 – 0,50003y^{2}x + 0,49997yx^2 – 0,16665x^3 + 0,028y^4 – 0,160y^{3}x + 0,279y^{2}x^2 – 0,160yx^3 + 0,029x^4,

наближаючи розв’язок z(x, y) таким чином, що на квадраті [0; 0,02] × [0; 0,02] справедлива оцінка

|z(x, y) – z_4 (3; x, y)| < 1,3*10^{-8}. [11, с.194]

Алгоритм наближеного розв’язку змішаної задачі (задача Дарбу).

За допомогою міркувань, які надані вище, можна отримати аналогічні результати також для змішаної задачі:

$z''_{xy} = \tilde{f}(x,y,z,p,q)$, $z(x,y)|_{y=g(x)} = z(x,0) = 0$,   (28)

в якій $\tilde{f}$задовольняє такі ж умови, як і в п.2.4.1.

Для знаходження наближеного розв’язку задачі (28), як і для випадку задачі Коші, розглядається змішана задача

$\dot{z}''_{xy}$ = f(x, u, $\dot{z}$, $\dot{z}'_x$, $\dot{z}'_u$), $\dot{z}(x,u)|_{u=x} = \dot{z}(x, 0) = 0$ (29)

з новою невідомою функцією $\dot{z}$(x,u) = z(x, g(u)).

Відштовхуючись від оператора інтерполяції Лагранжа (12), будуємо матрицю чисел a_{ir} (див. (14)). З метою наближення розв’язку задачі (29), та використовуючи цю матрицю, в точках (x_r, u_k) знайдемо спочатку систему наближених значень $\widetilde{z_v^{r,k}}$, $\widetilde{p_v^{r,k}}$, $\widetilde{q_v^{r,k}}$, шуканого розв’язку z(x, u) і його похідних p(x, u), q(x,u) за такими ітеративними формулами:

$\widetilde{z_0^{r,k}} = \widetilde{p_0^{r,k}} = \widetilde{q_0^{r,k}} = 0$, r = $\overline{0,n}$, k = $\overline{0,n}$,   (30)

$\widetilde{z_v^{r,k}} = = \frac{h^2}{4}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\ (x_i, u_j, \widetilde{z_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,J}},\ \widetilde{q_{v-1}^{\iota,J}})\ (a_{ir} - a_{ik})\ a_{jk})$,   (31)

$\widetilde{p_v^{r,k}} = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n} f(x_r, u_j, \widetilde{z_{v-1}^{r,\iota}}, \widetilde{p_{v-1}^{r,\iota}},\ \widetilde{q_{v-1}^{r,\iota}})a_{jk}$ (32)

$\widetilde{q_v^{r,k}} = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n} f(x_i, u_k, \widetilde{z_{v-1}^{\iota,k}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,k}}, \widetilde{q_{v-1}^{\iota,k}})(a_{ir} - a_{ik}) - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n} f(x_k, u_j, \widetilde{z_{v-1}^{k,J}}, \widetilde{p_{v-1}^{k,J}}, \widetilde{q_{v-1}^{k,J}})a_{jk}$, r = $\overline{0,n}$, k = $\overline{0,n}$, v=1, 2, ….

Рівності (30) – (33) являють собою значення в точках (x_r, u_k) функції

$\widetilde{z_0}$(x,u) = $\widetilde{p_0}$(x,u) = $\widetilde{q_0}$(x,u) ≡ 0,

$\widetilde{z_v}$(x,u) = $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f$ (x_i, u_j, $\widetilde{z_{v-1}^{l,J}}$, $\widetilde{p_{v-1}^{l,J}}$, $\widetilde{q_{v-1}^{l,J}}$) $\int_u^x l_i(s)ds \int_0^u l_i(t)dt$,

$\widetilde{p_v}$(x,u) = $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f$ (x_i, u_j, $\widetilde{z_{v-1}^{l,J}}$, $\widetilde{p_{v-1}^{l,J}}$, $\widetilde{q_{v-1}^{l,J}}$) $l_i(x) \int_0^u l_j(t)dt$,

$\widetilde{q_v}$(x,u) = $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f$ (x_i, u_j, $\widetilde{z_{v-1}^{l,J}}$, $\widetilde{p_{v-1}^{l,J}}$, $\widetilde{q_{v-1}^{l,J}}$) × $[l_j(u) \int_u^x l_i(s)ds$ - $l_i(u)$ $\int_0^u l_j(t)dt$.

Ці значення будуть наближеними значеннями змішаної задачі (29) і її похідних.

Приклад. Нехай дано змішану задачу виду

z''_{xy} = - z'_x - e^x, z(x, 0) = z(x, x) = 0,

Функція

z(x, y) = e^{x-y} + e^y – e^x – 1 = y^2 – yx + $\frac{1}{2}$ y^2x - $\frac{1}{2}$ yx^2 + $\frac{1}{12}$ y^4 - $\frac{1}{6}$ y^3x + $\frac{1}{4}$ y^2x^2 - $\frac{1}{6}$ yx^3 + …

є її точним розв’язком.

Застосовуючи АІ-метод після третього інтегрування, отримаємо наступний многочлен третього степеня:

z_4 (3; x, y) = y^2 – yx + 0,00006y^3 + 0,49999y^2x – 0,50012yx^2 + 0,071y^4 – 0,161y^3x + 0,254y^2x^2 – 0,163yx^3 .

Цей многочлен наближає на квадраті Q: = $[0; 0,02]^2$ шуканий розв'язок z(x, y) таким чином, що

|z(x, y) - z_4 (3; x, y)| ≤ 5,6 * 10^{-9}. [11]

АІ-метод наближеного розв’язку нелінійної задачі Гурса

Відштовхуючись від сегментів $[x_k^0; x_k^0 + h_k]$ ⊂ (-∞, ∞), k=1, 2, визначимо при будь яких r_k ≥ 1, k = 1, 2, через $\mathcal{E}_{r_k}$ замкнуті області, які обмежуються еліпсами:

$x_k = x_k^0 + \frac{h_k}{2} + a_{r_k}$ cos t, $y_k = b_{r_k}$ sin t, t Є[-π, π], k=1, 2, (1)

де

$a_{r_k} = \frac{h_k}{4}(r_k + r_k^{-1})$, $b_{r_k} = \frac{h_k}{4}(r_k - r_k^{-1})$, (2)

$\mathcal{E}_{r_k} = \{(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2\colon \frac{[x_k - (x_k^0 + \frac{h_k}{2})]^2}{(a_{r_k})^2} + \frac{y_k^2}{(b_{r_k})^2} \le 1\}$. (3)

Крім того, ∀ H_1, $H_2, H_3 > 0$. Нехай R = R $(r_1,\ r_2, H_1, H_2, H_3)$ -замкнута область, яка являє собою декартові забраження еліпсів $\mathcal{E}_{r_k}$, k=1, 2, і кругів $\mathfrak{D}_i$:

$\mathfrak{D}_1 = \{w\colon |w| \le H_1\}$, $\mathfrak{D}_2 = \{p\colon |p| \le H_2\}$, $\mathfrak{D}_3 = \{q\colon |q| \le H_3\}$,

R = $\mathcal{E}_{r_1} \times \mathcal{E}_{r_2} \times \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_i\ (H_i)$, i = $\overline{1,3}$. (4)

Розглянемо, відштовхуючись від сегментів $[x_k^0;\ x_k^0 + h_k] \subset (-\infty,\ \infty)$, k=1, 2, деяких $r_k \ge 1$, k = 1, 2, і H_j, j = 1, 2, 3, задачу Гурса:

$\frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} = f\ (z_1,\ z_2,\ w,\ p,\ q)$, (5)

$w\ (x_1,\ x_2^0) = 0$ ∀x_1 Є $[x_1^0, x_1^0 + h_1]$,

$w\ (x_1^0, x_2) = 0$ ∀x_2 Є $[x_2^0, x_2^0 + h_2]$, (6)

де

p = $\frac{\partial w}{\partial z_1}$, q = $\frac{\partial w}{\partial z_2}$.

Припустимо, що $f\ (z_1,\ z_2,\ w,\ p,\ q)$ є функцією від п'яти комплексних змінних: z_1 і z_2 і невідомих *w, p,* і q. Вона є аналітичною, по кожній із змінних в int R. Ця функція неперервна на R і задовольняє на R (за трьома змінним *w, p, q)* умову Ліпшиця 1-го порядку з деякою константою A > 0. Числа $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ взяті таким чином, щоб як і розв'язок $w(z_1,\ z_2)$ задачі Гурса так і його похідні $p(z_1, z_2)$, $q(z_1, z_2)$, та всі їх наближення $\widetilde{w_v}$(m, n, z_1, z_2), $\widetilde{p_v}$(m, n, z_1, z_2), $\widetilde{q_v}$(m, n, z_1, z_2), v = 1, 2, ..., містилися відповідно в $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$.

Доведемо, що в цьому випадку задача Гурса для рівняння (5) має єдиний розв'язок в деякому околі точки (x_1^0, x_2^0). Знайдемо його наближення за допомогою оператора інтерполяції Лагранжа

$\mathcal{L}_{nn}^0\ (f^0; \xi; \eta) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f^0\ (\xi_i, \eta_j)\ l_i^0(\xi)\ l_j^0(\eta),$

$f^0\ (\xi; \eta) := f^0\ (-1 + \frac{2}{h_1}(x_1 - x_1^0), -1 + \frac{2}{h_2}(x_2 - x_2^0)) = f(x_1, x_2),\qquad (7)$

який задано на стандартному квадраті $R^0 = \mathcal{J}^0 \times \mathcal{J}^0 = [-1, 1] \times [-1, 1]$, в якому $\xi_i = \xi_i(\mathrm{m}) = -\cos\frac{i\pi}{m}$, i = $\overline{0,m}$, $\eta_j = \eta_j(\mathrm{n}) = -\cos\frac{i\pi}{n}$, j = $\overline{0,n}$, а $\{l_i^0(\xi)\}_{i=0}^{m}$ і $\{l_j^0(\eta)\}_{j=0}^{n}$ - системи фундаментальних многочленів Лагранжа. [37]

Зважаючи на статтю [10], побудуємо матриці чисел

$a_{ir} = a_{ir}(\mathcal{L}_{mn}^0) = \int_{-r}^{\xi_r} l_i^0(\xi)d\xi$, i = $\overline{0,m}$, r = $\overline{0,m}$, $\xi_r = \xi_r(m)$,

$b_{jk} = b_{jk}(\mathcal{L}_{mn}^0) = \int_{-1}^{\eta_k} l_j^0(\eta)d\eta$, j = $\overline{0,n}$, k = $\overline{0,n}$, $\eta_k = \eta_k(n)$.

З метою наближення многочленами розв'язку задачі (5), (6) побудуємо в точках (x_1^r, x_2^k) прямокутника $\Pi = [x_1^0, x_1^0 + h_1] \times [x_2^0, x_2^0 + h_2]$, систему наближених значень $w_v^{r,k} \approx w\ (x_1^r,\ x_2^k)$, $p_v^{r,k} \approx p\ (x_1^r, x_2^k)$, $q_v^{r,k} \approx q(x_1^r, x_2^k)$, шуканого розв'язку *w(*z_1, z_2*)* і його похідних *p(*z_1, z_2*)*, *q(*z_1, z_2*)* за ітераційними формулами

$\widetilde{w_0^{r,k}} = \widetilde{p_0^{r,k}} = \widetilde{q_0^{r,k}} = 0$, r = $\overline{0,m}$, k = $\overline{0,n}$, (8)

$\widetilde{w_v^{r,k}} = \frac{h_1 h_2}{4}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\ (x_1^i, x_2^j, \widetilde{w_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,J}}, \widetilde{q_{v-1}^{\iota,J}})a_{ir}b_{jk},\qquad (9)$

$\widetilde{p_v^{r,k}} = \frac{h_2}{2}\sum_{j=0}^{n} f(x_1^r, x_2^j, \widetilde{w_{v-1}^{r,J}}, \widetilde{p_{v-1}^{r,J}}, \widetilde{q_{v-1}^{r,J}})b_{jk}\qquad (10)$

$\widetilde{q_v^{r,k}} = \frac{h_1}{2}\sum_{i=0}^{m} f(x_1^i, x_2^k, \widetilde{w_{v-1}^{\iota,k}}, \widetilde{p_{v-1}^{\iota,k}}, \widetilde{q_{v-1}^{\iota,k}})a_{ir},\qquad (11)$

r = $\overline{0,m}$, k = $\overline{0,n}$, v=1, 2, ….

Ці точки відповідають точкам (ξ_r, η_k) Є R^0 при "пересадці" операторів $\mathcal{L}_{mn}^0$ на прямокутник П.

Рівності (8) - (11) являють собою значення в точках (x_1^r, x_2^k), r = $\overline{0,m}$, k = $\overline{0,n}$, функцій (многочленів) степені яких не вище m + l по z_1, і не вище n+1 по z_2 (див. нижче (12) - (15)). Вони є наближеннями розв'язку задачі (5), (6) і її похідних:

$$\widetilde{w_0}(\text{m, n}; z_1, z_2) = \widetilde{p_0}(\text{m, n}; z_1, z_2) = \widetilde{q_0}(\text{m, n}; z_1, z_2) \equiv 0, \qquad (12)$$

$$\widetilde{w_v}(\text{m, n}; z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\,(x_1^i, x_2^j, \widetilde{w_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j),$$

$$\widetilde{p_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j),\ \widetilde{q_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j))\int_{x_1^0}^{z_1} l_i(s)ds \int_{x_2^0}^{z_2} l_j(t)dt, \quad (13)$$

$$\widetilde{p_v}(\text{m, n}; z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f\,(x_1^i, x_2^j, \widetilde{w_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j),$$

$$\widetilde{p_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j),\ \widetilde{q_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j))\ l_i(z_1) \int_{x_2^0}^{z_2} l_j(t)dt, \qquad (14)$$

$$\widetilde{q_v}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f(x_1^i, x_2^j, \widetilde{w_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j),$$

$$\widetilde{p_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j),\ \widetilde{q_{v-1}}(\text{m, n}; x_1^i, x_2^j))l_j(z_2) \int_{x_1}^{z_1} l_i(s)ds, \qquad (15)$$

так, що

$$\widetilde{w_v}(\text{m, n}; x_1^r, x_2^k) = \widetilde{w_v^{r,k}},\ \ \widetilde{p_v}(\text{m, n}; x_1^r, x_2^k) = \widetilde{p_v^{r,k}},\ \widetilde{q_v}(\text{m, n}; x_1^r, x_2^k) = \widetilde{q_v^{r,k}},$$

$r = \overline{0, m}$; $k = \overline{0, n}$; v=0, 1, 2, ….

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. Нехай задача Гурса (5), (6) задана в замкнутій області $\tilde{R} = \tilde{R}(\widetilde{r_1}, \widetilde{r_2}, \widetilde{h_1}, \widetilde{h_2}, \widetilde{H_1}, \widetilde{H_2}, \widetilde{H_3}) = \mathcal{E}_{\widetilde{r_1}} \times \mathcal{E}_{\widetilde{r_2}} \times \mathfrak{D}_1(H_1) \times \mathfrak{D}_2(H_2) \times \mathfrak{D}_3(H_3)$, при деяких $\widetilde{h_k} > 0$, k = 1, 2, $\widetilde{H_i} > 0$, i =1,2,3 і $\widetilde{r_k} > 1$, k = 1, 2, (див. (1)-(4)). Функція f (z_1, z_2, w, p, q) є аналітичною в int $\tilde{R}$, неперервною на $\tilde{R}$ і задовольняє на $\tilde{R}$ за трьома змінним w, p і q умову Ліпшиця 1-го порядку з сталою A > 0. Тоді, якщо при будь-яких фіксованих r_k Є [1, $\widetilde{r_k}$), k = 1, 2, і деяких натуральних m, n і v взяти числа $H_1 \le \widetilde{H_1}$, i - 1, 2, 3 (однак такими, щоб усі функції $\widetilde{w_v}, \widetilde{p_v}, \widetilde{q_v}$, наближали розв'язок задачі Гурса, і його похідні, не виходили відповідно за області |w| ≤ H_1, |p| ≤ H_2, |q| ≤ H_3) і $h_k \le \widetilde{h_k}$, k = 1, 2, то многочлени $\widetilde{w_v}$(m, n; z_1, z_2), $\widetilde{p_v}$(m, n; z_1, z_2), $\widetilde{q_v}$(m, n; z_1, z_2), побудовані за допомогою оператора $\mathcal{L}_{mn}^0$ в AI-алгоритмі (8) – (15) наближають на біциліндрі F = $\mathcal{E}_{\widetilde{r_1}} \times \mathcal{E}_{\widetilde{r_2}}$ розв'язок w(z_1, z_2) задачі Гурса (5), (6) і його похідні p (z_1, z_2), q (z_1, z_2). При цьому виконується нерівність

$|w(z_1, z_2)$ - $\widetilde{w_v}$(m, n; z_1, z_2)| + $|p(z_1, z_2)$ - $\widetilde{p_v}$(m, n; z_1, z_2)| + $|q(z_1, z_2)$ - $\widetilde{q_v}$(m, n; z_1, z_2)| ≤ $||f||_{C_{\tilde{R}}}$ ($||\mathcal{L}_{nn}^0||$ + 1) (H +1)d × $\frac{1-q^v}{1-q}[\frac{r_1}{\widetilde{r_1}-r_1}(1+r_1^{-2m-2})(\frac{r_1}{\widetilde{r_1}})^m + \frac{r_2}{\widetilde{r_2}-r_2}(1+r_2^{-2n-2})(\frac{r_2}{\widetilde{r_2}})^n + (\frac{r_1 r_2}{(\widetilde{r_1}-r_1)(\widetilde{r_2}-r_2)} - \frac{r_1 r_2}{\widetilde{r_1}\widetilde{r_2}})(1+r_1^{-2m})(1+r_2^{-2n})(\frac{r_1}{\widetilde{r_1}})^{m-1} \times (\frac{r_2}{\widetilde{r_2}})^{n-1}] + \frac{d(H+2)[dA\,(H+2)]^v}{(v+1)!}||f||_{C_R}$exp [dA(H + 2)],

де d = $a_{r_1} + a_{r_2} + \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ і H = $\frac{1}{d}(a_{r_1} + \frac{h_1}{2})(a_{r_2} + \frac{h_2}{2})$, q = Ad(H+1).

Приклад.

Нехай функція

z(x, y) = $e^{x-y} – e^x – e^{-y} + 1 = – yx + \frac{1}{2}y^2x - \frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{6}y^3x + \frac{1}{4}y^2x^2 - \frac{1}{6}yx^3 + \ldots$ є точним розв’язком задачі Гурса

$z''_{xy} = z_y – z_x + z - 1$, z(x, 0) = z(0, y) ≡ 0.

Застосовуючи AI-метод з допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа $\mathcal{L}_{33}^0$ (f^0 (ξ, η); x, y), отримаємо наступний многочлен:

z_4 (3,3; x, y) = $– yx + 0{,}49999999y^2x – 0{,}50000002\, yx^2 – 0{,}16\, y^3x + 0{,}234\, y^2x^2 – 0{,}16\, yx^3$.

Цей многочлен наближає на квадраті Q: = $[0; 0{,}02]^2$ шуканий розв'язок z(x, y) таким чином, що

$|z(x, y) - z_4 (3, 3; x, y)| < 4{,}9 * 10^{-9}$ [11, с.198-199]

Висновки

У даній роботі розглядається один із методів розв'язання диференціальних задач в частинних похідних, а саме апроксимаційний метод або α-метод. Ця тема цікава, оскільки апроксимація - це наближене вираження одних математичних об'єктів через інші, але дещо простіші і близькі за значенням. Знаходження наближених розв'язків функцій необхідне при розв'язанні як практичних, так і теоретичних задач.

Методи, одержані шляхом застосування послідовностей лінійних операторів, грають важливу роль в багатьох областях математики. Зокрема α-метод. Тому результати можуть бути використані студентами старших курсів при поглибленому вивченні диференціальних рівнянь в частинних похідних та знаходженні їх наближених розв'язків.

Апробація роботи: результати роботи доповідались у звітній науковій конференції викладачів та здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету 15 травня 2020.

Список використаної літератури

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра./ Г. Бейтмен, А.Эрдейи// М.: Наука, 1965. 296 с.

2. Борзенков А. В. Дифференциальные уравнения в частных производных. MATLAB: конспект лекций/ А. В. Борзенков. – Мн.: БГУИР, 2009. – 120 с.

3. Вакал Л. П. Апроксимація функцій багатьох змінних із застосуванням алгоритму диференціальної еволюції/ Л. П. Вакал// Математичні машини і системи. – 2017. – С. 90–96 с

4. Воронова Ю.Г. О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа/ Ю.Г. Воронова// Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 2. С. 20-–26.

5. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння: навч. посібник/ Ю.Д.Головатий, В. М. Кирилич, С. П. Лавренюк – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 407 с.

6. Голубинский, А. Н. Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей/ А. Н.Голубинский// Вестник Воронежского института МВД России. – 2007.– № 2. – С. 138–143.

7. Грищенко Н. В. Семериков С. А. Хараджян А. А. Чернов Е. В. Сравнительный анализ методов аппроксимации/ Н.В. Грищенко С.А., Семериков А.А., Хараджян Е.В., Чернов. - Кривой Рог, 1998, с.24.

8. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов./ М. О. Давидов – К.: Вища шк., 1991. – 366 с.

9. Денисенко П.Н. Решение краевых задач в математической информационный среде APS/ П.Н. Денисенко. – 2001. –№3. – С.312-322.

10. Дзядык В. К. Аппроксимационно-итеративный метод приближения полиномами решения задачи Коши для обыкновенных

дифференциальных уравнений/ В. К. Дзядык// Журн. Вычисл. Математики и мат. физики. К. – 1986. - №3. – С. 357-372.

11. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений/ В. К. Дзядык – К.: Наук. думка, 1988. – 304 с.

12. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и их применение и развитие/ В. К. Дзядык – К., 1986. – 56 с.

13. Дзядык В.К. Один числительный алгоритм решения нелинейной задачи Гурса/ В. К. Дзядык, Ю.К. Подлипенко// Исследования по теории аппроксимации функций. К.: Ин-т математики АН СССР. – 1981.– с. 38-51.

14. Дзядык В.К., Романенко Ю.И. АИ-метод приближенного решения нелинейных задачи Коши, Дарбу и Гурса для уравнений гиперболического типа Подлипенко/ В. К. Дзядык, Ю.И. Романенко – К.: 1986.– с. 20.

15. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика: Учебное пособие/ Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин - 3-е, стереотип. изд. - СПб.: «Лань», 2004. - 336 с.

16. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными/ В. И. Жегалов, А.Н.Миронов - Казань, 2001

17. Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. О задаче Гурса для гиперболической системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа/ А.В. Жибер, Ю.Г. Михайлова// Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 136 - 144.

18. Жихар М.А. Диференціальні рівняння/ М.А. Жихар – Х., 1996.

19. Золотарев Е.И. Приложения эллиптических функций к вопросам о функциях, наимение и наиболее отклоняющихся от нуля/ Е.И. Золотарев// Полн. собр. соч.– Л.: Изд-во АН СССР, 1932. – Вып.2. – С. 1-59.

20. Каленчук-Порханова А.А, Вакал Л.П. Пакет программ апроксимации функций/ А.А.Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал – 2008.– №7. – С. 32–33

21. Квєтний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень/ Р.Н.Квєтний – Вінниця: ВНТУ, 2001. – 218 с.

22. Ковалева Л.А. Гармонические функции в двумерных стратифицированных областях с кусочно - гладкой границей/ Л.А.Ковалева, А.П.Солдатов// Научные ведомости БелГУ, 2010, 17(88), С. 73 – 78

23. Кондратьев В. П. Совместное приближение функции одного переменного и ее производных/ В.П. Кондратьев// Программы оптимизации: приближение функций - Свердловск: УНЦ АН СССР. - 1975. - Вып. 6. - С. 18-31.

24. Конев В.В. Уравнения в частных производных: учебное пособие/ В.В. Конев; Томский политехнический университет, 2011, 48с.

25. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики/ Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

26. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння/ С.А.Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К.: Либідь, 2004. – 408с.

27. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник/ С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк, В. М. Бурим – К.: Либідь, 2004. – 408 с.

28. Курант Р. Методы математической физики/ Р. Курант, Д. Гильберт – М.: ГИТТЛ, 1951. – Т.2. – 544с.

29. Литвинец П.Д. К сушествованию решения операторного уравнения в аппроксимационном методе/ П.Д. Литвинец//Исследования по теории приближения функции и их приложений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1978. – с.119-122

30. Малачівський П. С. Рівномірне наближення з точним

відтворенням значень функції та похідної в заданих точках/ П.С.Малачівський// Доп. НАН України. - 2006. - № 9. - С. 80-85.

31. Малачівський П. Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром/ П. Малачівський// Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2005. - Вип. 1. -С. 134-145.

32. Маринець К. В. Стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку/ К. В. Маринець. - Частина ІІІ: Навч. посіб.- Ужгород: УжНУ, 2017. - 53 с.

33. Островецкий Л.А. Аппроксимация линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа с многочленами коэффициентами: Дис. канд. физ.-мат. наук/ Л. А. Островецкий. – К.: Ин-т математики АН СССР. – 1981.– 110 с.

34. Островецкий Л.А. Применение аппроксимационногометода к приближению решения задачи Коши для линейных уравнений гиперболического типа с многочленами коэффициентами/ Л.А.Островецкий. – К., – 1981.– 32 с.

35. Перестюк М. О., Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь/ М. О. Перестюк, М. Я. Свіщук. – К.: Либідь, 2004. – 208 с.

36. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики: Навч. посібник/ М.О. Перестюк, В.В. Маринець – К.: Либідь, 2001. – 336 с.

37. Романенко Ю. И. Один численный алгоритм решения нелинейной задачи Гурса для гиперболических уравнений с аналитической правой частью/ Ю. И. Романенко// Теория приближения функций и ее приложения. – К.: Ин-т математики АН СССР. – 1984.– с. 108-113.

38. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в задачах: Підручник/ А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К.: Либідь, 2003. – 502 с.

39. Самойленко А. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник. 3-є видання, перероб. і доповн/ А. М. Самойленко, М.О.Перестюк, І. О. Парасюк – К.: Видавничополіграфічний центр «Київський університет», 2010. – 528 с.

40. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения/ А. Н. Тихонов, А.Б.Васильева, А. Г. Свешников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.– 256 с.

41. Трикоми Ф. Интегральные уравнения/ Ф. Трикоми. - М., 1960.

42. Ульшин П.І., Лов'янова І.В. Диференціальні рівняння в частинних похідних. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів./ Під заг. ред. проф. В.В. Корольського — Кривий Ріг: КДПУ, 2007. – 142 с.

43. Чабан В. Чисельні методи / В. Чабан. – Львів: Вид. Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2001. – 186 с.

44. Шахно С. М. Чисельні методи лінійної алгебри/ С. М. Шахно. - Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. - 245с.

45. Теорема Кантора-Берштейна [Електронний ресурс]/Вікіпедія// Режим доступу до сайту: https://uk.wikipedia.org/wiki

46. Простір Соболєва [Електронний ресурс]/Вікіпедія// Режим доступу до сайту: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE_%D0%A1%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B0