Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Застосування інтегрального числення до розв’язування прикладних задач

Виконав: студент II курсу, групи 21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Ковалець Наталія Миколаївна
Керівник: канд. фіз-мат. н., доц. Демчик С. П.
Рецензент: к. т. н. Присяжнюк О. В.
проф., канд. фіз-мат. н. Крайчук О. В.

Рівне-2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Інтегральне числення – розділ математики, в якому вивчаються поняття інтеграла, його властивості та методи їх обчислень. З появою інтегрального числення з'явилася можливість розв'язувати велику кількість прикладних задач, які раніше не вдавалося вирішити. Зокрема, саме поняття інтеграла виникли з потреб обчислення площ фігур, об'ємів довільних тіл, а також знаходження сумарного шляху при нерівномірному русі. Тобто для розв'язання завдань такого характеру потрібні були нові знання в сфері математики, які б можна було б активно використовувати на практиці. Так виник важливий розділ математичного аналізу – інтегральне числення – могутній апарат сучасної математики, за математичними формулами якого стоять конкретні проблеми життя.

Саме тому, дослідження на тему «Застосування інтегрального числення до розв'язування прикладних задач» є актуальною.

Об'єкт дослідження: інтегральне числення.

Предмет дослідження: застосування інтегралів при розв'язуванні математичних та фізичних задач.

Метою даної роботи є дослідження різноманітних математичних та фізичних застосувань інтегралів та використання їх до розв'язування задач.

Для досягнення мети роботи було сформульовано наступні **завдання**:

1. Опрацювати наукову та навчальну літературу з проблеми дослідження.

2. Розглянути необхідні теоретичні відомості з інтегрального числення: поняття інтеграла, основні властивості та різні методи та способи обчислення інтегралів.

3. Проаналізувати основні застосування визначених, кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів у математиці та фізиці.

4. Навести приклади розв'язування математичних та фізичних задач на застосування інтегрального числення.

Проблема дослідження, мета і завдання роботи зумовили вибір таких **методів дослідження**:

– вивчення і аналіз наукової та навчальної літератури з теми дослідження;

– узагальнення та систематизація необхідного теоретичного матеріалу та його застосувань з теми дослідження.

У роботі розглядаються задачі на застосування інтегрального числення у математиці та фізиці.

Практичне значення. Наведено приклади самостійно розв'язаних задач на застосування інтегрального числення у математиці та фізиці.

Структура магістерської роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛА

1.1. Визначений інтеграл

Інтеграл є одним з найбільш важливих понять математичного аналізу та основним поняттям в його розділі «Інтегральне числення». Початок інтегральному численню поклали геометричні задачі на обчислення площ плоских фігур, поверхонь та об'ємів тіл обертання, а також прикладні задачі фізичного характеру, зокрема на знаходження сумарного шляху в нерівномірному русі.

Розглянемо основні поняття з теорії інтегрального числення.

Нехай функція $F(x)$ визначена та диференційовна на відрізку $[a;b]$, а її похідна в кожній точці даного відрізку дорівнює $f(x)$. Тоді функція $F(x)$ називається *первісною функції* $f(x)$ та виконується рівність: $F'(x) = f(x)$.

Оскільки $\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$, де $C = \text{const}$, то маємо множину первісних – множину функцій виду $F(x)+C$. Ця множина первісних $F(x)+C$ називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{1.1}$$

Розглянемо визначену на відрізку $[a;b]$ функцію $f(x)$. Розіб'ємо заданий відрізок $[a;b]$ на *n* довільних частин точками $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$:

$$a < x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

і позначимо $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, де $i = \overline{1,n}$, $\Delta = \max \Delta_i$.

На кожному з відрізків $[x_{i-1};\ x_i]$ візьмемо довільну точку c_i і обчислимо значення функції $f(x)$ у даній точці.

Вираз $S=\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta_i$ називається *інтегральною сумою* функції $f\left(x\right)$. Якщо при $\Delta \to 0$ існує границя

$$\lim_{\Delta\to 0} S=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta_i ,$$

яка не залежить від способу розбиття відрізку $\left[a;b\right]$ точками x_i, $i=1,2,...,n-1$, а також від вибору точок c_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом* від функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$ та позначається [25]:

$$\lim_{\Delta\to 0} S=\int_a^b f\left(x\right)dx .$$

Якщо визначений інтеграл існує, то функція $f\left(x\right)$ називається інтегровною на відрізку $\left[a;b\right]$ за Ріманом, а інтеграл $\int_a^b f\left(x\right)dx$ – інтегралом Рімана [4].

Проаналізуємо, які саме функції є інтегровними на відрізку $\left[a;b\right]$. Розглянемо наступні теореми, що встановлюють класи інтегровних функцій [4; 7; 25].

Теорема 1.1. *Будь-яка неперервна на відрізку* $\left[a;b\right]$ *функція* $f\left(x\right)$ *є інтегровною на ньому* [25].

Теорема 1.2. *Будь-яка монотонна й обмежена на відрізку* $\left[a;b\right]$ *функція* $f\left(x\right)$ *є інтегровною на ньому* [4; 10].

Теорема 1.3. *Будь-яка обмежена на відрізку* $\left[a;b\right]$ *функція* $f\left(x\right)$*, яка має скінченне число точок розриву, є інтегровною на цьому відрізку* [25].

Визначений інтеграл має ряд ***властивостей*** [4; 6; 16; 24], розглянемо основні з них.

1) Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі, то знак інтеграла зміниться на протилежний

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2) Визначений інтеграл з рівними (однаковими) межами дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3) Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

4) Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$, то функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ також є інтегровними на відрізку $[a;b]$, тобто:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5) *Адитивна властивість*: якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $a < c < b$, то задана функція інтегровна на відрізках $[a;c]$, $[c;b]$, причому:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6) Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$ і для кожного $x \in [a;b]$ $f(x) \le \varphi(x)$, то виконується нерівність:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx.$$

7) Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку також є інтегровною функція $|f(x)|$ та виконується наступна нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx.$$

8) Якщо $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[a;b]$ і $f(x) \ge 0$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Для обчислення визначених інтегралів застосовується формула Ньютона-Лейбніца, тобто справедливою є наступна теорема [19; 25].

Теорема 1.4. *Для довільної неперервної на відрізку* $[a;b]$ *функції* $f(x)$ *виконується формула Ньютона-Лейбніца*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1.2}$$

де $F(x)$ *– одна із первісних для функції* $f(x)$.

Праву частину формули Ньютона-Лейбніца можна переписати у вигляді:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

і тоді формула (1.2) набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Основними методами знаходження визначеного інтеграла є табличне інтегрування, заміна змінної у визначеному інтегралі та інтегрування частинами.

При безпосередньому або *табличному інтегруванні* визначених інтегралів застосовується відомі невизначені інтеграли, наведені у таблиці інтегралів (таблиця 1.1.) та формула Ньютона-Лейбніца [13].

Таблиця 1.1.

Таблиця невизначених інтегралів

№ з/п	$f(x)$	$F(x)=\int f(x)dx$	№ з/п	$f(x)$	$F(x)=\int f(x)dx$
1.	0	C	12.	$\operatorname{ctg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert+C$
2.	1	$x+C$	13.	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$
3.	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq-1$	14.	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}+C,\ a\neq0$
4.	$\frac{1}{x}$	$\ln x+C$	15.	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+C$
5.	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	16.	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$, $a\neq0$
6.	e^x	e^x+C	17.	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$, $a\neq0$
7.	$\sin x$	$-\cos x+C$	18.	$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert+C$ $a\neq0$
8.	$\cos x$	$\sin x+C$	19.	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert$
9.	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$	20.	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
10.	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$	21.	shx	chx
11.	$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	22.	chx	shx

Одним з найефективніших методів інтегрування функцій є *метод заміни змінної* (*метод підстановки*). Проте для визначеного інтеграла цей метод потрібно обґрунтувати. Розглянемо наступну теорему [4; 25].

Теорема 1.5. *Нехай функція* $y=f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x=\varphi(t)$ *задовольняє наступні умови:*

1) *$x=\varphi(t)$ та її похідна $x'=\varphi'(t)$ визначені і неперервні на деякому відрізку $[\alpha;\beta]$;*

2) *$\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, і значення функції $x=\varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a;b]$* при $t\in[\alpha;\beta]$.

Тоді справедлива формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1.3)$$

При обчисленні визначених інтегралів часто користуються формулою *інтегрування частинами*, яка має вигляд

$$\int_a^b u(x)dv(x)=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x), \qquad (1.4)$$

де функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ та мають неперервні похідні $u'=u'(x)$ і $v'=v'(x)$ [17].

Зауважимо, що для різних функцій існують свої способи обчислення інтегралів, наприклад для дробово-раціональної функції необхідно підінтегральний вираз (дріб) розкласти на елементарні дроби, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, попередньо виділивши у підінтегральній функції цілу та дробову частини.

Існує велика кількість інтегралів, які за допомогою певних підстановок зводяться до інтегралів від дробово-раціональної функції, наприклад,

– визначений інтеграл від тригонометричних функцій виду $\int_a^b R(\sin x,\cos x)dx$ за допомогою універсальної підстановки: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ зводиться до попереднього виду інтегралів;

– визначений інтеграл від ірраціональних функцій виду $\int_a^b R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ раціоналізується за допомогою підстановок Ейлера:

1) якщо $a>0$, тоді $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x\pm t$,

2) якщо $c \geq 0$, тоді $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$,

3) якщо x_1, x_2 – корені тричлена ax^2+bx+c, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(x - x_1\right)$.

Крім розглянутих вище визначених інтегралів є й інші види, що зводяться до інтегралу від дробово-раціональної функції або розв'язуються за допомогою спеціальних підстановок (більш детально у [17; 24; 25]).

1.2. Кратні інтеграли

Здійснюючи перехід від функцій однієї змінної до функцій кількох змінних в інтегральному численні отримаємо інший вид інтегралів – кратні інтеграли. Розглянемо основні поняття, властивості та методи знаходження подвійних та потрійних інтегралів.

Подвійний інтеграл.

Нехай функція $z = f(x,y)$ є визначеною в обмеженій замкнутій області D на площині xOy. Розділимо область D довільно на n елементарних областей, площі який дорівнюватимуть $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$. У кожній з даних областей Δs_i $i = 1,2,...,n$ виберемо деяку точку з координатами $\left(x_i, y_i\right)$.

Інтегральною сумою для функції $f(x,y)$ по області D називається сума вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = f_1(x_1, y_1)\Delta s_1 + f_2(x_2, y_2)\Delta s_2 + ... + f_n(x_n, y_n)\Delta s_n .$$

Найбільшу відстань між двома точками межі заданої замкнутої обмеженої області прийнято називати діаметром d.

Тоді, подвійний інтеграл функції $f(x,y)$ по області D є границею інтегральної суми при умові, що найбільший із діаметрів $\max d_i$, $i = 1,2,...,n$ буде прямувати до нуля [18]:

$$\iint_D f(x,y)ds = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i \ . \qquad (1.5)$$

У математиці подвійний інтеграл прийнято позначати наступним чином:

$$\iint_D f(x,y)dxdy,\ \iint_D f(x.y)ds,\ \iint_D f(M)ds.$$

Розглянемо основні ***властивості подвійних інтегралів*** [3; 5; 10; 20]:

1. Подвійний інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів

$$\iint_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right)dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint_D f_2(x,y).$$

2. Сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D Cf(x,y)dxdy = C\iint_D f(x,y)dxdy, \text{ де } C=\text{const}.$$

3. *Адитивна властивість*. Якщо область D складається із двох областей D_1 і D_2, що не мають спільних точок, то справедливою є рівність

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

4. Якщо для двох функції в області D виконується нерівність $f(x,y) \geq g(x,y)$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

5. Якщо функція $f(x,y) \geq 0$ в області D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

6. $$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

7. *Оцінка подвійного інтеграла*. Якщо функція $z = f(x,y)$ є неперервною функцією в обмеженій замкненій області D, що має площу S, то

$$mS \leq \iint_D f\left(x,y\right)dxdy \leq MS,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $z = f(x,y)$ у заданій області D.

8. *Властивість про середнє значення функції* $z = f(x,y)$. Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, площа якої дорівнює S, то в цій області існує хоча б одна точка $P(\xi,\eta)$ така, що справедливою є рівність:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\cdot S.$$

Розглянемо особливості обчислення подвійних інтегралів. Справедливою є наступна теорема [5].

Теорема 1.6. Нехай функція $z = f(x,y)$ є інтегровною у замкненій області D, обмеженій прямими $x = a$, $x = b$ $(b > a)$ і неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, причому $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ для всіх $x \in [a;b]$. Якщо для будь-якого $x \in [a;b]$ існує інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$, то існує повторний інтеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ і правильною є рівність

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (1.6)$$

Часто у процесі обчислення подвійних інтегралів необхідно здійснити перехід до полярних координат, застосовуючи зв'язок прямокутних декартових координат (x,y) з полярними координатами ρ, φ, що задаються наступними співвідношеннями [23]:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \qquad (0 \le \rho \le +\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi).$$

Якщо існує функціональний визначник Якобі або якобіан, який не дорівнює нулю:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

Тоді формула переходу до полярних координат набуває вигляду:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \qquad (1.7)$$

де область D задана в декартовій системі координат xOy, а D' – відповідна їй область в полярній системі координат. А після цього здійснюється перехід від одержаного подвійного до відповідного повторного інтеграла та його обчислення як звичайного визначеного, спочатку внутрішнього, а потім зовнішнього інтегралів [20; 21].

Потрійний інтеграл.

Введемо поняття потрійного інтеграла.

Нехай задана функція $u=f(x,y,z)$, що є визначеною у замкненій обмеженій області G простору R^3. Поділимо область G на n довільних областей G_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$, що не мають спільних внутрішніх точок. Довжина найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області G_i прийнято називати діаметром d_i області G_i. Через ΔV_i позначимо об'єми областей G_i. Обираємо довільну точку з області G_i $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in G_i$ і знайдемо значення функції $f(x,y,z)$ у цій точці P_i.

Вираз виду $I_n=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$ називається інтегральною сумою функції $f(x,y,z)$ у замкненій обмеженій області G. Позначимо через λ найбільший із діаметрів d_i областей G_i, тобто $\lambda=\max d_i$, $i=\overline{1,n}$.

Якщо існує границя інтегральної суми I_n при умові, що $\lambda\to 0$, тобто $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$, яка не залежить від способу розбиття області G на елементарні області G_i та від вибору точок $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in G_i$, то ця границя називається потрійним інтегралом від функції $f(x,y,z)$ по області G і позначається [21]:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz,\ \iiint_G f(x,y,z)dV,\ \iiint_G f(P)dV.$$

Розглянемо основні ***властивості потрійних інтегралів*** [25]:

1) Існування і величина потрійного інтеграла не залежить від тих значень функції, яких вона набуває вздовж скінченого числа поверхонь нульового об'єму.

2) *Адитивні властивість*. Якщо область G складається із двох областей G_1 і G_2, що не мають спільних точок, то справедливою є рівність

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{G_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

3) Сталий множник можна виносити за знак потрійного інтеграла

$$\iiint_G Cf(x,y,z)dxdydz = C\iiint_G f(x,y,z)dxdydz.$$

4) Потрійний інтеграл алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної функції окремо

$$\iiint_G \left(f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z)\right)dxdydz = \iiint_G f_1(x,y,z)dxdydz \pm \iiint_G f_2(x,y,z)dxdydz.$$

5) *Оцінка потрійного інтеграла*. Нехай m – найменше значення неперервної функції в області G, M – найбільше значення функції в області G, а V – об'єм області G. Тоді виконується нерівність

$$mV \le \iiint_G f(x,y,z)dxdydz \le MV,$$

6) *Властивість про середнє значення функції* $u = f(x,y,z)$. Якщо функція $u = f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, об'єм якої дорівнює V, то в цій області існує хоча б одна точка $P(\xi,\eta,\zeta)$ така, що справедливою є рівність:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = u(\xi,\eta,\zeta)\cdot V.$$

Обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення повторних інтегралів, а обчислення повторних інтегралів зволиться до обчислення трьох послідовних простих визначених інтегралів, тобто виконується рівність [5]:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int\limits_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (1.8)$$

При обчисленні потрійних інтегралів часто необхідно переходити до циліндричних та сферичних координат. Розглянемо особливості здійснення переходу до вище наведених координат у потрійному інтегралі.

Перехід до циліндричних координат у потрійному інтегралі [21].

Відомо, що циліндричні і декартові координати пов'язані відношенням:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases} \qquad \left(0 \le \rho \le +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\phi,\ -\infty \le z \le +\infty\right).$$

Якобіан у циліндричних координатах має вигляд

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Потрійний інтеграл у циліндричних координатах має вигляд:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = x\iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz, \qquad (1.9)$$

G – задана в декартовій, G' – у циліндричній системі координат.

Перехід до сферичних координат у просторі [21].

Сферичні координати $r,\ \varphi,\ \theta$ і декартові координати пов'язані співвідношенням:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta; \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad \left(0 \le r \le +\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le 2\pi\right).$$

Визначник Якобі у сферичних координатах має вигляд:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \mathrm{r}\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=r^2\sin\theta$$

А перехід від сферичних координат до декартових відбувається за формулою:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{G'} f\left(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta\right)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta, \quad (1.10)$$

де область G – задана в декартовій системі координат, а G' – у сферичній.

Визначений та кратні інтеграли мають широкий спектр математичних, зокрема геометричних та фізичних застосувань, які розглянемо у наступних розділах.

1.3. Криволінійні та поверхневі інтеграли

Криволінійні інтеграли

Нехай точка $P(x,y)$ рухається вздовж деякої плоскої лінії L від точки M до точки N. До точки P прикладена деяка сила $\vec{F}$, яка змінюється за величиною та напрямком відповідно до переміщення точки P, тобто являє собою деяку функцію, залежну від координат точки P:

$$\vec{F}=\vec{F}(P).$$

Обчислимо роботу A сили $\vec{F}$ при переміщенні точки P по дузі $\overset{\frown}{MN}$ заданої кривої L (рис.1.1). Для цього зробимо розбиття цієї дуги $\overset{\frown}{MN}$ на n довільних частин точками $M=M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n=N$ та позначимо через Δs_i вектор $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$. Величину сили $\vec{F}$ у точці M_i позначимо через F_i. Тоді скалярний добуток векторів $\overrightarrow{F_i}\overrightarrow{\Delta s_i}$ можна розглядати як наближене значення роботи сили $\vec{F}$ вздовж дуги $\breve{M_i M_{i+1}}$:

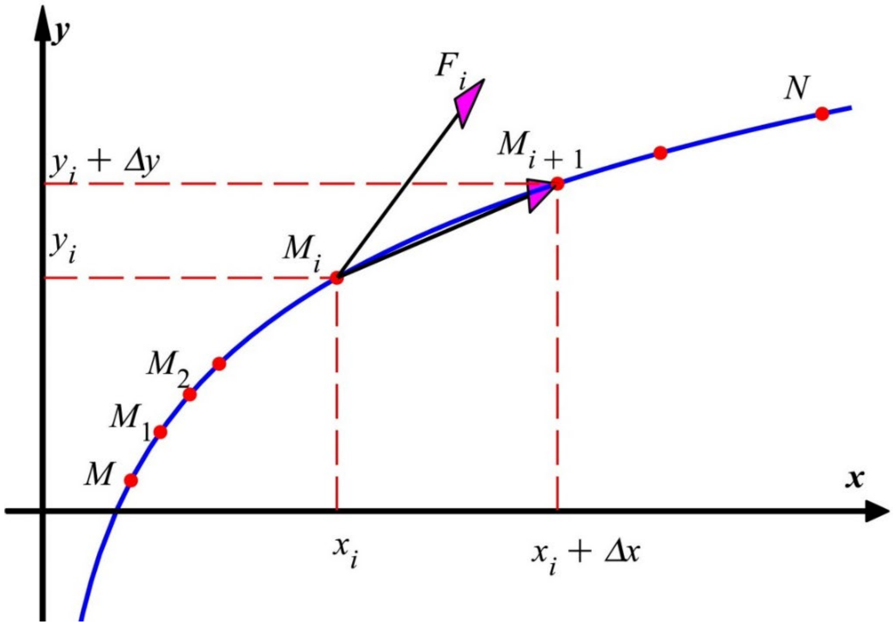

Рис. 1.1.

$$A_i \approx \overrightarrow{F_i}\overrightarrow{\Delta s_i}\,.$$

Нехай

$$\vec{F} = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}\,,$$

де $X(x, y)$ та $Y(x, y)$ – проекції вектора $\vec{F}$ на відповідні координатні вісі. Тоді, позначивши через Δx_i та Δy_i прирости відповідних координат x_i та y_i при переході від точки M_i до точки M_{i+1}, отримуємо

$$\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}\,.$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{F_i}\overrightarrow{\Delta s_i} = X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x, y)\Delta y_i$$

і наближене значення роботи A сили $\vec{F}$ на всій дузі $\breve{MN}$ кривої L буде дорівнювати

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i}\overrightarrow{\Delta s_i} = \sum_{i=1}^{n}\left[X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x, y)\Delta y_i\right]. \tag{1.11}$$

Переходячи у правій частині рівності (1.11) до границі при $\overrightarrow{\Delta s_i} \to 0$ (при цьому, очевидно, $\Delta x_i \to 0$ і $\Delta y_i \to 0$), отримуємо точне значення шуканої роботи сили:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left[X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x, y)\Delta y_i \right]. \qquad (1.12)$$

Вираз, що отриманий у правій частині рівності (1.12) називається *криволінійним інтегралом другого роду* та позначається так

$$A = \int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy. \qquad (1.13)$$

Очевидно, прирости Δx_i і Δy_i на кожній ділянці кривої визначають приріст довжини дуги Δl_i кривої L у такий спосіб:

$$\Delta x_i = \Delta l_i \cdot \cos\alpha_i, \quad \Delta y_i = \Delta l_i \cdot \cos\beta_i,$$

де $\cos\alpha_i$ і $\cos\beta_i$ – напрямні косинуси дотичної до кривої L в точці M_i (α_i та β_i – кути між дотичною та додатним напрямком відповідної координатної осі). Тоді підставляючи відповідні вирази в інтеграл (1.13), отримуємо [18]:

$$A = \int_L \left[X(x, y)\cos\alpha + Y(x, y)\cos\beta \right] dl = \int_L f(x, y)dl.$$

Цей вираз називається *криволінійним інтегралом першого роду.*

Аналогічно можна розглядати криволінійні інтеграли у просторі. Розглянемо далі способи обчислення криволінійних інтегралів першого та другого роду.

Очевидно, можна стверджувати, що криволінійний інтеграл першого роду є узагальненням звичайного інтеграла. Відтак, його обчислення у більшості випадків зводиться до обчислення звичайного визначеного інтеграла. Розглянемо випадки [21]:

1) якщо просторова крива L задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \\ t_1 \le t \le t_2; \end{cases}$$

то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt;$$

для плоскої кривої L $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t); \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2;$ маємо аналогічну рівність

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt;$$

2) якщо просторова крива L задана явними рівняннями від одної змінної:

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \\ x_1 \le x \le x_2; \end{cases}$$

то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y(x), z(x)\right)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2 + \left(z'(x)\right)^2}\,dx;$$

для плоскої кривої L $y = y(x),\ x_1 \le x \le x_2;$ маємо аналогічну рівність

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx;$$

3) якщо плоска крива L задана у полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

Аналогічним чином, ураховуючи означення криволінійного інтеграла другого роду, можна стверджувати, що його обчислення зводиться до обчислення звичайного визначеного інтеграла. Розглянемо випадки:

1) якщо просторова крива L задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t_A \le t \le t_B; \\ z = z(t); \end{cases}$$

то

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} \big[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t) \big] dt;$$

для плоскої кривої L $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t); \end{cases} t_A \le t \le t_B$; маємо аналогічну рівність

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} \big[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \big] dt;$$

2) якщо просторова крива L задана явними рівняннями від одної змінної:

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \\ x_1 \le x \le x_2; \end{cases}$$

то

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{x_A}^{x_B} \big[P(x,y(x),z(x)) +$$

$$+ Q(x,y(x),z(x))y'(x) + R(x,y(x),z(x))z'(x) \big] dx;$$

для плоскої кривої L $y = y(x)$, $x_A \le x \le x_B$; маємо аналогічну рівність

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \big[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) \big] dx.$$

Можна також розглядати криволінійні інтеграли другого роду по замкненому контуру.

Контур L, що не має точок само перетину і належить однозв'язній області D (область називають *однозв'язною,* якщо довільний контур, що належить цій області, обмежує множину точок лише цієї області), називається *додатно орієнтованим*, якщо на ньому вибрано такий напрямок обходу, при якому область залишається увесь час зліва від спостерігача. У протилежному випадку його називають *від'ємно орієнтованим*.

Відповідно криволінійний інтеграл другого роду по замкненому додатно орієнтованому контуру L позначається так:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

або у тривимірному випадку

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

(тут однозв'язність області означає те, що на будь-який замкнений її контур можна натягнути поверхню, що цілком лежить в цій області). Для такого типу інтегралів мають місце наступні теореми [24; 25].

Теорема 1.7. *Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їх частинні похідні першого порядку є неперервними в замкненій однозв'язній області D, яка обмежена кусково-гладким додатно орієнтованим контуром L, то має місце формула*

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (1.14)$$

Формула (1.14) називається *формулою Гріна* [5].

Теорема 1.8. *Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в замкненій однозв'язній області D. Тоді має місце рівносильність таких чотирьох тверджень*:

1. $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, *де L – будь-який замкнений контур, що лежить в області D.*

2. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ *не залежить від форми шляху інтегрування, що з'єднує точки A та B,* $AB \subset D$.

3. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$, *тобто підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції* $u(x,y)$, *визначеної в області D.*

4. *У всіх точках області D виконується умова*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{1.15}$$

При виконанні умови (1.15), як наслідок із даної теореми маємо справедливу формулу:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} du(x,y) = u(x,y)\Big|_A^B = u(B) - u(A).$$

Аналогічна теорема має місце і для тривимірного випадку [24].

Поверхневі інтеграли

Нехай у прямокутній системі координат *Oxyz* задана деяка область *V* (частина простору) і нехай у цій області визначена поверхня σ, обмежена деякою просторовою лінією λ.

Відносно поверхні σ будемо вважати, що в кожній її точці *P* додатний напрям нормалі визначається одиничним вектором $\vec{n}(P)$, напрямні косинуси якого є неперервними функціями відносно координат точок поверхні.

Нехай у кожній точці поверхні є визначеним вектор

$$\vec{F} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k},$$

де *X*, *Y*, *Z* – неперервні функції координат.

Зробимо розбиття заданої поверхні σ на елементарні частинки $\Delta\sigma_i$ і на кожній з них виберемо довільну точку P_i. Розглянемо суму

$$\sum_i \left(\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i)\right)\Delta\sigma_i, \tag{1.16}$$

де $\left(\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i)\right)$ – скалярний добуток відповідних значень векторів у точці P_i.

Границя суми (1.16), яка розглядається на всій заданій поверхні, коли діаметри всіх частинок розбиття прямують до нуля, називається *поверхневим інтегралом другого роду* та має такі позначення:

$$\lim_{\operatorname{diam}(\Delta\sigma_i)\to 0}\left[\sum_i \left(\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i)\right)\Delta\sigma_i\right] = \iint_\sigma \left(\vec{F},\vec{n}\right)d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma \left(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma\right)d\sigma = \iint_\sigma Xdydz + Ydxdz + Zdxdy.$$

Аналогічно криволінійним інтегралам, вираз

$$\iint_\sigma f(x,y,z)d\sigma \qquad (1.17)$$

називається *поверхневим інтегралом першого роду* [18].

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x,y)$ і будь-яка пряма, паралельна осі *Oz*, перетинає цю поверхню лише в однієї точці, тобто поверхня σ однозначно проектується на площину *xOy*. Проекцією поверхні σ на площину *xOy* є область D_{xy}, тобто $\text{пр}_{xOY}\,\sigma = D_{xy}$. Якщо функція $z = z(x,y)$ неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку в цій області, то має місце формула:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Аналогічно можна отримати формули через проектування поверхні на 2 інші координатні площини.

Виходячи з означення, обчислення ж поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення поверхневого інтеграла першого роду, а отже також до обчислення подвійного інтеграла.

Якщо поверхня σ однозначно проектується на всі три площини, то мають місце формули відповідно для кожної із площин, які можна використати для обчислення поверхневого інтеграла другого роду:

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{dydz}{|\cos\alpha|} = \frac{dxdz}{|\cos\beta|}. \tag{1.18}$$

Розглянемо основні методи обчислення поверхневих інтегралів другого роду [18; 21].

1. *Метод проектування поверхні на всі координатні площини.*

Нехай поверхня σ однозначно проектується на всі три координатні площини. Тоді рівняння $\Phi(x,y,z)=0$ поверхні σ однозначно розв'язується відносно кожного з аргументів x , y і z так, що

$$x = x(y,z),\ \ y = y(x,z),\ \ z = z(x,y). \tag{1.19}$$

Позначимо проекції $\text{пр}_{xOy}\,\sigma = D_{xy}$, $\text{пр}_{xOz}\,\sigma = D_{xz}$, $\text{пр}_{yOz}\,\sigma = D_{yz}$. Тоді, підставляючи формули (1.18) і (1.19) у вираз для поверхневого інтеграла другого роду, отримаємо формулу для його обчислення:

$$\iint\limits_{\sigma} \left(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma \right) d\sigma = \pm \iint\limits_{D_{yz}} X\left(x(y,z), y, z \right) dydz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{yz}} Y\left(x, y(x,z), z \right) dxdz \pm \iint\limits_{D_{yz}} Z\left(x, y, z(x,y) \right) dxdy.$$

Знак у кожному з доданків правої отриманої рівності вибирається таким, який знак мають відповідні напрямні косинуси на орієнтовній поверхні.

2. *Метод проектування поверхні на одну координатну площину.*

Якщо незамкнена поверхня σ однозначно проектується на площину xOy в область D_{xy}, а рівняння поверхні можна задати рівнянням $z = z(x,y)$ і за формулами (1.18) $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, то поверхневий інтеграл другого роду перетворюється на подвійний інтеграл по області D_{xy}:

$$\iint\limits_{\sigma} \left(\vec{F}, \vec{n} \right) d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left. \frac{\left(\vec{F}, \vec{n} \right)}{|\cos\gamma|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy.$$

Мають місце також аналогічні формули для випадків однозначного проектування та відповідного явного задання даної поверхні відносно інших координатних площин.

Тут також слід зауважити, що коли поверхня σ кусково-гладка, то її розбивають на гладкі поверхні, які однозначно проектуються на координатні площини, а далі обчислення проводять по кожній окремій частині, а інтеграл по усій поверхні σ дорівнює сумі інтегралів по усім частинам.

3. *Метод, що ґрунтується на використанні формули Остроградського-Гаусса.*

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкненій поверхні по зовнішній її стороні і потрійним інтегралом по області *V*, обмеженій цією поверхнею.

Якщо поверхня σ замкнена, а функції $X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)$ – неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в області *V*, обмеженій цією поверхнею, то має місце *формула Остроградського-Гаусса*:

$$\iint_{\sigma} Xdydz + Ydxdz + Zdxdy = \iiint_{V} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dxdydz \tag{1.20}$$

У цій формулі зліва інтегрування ведеться по зовнішній стороні поверхні.

4. *Метод, що ґрунтується на використанні формули Стокса*

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами. Якщо функції $X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)$ – неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку на кусково-гладкій поверхні σ, яка обмежена кусково-гладкою замкненою кривою *L*, причому орієнтація кривої *L* узгоджена із орієнтацією поверхні σ (якщо спостерігач, який дивиться з кінця нормалі до поверхні σ, бачить обхід вздовж кривої *L* проти годинникової стрілки), то має місце формула Стокса:

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz=$$

$$=\oint_{L} Pdx+Qdy+Rdz\,. \qquad (1.21)$$

Криволінійні та поверхневі інтеграли є важливим математичним апаратом, що допомагає змоделювати велику кількість фізичних процесів та явищ.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ

2.1. Застосування інтеграла в математиці

Розглянемо застосування визначеного інтегралу, кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів у математиці, зокрема їх геометричні застосування.

1) ***Застосування визначеного інтеграла у математиці.***

Визначений інтеграл застосовується до *обчислення площ плоских фігур*.

а) Декартова система координат.

Площа плоскої фігури (криволінійної трапеції), що обмежена неперервною кривою, рівняння якої в прямокутних координатах має вигляд $y = f(x)$, віссю Ox та двома прямими $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ (рис. 2.1), знаходиться за формулою [1; 13]:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.1}$$

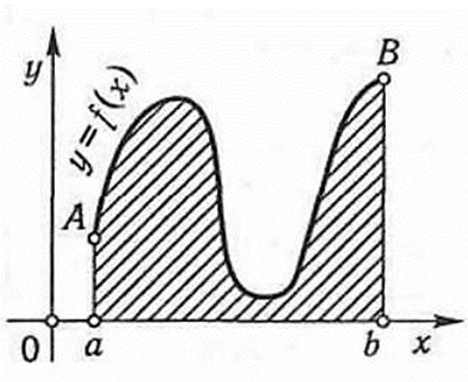

Рис. 2.1. Криволінійна трапеція, що розміщена над віссю *Ox*

При визначенні площі фігури, що обмежена неперервною кривою $y = f(x)$, необхідно дотримуватись такого правила знаків: якщо криволінійна трапеція знаходяться над віссю *Ox*, то інтеграл береться зі знаком «+» (плюс), а якщо криволінійна трапеція розміщені під віссю *Ox*, то

– зі знаком «–» мінус або обчислюється інтеграл від абсолютного значення функції.

Якщо плоска фігура обмежена двома неперервними кривими, рівняння яких у прямокутних координатах $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, причому на всьому відрізку $[a;b]$, $f_2(x)\geq f_1(x)$ та прямими $x=a$ та $x=b$ (рис. 2.2), то площа визначається за формулою [14]:

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \tag{2.2}$$

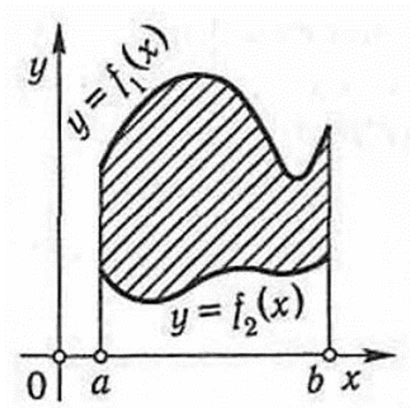

Рис. 2.2. Криволінійна трапеція обмежена зверху та знизу кривими

б) Полярна система координат.

Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, і двома променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{2.3}$$

в) Якщо крива $y=y(x)$, $x\in[a;b]$ задана *параметричними рівняннями*

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases} \qquad \alpha\leq t\leq\beta,$$

причому $x(\alpha)=a$, $y(\beta)=b$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цієї кривою, прямими $x=a$, $y=b$ і віссю *Ox*, виражається формулою

$$S=\int_a^b y(x)dx=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt, \tag{2.4}$$

де α і β визначаються з рівнянь $a=x(\alpha)$, $b=x(\beta)$ $\left[y(t)\geq 0,\ \alpha\leq t\leq\beta\right]$ [1].

Розглянемо застосування визначеного інтегралу до *обчислення довжини дуги плоскої кривої* [8; 15; 21].

а) Довжина дуги плоскої кривої, що визначена у прямокутних координатах рівнянням $y=f(x)$, знаходиться за формулою:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \tag{2.5}$$

де a і b – відповідно абсциси початку і кінця дуги.

б) Якщо крива задана параметричними рівняннями, то довжина дуги:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt. \tag{2.6}$$

в) крива задана у полярних координата $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leq\varphi\leq\beta$:

$$l=\int\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi. \tag{2.7}$$

Визначений інтеграл використовується для обчислення *об'ємів тіл* [25].

а) *об'єм тіла за площами паралельних перерізів* обчислюється за формулою

$$V=\int_a^b S(x)dx, \tag{2.8}$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі *Ox*, $a\leq x\leq b$

б) *об'єм тіла обертання*:

– отриманого при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$, *навколо осі Ox*:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx; \qquad (2.9)$$

– одержаного при обертанні криволінійної трапеції *навколо осі Oy*:

$$V_y = \pi \int_a^b xy(x)\,dx. \qquad (2.10)$$

в) Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ та прямими $x = a$, $x = b$, обертається *навколо осі Ox*:

$$V_x = \pi \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx. \qquad (2.11)$$

Для фігури, обмеженої кривими $x_1 = \varphi_1(y)$ і $x_2 = \varphi_2(y)$ $(0 \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y))$ та прямими $y = c$, $y = d$, обертається *навколо осі Oy*:

$$V_y = \pi \int_c^d \left[\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y) \right] dy. \qquad (2.11)$$

г) Якщо криволінійний сектор, обмежений кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, обертається навколо полярної осі, то:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi\, d\varphi. \qquad (2.12)$$

Розглянемо застосування визначеного інтеграла для *обчислення площі поверхні обертання* [21].

Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$ $a \le x \le b$, обертається навколо осі *Ox*, тоді маємо:

$$P_x = 2\pi \int_a^b y(x)\,dS, \qquad (2.13)$$

де dS – диференціал дуги кривої.

Для кривої, заданої *у прямокутних координатах*, (2.13) має вигляд

$$P_x = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx; \qquad (2.14)$$

– для полярної системи координат:

$$P_x = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi; \qquad (2.15)$$

– якщо крива задана параметрично, то

$$P_x = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \qquad (2.16)$$

2) ***Застосування подвійних та потрійних інтегралів у математиці.***

а) *Обчислення площ плоских фігур* [25].

Площа S_D області $D\subset R^2$ обчислюється за формулою:

$$S_D = \iint_D dxdy\,. \qquad (2.17)$$

Даний подвійний інтеграл можна подати через повторний.

– Якщо D: $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$, $a\le x\le b$, то

$$S_D = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,. \qquad (2.18)$$

– Якщо D: $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$, $c\le y\le d$, то

$$S_D = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx\,. \qquad (2.19)$$

У випадку, якщо область D обмежена лініями, рівняння яких задаються у *полярній системі координат* $D:\rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, то маємо

$$S_D = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho\,. \qquad (2.20)$$

б) *Обчислення об'єму тіла* [25].

Об'єм циліндричного тіла G, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини xOy, а зверху – поверхнею σ: $z=f(x,y)$, $f(x,y)\ge 0$ в області D, $np_{xOy}\sigma = D$ обчислюється за формулою:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \tag{2.21}$$

Якщо тіло G обмежене знизу поверхнею $z = f_1(x,y)$, а зверху – $z = f_2(x,y)$, а проекція верхньої та нижньої поверхонь на площину xOy є областю D, то об’єм тіла G дорівнює:

$$V_G = \iint\limits_D \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right)dxdy. \tag{2.22}$$

Об’єм тіла $G \subset R^3$ обчислюється за формулою:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz. \tag{2.23}$$

в) *Обчислення площі поверхні* [21].

Якщо поверхня σ задана рівнянням $z = f(x,y)$ і її проекція на площину xOy є замкненою областю D, то площа S_σ поверхні σ обчислюється за формулами:

$$S_\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\,dxdy. \tag{2.24}$$

3) *Застосування криволінійних та поверхневих інтегралів у математиці.*

Виходячи з означення, криволінійні інтеграли першого та другого роду використовуються для *обчислення довжини дуги кривої* [21].

Дійсно,

$$l\left(\breve{AB}\right) = \int\limits_{AB} dl = \int\limits_{t_A}^{t_B} \frac{\overline{r}'(t)dt}{\left|\overline{r}'(t)\right|}, \text{ або } l\left(\breve{AB}\right) = \frac{1}{3}\int\limits_{AB}\left(\frac{\left|\overline{r}'\right|}{x'}dx + \frac{\left|\overline{r}'\right|}{y'}dy + \frac{\left|\overline{r}'\right|}{z'}dz\right), \tag{2.25}$$

де $\overline{r}'(t) = (x', y', z')$ – похідна вектора параметризації кривої.

Криволінійний інтеграл 2-го роду по замкненому контуру, виходячи з його властивостей, застосовується для *обчислення площ плоских фігур* [10]:

$$S(D) = -\oint\limits_L ydx = \oint\limits_L xdy = \frac{1}{2}\oint\limits_L (xdy - ydx), \tag{2.26}$$

де L – контур, що обмежує фігуру D.

Поверхневі інтеграли першого роду використовуються для *обчислення площ частин поверхонь*. Має місце така формула:

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma . \tag{2.27}$$

В теорії полів криволінійні інтеграли по замкненому контуру L та поверхневі інтеграли другого роду застосовується для обчислення *циркуляції* C векторного поля $\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$:

$$C = \oint_{L} (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint_{\sigma} (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}) d\sigma , \tag{2.28}$$

де $\overline{r}$ – параметризація кривої (контуру) L, σ – довільна поверхня, обмежена контуром L (їх орієнтації узгоджені) та визначена вектором її нормалі $\vec{n}$, а $\operatorname{rot}\overline{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}$ – ротор поля $\overline{a}$.

При цьому величина

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\overline{a}, \overline{n}) d\sigma \tag{2.29}$$

визначає іншу характеристику векторного поля $\overline{a}$, яка називається *потоком* [18].

У формулі (2.29) також можна використати обчислення поверхневого інтеграла за формулою (1.20) Остроградського–Гауса, тобто потік дорівнює

$$\Pi = \iiint_{V} \operatorname{div}\overline{a}\, dxdydz = \iiint_{V} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dxdydz .$$

Підінтегральний вираз у цьому випадку визначає *дивергенцію* заданого векторного поля $\overline{a}$ [22].

2.2. Застосування інтеграла в фізиці

Інтеграли широко застосовується у фізиці, розглянемо основні можливості їх використання.

1) ***Застосування визначеного інтеграла у фізиці***

а) *Маса неоднорідного стержня*, розташованого на відрізку $[a;b]$, якщо його лінійна густина дорівнює $\rho(x)$, обчислюється за формулою

$$M = \int_a^b \rho(x)dx. \tag{2.30}$$

Також розглянемо застосування визначеного інтеграла для обчислення фізичних параметрів однорідних плоских кривих.

б) *Статичні моменти* M_x, M_y *та моменти інерції* I_x, I_y *плоскої кривої* $y = f(x)$ обчислюється за формулами:

– відносно осі *Ox*:

$$M_x = \int_a^b ydS, \; I_x = \int_a^b y^2 dS; \tag{2.31}$$

– відносно осі *Oy*:

$$M_y = \int_a^b xdS, \; I_y = \int_a^b x^2 dS, \tag{2.32}$$

де $dS = \sqrt{1 + y'^2}dx$ – диференціал дуги кривої [18].

в) *Статичні моменти та моменти інерції криволінійної трапеції*, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими: $y = 0$, $x = a$, $x = b$, обчислюються за формулами:

– відносно осі *Ox*:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b ydS = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \; I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3 dx; \tag{2.33}$$

– відносно осі *Oy*:

$$M_y = \int_a^b xdS = \int_a^b xydx, \; I_y = \int_a^b x^2 dS = \int_a^b x^2 ydx. \tag{2.34}$$

У цих формулах $dS = ydx$ – диференціал площі криволінійної трапеції [2].

г) *Координати центра ваги:*

– плоскої кривої $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$

$$x_c = \frac{1}{l}\int_a^b x dS,\ y_c = \frac{1}{l}\int_a^b y dS, \tag{2.35}$$

де l – довжина кривої, dS – диференціал дуги кривої.

– криволінійної трапеції

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x dS,\ y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y dS, \tag{2.36}$$

де $dS = ydx$, S – площа фігури [25].

д) *Обчислення роботи*. Робота змінної сили $F = F(x)$, яка діє у напрямку осі Ox на відрізку $[a;b]$, визначається формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx. \tag{2.37}$$

е) *Довжина шляху* s, який проходить матеріальна точка, що рухається зі швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \tag{2.38}$$

2) ***Застосування кратних інтегралів у фізиці***

Спочатку розглянемо фізичні застосування *подвійного інтеграла*.

а) *Обчислення маси матеріальної пластини* [10].

Нехай пластина лежить на площині xOy і має форму замкненої області D, у кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x, y)$, то маса пластини обчислюється за формулою:

$$m = \iint_D \mu(x, y)dxdy. \tag{2.39}$$

б) *Середня густина матеріальної пластини* [12].

Якщо маса пластини m, а площа пластини S, то середня густина пластини дорівнює

$$\mu_{сер} = \frac{m}{S} = \frac{\iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}. \qquad (2.40)$$

в) *Статичні моменти* пластини D відносно осей Ox і Oy дорівнює:

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)\,dxdy,\ M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)\,dxdy. \qquad (2.41)$$

Якщо пластинка є однорідною, то $\mu = \text{const}$ [21].

г) *Координати центра ваги* пластини обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m},\ y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad (2.42)$$

де m – маса пластини, M_x, M_y – статичні моменти відносно осей координат.

У випадку однорідної пластини попередні формули матимуть вигляд:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{S},\ y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{S}, \qquad (2.43)$$

де S – площа області D [21].

д) *Моменти інерції* пластини D відносно осей Ox і Oy дорівнюють:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x,y)\,dxdy,\ I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x,y)\,dxdy, \qquad (2.44)$$

а момент інерції відносно початку координат дорівнює:

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\mu(x,y)\,dxdy = I_x + I_y. \qquad (2.45)$$

Розглянемо застосування *потрійного інтеграла* у фізиці [9; 25].

а) *Обчислення маси матеріального тіла* $G \subset R^3$.

Якщо матеріальне тіло G має об'ємну густина $\mu = \mu(x,y,z)$, то маса тіла обчислюється за формулою:

$$m = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdydz. \qquad (2.46)$$

б) *Середня густина тіла* G дорівнює:

$$\mu_{сер} = \frac{m}{V} = \frac{\iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz}. \qquad (2.47)$$

в) *Статичні моменти тіла* G відносно координатних площин дорівнюють:

$$M_{yz} = \iiint\limits_G x\mu dxdydz,\ M_{zx} = \iiint\limits_G y\mu dxdydz,\ M_{xy} = \iiint\limits_G z\mu dxdydz. \qquad (2.48)$$

г) *Координати центра ваги тіла* G обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m},\ y_c = \frac{M_{zx}}{m},\ z_c = \frac{M_{xy}}{m}, \qquad (2.49)$$

або

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_G x\mu dxdydz,\ y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_G y\mu dxdydz,\ z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_G z\mu dxdydz, \qquad (2.50)$$

де m – маса тіла G.

При $\mu = 1$ отримаємо:

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_G xdxdydz,\ y_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_G ydxdydz,\ z_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_G zdxdydz, \qquad (2.51)$$

де V – об’єм тіла G.

д) *Моменти інерції тіла* G відносно координатних осей дорівнюють:

$$I_x = \iiint\limits_G \left(y^2 + z^2\right)\mu dxdydz,\ I_y = \iiint\limits_G \left(x^2 + z^2\right)\mu dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_G \left(y^2 + x^2\right)\mu dxdydz. \qquad (2.52)$$

3) *Застосування криволінійних та поверхневих інтегралів у фізиці.*

Криволінійні інтеграли першого роду використовуються для обчислення *маси* m *матеріальної дуги кривої* [21]. Дійсно, має місце формула:

$$m\left(\breve{AB}\right) = \int\limits_{AB} \mu(x,y,z)\,dl, \qquad (2.53)$$

де $\mu = \mu(x,y,z)$ – функція густини цієї дуги кривої.

Криволінійні інтеграли 2-го роду, виходячи з означення, застосовуються для *обчислення роботи* A *сили* $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж дуги кривої:

$$A = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \qquad (2.54)$$

Фізичним застосуванням поверхневого інтеграла першого роду є *обчислення маси* m *частини матеріальної поверхні*. Дійсно, має місце формула:

$$m(\sigma) = \iint_\sigma \mu(x,y,z)d\sigma, \qquad (2.55)$$

де $\mu(x,y,z)$ – задана у кожній точці густина цієї поверхні [18; 21].

Якщо вектор-функція $\vec{v}(x,y,z)$ є швидкість руху рідини, яка протікає через поверхню σ в сторону, визначену напрямком вектора нормалі $\vec{n}$, то *кількість рідини* П, що протікає через цю поверхню в одиницю часу, обчислюється за формулою [11]:

$$\Pi = \iint_\sigma (\vec{v},\vec{n})d\sigma. \qquad (2.56)$$

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛА

Розглянемо приклади розв'язування математичних та фізичних задач на застосування визначеного інтегралу, кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів.

3.1. Математичні задачі

1) ***Приклади розв'язання задач на застосування визначеного інтеграла у математиці***

Приклад 3.1.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $x = 0$.

Розв'язання.

Зобразимо область, яка обмежена вищевказаними лініями: $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $x = 0$.

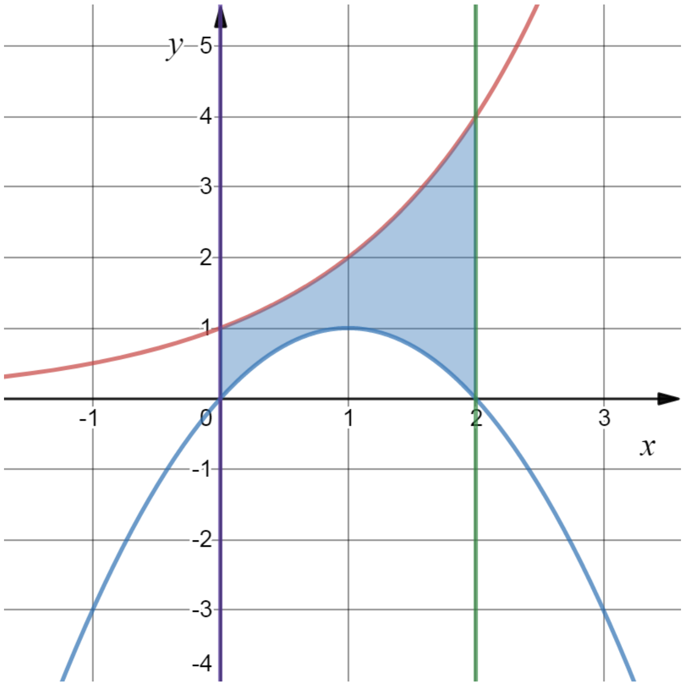

Рис. 3.1. Область, обмежена лініями $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $x = 0$

Тоді її площа буде дорівнювати:

$$S=\int_0^2 dx\int_{2x-x^2}^{2^x}dy=\int_0^2\left(2^x-2x+x^2\right)dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{4}{\ln 2}-4+\frac{8}{3}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $S=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}$ кв. од.

Приклад 3.2.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, заданими рівняннями в полярних координатах $\rho=2\sin 3\varphi$.

Розв'язання.

Лінія $\rho=2\sin 3\varphi$ задана у полярній системі координат. Виконаємо її схематичне зображення та побудуємо область, обмежену заданою лінією.

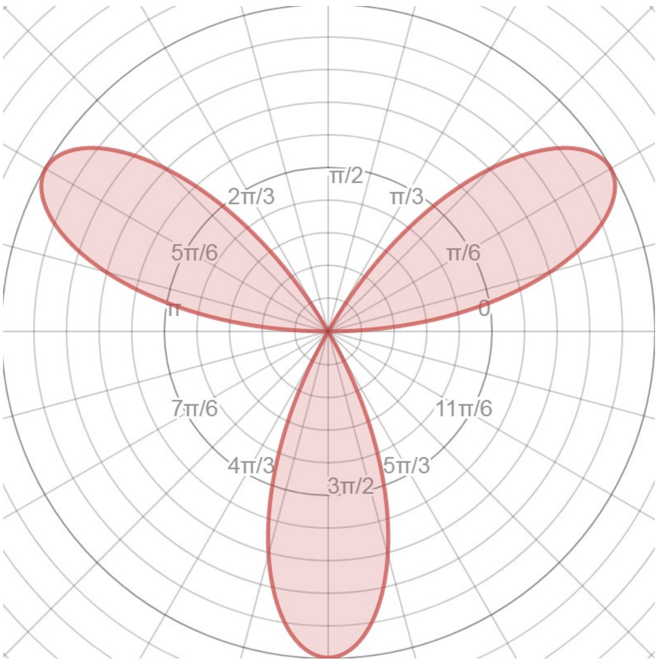

Рис. 3.2. Область, обмежена лінією $\rho=2\sin 3\varphi$

Площа фігури, обмеженої лінією $\rho=2\sin 3\varphi$, обчислюється за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

В даному випадку: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, тоді

$$S = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\sin 3\varphi\right)^2 d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^2 3\varphi d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1-\cos 6\varphi\right) d\varphi = \left(3\varphi - \frac{1}{2}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi .$$

Відповідь: π кв. од.

Приклад 3.3.

Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = \left(x-1\right)^3$ між точками $A\left(2;1\right)$ і $B\left(5;8\right)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння кривої у вигляді: $x = \sqrt[3]{y^2} + 1$.

Тоді, довжина дуги обчислюється за формулою: $l = \int_a^b \sqrt{1+\left(x'\left(y\right)\right)^2} dy$.

$$l = \int_1^8 \sqrt{1+\left(\left(\sqrt[3]{y^2}+1\right)'\right)^2} dy = \int_1^8 \sqrt{1+\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}\right)^2} dy = \int_1^8 \sqrt{1+\frac{4}{9\sqrt[3]{y^2}}} dy = \frac{1}{9}\int_1^8 \sqrt{\frac{9\sqrt[3]{y^2}+4}{\sqrt[3]{y^2}}} dy =$$

$$= \begin{bmatrix} y = t^3 \\ dy = 3t^2 dt \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\int_1^2 \sqrt{\frac{9t^2+4}{t^2}} \left(3t^2\right) dt = \frac{1}{9}\int_1^2 \sqrt{9t^2+4} \left(3t\right) dt = \begin{bmatrix} 9t^2+4 = u \\ 18tdt = du \\ 3tdt = \dfrac{du}{6} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{54}\int_{13}^{40} \sqrt{u} du = \frac{\sqrt{u^3}}{81}\Bigg|_{13}^{40} = \frac{1}{81}\left(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}\right) \approx 2,54 .$$

Відповідь: $l = \frac{1}{81}\left(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}\right)$ од.

Приклад 3.4.

Обчислити довжину дуги кривої $\rho = 2\sin^3\frac{\varphi}{3}$, де $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Розв'язання.

Довжина дуги кривої, заданої в полярних координатах, обчислюється за формулою:

$$l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi,\ \text{де}\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\ \text{і}\ \rho'(\varphi)=2\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}.$$

$$l=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^6\frac{\varphi}{3}+4\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3}+\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)}\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\frac{2\phi}{3}\right)d\phi=\left(\phi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\phi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ од.

Приклад 3.5.

Обчислити з точністю до 0,001 об’єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

$$y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\ \text{та}\ y=0.$$

Розв’язання

Знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній.

Маємо:

$$\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0,\Rightarrow x^2+x-2=0,\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-2.\end{array}\right.$$

Тоді для обчислення об’єму тіла застосовуємо формулу

$$V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Отримуємо

$$V_x=\pi\int\limits_{-2}^{1}\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\right)^2dx=\frac{\pi}{36}\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)^2dx=$$

$$=\frac{\pi}{36}\int\limits_{-2}^{1}\left(x^4+2x^3-3x^2-4x+4\right)dx=\frac{\pi}{36}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-2x^2+4x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{\pi}{36}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1-2+4+\frac{32}{5}-8-8+8+8\right)=\frac{\pi}{36}\cdot\frac{81}{10}=\frac{9\pi}{40}\approx 0,707\,.$$

Відповідь: $V_x=\dfrac{9\pi}{40}$ куб. од.

2) ***Приклади розв'язання задач на застосування подвійного та потрійного інтегралів у математиці***

Приклад 3.6.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2\ \ (y\le 0).$

Розв'язання

Побудуємо область D, обмежену заданими лініями.

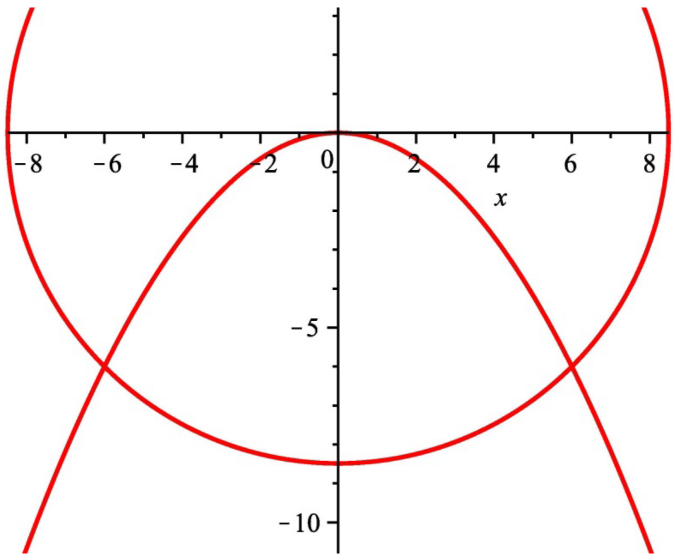

Рис. 3.3. Область, обмежена лініями $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2\ \ (y\le 0)$

Отже, $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-6}^{6}dx\int\limits_{-\sqrt{72-x^2}}^{-\frac{1}{6}x^2}dy=\int\limits_{-6}^{6}\left(y\Big|_{-\sqrt{72-x^2}}^{-\frac{1}{6}x^2}\right)dx=2\int\limits_{0}^{6}\left(\sqrt{72-x^2}-\frac{1}{6}x^2\right)dx=$

$$=2\int_0^6 \sqrt{72-x^2}\,dx-\frac{1}{3}\int_0^6 x^2dx=\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{72}\sin t, \\ dx=\sqrt{72}\cos t dt \\ t_н=0, t_в=\arcsin\frac{6}{\sqrt{72}}=\frac{\pi}{4} \end{array}\right]=2\sqrt{72}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{72}\cos^2 t dt-$$

$$-\left(\frac{x^3}{9}\right)\Big|_0^6=72\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt-24=72\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-24=$$

$$=72\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-24=18\pi+12.$$

Відповідь: $S=18\pi+12$ кв. од.

Приклад 3.7.

Використовуючи полярні координати, обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лінією: $\left(x^2+y^2\right)^2=8xy$.

Розв'язання.

Область, обмежена заданою лінією має такий вигляд. Тобто вона є симетричною відносно початку координат, тоді площа дорівнює 2 площам фігури у першій чверті.

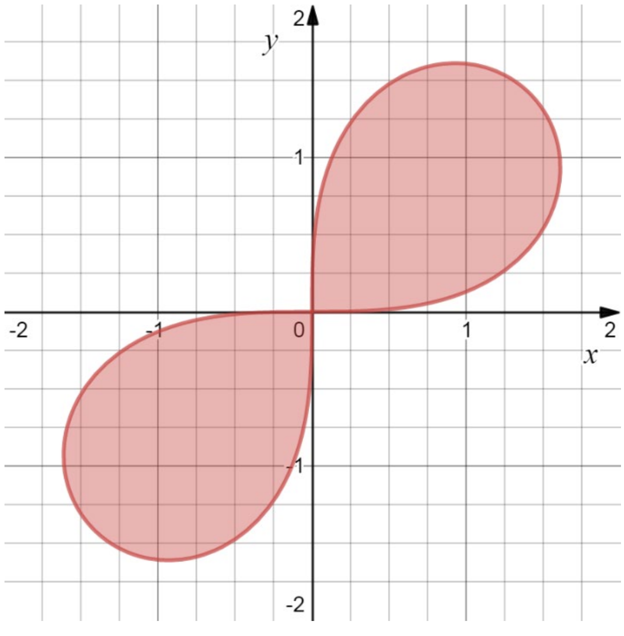

Рис. 3.4. Область, обмежена лінією $\left(x^2+y^2\right)^2=8xy$

Перейдемо до полярних координат:

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ dxdy = rdrdt, x^2 + y^2 = r^2,\ 8xy = 2r^2\sin 2t.$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy \Rightarrow r^2 = 2\sin 2t \Rightarrow r = \sqrt{2\sin 2t}.$$

Тоді область (для інтегрування) буде визначатися множиною точок: $\left\{(r,t)\middle| 0 \le r \le \sqrt{2\sin 2t}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

Таким чином, отримуємо

$$S = 2\iint\limits_D rdrdt = 2\int\limits_0^{\pi/2} dt \int\limits_0^{\sqrt{2\sin 2t}} rdrdt = 2\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2\sin 2t}} dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2tdt = -\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = 2.$$

Відповідь: $S = 2$ кв.од.

Приклад 3.8.

Обчислити площу області, заданої нерівностями, перейшовши до полярних координат

$$x^2 + (y-r)^2 \le r^2,\quad x \ge 0,\quad 2x + r \le y.$$

Розв'язання.

За означенням $S = \iint\limits_D dxdy$. Оскільки нерівність $x^2 + (y-r)^2 \le r^2$ визначає круг, а нерівності $x \ge 0$, $2x + r \le y$ визначають півплощину відносно різних прямих, що проходять через центр цього круга, то шукана область є деяким сектором круга.

Перейдемо до полярних координат, використовуючи систему:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t + r. \end{cases}$$

Обчислимо якобіан і знайдемо границі інтегрування:

$$|I| = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial a} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos t & \sin t \\ -a\sin t & a\cos t \end{matrix}\right\| = a^2, \text{ де } 0 \le a \le r.$$

$t \le \dfrac{\pi}{2}$ визначимо із рівняння:

$$2r\cos t + r = r\sin t + r \Rightarrow 2\cos t = \sin t \Rightarrow \text{ctg}\, t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \text{arcctg}\frac{1}{2}.$$

Отже, отримаємо:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D^*} a^2 dadt = \int\limits_0^r a^2 da \int\limits_{\text{arcctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{r^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\frac{1}{2} \right).$$

Відповідь: $S = \frac{r^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\frac{1}{2} \right)$ кв. од.

Приклад 3.9.

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$z = 0,\ 2x - y = 0,\ 4z = y^2,\ x + y = 9,\ x = 0$.

Розв'язання.

Рівняння $z = 0,\ 2x - y = 0,\ x + y = 9$ задають площину, а $4z = y^2$ – рівняння параболічного циліндра з уявною віссю Ox. Тоді проекцією тіла на площину xOy буде область:

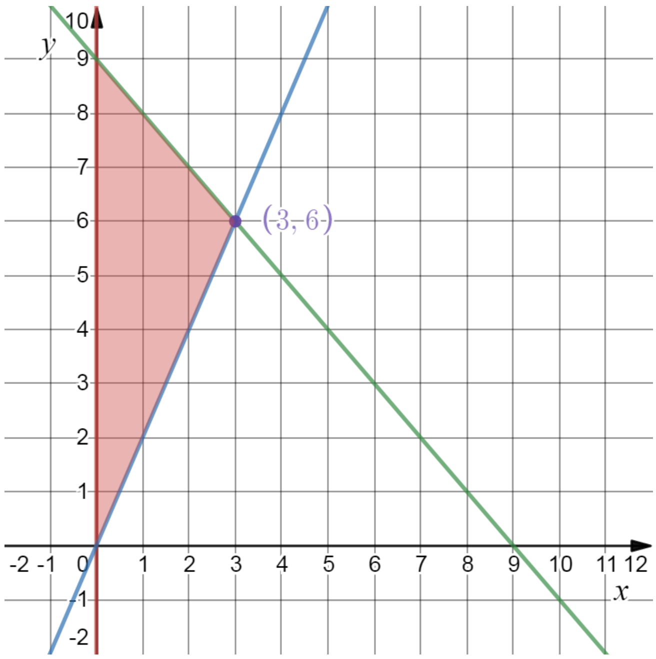

Рис. 3.5. Проекція тіла на площину xOy

Застосовуючи означення подвійного інтеграла, отримаємо

$$V = \iint\limits_D \frac{y^2 dxdy}{4} = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{2x}^{9-x} \frac{y^2 dy}{4} = \int\limits_0^3 \left(\frac{y^3}{12} \right) \Bigg|_{2x}^{9-x} dx = \frac{1}{12} \int\limits_0^3 \left(729 - 243x + 27x^2 - 9x^3 \right) dx =$$

$$=\frac{1}{12}\left(729x-\frac{243}{2}x^2+9x^3-\frac{9}{4}x^4\right)\Big|_0^3=\frac{1539}{16}\approx 96.2\,.$$

Відповідь: $V=96\frac{3}{16}$ куб. од.

Приклад 3.10.

За допомогою подвійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y=z,\ z=x^2+y^2$.

Розв'язання

Знайдемо та побудуємо область D – проекцію заданого тіла на площину xOy:

$$x+y=x^2+y^2\Rightarrow x^2-x+y^2-y=0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ – коло}$$

з центром у точці $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ та радусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Враховуючи, що $x\geq 0, y\geq 0$, отримуємо.

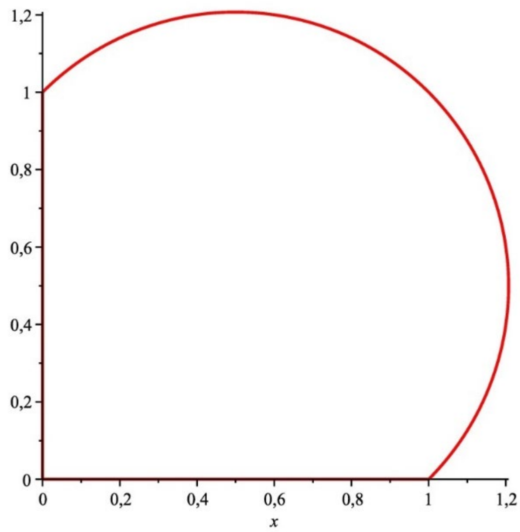

Рис. 3.6. Проекція тіла на площину xOy

Тоді об'єм тіла буде дорівнювати

$$V=\iint\limits_D\left(x+y-x^2-y^2\right)dxdy\,.$$

Розділимо область D на частини $D_1: x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1$, і $D_2: \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, $x+y \ge 1$.

Тоді

$$V = \iint\limits_{D_1} \left(x+y-x^2-y^2\right) dxdy + \iint\limits_{D_2} \left(x+y-x^2-y^2\right) dxdy. \qquad (3.1)$$

$$\iint\limits_{D_1} \left(x+y-x^2-y^2\right) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(x+y-x^2-y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} - x^2(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{6} + x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 \right) dx = \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^4 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

У другому подвійному інтегралі рівності (3.1) виконаємо заміну змінних: $\begin{cases} x = r\cos t + \dfrac{1}{2}, \\ y = r\sin t + \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ звідки $dxdy = rdrdt$.

Тоді область D_2 визначається нерівностями $0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3\pi}{4}$.

Отримуємо

$$\iint\limits_{D_2} \left(x+y-x^2-y^2\right) dxdy = \iint\limits_{D_2} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) rdrdt = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{r}{2} - r^3 \right) dr =$$

$$= t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pi \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16} \right) = \frac{\pi}{16}.$$

Отже, об'єм тіла буде дорівнювати $V = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{16}$ (куб. од.).

Відповідь: $V = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{16}$ куб. од.

Приклад 3.11.

Знайти об'єм тіла, яке обмежене поверхнями:

$x^2 + y^2 = 2$, $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $z = 0$, $z = 30y$.

Розв'язання

Задане тіло обмежене круговим циліндром $x^2 + y^2 = 2$ (радіус поперечного перерізу $\sqrt{2}$), циліндричною поверхнею $x = \sqrt{y}$ та площинами $x = 0,\ z = 0,\ z = 30y$.

Проекція цього тіла на площину *xOy* має вигляд:

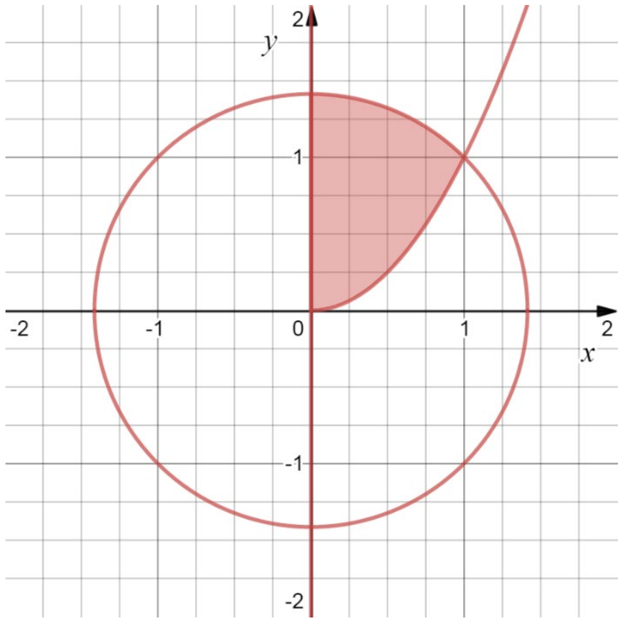

Рис. 3.7. Проекція заданого тіла на площину *xOy*

Тоді об'єм заданого тіла дорівнює:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int\limits_0^{30y} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} 30ydy = 30\int\limits_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$= 15\int\limits_0^1 \left(2 - x^2 - x^4 \right) dx = 15\left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 30\sqrt{2} - 10\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

Відповідь: $V = 8\sqrt{2}$ куб. од.

Приклад 3.12.

За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = z,\ z = x^2 + y^2$. Зробити зображення поверхні.

Розв'язання

Побудуємо область V:

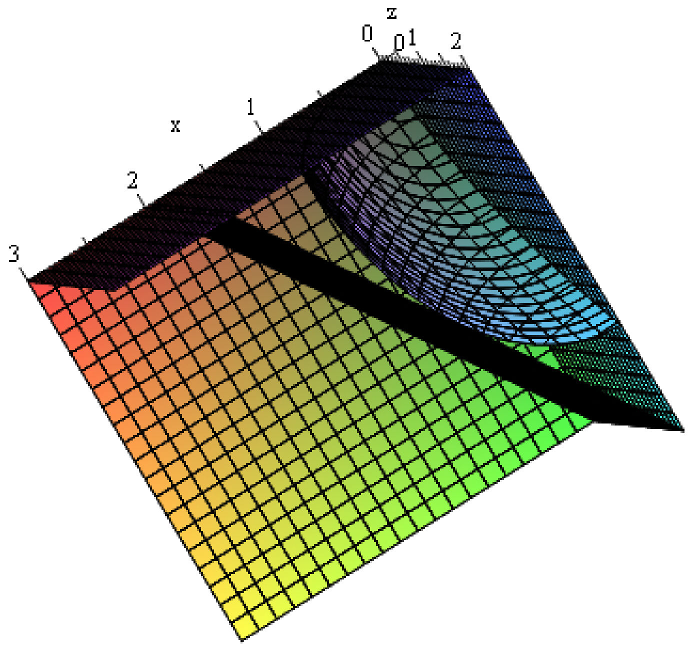

Рис. 3.8. Зображення тіла, обмеженої поверхнями

$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = z,\ z = x^2 + y^2$

Обчислюємо об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} z\Big|_0^{x^2+y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(x^2 + y^2\right) dy = \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{2-x} dx = \int_0^2 \left(x^2 (2 - x) + \frac{(2-x)^3}{3} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3} - 4x \right) dx = \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \frac{8}{3}x - 2x^2 \right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} + \frac{16}{3} - 8 = \frac{8}{3}.$$

Відповідь: $V = \dfrac{8}{3}$ куб. од.

3) ***Приклади розв'язання задач на застосування криволінійного та поверхневих інтегралів у математиці***

Приклад 3.13.

Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{a} = (2z - x)\overline{i} + (x + 2y)\overline{j} + 3z\overline{k}$ по контуру трикутника, отриманого в результаті перетину площини $x + 4y + 2z = 8$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора цієї площини двома способами: 1) використовуючи означення циркуляції векторного поля; 2) за допомогою формули Стокса.

Розв'язання.

1. Координатними площинами із заданої площини відтинатиметься трикутник, вершинами якого є точки $A(8,0,0),\ B(0,0,4), C(0,2,0)$.

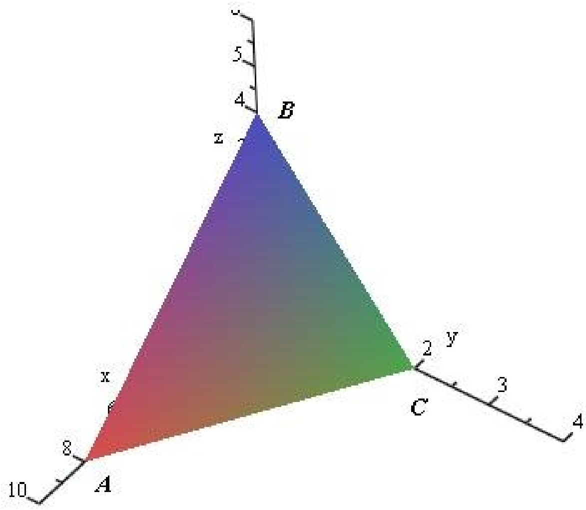

Рис. 3.9. Зображення трикутника, заданого за умовою задачі

Додатній напрямок визначатиметься рухом проти годинникової стрілки: $A \to C \to B \to A$.

1) За формулою $C = \oint\limits_{ACBA} \mathrm{a}\,ds$, де $\mathrm{a} = (2z - x)\overline{i} + (x + 2y)\overline{j} + 3z\overline{k}$, а $ds = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$. Отримуємо.

$AC: \mathrm{z} = 0, x = 8 - 4y, 0 \le y \le 2,\ dx = -4dy$. Тоді $\mathrm{a} = (4y - 8)\overline{i} + (8 - 2y)\overline{j}$, а $ds = -4dy\overline{i} + dy\overline{j}$ і $\int\limits_{AC} \mathrm{a}\,ds = \int\limits_0^2 \left(-16y + 32 + 8 - 2y\right)dy = \int\limits_0^2 \left(-18y + 40\right)dy =$

$= \left(-9y^2 + 40y\right)\Big|_0^2 = 44$.

$CB: x=0, z=4-2y, 0\le y\le 2,\ dz=-2dy$.

Тоді

$a=(8-4y)\overline{i}+2y\overline{j}+(12-6y)\overline{k}$, $ds=dy\overline{j}-2dy\overline{k}$ і

$$\int\limits_{CB}\mathrm{a}\,ds=\int\limits_{2}^{0}\left(2y-24+12y\right)dy=\int\limits_{2}^{0}\left(14y-24\right)dy=\left(7y^2-24y\right)\Big|_2^0=20.$$

$BA: y=0, x=8-2z, 0\le z\le 4,\ dx=-2dz$ Тоді $\mathrm{a}=(4z-8)\overline{i}+(8-2z)\overline{j}+3z\overline{k}$

а $ds=-2dz\overline{i}+dz\overline{k}$ і $\int\limits_{BA}\mathrm{a}\,ds=\int\limits_{4}^{0}\left(-5z+16\right)dx=\left(-\dfrac{5z^2}{2}+16z\right)\Bigg|_4^0=-24.$

Отже, $C=44+20-24=40$.

2) Обчислимо циркуляцію за допомогою формули Стокса:

$C=\iint\limits_{S}\mathrm{rot}\,\mathrm{a}\cdot dS$, де $S=S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OAC}+S_{\Delta OBC}$, $ds=dydz\overline{i}+dxdz\overline{j}+dxdy\overline{k}$.

Визначимо ротор поля: $\mathrm{rot}\,\mathrm{a}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2z-x & x+2y & 3z\end{vmatrix}=2\overline{j}+\overline{k}$.

Отримуємо

$$C=\iint\limits_{S}2dxdz+dxdy=\iint\limits_{S}2dxdz+dxdy=2\iint\limits_{S_{\Delta OAB}}dxdz+\iint\limits_{S_{\Delta OAC}}dxdy=32+8=40.$$

Відповідь: $C=40$.

Приклад 3.14. Обчислити потік векторного поля $\overline{a}=4z\overline{i}+\left(x-y-z\right)\overline{j}+\left(3y+z\right)\overline{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, утвореної площиною $x-2y+2z=2$ і координатними площинами двома способами:

1) застосовуючи означення потоку;

2) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв'язання.

1) Обчислимо потік векторного поля за допомогою поверхневого інтеграла

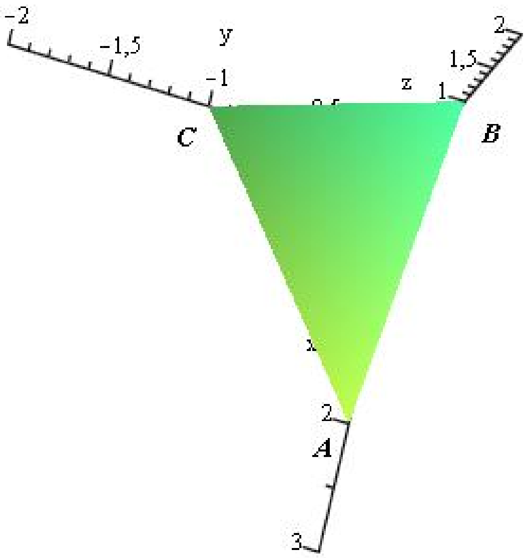

Рис. 3.10. Зображення області, заданої за умовою задачі

Знайдемо потік на кожній грані піраміди:

$AOB: y = 0, 0 \le z \le 1, 0 \le x \le 2 - 2z, n_0 = \overline{j}$.

Тоді $\Pi_1 = \iint\limits_{\Delta AOB} (x - z) dS = \iint\limits_{\Delta AOB} (x - z) dxdz =$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2-2z} (x - z) dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{x^2}{2} - xz \right) \Bigg|_0^{2-2z} \right) dz =$$

$$= \int_0^1 \left(2 - 6z + 4z^2 \right) dz = \left(2z - 3z^2 + 4\frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= 2 - 3 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

$BOC: x = 0, 0 \le z \le 1, 0 \le y \le z - 1, n_0 = \overline{i}$ Тоді $\Pi_2 = \iint\limits_{\Delta BOC} 4z dS = \iint\limits_{\Delta BOC} 4z dydz =$

$$= 4\int_0^1 dz \int_{z-1}^0 z dy = -4\int_0^1 \left(z^2 - z \right) dz = -4\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

$AOC: z = 0, -1 \le y \le 0, 0 \le x \le -2y - 2, n_0 = \overline{k}$ Тоді

$$\Pi_3 = \iint\limits_{\Delta AOC} 3y dS = \iint\limits_{\Delta AOC} 3y dxdy = 3\int_{-1}^0 dy \int_0^{-2y-2} y dx = -6\int_{-1}^0 \left(y^2 + y \right) dy =$$

$$=-6\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=1.$$

$$ABC: x=2+2y-2z, 0\le z\le 1, 0\le y\le z-1, n_0=\frac{(1,-2,2)}{\sqrt{1+4+4}}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),$$

$dS=\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz=3dydz$. Тоді

$$\Pi_4=\iint\limits_{\Delta ABC}(4z-4-4y+4z+2y+2z+6y+2z)dydz=4\iint\limits_{\Delta ABC}(y+3z-1)dydz=$$

$$=4\int_0^1 dz\int_{z-1}^{0}(y+3z-1)dy=$$

$$=-4\int_0^1\left(\frac{z^2-2z+1}{2}+(3z-1)(z-1)\right)dz=-\left(\frac{14z^3}{3}-10z^2+6z\right)\Bigg|_0^1=$$

$=-\frac{14}{3}+10-6=-\frac{2}{3}$. Отже, $\Pi=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1-\frac{2}{3}=0$.

б) За формулою Остроградського–Гаусса отримуємо:

$$\Pi=\iiint\limits_{W}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{W}(0-1+1)dxdydz=0.$$

Відповідь: $\Pi=0$.

Приклад 3.15. Знайти потік: $\overline{A}=x^3\overline{i}+y^3\overline{j}+z^3\overline{k}$; S – половина зовнішньої сторони сфери $x^2+y^2+z^2=2x$, $z\ge 0$.

Розв'язання

Задане рівняння сфери можна записати так: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. Перейшовши до узагальнених сферичних координат: $x=r\cos u\sin v+1, y=r\sin u\sin v, z=r\cos v, dV=r^2\sin v drdudv$, отримуємо таке рівняння сфери: $r=1$, або у параметричному вигляді:

$$x=\cos u\sin v+1, y=\sin u\sin v, z=\cos v,$$

а задана її чатина буде визначена нерівностями:

$$0\le r\le 1,\ 0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le\frac{\pi}{2}.$$

Доповнимо задану поверхню відповідною частиною площини $z=0$.

Тоді потік по отриманій замкненій повній поверхні за формулою Остроградського-Гауса буде дорівнювати:

$$\Pi_S=\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n})dS=\iiint\limits_G \operatorname{div}\overline{A}\,dV=3\iiint\limits_G\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=$$

$$=6\iiint\limits_{G^*}(\cos u\sin v+1)r^2\sin v\,drdudv=6\int\limits_0^1 r^2dr\int\limits_0^{2\pi}du\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos u\sin v+1)\sin v\,dv=$$

$$=6\int\limits_0^1 r^2dr\int\limits_0^{2\pi}du\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos u\sin 2v+\sin v\right)dv=-6\int\limits_0^1 r^2dr\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\cos u\cos 2v+\cos v\right)\Bigg|_0^{\pi/2}du=$$

$$=6\int\limits_0^1 r^2dr\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos u+1\right)du=6\int\limits_0^1 r^2\left(\frac{1}{2}\sin u+u\right)\Bigg|_0^{2\pi}dr=12\pi\int\limits_0^1 r^2dr=4\pi.$$

Обчислюємо тепер потік по площині $z=0$:

$\Pi_1=-\iint\limits_{S_1}(\vec{a},\vec{k})dS=-\iint\limits_{S_1}z^3\Big|_{z=0}dS=-\iint\limits_{S_1}0dS=0$. Отже, $\Pi=\Pi_S-\Pi_1=4\pi$.

Відповідь: $\mathit{\Pi}=4\pi$.

Приклад 3.16. Знайти потік поля $\overline{A}=(x;y;xyz)$; S – частина зовнішньої сторони циліндра $x^2+y^2=R^2$, розміщена в області $x>|y|$ і відсічена площиною $z=0$ і параболоїдом $z=x^2+y^2$.

Розв'язання

Параболоїд $z=x^2+y^2$ перетинає заданий циліндр по колу $x^2+y^2=R^2$ на висоті (відносно вісі Oz) R^2. Тоді доповнимо задану поверхню відповідними частинами площин $z=0$ та $z=R^2$, а також площинами $x=\pm y$.

Об'єм отриманого циліндра буде дорівнювати $V_ц=\frac{1}{4}\pi R^2R^2=\frac{\pi R^4}{4}$.

Оскільки , то потік по повній поверхні за формулою Гауса–Остроградського буде дорівнювати:

$$\Pi_S=\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n})dS=\iiint\limits_G \operatorname{div}\overline{A}\,dV=\iiint\limits_G(1+xy)dV$$

Скористаємося циліндричними координатами:

$x = r\cos u, y = r\sin u, z = z, dV = rdrdudz$,

причому $-\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}$, $0 \le r \le R$, $0 \le z \le R^2$. Маємо:

$$\operatorname{div}\overline{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + xy = 2 + xy$$

$$\Pi_S = \iiint\limits_{G^*} \left(2 + r^2\cos u \sin u\right) rdrdudz = \frac{1}{2}\int_0^R rdr \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(2 + r^2 \cos u \sin u\right) du \int_0^{R^2} dz =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^R rdr \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(2 + \frac{r^2}{2}\sin 2u\right) du = \frac{R^2}{2}\int_0^R \left(2u - \frac{r^2}{4}\sin 2u\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} rdr =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^R \left(\pi r - \frac{r^3}{2}\right) dr = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi r^2}{2} - \frac{r^4}{8}\right)\Bigg|_0^R = \frac{R^4}{16}\left(4\pi - R^2\right).$$

Обчислюємо тепер потік по відповідних площинах $z = 0$, $z = R^2$, $x = \pm y$:

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{S_1} \left(\vec{a}, \vec{k}\right) dS = -\iint\limits_{S_1} xyz\big|_{z=0} dS = -\iint\limits_{S_1} 0 dS = 0;$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} \left(\vec{a}, \vec{k}\right) dS = \iint\limits_{S_2} xyz\big|_{z=R^2} dS = R^2 \int_0^R rdr \int_{-\pi/4}^{\pi/4} du = \frac{\pi R^4}{4};$$

$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} \left(\vec{a}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)\right) dS = \frac{\sqrt{2}}{2}\iint\limits_{S_3} (x - y)\big|_{x=y} dS = \frac{\sqrt{2}}{2}\iint\limits_{S_3} 0 dS = 0;$$

$$\Pi_4 = \iint\limits_{S_4} \left(\vec{a}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)\right) dS = \frac{\sqrt{2}}{2}\iint\limits_{S_4} (x + y)\big|_{x=-y} dS = \frac{\sqrt{2}}{2}\iint\limits_{S_4} 0 dS = 0.$$

Отже, остаточно $\Pi = \Pi_S - \Pi_1 - \Pi_2 - \Pi_3 - \Pi_4 = \frac{R^4}{16}\left(4\pi - R^2\right) - \frac{\pi R^4}{4} = -\frac{R^6}{16}.$

3.2. Фізичні задачі

1) ***Приклади розв'язання задач на застосування визначеного інтеграла у фізиці***

Приклад 3.17. Прискорення об'єкта задається функцією від часу $a(t) = \cos \pi t$, а його швидкість у момент часу $t = 0$ дорівнює $\frac{1}{2\pi}$ м/с. Знайти довжину шляху, пройденого об'єктом за перші 1,5 секунди, а також відстань, пройдену об'єктом до першої повної його зупинки.

Розв'язання

За формулою: $v(t) = v(0) + \int\limits_0^t a(s)ds$, ураховуючи початкове значення швидкості, можемо знайти рівняння швидкості. Маємо:

$$v(t) = \int\limits_0^t \cos \pi s ds = v(0) + \frac{1}{\pi}\sin \pi t = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sin \pi t .$$

Тоді за формулою (2.38) довжина пройденого шляху за перші півтори секунди дорівнюватиме:

$$s\left(1{,}5\right) = \int\limits_0^{1,5} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sin \pi s \right) ds = \left(\frac{s}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}\cos \pi s \right)\Bigg|_0^{1,5} = \frac{3}{4\pi} - \frac{1}{\pi^2}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{\pi^2}\cos 0 =$$

$$= \frac{3\pi + 4}{4\pi^2} \approx 0{,}34(м).$$

Щоб знайти відстань, пройдену об'єктом до першої зупинки, прирівняємо функцію його швидкості до нуля і розв'яжемо отримане рівняння. Маємо:

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sin \pi t = 0 \Rightarrow \sin \pi t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k + \pi k \right) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(-1)^{k+1} + k, k \in Z .$$

Тоді найменше додатне значення t, що належить отриманій множині розв'язків, визначає час руху об'єкта до першої повної зупинки, тобто він дорівнює значенню $t = \frac{7}{6}$. Тоді шукана відстань дорівнюватиме

$$s\left(7/6\right) = \int\limits_0^{7/6} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sin \pi s \right) ds = \left(\frac{s}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}\cos \pi s \right)\Bigg|_0^{7/6} =$$

$$\frac{7}{12\pi}-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{7\pi}{6}+\frac{1}{\pi^2}=\frac{7}{12\pi}-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\pi^2}\approx 0,2(м).$$

Відповідь: за перші 1,5 секунди об'єкт пройшов відстань приблизно у 34 см, а до повної першої зупинки – близько 20 см.

Приклад 3.18. Знайти координати центра ваги прямолінійного стержня, довжиною 1 см, якщо його густина розподілена за законом $\mu(x)=1+\frac{1}{2}x\ \left(0\le x\le 1\right)$.

Розв'язання

Очевидно, що формулу (2.35) (для випадку однорідної плоскої кривої) тут використати не можна. Для знаходження центра ваги стержня (у даному випадку неоднорідного відрізка) скористаємося формулою:

$$x_c=\frac{M_x}{m},$$

де M_x – статичний момент (знаходиться за формулою $M_x=\int\limits_a^b x\mu(x)dx$), а $m=\int\limits_a^b \mu(x)dx$ – загальна маса стержня.

Очевидно, оскільки функція густини є зростаючою, то стержень буде важчим правіше від його геометричного центра – точки $x=\frac{1}{2}$. Переконаємося у цьому, провівши відповідні обчислення.

Загальна маса стержня дорівнює

$$m=\int\limits_0^1\left(1+\frac{1}{2}x\right)dx=\left(x+\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^1=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

Статичний момент стержня відносно початку координат дорівнює:

$$M_x=\int\limits_0^1 x\left(1+\frac{1}{2}x\right)dx=\int\limits_0^1\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Таким чином, центр ваги стержня знаходиться у точці:

$$x_c = \frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{8}{15} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: координати центра ваги стержня – $\left(\frac{8}{15};0\right)$.

Приклад 3.19.

Піраміда Хеопса представляє собою правильну чотирикутну піраміду висотою 147 м, в основі якої лежить квадрат зі стороною 232 м. Вона побудована із каменю, густина якого 2,5 г/см^3. Знайти роботу, протилежну до сили тяжіння, затрачену при побудові піраміди.

Розв'язання.

Провівши вертикальну вісь *x* з початком у центрі основи піраміди, висоту підйому каменів будемо вимірювати саме по цій осі. Розв'яжемо спочатку задачу у загальному вигляді, а потім підставимо відповідні числові значення та отримаємо відповідь.

Нехай висота піраміди дорівнює *H*, сторона основи *a*, густина каменю ρ. Позначимо через *A*(*x*) роботу, яку потрібно здійснити для побудови піраміди вздовж висоти *x*. Знайдемо спочатку сторону *b* горизонтального перерізу піраміди на висоті *x*, який має форму квадрата. За властивістю подібних трикутників отримуємо $\frac{H-x}{H} = \frac{b}{a}$, звідки $b = \frac{a}{H}(H-x)$. Розглянемо тонкий зріз піраміди, розташований на відстані *x* від основи. Нехай товщина цього зрізу дорівнює *dx*. Його можна приблизно вважати паралелепіпедом, а, відтак, його маса *dm* дорівнюватиме $\rho y^2 dx = \rho \frac{a^2}{H^2}(H-x)^2 dx$. При підйомі цього зрізу на висоту *x* була здійснена робота dA, що дорівнює $(gdm)\cdot x$, де g – прискорення вільного падіння, тобто

$$dA = g\rho \frac{a^2}{H^2} x(H-x)^2 dx$$

Звідси отримуємо

$$A = A(x) = \int_0^H dA = g\rho\frac{a^2}{H^2}\int_0^H x(H-x)^2dx = \frac{g\rho a^2}{H^2}\int_0^H (xH^2 - 2Hx^2 + x^3)dx =$$

$$\frac{g\rho a^2}{H^2}\left(H^2\frac{x^2}{2} - 2H\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^H = \frac{g\rho a^2}{H^2}\left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4}\right) = \frac{g\rho a^2}{12}\cdot H^2$$

Підставивши задані числові значення, отримуємо A=2,37·10^{12} Дж.

Відповідь: A=2,37·10^{12} Дж.

Приклад 3.20. Обчислити силу тиску води на прямокутні ворота шлюзу, що мають ширину a і висоту h, якщо верхній край шлюзу знаходиться на поверхні води.

Розв'язання:

Позначимо через P шукану силу тиску, а через $P(x)$ –силу тиску води на ділянку шлюзу, яка лежить вище горизонтального перерізу, проведеного на глибині x. Зрозуміло, що $P(h)=P$.

Знайдемо похідну $P'(x)$, тоді шукану силу P можна знайти за допомогою інтеграла.

Нехай, наприклад, $\Delta x > 0$, тоді $\Delta P = P(x+\Delta x) - P(x)$ – це сила тиску води на прямокутну ділянку. Оскільки за законом Паскаля тиск води на даній глибині в усіх напрямах однаковий, то сила тиску на прямокутник приблизно дорівнює силі тиску на такий самий прямокутник, розміщений на глибині x. Сила тиску дорівнює масі стовпа води, що знаходиться над цим прямокутником. Якщо ρ – густина води, то ця сила дорівнює:

$\Delta P = \rho a \Delta x x g$, звідки

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x} = \rho g a x.$$

Застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^h P'(x)dx = P(h) - P(0).$$

Але $P(h)=P$, $P(0)=0$, тому дістанемо:

$$P=\int_0^h P'(x)dx=\int_0^h \rho gaxdx=\rho ga\int_0^h xdx=\frac{1}{2}\rho gah^2$$

Відповідь: $P=\frac{1}{2}\rho gah^2$.

2) ***Приклади розв'язання задач на застосування кратних інтегралів у фізиці***

Приклад 3.21.

Обчислити масу неоднорідної пластини *D*, обмеженої заданими лініями, якщо поверхнева густина в кожній її точці $\mu=\mu\left(x,y\right)$.

$D: y=\sqrt{x},\ y=x,\ \mu=2-x-y$

Розв'язання

Для обчислення маси плоскої пластини використовуємо формулу $m=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$.

Отже,

$$m=\iint\limits_D\left(2-x-y\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\left(2-x-y\right)dy=\int_0^1\left(2y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}-\frac{x}{2}-2x+x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}-\frac{5x}{2}+\frac{3x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}-\frac{2}{5}-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=\frac{51}{60}.$$

Відповідь: $m=\frac{51}{60}$.

Приклад 3.22.

Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $64\left(y^2+x^2\right)=z^2,\quad y^2+x^2=4,\quad y=0,\quad z=0\ \left(y\ge 0,\ z\ge 0\right)$, якщо густина маси $\rho(x,y,z)=\frac{5}{4}\left(x^2+y^2\right)$.

Розв'язання.

Маса тіла W обчислюється за формулою

$$m = \iiint\limits_{W} \rho(x, y, z) dxdydz$$

Оскільки густина тіла $\rho(x, y, z) = \frac{5}{4}\left(x^2 + y^2\right)$, то величина маси тіла буде дорівнювати $m = \frac{5}{4}\iiint\limits_{W}\left(x^2 + y^2\right) dxdydz$.

Тіло W обмежене знизу площиною $z = 0$, а зверху – конусом $64\left(y^2 + x^2\right) = z^2$, а його проекція на площину xOy є півкруг $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Тоді перейдемо до циліндричних координат: $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \Rightarrow dxdydz = rdrdtdz. \\ z = z; \end{cases}$ Межі, що визначають проекцію заданого тіла, тепер будуть мати вигляд: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 2. \end{cases}$ Тепер можемо перейти від потрійного інтеграла до повторного.

Отримуємо

$$m = \frac{5}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int\limits_{0}^{2} r^3 dr \int\limits_{0}^{8r} dz = \frac{5}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int\limits_{0}^{2} 8r^4 dr = 10\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 dt = 64\pi.$$

Відповідь: $m = 64\pi$.

Приклад 3.23. Знайдіть моменти інерції тіла, яке має форму піраміди, обмеженої координатними площинами та площиною $x + 2y + 3z = 6$, якщо в кожній його точці густина задана функцією $\mu\left(x, y, z\right) = x^2 yz$.

Розв'язання

Очевидно, задана в обмеженні площина $x + 2y + 3z = 6$ відтинає на координатних осях Ox, Oy, Oz відрізки довжиною 6, 3 та 2 лінійні одиниці відповідно. Проектуючи задане тіло на площину XOY, отримуємо область визначену обмеженнями $\begin{cases} 0 \le x \le 6, \\ 0 \le y \le 3 - \dfrac{x}{2}. \end{cases}$ Таким чином, задану область характеризує така система нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 6, \\ 0 \le y \le 3 - \dfrac{x}{2}, \\ 0 \le z \le 2 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{3}. \end{cases}$$

Далі скористаємося формулами (2.52). Отримуємо:

$$I_x = \iiint\limits_G \left(y^2 + z^2\right) x^2 yzdxdydz = \int\limits_0^6 x^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{x}{2}} ydy \int\limits_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} z\left(y^2 + z^2\right)dz =$$

$$= \int\limits_0^6 x^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{x}{2}} y\left(\frac{1}{2}y^2 z^2 + \frac{1}{4}z^4\right)\Bigg|_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} dy =$$

$$= \int\limits_0^6 x^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{x}{2}} y\left(\frac{1}{2}y^2\left(2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right)^4\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^6 x^2 \left(\left(\frac{(x-6)^4 y}{324} + \frac{2(x-6)^3 y^2}{81} + \frac{11(x-6)^2 y^3}{162} + \frac{26(x-6)y^4}{81} + \frac{22}{81}y^5\right)\right)\Bigg|_0^{3-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^6 x^2 (x-6)^5 \left(\frac{1}{648} + \frac{1}{162} + \frac{11}{1296} + \frac{13}{648} + \frac{1}{648}\right)dx = \frac{117}{35} \approx 3{,}343.$$

Аналогічно знаходимо:

$$I_y = \iiint\limits_G \left(x^2 + z^2\right) x^2 yzdxdydz = \int\limits_0^6 x^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{x}{2}} ydy \int\limits_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} z\left(x^2 + z^2\right)dz = \frac{684}{35} \approx 19{,}543$$

і

$$I_z=\iiint\limits_G\left(x^2+y^2\right)x^2yzdxdydz=\int\limits_0^6 x^2dx\int\limits_0^{3-\frac{x}{2}}ydy\int\limits_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}}z\left(x^2+y^2\right)dz=\frac{729}{35}\approx 20{,}828.$$

Відповідь: $I_x=\frac{117}{35}$, $I_y=\frac{684}{35}$; $I_z=\frac{729}{35}$.

3) *Приклади розв'язання задач на застосування криволінійних та поверхневих інтегралів у фізиці*

Приклад 3.24.

Знайти роботу сили по переміщенню точки вздовж частини кривої

$f(x;y)=(2xy-y)i+(x^2-y)j$, $L: x=2y^2$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(8;2)$.

Розв'язання.

Використовуємо формулу:

$A=\int\limits_L Pdx+Qdy$, где $P=2xy-y,\ Q=x^2-y$.

Оскільки $x=2y^2$, то $dx=4ydy$.

Враховуючи межі інтегрування, отримаємо:

$$A=\int\limits_0^2\left(\left(2xy-y\right)4ydy+(x^2-y)dy\right)=\int\limits_0^2\left(\left(4y^3-y\right)4y+4y^4-y\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(20y^4-4y^2-y\right)dy=\left(4y^5-\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^2=128-\frac{32}{3}-2=115\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $A=115\frac{1}{3}$.

Приклад 3.25. Знайти масу матеріальної дуги кривої при вказаній лінійній густині ρ.

$y=\sin x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$, $\rho(x,y)=\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}$.

Розв'язання.

Маса матеріальної дуги кривої обчислюється за формулою: $\int\limits_{AB} \rho(x;y)\,dl$, де $dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$.

Отже, $dl = \sqrt{1+\left(\left(\sin x\right)'\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$.

Тоді,

$$\int\limits_{AB} \rho(x;y)\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2 x}{\cos x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin\frac{\pi}{4} + \sin 0 = \ln\left|\frac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}\right| - \ln 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\left|\sqrt{2}+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $m = \ln\left|\sqrt{2}+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 3.26.

Знайти кількість рідини, що протікає за одиницю часу через S – частину зовнішньої сторони еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, розміщену в першому октанті, у напрямку його нормального вектора, якщо швидкість руху цієї рідини визначається вектор-функцією $\overline{A} = x^2yz\overline{i} + xy^2z\overline{j} + xyz^2\overline{k}$

Розв'язання

За відповідною формулою (2.56) маємо обчислити потік векторного поля $\overline{A} = x^2yz\overline{i} + xy^2z\overline{j} + xyz^2\overline{k}$ через задану частину поверхні.

Доповнимо задану поверхню відповідними частинами координатних площин $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Тоді потік по отриманій замкненій поверхні за формулою Гауса–Остроградського буде дорівнювати:

$$\Pi_S=\iint\limits_S\left(\vec{a},\vec{n}\right)dS=\iiint\limits_G \operatorname{div}\overline{A}\,dV=3\iiint\limits_G xyz\,dV=$$

$$=3\int\limits_0^a xdx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy\int\limits_0^{\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}} zdz=\frac{a^2b^2c^2}{16}$$

Обчислюємо тепер потік по координатним площинам:

$$\Pi_1=-\iint\limits_{S_1}\left(\vec{a},\vec{i}\right)dS=-\iint\limits_{S_1}x^2yz\Big|_{x=0}dS=-\iint\limits_{S_1}0dS=0;$$

$$\Pi_2=-\iint\limits_{S_2}\left(\vec{a},\vec{j}\right)dS=-\iint\limits_{S_2}xy^2z\Big|_{y=0}dS=-\iint\limits_{S_2}0dS=0;$$

$$\Pi_3=-\iint\limits_{S_3}\left(\vec{a},\vec{k}\right)dS=-\iint\limits_{S_3}xyz^2\Big|_{z=0}dS=-\iint\limits_{S_3}0dS=0.$$

Отже, остаточно $\Pi=\Pi_S-\Pi_1-\Pi_2-\Pi_3=\dfrac{a^2b^2c^2}{16}$.

Відповідь: кількість рідини дорівнює $\dfrac{a^2b^2c^2}{16}$.

ВИСНОВКИ

У процесі дослідження було проведено аналіз навчальної та наукової літератури з проблеми дослідження, що дало можливість узагальнити та систематизувати необхідні теоретичні відомості з інтегрального числення, а саме розглянути поняття інтеграла, основні властивості та різні методи та способи обчислення інтегралів, а також проаналізувати основні застосування визначених, кратних (подвійних та потрійних), криволінійних та поверхневих інтегралів у математиці та фізиці.

Наведені приклади самостійно розв’язаних математичних та фізичних задач на застосування різних видів інтегралів показують, що інтегральне числення є важливим інструментом математичної науки, який має значне прикладне використання.

Матеріал з теми дослідження може бути корисний як для викладачів, у процесі підготовки до занять з даної теми, так і для студентів, при вивченні інтегрального числення і його використання у фізиці та математиці та при написанні курсових та інших кваліфікаційних робіт за вказаною тематикою, а також для тих, хто цікавиться математичним аналізом, зокрема інтегральним численням та його важливими застосуваннями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барабаш Г. М. Вища математика для біологів: навч.-метод. посібник: у 2-х ч. Ч. 2. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2014. 110 с.

2. Бусарова Т.М., Гришечкіна Т.С., Кузнєцов В.М., Папанов Г.А. Кратні та криволінійні інтеграли: навчальний посібник для самостійної роботи. Дніпропетровськ, 2016. 93 с.

3. Великіна Г.М., Карманова Л.В., Бугрим О.В. Подвійний інтеграл: навчальний посібник. Дніпро: Національний технічний університет «Дніпровська політехніка» (НТУ «ДП»), 2018. 54 с.

4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: підручник у 3. ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. Київ: Вища школа, 1990. 383 с.

5. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: підручник у 3. ч. Ч. 2. Функції багатьох змінної і диференціальні рівняння. Київ: Вища школа, 1991. 366 с.

6. Домбровський В.А., Крижанівський І.М. Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я. Вища математика: підручник / за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.

7. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник у 2. ч. Ч. 1. Київ: Либідь, 1993. 320 с.

8. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Частина 1. Київ: Вища школа, 2002. 462 с.

9. Дюженкова Л. І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах у 2 - ох частинах. Ч. 2. Київ: Вища школа, 2003. 470 с.

10. Жиленко Т.І., Білоус О.А. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів: навч. посібник. Суми: Сумський державний університет, 2017. 224 с.

11. Зубков А.Н. Криволинейные и поверхностные интегралы и их применение: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Донской Гос. техн. ун-т, 2013. 140 с.

12. Зубков А.Н., Павлова М.Н. Кратные интегралы и их приложения: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Донской Гос. техн. ун-т, 2012. 136 с.

13. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник. Київ: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.

14. Кузнецов А.Н., Чорный А.Л. Практикум по определенным интегралам: учебное пособие. Николаев: Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова (НУК), 2011. 112 с.

15. Ноздрин И. Н. Степаненко И.Н., Костюк Л.К. Прикладные задачи по высшей математике. Київ: Вища школа, 1976. 176 с.

16. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.П. Вища математика: підручник. Частина І. / за заг. ред. П.П. Овчинникова. Київ: Техніка, 2003. 600 с.

17. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. Уч. пособие: В 2-х т. Т. 1 Санкт-Петербург.: Мифрил. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1996. 416 с.

18. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 2. Уч. пособие. Москва: Наука, 1985. 560 с.

19. Пукальський І.Д., Лусте І.П. Математичний аналіз. Чернівці: Рута, 2008. 248 с.

20. Сачанюк-Кавецька Н.В., Краєвський В.О., Ковальчук М.Б., Черноволик Г.О. Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Функції багатьох змінних, кратні інтеграли: навчальний посібник. Вінниця: Вінницький національний технічний університет (ВНТУ), 2013. 135 с.

21. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Харків: ХНУРЕ, 2002. 440 с.

22. Титаренко В.И., Выск Н.Д. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля: учебное пособие. Москва: Изд-во МАТИ - РГТУ им. Циолковского, 2006. 72 с.

23. Томусяк А.А., Трохименко В.С. Математичний аналіз. Вінниця: ВДПУ, 1999. - 488 с.

24. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие. Том 3. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 656 с.

25. Шкіль М.І. Математичний аналіз: підручник у 2 ч. Ч. 2. Київ: Вища школа, 2005. 510 с.

26. Ковалець Н. М. Застосування інтегрального числення до розв’язавання прикладних задач: матеріали LIV Міжнародної інтернет - конференції [«Інновації науки XXI»], м. Київ, 2 листопада 2020 р. - 184 с.