

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

бакалаврського рівня

на тему:

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ
ПЕРВИННОЇ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО-
ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ**

Виконала: студентка IV курсу,

групи МІФ-41

спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)

Козак Юлія Олегівна

Керівник: *к.т.н., доц. Присяжнюк І. М.*

Рецензент: *д.т.н. проф. Сафоник А. П.*

Рівне – 2020 року

ЗМІСТ

| | |
|--|-----------|
| ВСТУП..... | 3 |
| РОЗДІЛ I. ОЧИЩЕННЯ ВОДИ ФІЛЬТРУВАННЯМ..... | 5 |
| 1.1 ФІЛЬТРУВАННЯ ВОДИ. ВИДИ ФІЛЬТРУВАННЯ..... | 5 |
| 1.2 ФІЗИЧНА СХЕМА ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРУВАННЯ..... | 6 |
| 1.3 КЛАСИФІКАЦІЯ ФІЛЬТРІВ..... | 13 |
| 1.4 ВИМОГИ СПОЖИВАЧІВ ДО ЯКОСТІ ВОДИ..... | 15 |
| РОЗДІЛ II. ДЕЯКІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ..... | 20 |
| 2.1 ФІЛЬТРАЦІЯ ВОДИ НА ДВОШАРОВИХ КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ, ВРАХОВУЮЧИ ДИФУЗІЮ..... | 20 |
| 2.2 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО- ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ ВРАХОВУЮЧИ ЗВОРОТНІЙ ВПЛИВ..... | 24 |
| РОЗДІЛ III. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПЕРВИННОЇ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ..... | 33 |
| 3.1 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ВОДИ ІЗ ЗАВИСЛИМИ ЧАСТИНКАМИ БЕЗ УРАХУВАННЯ ДИФУЗІЇ..... | 33 |
| 3.2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ДВОШАРОВОГО КАРКАСНО-ЗАСИПНОГО ФІЛЬТРУ..... | 42 |
| ВИСНОВОК..... | 51 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... | 52 |

ВСТУП

Вода породила все. Вона є фундаментом, основною сировиною людської діяльності. Як кажуть «Вода – найдорогоцінніший скарб». Вона відіграє чи не найголовнішу роль в обміні речовин, величезне значення має в сільськогосподарському та промисловому виробництвах.

Актуальність теми. В даний час промислові підприємства затрачують чималий об'єм води, а є й такі, що користуються безперервною її подачею. Внаслідок того, що постійно збільшується обсяг продукції установ, використовуються все більш складніші технологічні процеси, а тому затрата води зростає.

Водовідвідна система промислового виробництва використовується для відводу води, але через те, що стає все більше технологічних та виробничих викидів, ця вода стала *стічною* (Додаток А), котру необхідно очищати перед тим, як вона буде ще раз використовуватись чи ж скидатись за рамки підприємства. Коли ж вода використовується у певних виробничих цілях – вона стає брудною чи ж нагрівається, а це в свою чергу змінює її властивості, котрі вона мала спочатку. Внаслідок ось такого процесу воду стає неможливо використовувати в подальшому, тобто вона вже стає виробничо-стічною, або ж як її називають промисловим стоком.

Кожне промислове підприємство має склад інженерних мереж до яких входить і комплекс споруд, що містить водовідвідну систему. З їх допомогою здійснюється відведення використаної води з території даного підприємства (при умові, що їх подальше застосування неможливе тому, що не відповідає технічним умовам чи техніко-економічним показникам). Також у даному складі є споруди, сукупність пристроїв та механізмів для очищення води від різних домішок.

Мета роботи — огляд та розв'язання математичної моделі очистки води на каркасно-засипному фільтрі.

Відповідно до мети було поставлено такі **завдання дослідження**:

- ✓ дослідити основні методи очистки води за допомогою фільтрів;
- ✓ розглянути деякі моделі процесу очистки води на каркасно-засипних фільтрах;
- ✓ розглянути математичну модель процесу очистки води на каркасно-засипному фільтрі з використанням промивки.

Об'єктом дослідження є процес очищення води на каркасно-засипному фільтрі.

Предмет дослідження — математична модель процесу очистки води на каркасно-засипному фільтрі.

Методи дослідження: математичне моделювання процесу очистки води при фільтруванні, використання чисельного та аналітичного методів розв'язку окремих задач, використання спеціальних методик та різних підходів обробки вже існуючих дослідних даних при визначення констант та коефіцієнтів.

Обґрунтованість і вірогідність отриманих у роботі результатів власне забезпечується математичною строгістю постановок задач, застосуванням надійних і обґрунтованих числових методів їхнього розв'язування, фізичною несуперечністю отриманих числових результатів та їх узгодженням в окремих випадках із відомими у науковій літературі.

РОЗДІЛ І. ОЧИЩЕННЯ ВОДИ ФІЛЬТРУВАННЯМ

1.1 ФІЛЬТРУВАННЯ ВОДИ. ВИДИ ФІЛЬТРУВАННЯ

Ви напевно знаєте, що без води неможливе жодне існування чи прояв життя. Як говориться «Життя є лише там де й вода і навпаки, де є вода там є і життя». Лише наш організм складається з 90% рідини. Чиста вода – це гарантія нашого чудового самопочуття та здоров'я. Але через несучасні комунікації, екологічну забрудненість, водопровідна вода є непридатною для споживання. Найдієвішим методом очистити її від різноманітних домішок і забруднень є використання фільтру.

Для початку, щоб підготувати воду її звільняють від завислих речовин, або іншими словами це називається прояснення води – попередня обробка. Доочищення води за допомогою фільтру це вже як правило завершальний етап при двоступінчастій і багатоступінчастій технологічній схемі очистки. Якщо ж говорити про одноступінчасту схему водопідготовки, то там фільтрування використовується доволі рідко.

Так що ж таке фільтр? **Фільтр** – пристрій для очистки неоднорідної системи пропусканням через пористу (фільтрувальну) перегородку [12, ст.62]. Дану перегородку в основному утворюють з металевих перфорованих сіток, до складу якої входить нержавіюча сталь, алюміній, латунь чи ін.. Також це може бути перегородка тканинна, виготовлена з азбесту, бавовни, вовни чи інших. Функція перегородки – затримка домішок, котрі мають мінімальний гідравлічний опір, не схильні до набухання чи руйнування під час фільтрування, досить міцні за структурою та хімічно стійкі.

Серед основних типів фільтрування виділяють такі:

— *проціджування* – затримують частинки, які за розмірами менші діаметра пор перегородки;

— *плівкове фільтрування* – внаслідок якихось умов через певний час на поверхні матеріалу, який фільтрується утворюється плівка з завислими речовинами.

об'ємне фільтрування – завислі частинки, можуть затримуватись в товщі пористого елемента; таким чином, забрудненість фільтра може бути надто великою.

Грязеємність фільтра – маса забруднених частин, яку в змозі втримати завантаження фільтра [12, ст.63]. Якщо ж говорити більш точно, то грязеємність фільтра – це маса бруду, затриманого на одиниці площі фільтра за той період, коли відбувається перепад тиску у фільтрі від початкового до межового допустимого.

Якщо фільтрування здійснюється у фільтрах на основі тканинної чи керамічної основи з текстильних полотен фільтруючими елементами, то в такому випадку застосовують проціджування чи плівкове фільтрування; у дрібнозернистих насипних фільтрах – тільки плівкове фільтрування, а в крупнозернистих насипних – об'ємне.

1.2 ФІЗИЧНА СХЕМА ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРУВАННЯ

Вода, котра містить домішки, проходячи через зернисте завантаження прояснюється. Але тут виникає питання яка ж ефективність цього процесу, від чого ж вона залежить? Розмірковуючи можна дійти до висновку, що ефективність залежатиме саме від фізичних та хімічних властивостей домішок, завантаження котре фільтрується та певних гідродинамічних факторів. У деяких місцях, а саме у товщині самого завантаження спостерігається скупчення забруднень, внаслідок цього стають меншими вільні місця в ділянках пор, а гідравлічний опір завантаження збільшується. Завдяки такій реакції у завантаженні зростає втрата напору.

Процес фільтрування можна розділити на кілька етапів:

I. частинки, які знаходяться в потоці води переміщуються на поверхню фільтруючого матеріалу;

II. далі ці частинки закріплюються у зернах завантаження чи в *шпарках*, що знаходяться між ними;

III. на цьому етапі частинки, що прилипли відриваються та переходять назад у потік води.

Відокремлення домішок із води та фіксація їх на зернах завантаження здійснюється під дією явища адгезії. Осадок, котрий створюється на частинках завантаженого матеріалу є не досить міцної структури, тому під впливом гідродинамічних сил він може руйнуватися. Таким чином, окремі частинки раніше прилиплих частинок відокремлюються від зерен завантаження у виді маленьких шматочків, схожих на пластівці й переміщуються в наступні шари завантаження (такий процес називається *суфозією*), де знову затримуються в порових каналах. З вище сказано можна стверджувати, що процес фільтрації води це результат процесу адгезії та суфозії. Даний хід, а саме прояснення у кожному шарі завантаження буде виконуватися аж до тих пір, поки інтенсивність приставання речовин перевищуватиме інтенсивність їх відривання.

Дивлячись наскільки насичені верхні шари, процес фільтрації переходить на нижчі шари. Тобто та зона, котра фільтрується, ніби по сходинок спускається по напрямку потоку рухаючись від частини, де фільтруючий матеріал «нагодувався» забрудненням та там, де переважає процес суфозії, до місця свіжого завантаження.

Звичайно ж даний процес не вічний, настане час, коли повністю шар завантаження фільтра стане насиченим забрудненнями води, і тоді вже той ступінь води, котрий необхідний не забезпечуватиметься. Вже на виході завантаження концентрація суспензії розпочне зростати. Є таке поняття, як час захисної дії завантаження. Це час, на протязі якого відбувається освітлення води до вказаного ступеня. Коли процес досягне ось цього часу чи коли буде досягнуто певні граничні втрати напору, то очищаючий фільтр варто перевести в режим промивки, тоді завантаження промивається протилежним струменем води, а забруднюючі речовини скидаються в дренаж.

Щоб провести технологічні розрахунки фільтрів професор Даниїл Максимович Мінц використав умовну схему забруднення завантаження, подану нижче: у шарі фільтруючого матеріалу осад буде накопичуватися до тих пір, поки повністю не насичиться, потім він просто перестане затримувати забруднення. Коли роль першого шару зменшується, то значення інших шарів зростає, а товщина шару завантаження, котрий приймає участь у ході забруднень, посилюється. Зрештою це відбуватиметься, поки товщина діючого завантаження стає недостатньою і якість фільтрату значно гіршає.

На *рисунку 1* зображено процес очистки води за допомогою фільтра, згідно вище описаної схеми.

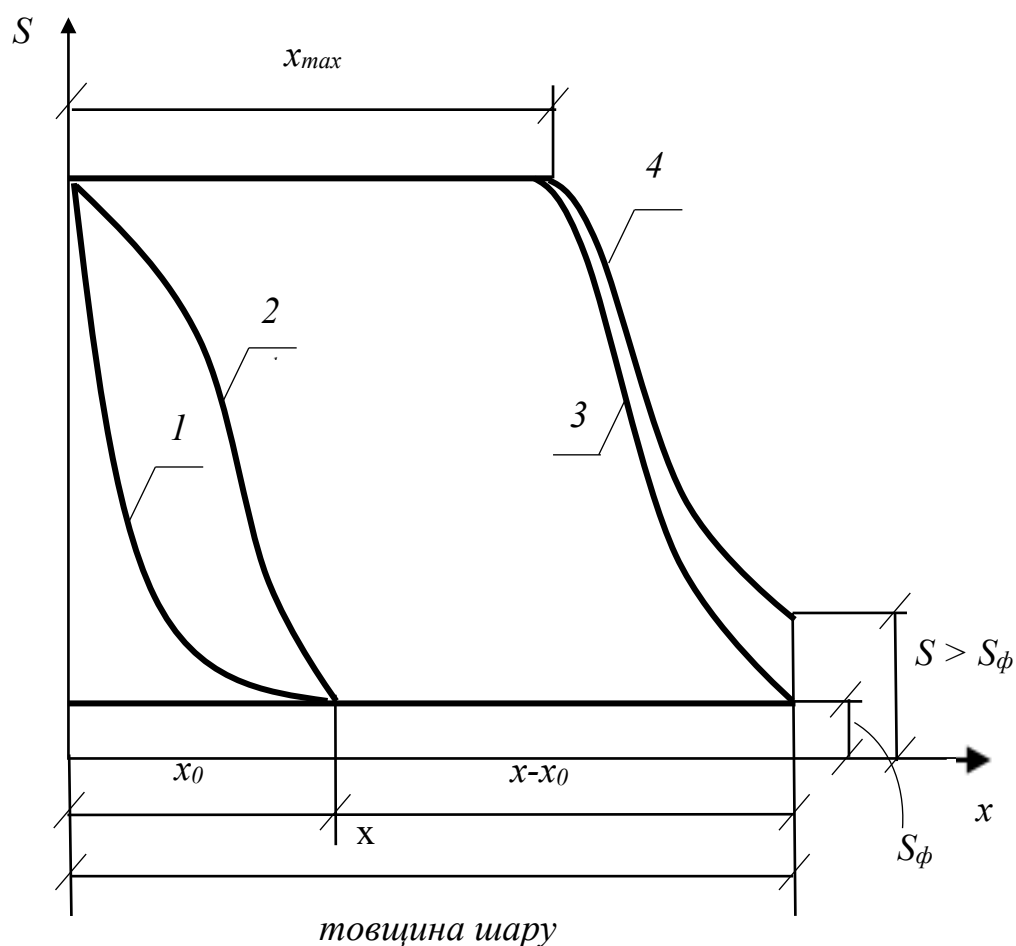


Рис. 1. Процес фільтрації води

На даному малюнку можна побачити, що кожна крива співвідноситься до певного моменту часу після запуску фільтра.

Розглянемо кожну криву окремо.

Крива 1 показує нам початок міцного процесу, а саме коли фільтрат потрібної якості фіксується на виході з ділянки, так звану найменшою захисною товщиною фільтрувального шару. За границею шару у воді містяться найбільш стійкі частинки, котрі прилипають значно гірше.

Крива 2 відповідає за момент виникнення місця межового насичення. З цієї миті ділянка починає зміщуватись у товщу завантаження.

Крива 3 показує тривалість захисного часу t_3 – тобто, коли фільтрат при виході з шару товщиною x не погіршується.

Далі йде *крива 4*, місце розташування котрої показує на скільки збільшився вміст суспензії у фільтраті з S_ϕ до $S > S_\phi$. Протягом захисного часу в повно-насиченому стані виражається шар товщиною x_{max} .

Дивлячись на рисунок, поданий нижче, можна побачити що фронт, котрий відповідає лініям 2–3 переміщається рівномірно, а самі лінії однакової форми.

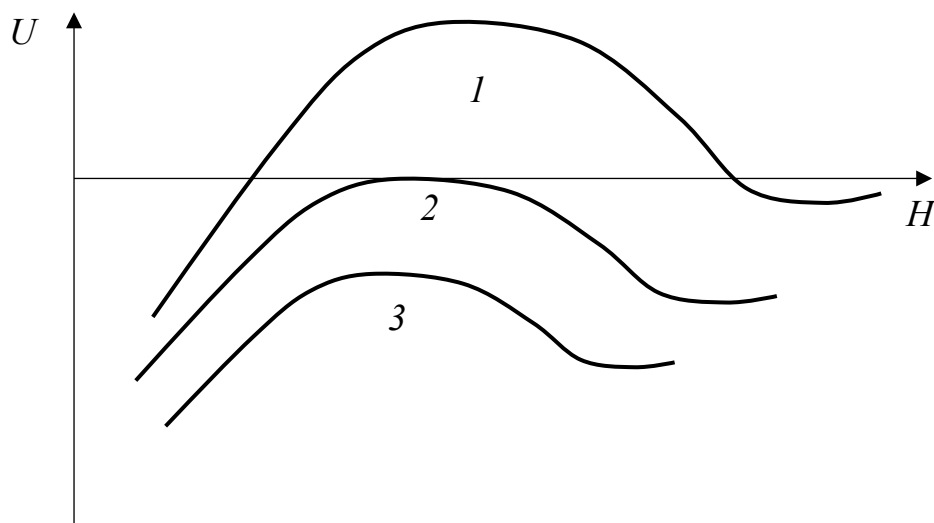


Рис. 2. Потенціальні криві, які характеризують енергію взаємодії частинок (U) у ліофобному золі у залежності від станів (H) між частинками: 1 – стійкий стан; 2 – порушення стійкості; 3 – швидка коагуляція.

Професор Вознесенський винайшов вираз, котрий відповідає для такої ж схеми й обчислює захисний час. Кажучи простіше, він знайшов формулу для обчислення часу де відбувається підвищення концентрації забруднення:

$$t_3 = Kx - t_0 \quad (1.1.1)$$

де K – коефіцієнт; x – товщина шару фільтрування; t_0 – час затримки дії фільтрування, протягом якого утворюється межа граничного насичення.

Вище подану формулу (1.1.1) запропонував професор Вознесенський щоб описати процес сорбції, але затверджена Даниїлом Мінцем так би мовити тимчасова схема роботи фільтра – дає здатність використовувати формулу (1.1.1), щоб описати процес фільтрації.

Є величезна кількість факторів, котрі мають вплив на очистку води від різноманітних домішок методом фільтрування. Сюди можна віднести якість фільтруючої води і фільтрату, густину шару, досить важливу роль відіграє темп фільтрації та характеристики осаду який утворюється в результаті фільтрування, а саме його здатність накопичуватись на зернах завантаження.

Зазначимо, що суттєвим є поєднання значень вказаних параметрів, бо лиш при такій умові буде забезпечуватись потрібний ступінь очистки води ну і тривалість часу, який в свою чергу тісно пов'язаний з міжпромивочним періодом роботи фільтру t_n .

Значення t_n беруться, враховуючи такі незалежні умови [12, ст. 66-67]:

✓ мусить виконуватися вимога, щодо допустимість чи неприпустимість погіршення якості фільтрату (тут власне береться до уваги коефіцієнт санітарної надійності);

✓ згідно деяких правил технічної експлуатації фільтрів вказується режим для їхньої промивки і відповідно час міжпромивного періоду. Наскільки забруднена вода при різних умовах залежить і від того, який темп фільтрації).

Варто наголосити, що графік, котрий показує цей взаємозв'язок дає максимум. Коли відбувається процес моделювання фільтрації, увага звертається на аналіз, у якому порівнюються залежності тривалого захисного часу і власне забрудненість завантаження. Найкраще було б, якби при швидкості, яка відноситься до значення t_3 , забрудненість була близькою до

максимуму. Якщо розподіл забруднень у завантаженому матеріалі буде рівномірніший, то грязеємність фільтрату буде значно більшою.

Є ряд факторів, котрі впливають на темп протікання води через фільтр: це і те, з чого зроблений фільтруючий матеріал; наскільки забруднена вода; її температура; яку товщину має шару, який фільтрує.

При чималих дослідженнях вчені встановили, що коли температура води піщаного фільтру змінюватиметься від 20 °С до 60 °С, то темп фільтрації можна збільшити аж в два рази, не змінюючи при цьому ефективність фільтрування.

Формула (1.1.2) для визначення темпу фільтрації піщаного фільтру v , м/год:

$$v = \frac{3600 \cdot c \cdot d^2 \cdot h}{l(0,7 + 0,03 \cdot T)} \quad (1.1.2)$$

де c – коефіцієнт близький до 40 в.о.; d – діаметр гранул піску, що фільтрує, м; l – товщина фільтруючого шару, м; h – втрата тиску при фільтрації, м; T – температура води, °С.

Є два режими фільтра: робочий та форсований. Форсований режим утворюється лиш тоді, коли включаються окремі секції для промивання чи ремонту фільтра. Саме при цьому режимі темп фільтрації зростає.

Здатність фільтру затримувати більш грубішу суспензію, залежить в більшості, від її ваги; а тоншу суспензію або ж колоїдні частинки – від сил, що діють поверхнево. Також чимале значення має заряд домішок тому, що колоїдні частки позитивного або ж негативного заряду не мають такої властивості, як об'єднання в конгломерати, зміцнюватись й перетворюватись в осад: заряд перешкоджає їх зближенню. Даний процес вирішується штучним коагулюванням. В більшості таке флокулювання здійснюється у відстійниках прояснювачах.

Є ще такий вид фільтрації, як плівковий. Його здебільшого використовують у звичайних очищаючих фільтрах. Об'ємне фільтрування в більшості здійснюється у двошарових фільтрах або ж у прояснювачах. На

нижній шар фільтру кладуть кварцовий пісок, з величиною зерен 0,65-0,75 мм, а верхній шар заповнюють антрацитом величина зерен якого 1,0-1,25 мм. Плівка не буде утворюватися на поверхні верхнього шару, там домішки заходять в його пори і залишаються на поверхні зерен. Завислі речовини, котрі пройшли верхній шар, осідають у нижньому шарі, де знаходиться пісок [12, ст. 68].

Коли здійснюється промивання фільтру, два шари, засипані піском та антрацитом змішуватись не будуть. Ви запитаете чому? Та це ж очевидно, адже густина антрациту аж в два рази менша за густина кварцового піску.

Матеріали, котрі фільтрують також повинні мати ряд певних вимог, до яких входять: невисока вартість, наявність фракційного складу, загальнодоступність, вони мусять бути міцні та хімічно стійкими до води та її домішок. Для того, щоб охарактеризувати зерна, котрі завантажуються, беруть до уваги значення змінних, таких як: ефективна величина зерен та власне коефіцієнт неоднорідності, котрий визначається формулою (1.1.3):

$$K_n = \frac{d_{80}}{d_{10}} \quad (1.1.3)$$

В основному цей коефіцієнт приймає значення від 1,5 до 2,0 в.о.

Критерій завантаження, котрий показує вміст цих частинок, дорівнює діаметру зерен, мм:

$$d_{екв} = 10 \sum \frac{p_i}{d_i} \quad (1.1.4)$$

де p_i – вміст завантаженої речовини, d_i – середній діаметр зерен.

Матеріал за допомогою якого здійснюється фільтрація – різний за своєю величиною. В більшості його класифікують як – дрібнозернистий (розміром частинок якого 0,4 мм), середньозернисті (від 0,4 до 0,8 мм) і грубозернисті (>0,8 мм).

Фільтрування може здійснюватися як природними так і штучними матеріалами. До природних матеріалів можна віднести такі, як: кварцовий

пісок, мрамур, керамічна крихта, дроблений антрацит, магнетит, доломіт тощо. Щодо штучних, то це можуть бути поліпропілен, полімери, полістирол, пінополіуретан, тощо.

Для того, щоб фільтруючий матеріал не потрапив за межі фільтру, використовують спеціальні дренажні системи це можуть бути: пористі труби, ковпачки тощо або ж як варіант кладуть фільтруючі матеріали на підтримуючі шари (гравій, щебінь тощо), розташовані один за одним у порядку збільшення крупності частинок [12, ст. 69-70].

Може бути й таке, що якість самого фільтрату в деякий момент погіршиться або ж збільшиться гідравлічний опір фільтру. То в такому випадку здійснюють промивання фільтру.

1.3 КЛАСИФІКАЦІЯ ФІЛЬТРІВ

Фільтр являє собою резервуар, в який завантажено зернистий матеріал, через який вода стікає зверху вниз або ж знизу вверх. Метою фільтру є очистка води та її прояснення. Таке фільтрування використовують для того, щоб видалити завислі домішки, але при умові, коли їх кількість не перевищує 100 мг/л – властивість двошарового фільтру і 50 мг/л – властивість одношарового фільтру.

Нижче подана класифікація фільтрів за низкою найважливіших ознак [6, ст. 70]:

- ✓ за швидкістю фільтрування:
 - повільні (0,1-0,3 м/год);
 - швидкі (5-12 м/год);
 - надшвидкі (36-100 м/год);
- ✓ тиск, під яким працюють фільтри:
 - відкриті чи безнапірні;
 - напірні;
 - вакуумні;
- ✓ за кількістю фільтруючих шарів:

- одношарові;
- двошарові;
- багатошарові;
- ✓ за технологічними умовами роботи:
 - з попереднім коагулюванням;
 - фільтри, яких коагулювання співпадає у часі з фільтруванням;
- ✓ за напрямком потоку:
 - з низхідним (зверху вниз) потоком;
 - з висхідним (знизу вгору) потоком;
 - з горизонтальним потоком;
- ✓ за величиною зерен фільтрувального матеріалу:
 - дрібнозернисті (0,2-0,4 мм);
 - середньозернисті (0,4-0,8 мм);
 - грубозернисті (0,8-1,8 мм);
- ✓ за видом фільтруючих матеріалів завантаження:
 - з інертними завантаженнями;
 - з активними (сорбентами, йоннообмінними завантаженнями);
- ✓ за густиною фільтрувального матеріалу завантаження:
 - з важким (густина матеріалу зерен більше густини води) – це піщані фільтри, антрацитові, керамзитові, гранодіоритових, з горілих порід, з туфів тощо;
 - з плаваючим завантаженням;
 - полістирол, пінопласт, шлак тощо;
- ✓ способом регенерації:
 - з водоповітряним промиванням;
 - з водяним промиванням.

На мою думку найбільш дієвими та навіть економічними є багатошарові фільтри. В даних фільтрах для більш ефективної фільтрації завантажений матеріал беруть різної густини, різних розмірів. Верхній шар

складається з великих частинок, але легких за вагою, а нижні шари засипають малесенькими частинками, але важкими.

Коли відбувається фільтрування речовини зверху вниз (низхідний напрям), то забруднені частинки більших розмірів затримуються в порах верхнього шару завантажених зерен, а решта маленьких, – у нижньому. В результаті, завантаження працює в повному об'ємі. Такі фільтри будуть найефективнішими, при затримці частинок розміром > 10 мкм.

1.4 ВИМОГИ СПОЖИВАЧІВ ДО ЯКОСТІ ВОДИ

Є певні вимоги до якості води, котрі залежать від її призначення: господарсько-питних цілей і харчової промисловості; сільськогосподарських цілей; охолодження; паросилового господарства; технологічних потреб у промисловості; заводнення нафтових пластів; користування в якості робочої рідини гідросистем машин [5, ст.84].

Вимоги до якості господарсько-питної води в Україні визначаються ДСанПіН 2.2.4-171-10 [13] «Гігієнічні вимоги до води питної, призначеної для споживання людиною» (див. табл. 1.1, 1.2 [12, ст. 13-14]). Якщо дотримуватись вимог даного документу, то вода стане нешкідливою, безпечною за складом та матиме високі органолептичні властивості. Ось для прикладу, всі ми знаємо, що вода містить залізо, але ж воно має міститися в невеликій кількості, яка його норма?

Гранично допустима концентрація, нехай для прикладу візьмемо залізо, у воді рівна $0,2$ мг/дм³. Саме склад води, певні властивості під час потрапляння її у водопровідну мережу показують наскільки вона є чистою та якісною.

Таблиця 1.1. Деякі санітарно-хімічні показники безпечності та якості питної води.

| № з/п | Найменування показників | Одиниця виміру | Нормативи для питної води | | |
|-----------------------------|-------------------------|----------------|---------------------------|--------------------------------|---|
| | | | водопровідної | з колодязів та каптажів джерел | фасованої, з пунктів розливу та бюветів |
| 1. Органолептичні показники | | | | | |

| | | | | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|--|--|--------------------------------------|---|
| 1 | Запах: при 20° С при 60° С | бали | до 2 до 2 | до 3 до 3 | 0 (до 2) до 1 (2) |
| 2 | Забарвленість | градуси | до 20 (35) | до 35 | до 10 (20) |
| 3 | Каламутність | нефелометрична одиниця каламутності (1 НОК=0,58 мг/куб.дм) | до 1,0 (3,5) до 2,6 (3,5) - для підземного вододжерела | до 3,5 | до 0,5 (1,0) |
| 4 | Смак та присмак | бали | до 2 | до 3 | 0 (до 2) |
| 2. Фізико-хімічні показники | | | | | |
| а) неорганічні компоненти | | | | | |
| 5 | Водневий показник | одиниці рН | 6,5-8,5 | 6,5-8,5 | 6,5-8,5 (понад 4,5) |
| 6 | Діоксид вуглецю | % | не визначається | не визначається | 0,2 - 0,3 – для слабогазованої 0,31 - 0,4 – для середньогазованої 0,41 – 0,6 – для сильногазованої |
| 7 | Залізо загальне | мг/куб. дм | до 0,2 (1,0) | до 1,0 | до 0,2 |
| 8 | Загальна жорсткість | ммоль/куб. дм | до 7,0 (10,0) | до 10,0 | до 7,0 |
| 9 | Загальна лужність | ммоль/куб. дм | не визначається | не визначається | до 6,5 |
| 10 | Йод | мкг/куб. дм | не визначається | не визначається | до 50 |
| Нормативи для питної води | | | | | |
| № з/п | Найменування показників | Одиниця виміру | водопровідної | з колодязів та каптажів джерел | фасованої, з пунктів розливу та б'юветів |

| | | | | деревинної маси | сировини невідбіленої | целюлози невідбіленої | | | |
|--|---------|------|-------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-------|------------|---------|
| Загальна твердість, моль/м ³ | 0,35 | 0,35 | 0,003 | - | 5 | 5 | 0,035 | 0,012–0,05 | <1,6 |
| Лужність моль/м ³ | - | - | - | - | - | - | 5,5 | - | - |
| Вміст, г/м ³ | | | | | | | | | |
| - оксиду силіцію (IV) | не норм | 0,7 | 0,2 | - | 50 | 50 | - | 50 | - |
| - міді | 0,5 | 0,05 | 0,005 | - | - | - | - | - | - |
| - мангану | - | - | - | - | - | - | 0,03 | 0,1 | 0,1 |
| - заліза | 1 | 0,05 | 0,01 | 0,3 | 1 | 0,1 | 0,05 | 0,1 | 0,1 |
| - кисню | 1 | 0,3 | 0,01 | - | - | - | - | - | - |
| - нітратів і нітритів | - | - | 0,02 | - | - | - | - | - | - |
| pH | 8–10 | 8-10 | 7–8,5 | 6–10 | 6–10 | 6–10 | 7-8 | 6,2–8,3 | 6,5–8,5 |
| Кольоровість, град | - | - | - | - | - | - | <5 | 20 | <25 |
| Окиснюваність, гО ₂ /м ³ | - | - | - | - | - | - | <4 | - | - |

Якщо говорити про воду, котру використовують для технологічних цілей, то залежно від призначення виділяють: воду, котру беруть для добування, очищення, гідротранспортування матеріалів, або ж для збільшення руд корисних копалин; воду, котра міститься у складі продуктів та зберігає власне свої властивості, чи ж може вступати у хімічну реакцію. Якщо говорити про воду з першого випадку, то її варто лише очистити від грубодисперсних завислих речовин, а якщо вести мову про

другий випадок, то вона має відповідати вимогам, які властиві для господарсько-питної води [5, ст. 87-88]. ГДК заліза має бути від 0,05 до 1,0 г/м³. Це залежить від того, в якій галузі вода буде використовуватися (табл. 1.3).

Воду, котру дають тваринам чи птицям, має бути якісною, тобто задовольняти вимогам, котрі необхідні в господарсько-питних цілях. Мінеральні речовини, що містить вода, яку застосовують в іригаційних системах, щоб поливати сільськогосподарські угіддя, не може бути більшою за 1,5 г/дм³. Така збільшена мінералізація дасть поштовх на зменшення врожаю.

Уявімо, що видобувають нафту. Через заводнення нафтових пластів та вода, якою користуються, ні в якому разі не має викликати закупорювання поверхні свердловини фільтра чи зменшувати пористість продуктивного пласта. Адже зменшення вільного місця в порах спричиняє виникненню у воді завислих речовин, вміст яких не більший за 1 мг/дм³, рідини нафти – 1 мг/дм³ і заліза – 0,2 мг/дм³.

Серед усіх несправностей транспортних, технологічних машин аж до 15 % припадає на несправність гідроприводів. Тут варто відмітити, що від 50% – 85% несправність гідроприводі взаємопов'язаних станом робочої рідини [2, ст. 55]. Важливим є вирішення питання щодо покращення якості вимірів робочої рідини (нехай для прикладу – водяної емульсії) при зменшенні її жорсткості та кількості іонів, котрі в ній розчинилися, що великою мірою дає вплив на обсяги корозії в гідросистемі [13, ст. 34-35]. Збільшення чистоти працюючої рідини гідросистеми від бруду дозволяє у 3-5 разів підвищити ресурс агрегатів гідросистем, та аж на 50-70 % знизити число несправностей у них [1, ст. 20-21].

РОЗДІЛ II. ДЕЯКІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ

2.1 ФІЛЬТРАЦІЯ ВОДИ НА ДВОШАРОВИХ КАРКАСНО- ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ, ВРАХОВУЮЧИ ДИФУЗІЮ

Пропоную розглянути нелінійний макет процесу очистки води на каркасно-засипних фільтрах враховуючи процес дифузії, котра створена на основі відомої моделі Мінца [3, 7, 15].

Для початку розглянемо випадок нескінченного фільтра. При цьому вихідна система рівнянь фільтрування, на котру накладаються певні умови матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \alpha \rho(x,t) + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} c|_{x=0} &= c_{bx}(t), \quad c|_{t=0} = c_{bx}(0) e^{-\frac{\beta x}{v}}, \quad \rho|_{t=0} = \rho_{bx}(x), \\ \rho|_{x=0} &= e^{-\alpha t} \left[\rho_{bx}(0) + \beta \int_0^t c_{bx}(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau \right], \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

де $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$, $c(x,t)$ – насиченість домішок у рідині, яка проходить фільтрування, $\rho(x,t)$ – концентрація осаду завантаженої речовини, $c_{bx}(x)$ – концентрація завислих частинок домішку при вході у фільтр; $\rho_{bx}(x)$ – розподіл осаду у завантаженні з самого початку; β – коефіцієнт домішкових частинок, котрі прилипли за одиницю часу, α – коефіцієнт відірваних за той самий час частинок осаду; v – темп фільтрації, D, D_* – коефіцієнт дифузії, де $D = b\varepsilon$, $D_* = b_*\varepsilon$, $0 < b \leq 1$, $0 < b_* \leq 1$, ε – параметр малості.

Перше рівняння, котре називається ще *рівнянням балансу*, власне описує закон збереження маси та бере до уваги явище поздовжньої дифузії. Інше ж рівняння є рівнянням кінетики, котре показує факт того, що темп росту густини

насичення завантаження осадам – $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ рівний різниці мас частинок домішки, котрі прилипли за одиницю часу – βc і відірваних частинок осаду, за той же самий час – $\alpha \rho$, а також дифузю утвореного осаду у завантаженій речовині.

Розв'язки вищеписаної системи (2.1.1) враховуючи умову (2.1.2) будемо знаходити за допомогою асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} c(x,t) &= c_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x,t) + R_1(x,t,\varepsilon), \\ \rho(x,t) &= \rho_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x,t) + R_2(x,t,\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

де R_1, R_2 – належні залишкові члени рядів (2.1.7), $c_i(x,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени постійної частини асимптотики, а точніше: c_0, ρ_0 – розв'язок даної виродженої задачі, $c_1, \dots, c_n, \rho_1, \dots, \rho_n$ – поправки, котрі враховують «вклад» дифузії поздовж фільтру.

Якщо ми підставимо (2.1.3) у систему (2.1.1) і використаємо процедуру прирівнювання для того, щоб знайти значення функцій c_i і ρ_i ($i=\overline{0,n}$), то ми власне перейдемо до ось таких задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + v \frac{\partial c_0}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_0 - \alpha \rho_0, \\ c_0|_{x=0} = c_{bx}(t), & c_0|_{t=0} = c_{bx}(0) e^{-\frac{\beta x}{v}}, \\ \rho_0|_{t=0} = \rho_{bx}(x), & \rho_0|_{x=0} = e^{-\alpha t} \left[\rho_{bx}(0) + \beta \int_0^t c_{bx}(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau \right], \end{cases} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} = \Psi_i, & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta c_i - \alpha \rho_i + \Phi_i, \\ c_i|_{x=0} = 0, & c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{x=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\text{де } \Psi_i(x,t) = \frac{\partial^2 c_{i-1}(x,y)}{\partial x^2}, \quad \Phi_i(x,t) = \frac{\partial^2 \rho_{i-1}(x,y)}{\partial x^2}, \quad i=1, 2, \dots$$

В процесі розв'язку задачі (2.1.4) ми прийдемо до розв'язування рівнянь [11]:

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_0}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad (2.1.6)$$

із додатковими умовами (2.1.2).

Використовуючи умови (2.1.6), (2.1.2) та застосовуючи метод Рімана [7] ми власне і знаходимо $c_0(x,t)$ та $\rho_0(x,t)$:

$$\begin{aligned} c_0(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(c_{bx}(0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} xt \right) + \frac{\alpha}{v} \int_0^x I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi)\tau \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \rho_{bx}(\xi) e^{\frac{\beta\xi}{v}} d\xi + \int_0^t e^{\alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} x(t-\eta) \right) \left[\frac{dc_{bx}(\eta)}{d\eta} + \alpha c_{bx}(\eta) \right] d\eta \right), \\ \rho_0(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(\rho_{bx}(0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} xt \right) + \frac{\beta}{v} \int_0^t e^{\alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (t-\eta) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times c_{bx}(\eta) d\eta + \int_0^x e^{\frac{\beta\xi}{v}} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi) \right) \left[\frac{d\rho_{bx}(\xi)}{d\xi} + \frac{\beta}{v} \rho_{bx}(\xi) \right] d\xi \right). \end{aligned}$$

Із системи (2.1.5), аналогічно до [8] отримаємо задачі, за допомогою яких знаходимо $c_i(x,t)$, $\rho_i(x,t)$ $i=1,2,\dots$

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_i}{\partial x} - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \alpha \Psi_i - \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_i}{\partial x} - \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\beta}{v} \Psi_i \right) = 0,$$

$$c_i|_{x=0} = 0, \quad c_i|_{t=0} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad \rho_i|_{x=0} = 0. \quad (2.1.7)$$

Виконуючи розв'язок задачі (2.1.7) методом Рімана, одержуємо рекурентні формули з допомогою яких ми визначатимемо $c_i(x,t)$ і $\rho_i(x,t)$:

$$\begin{aligned} c_i(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta\xi}{v} + \alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi)(t-\eta) \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial^3 c_{i-1}(\xi,\eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 c_{i-1}(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \rho_{i-1}(\xi,\eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) d\eta d\xi, \\ \rho_i(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta\xi}{v} + \alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi)(t-\eta) \right) \times \left(\frac{\partial^3 \rho_{i-1}(\xi,\eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial^2 c_{i-1}(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} \right) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Вважатимемо, що в нас фільтр має довжину L ($0 < x \leq L$), то в такому випадку ми надаємо ще одну умову швидкого відведення забруднень

$\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=L}=0, \frac{\partial \rho}{\partial x}\Big|_{x=L}=0$. Розв'язання функцій $c(x,t)$ і $\rho(x,t)$ задачі (2.1.1), (2.1.2) з

точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ будемо знаходити, використовуючи асимптотичні ряди:

$$c(x,t)=c_0(x,t)+\sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x,t)+\sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi,t)+R_1(x,t,\varepsilon), \quad (2.1.8)$$

$$\rho(x,t)=\rho_0(x,t)+\sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x,t)+\sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} P_i(\mu,t)+R_2(x,t,\varepsilon), \quad (2.1.9)$$

де R_1, R_2 є залишковими членами, $c_i(x,t), \rho_i(x,t)$ ($i=\overline{0, n}$) – члени регулярної частини асимптотики, крім цього: c_0, ρ_0 – розв'язок нашої відповідної задачі, c_i, ρ_i – поправки, котрі містять «вклад» дифузії поздовж фільтру, $\Pi_i(\xi,t), P_i(\mu,t)$ ($i=\overline{0, n+1}$) – функції типу пограншару, які містять вплив бічних основ забруднень в околі $x=L$, $\xi=(L-x)\cdot\varepsilon^{-1}$, $\mu=(L-x)\cdot\varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Розглянемо функції $\Pi=\sum_{i=0}^{n+1} \Pi_i \varepsilon^i$ та $P=\sum_{i=0}^{n+1} P_i \varepsilon^{i/2}$. Вони вказують на виключення неузгодженостей, які при певних умов внесені створеними регулярними частинами $c(x,t)=\sum_{i=0}^n c_i \varepsilon^i$, $\rho(x,t)=\sum_{i=0}^n \rho_i \varepsilon^i$ в околі точки $x=L$.

Іншими словами, мусять виконуватись ось такі умови: $(c+\Pi(c))\Big|_{x=L}=c(L,t)+O(\varepsilon^{n+1})$, $(\rho+P)\Big|_{x=L}=\rho(L,t)+O(\varepsilon^{n+1})$. А для того, щоб знайти ці функції, маємо задачі:

$$b\Pi_{i\xi\xi}+v\Pi_{i\xi}=I(i)P_{i-t}+I(i)\varepsilon^{i/2}P_{it}+I(i+1)P_{it}, \quad \Pi_i \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Pi_{i\xi}(L,t)=K_i(t);$$

$$b_*P_{i\mu\mu}-\alpha P_i-P_{it}=-\beta M(i)\Pi_{i-1}, \quad P_i \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad P_{i\mu}(L,t)=H_i(t);$$

$$I(a)=\begin{cases} 0, & a - \text{парне}, \\ 1, & a - \text{непарне}, \end{cases} \quad M(a)=\begin{cases} 1, & a - \text{парне}, \\ 0, & a - \text{непарне}, \end{cases}$$

$$K_i(t)=\begin{cases} 0, & i=n+1, \\ -c_{i\xi}(L,t), & i=0, \dots, n, \end{cases} \quad H_i(t)=\begin{cases} 0, & i=n+1, \\ -\rho_{i\mu}(L,t), & i=0, \dots, n. \end{cases}$$

Розв'язуються вище подані задачі, а це ніщо інше як звичайні диференціальні рівняння другого порядку та параболічні рівняння зі сталими коефіцієнтами, за допомогою числових методів. Результат подається у явному вигляді.

Для того, щоб знайти залишкові члени, маємо задачу з порядком малості $O(\varepsilon^{n+1})$:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + v \frac{\partial R_1(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - b\varepsilon \frac{\partial^2 R_1(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} = \varepsilon^{n+1} b \frac{\partial^2 c_n}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial t} - \beta R_1(x,t,\varepsilon) + \alpha R_2(x,t,\varepsilon) - b_*\varepsilon \frac{\partial^2 R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} = \varepsilon^{n+1} (\beta \Pi_{n+1} + b_* \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2}), \end{cases}$$

$$R_1(0,t,\varepsilon) = R_1(L,t,\varepsilon) = R_1(x,0,\varepsilon) = R_2(0,t,\varepsilon) = R_2(L,t,\varepsilon) = R_2(x,0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Вимагаючи гладкості початкової умови та граничної, а також коефіцієнтів системи рівнянь (2.1.1) та їх узгодженість в точці $x=L$, беручи до уваги принцип максимуму, в результаті ми дійдемо до істинності твердження:

$$R_i(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (i=1,2).$$

2.2 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ ВРАХОВУЮЧИ ЗВОРОТНІЙ ВПЛИВ

Тепер власне розглянемо модель процесу очистки води на каркасно-засипному фільтрі методом «дифузійного збурення», беручи за основу модель Мінца та занотуємо основні формули, котрі характеризують взаємовідношення концентрації забруднення води з фільтром.

Нині є досить цікавими питання підсумування моделі Мінца методом її дифузійного збурення для того, щоб детальніше дослідити нелінійні процеси очищення води на каркасно-засипних фільтрах враховуючи малу дифузію при запізненому часі. Зважаючи на це, пропоную розглянути наступну модель – сингулярно збурену задачу дифузії з великою кількістю частинок із запізненням:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(b(c(x,t-\tau)) \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \alpha \rho(x,t) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(b_*(\rho(x,t-\tau)) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} c(0,t) = c_*(t), \rho(0,t) = \rho_*(t), \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, 0 < x \leq L, \\ c(x,\tilde{t}) = c_0^0(x,\tilde{t}), \tau \leq \tilde{t} \leq 0, \rho(x,\tilde{t}) = \rho_0^0(x,\tilde{t}), \tau \leq \tilde{t} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

де $c_*(t)$ - концентрація домішок, що прилипли на початку входу в фільтр; $\rho_*(t)$ - насиченість осаду у завантаженні на початку входу в фільтр, b, b_* - коефіцієнти дифузії, ε - параметр малості, $\tau > 0$ - спізнення, L - довжина фільтра. Функції $c_*(t), \rho_*(t), c_0^0(x,\tilde{t}), \rho_0^0(x,\tilde{t})$ гладкі та узгоджені в крайніх точках області $G = \{(x,t); 0 < x < L, 0 < t < \infty\}$. Попри це, ми вважаємо що функції $c_0^0(x,\tilde{t}), \rho_0^0(x,\tilde{t})$, коли $t = -\tau$ та $t = 0$ задовольняють умови, які в свою чергу забезпечують гладкість розв'язку $c(x,t), \rho(x,t)$, котрий в подальшому знадобиться, при $t = \tau n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Задачу (2.2.1) - (2.2.2) із запізненням τ проміжках часу $[(n-1)\tau, n\tau], n = 1, 2, \dots$ зведемо до задачі без запізнення:

$$\begin{cases} \rho^{[n]}_t + v c^{[n]}_x = \varepsilon b_{nr} c^{[n]}_{xx} + \varepsilon c^{[n]}_x b_{nr} x, \rho^{[n]}_t = \beta c^{[n]} - \alpha \rho^{[n]} + \varepsilon b_{*nr} \rho^{[n]}_{xx} + \varepsilon \rho^{[n]}_x b_{*nr} x, \\ c^{[n]}(0,t) = c_*(t), c^{[n]}(x,t-\tau) = c^{[n-1]}(x,t-\tau), \\ b_{nr}(x,t) = b(c^{[n]}(x,t-\tau)) = b(c^{[n-1]}(x,t-\tau)), c^{[0]}(x,0) = c_0^0(x,0), \\ \rho^{[n]}(0,t) = \rho_*(t), \rho^{[n]}(x,t-\tau) = \rho^{[n-1]}(x,t-\tau), \\ b_{*nr}(x,t) = b_*(\rho^{[n]}(x,t-\tau)) = b_*(\rho^{[n-1]}(x,t-\tau)), \rho^{[0]}(x,0) = \rho_0^0(x,0). \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Рішення задачі (2.2.3) з точністю $O(\varepsilon^{m+1})$ шукатимемо у виді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned}
c^{[n]}(x,t) &= c_0^{[n]}(x,t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i c_i^{[n]}(x,t) + \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^i \Pi_i^{[n]}(\xi,t) + R_1^{[n]}(x,t,\varepsilon), \\
\rho^{[n]}(x,t) &= \rho_0^{[n]}(x,t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i \rho_i^{[n]}(x,t) + \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^{i/2} P_i^{[n]}(\mu,t) + R_2^{[n]}(x,t,\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{2.2.4}$$

де $c_i^{[n]}(x,t), \rho_i^{[n]}(x,t), (i = \overline{0,m})$ – члени строгих частин відповідних асимптотик, також $c_0^{[n]}(x,t), \rho_0^{[n]}(x,t)$ – розв’язок задачі (2.2.3), а $c_1^{[n]}(x,t), \dots, c_m^{[n]}(x,t), \rho_1^{[n]}(x,t), \rho_m^{[n]}(x,t)$ – поправки, які вважають на «вклад» дифузії вздовж фільтру, $\Pi_i^{[n]}(\xi,t), P_i^{[n]}(\mu,t)$ – функції типу пограншару, $\xi = (L-x)\varepsilon^{-1}, \mu = (L-x)\varepsilon^{-1/2}$ – відповідні строгі перетворення, $R_1^{[n]}(x,t,\varepsilon), R_2^{[n]}(x,t,\varepsilon)$ – залишкові члени.

Підставляючи (2.2.4) в (2.2.3) та виконуючи стандартні операції прирівнювання $c_i^{[n]}(x,t), \rho_i^{[n]}(x,t), (i = \overline{0,m})$ отримаємо такі задачі:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial c_0^{[n]}}{\partial x} = 0, \frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} = \beta c_0^{[n]} - \alpha \rho_0^{[n]}, \\
c_0^{[n]}(0,t) = c_*(t), c_0^{[n]}(x,0) = c_0^0(x,0), \\
\rho_0^{[n]}(0,t) = \rho_*(t), \rho_0^{[n]}(x,0) = \rho_0^0(x,0),
\end{cases}
\tag{2.2.5}$$

$$\begin{cases}
\frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial c_i^{[n]}}{\partial x} = \psi_i^{[n]}, \frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t} = \beta c_i^{[n]} - \alpha \rho_i^{[n]} + \Phi_i^{[n]}, \\
c_i^{[n]}(0,t) = 0, c_i^{[n]}(x,0) = 0, \rho_i^{[n]}(0,t) = 0, \rho_i^{[n]}(x,0) = 0,
\end{cases}
\tag{2.2.6}$$

де

$$\Psi_i^{[n]}(x,t) = c_{i-1xx}^{[n]} + c_{i-1x}^{[n]} b_{n\tau x}, \Phi_i^{[n]}(x,t) = \rho_{i-1xx}^{[n]} + \rho_{i-1x}^{[n]} b_{*n\tau x}, i = 1, 2, \dots$$

Розв’язання задачі (2.2.5) приводить нас до розв’язування ось таких рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_0^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_0^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_0^{[n]}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \rho_0^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

маючи додаткові умови:

$$\begin{aligned}c_0^{[n]}(0, t) &= c_*(t), c_0^{[n]}(x, 0) = c_0^0(x, 0), \\ \rho_0^{[n]}(0, t) &= \rho_*(t), \rho_0^{[n]}(x, 0) = \rho_0^0(x, 0).\end{aligned}$$

Застосовуючи метод Рімана, отримаємо:

$$\begin{aligned}c_0^{[n]}(x, t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(c_0^0(0, 0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} xt \right) + \int_0^x e^{\frac{\beta\xi}{v}} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi)t \right) \right) \times \\ &\times \left[\frac{dc_0^0(\xi, 0)}{d\xi} + \frac{\beta}{v} c_0^0(\xi, 0) \right] d\xi + \int_0^t e^{\alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} x(t-\eta) \right) \left[\frac{dc_*(\eta)}{d\eta} + \alpha c_*(\eta) \right] d\eta, \\ \rho_0^{[n]}(x, t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(\rho_*(0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} xt \right) + \int_0^t e^{\alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} x(t-\eta) \right) \right) \times \\ &\times \left[\frac{d\rho_*(\eta)}{d\eta} + \frac{\beta}{v} \rho_*(\eta) \right] d\eta + \int_0^x e^{\frac{\beta\xi}{v}} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi) \right) \left[\frac{d\rho_0^0(\xi, 0)}{d\xi} + \frac{\beta}{v} \rho_0^0(\xi, 0) \right] d\xi,\end{aligned}$$

де I_0 - функції Бесселя, котра є функцією першого роду нульового порядку при уявному аргументі.

В результаті одержимо задачі для знаходження $c_i^{[n]}(x, t), \rho_i^{[n]}(x, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_i^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_i^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_i^{[n]}}{\partial x} - \frac{1}{v} G_i^{[n]}(x, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \rho_i^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial x} - Q_i^{[n]}(x, t) &= 0, \\ c_i^{[n]}(0, t) &= 0, c_i^{[n]}(x, 0) = 0, \\ \rho_i^{[n]}(0, t) &= 0, \rho_i^{[n]}(x, 0) = 0,\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

$$\text{де } G_i^{[n]}(x, t) = \frac{\partial \Psi_i^{[n]}}{\partial t} + \alpha \Psi_i^{[n]} - \frac{\partial \Phi_i^{[n]}}{\partial t}, Q_i^{[n]}(x, t) = \frac{\partial \Phi_i^{[n]}}{\partial t} + \frac{\beta}{v} \Psi_i^{[n]}.$$

Знайшовши числові розв'язки рівності (2.2.8) та використовуючи метод Рімана, ми отримаємо конкретні формули для визначення $c_i^{[n]}(x, t), \rho_i^{[n]}(x, t)$:

$$c_i^{[n]}(x, t) = \frac{e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t}}{v} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta \xi}{v} + \alpha \eta} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{\alpha \beta}{v}} (x - \xi)(t - \eta) \right) G_i^{[n]}(x, t) d\eta d\xi,$$

$$\rho_i^{[n]}(x, t) = e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta \xi}{v} + \alpha \eta} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{\alpha \beta}{v}} (x - \xi)(t - \eta) \right) Q_i^{[n]}(x, t) d\eta d\xi.$$

Функції $\Pi^{[n]} = \sum_{i=0}^{m+1} \Pi_i^{[n]} \varepsilon^i, P^{[n]} = \sum_{i=0}^{m+1} P_i^{[n]} \varepsilon^{i/2}$ призначені для

виключення суперечностей, котрі добавлені побудованими регулярними частинами $c^{[n]} = \sum_{i=0}^m c_i^{[n]} \varepsilon^i, \rho^{[n]} = \sum_{i=0}^m \rho_i^{[n]} \varepsilon^i$ але лише в околі точки $x = L$, й

задовольняють виконання таких умов:

$$\frac{\partial}{\partial x} (c^{[n]} + \Pi^{[n]}) = O(\varepsilon^{m+1}), \frac{\partial}{\partial x} (\rho^{[n]} + P^{[n]}) = O(\varepsilon^{m+1}).$$

А для того, щоб знайти ці функції ми мусимо розв'язати задачі:

$$b_{n\tau} \Pi_{0\xi\xi}^{[n]} + v \Pi_{0\xi}^{[n]} = 0, \Pi_0^{[n]} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \Pi_{0\xi}^{[n]}(L, t) = K_0(t);$$

$$b_{n\tau} \Pi_{i\xi\xi}^{[n]} + v \Pi_{i\xi}^{[n]} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\xi^i}{i} b_{n\tau} \Pi_{i-1\xi\xi}^{[n]} + b_{n\tau\xi^i} \Pi_{i-1\xi}^{[n]} \right) + I(i) P_{i-1t}^{[n]} + \\ + \sum_{i=1}^m \left(\mu^i b_{*n\tau\mu^i} P_{i-1\mu\mu}^{[n]} + \mu^i b_{*n\tau\mu^{i+1}} P_{i-1\mu\mu}^{[n]} \right) + I(i) \varepsilon^{i/2} P_{i-1t}^{[n]} + I(i+1) P_{it}^{[n]}, \\ \Pi_i^{[n]} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \Pi_{i\xi}^{[n]}(L, t) = K_i(t), i = \overline{1, m};$$

$$b_{*n\tau} P_{i\mu\mu}^{[n]} - \alpha P_i^{[n]} - P_{it}^{[n]} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\mu^i}{i} b_{*n\tau} P_{i-1\mu\mu}^{[n]} + b_{*n\tau\mu^i} P_{i-1\mu}^{[n]} \right) - \beta M(i) \Pi_{i-1}^{[n]},$$

$$P_i^{[n]} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, P_{i\mu}^{[n]}(L, t) = H_i(t), i = \overline{0, m};$$

$$I(a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a - \text{парне,} \\ 1, & \text{якщо } a - \text{непарне,} \end{cases}$$

$$M(a) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a - \text{парне,} \\ 0, & \text{якщо } a - \text{непарне,} \end{cases}$$

$$K_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = m+1, \\ -c_{ix}^{[n]}(L, t), & \text{якщо } i = 0, \dots, m, \end{cases}$$

$$H_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = m+1, \\ -\rho_{i\mu}^{[n]}(L, t), & \text{якщо } i = 0, \dots, m. \end{cases}$$

Розв'язуються вище подані задачі, а це ніщо інше як звичайні диференціальні рівняння другого порядку та параболічні рівняння зі сталими коефіцієнтами, а результат подається у явному вигляді.

Для того, щоб знайти залишкові члени, розглянемо нижче подану задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_2^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial R_1^{[n]}}{\partial x} - \varepsilon b_{n\tau} \frac{\partial^2 R_1^{[n]}}{\partial x^2} - \varepsilon b_{n\tau x} \frac{\partial R_1^{[n]}}{\partial x} = \varepsilon^{m+1} g(x, t, \varepsilon), \\ \frac{\partial R_2^{[n]}}{\partial t} - \beta R_1^{[n]} + \alpha R_2^{[n]} - \varepsilon b_{*n\tau} \frac{\partial^2 R_2^{[n]}}{\partial x^2} - \varepsilon b_{*n\tau x} \frac{\partial R_2^{[n]}}{\partial x} = \varepsilon^{m+1} g_1(x, t, \varepsilon), \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} g(x, t, \varepsilon) = & b_{n\tau} \frac{\partial^2 c_m^{[n]}}{\partial x^2} + \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi}}{2} \frac{\partial^2 \Pi_m^{[n]}}{\partial \xi^2} - \xi b_{n\tau\xi} \frac{\partial^2 \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi}}{2} \frac{\partial^2 \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi^2} + \\ & + \varepsilon^2 b_{n\tau x} \frac{\partial c_m^{[n]}}{\partial x} - \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi}}{2} \frac{\partial \Pi_{m-1}^{[n]}}{\partial \xi} + \xi b_{n\tau\xi\xi} \frac{\partial \Pi_m^{[n]}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi\xi}}{2} \frac{\partial \Pi_m^{[n]}}{\partial \xi} - \\ & - b_{n\tau\xi} \frac{\partial \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi} + \varepsilon \xi b_{n\tau\xi\xi} \frac{\partial \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi\xi}}{2} \frac{\partial \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(x, t, \varepsilon) = & \beta \Pi_{m+1}^{[n]} + b_{*n\tau} \frac{\partial^2 \rho_m^{[n]}}{\partial x^2} + b_{*n\tau} \frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu^2} - \varepsilon^{\frac{4}{5}} \mu b_{*n\tau\mu} \frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu^2} + \varepsilon \frac{\mu^2 b_{*n\tau\mu\mu}}{2} \frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu^2} + \\ & + b_{*n\tau x} \frac{\partial \rho_m^{[n]}}{\partial x} - \frac{\mu^2 b_{n\tau\mu\mu}}{2} \frac{\partial P_m^{[n]}}{\partial \mu} + b_{*n\tau\mu} \frac{\partial P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu} - \varepsilon^{\frac{5}{4}} \mu b_{*n\mu\mu} \frac{\partial P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu} + \varepsilon \frac{\mu^2 b_{*n\tau\mu\mu}}{2} \frac{\partial P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu}, \end{aligned}$$

$$R_1^{[n]}(0, t, \varepsilon) = R_1^{[n]}(L, t, \varepsilon) = R_1^{[n]}(x, 0, \varepsilon) = R_2^{[n]}(0, t, \varepsilon) = R_2^{[n]}(L, t, \varepsilon) = R_2^{[n]}(x, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}).$$

Вимагаючи достатньої точності початкової та граничних умов. Також звертаючи увагу на коефіцієнти системи рівнянь (2.2.1) та їх чіткості у точці $x = L$, на основі принципу максимуму ми власне приходимо до правильності

такого твердження:

$$R_i^{[n]}(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}) \quad (i = 1, 2).$$

Давайте тепер наведемо результати наших розрахунків за формулами (2.2.3), при $\rho_0(x) \equiv 0$, $c_0(t) = e^{-t}$, $\beta = \frac{1}{36} c^{-1}$, $a = \frac{1}{18000} c^{-1}$, $v = \frac{1}{36} \text{ мс}^{-1}$.

На рис.3 показано розподіли насиченостей $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ у різний момент часу, коли $t_0 = 0, 1, 2, 3$ (при $\varepsilon = 0$ – це криві 1a - 4a, а криві 1b – 4b при $\varepsilon = 0,05$).

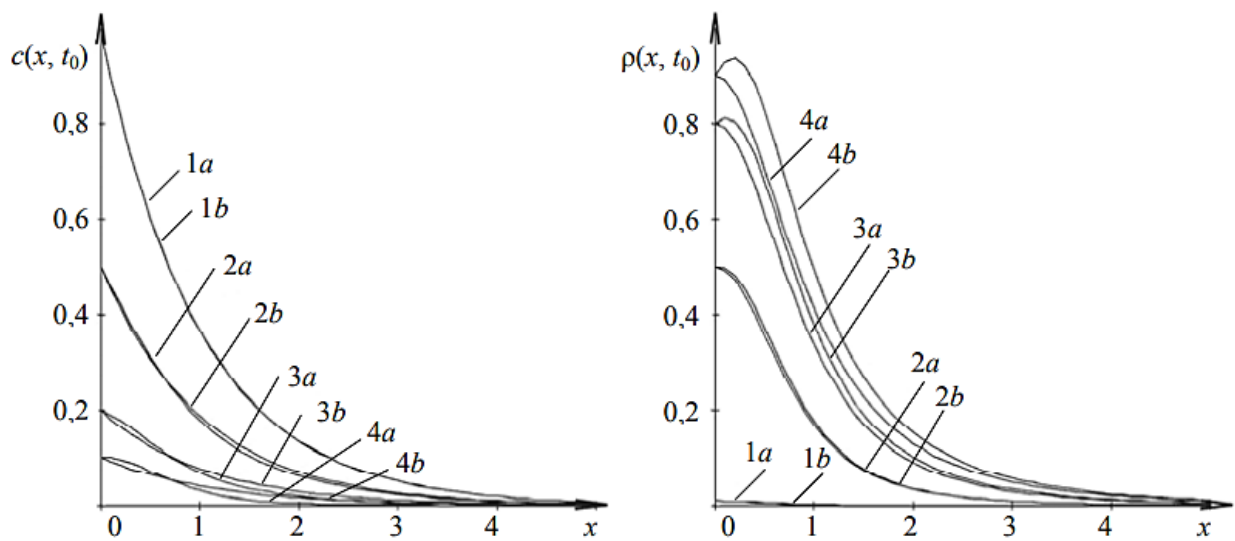


Рис.3. Поділ $c(x, t_0)$ – a і $\rho(x, t_0)$ – b - у різні миті часу, коли $\varepsilon = 0,05$.

Поділ насиченості $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ при різних значеннях коефіцієнта дифузії можна побачити на рис.4: $\varepsilon = 0,1$ - криві 1; $\varepsilon = 0,05$ - криві 2; $\varepsilon = 0,03$ - криві 3; $\varepsilon = 0,01$ - криві 4.

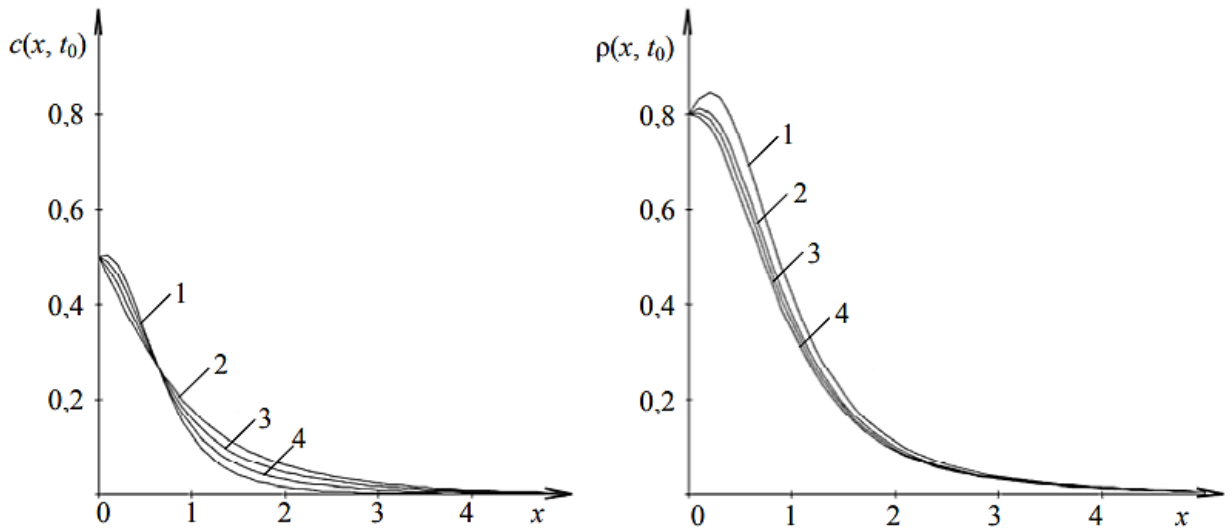


Рис.4 Поділ $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ у різні миті часу, при різних ε .

Рисунок 5 демонструє нам поділ концентрацій $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ поздовж фільтра у різний момент часу при:

- $t_0 = 0$, 1 - криві 1;
- $t_0 = 1$ - криві 2;
- $t_0 = 2$ - криві 3;
- $t_0 = 3$ - криві 4.

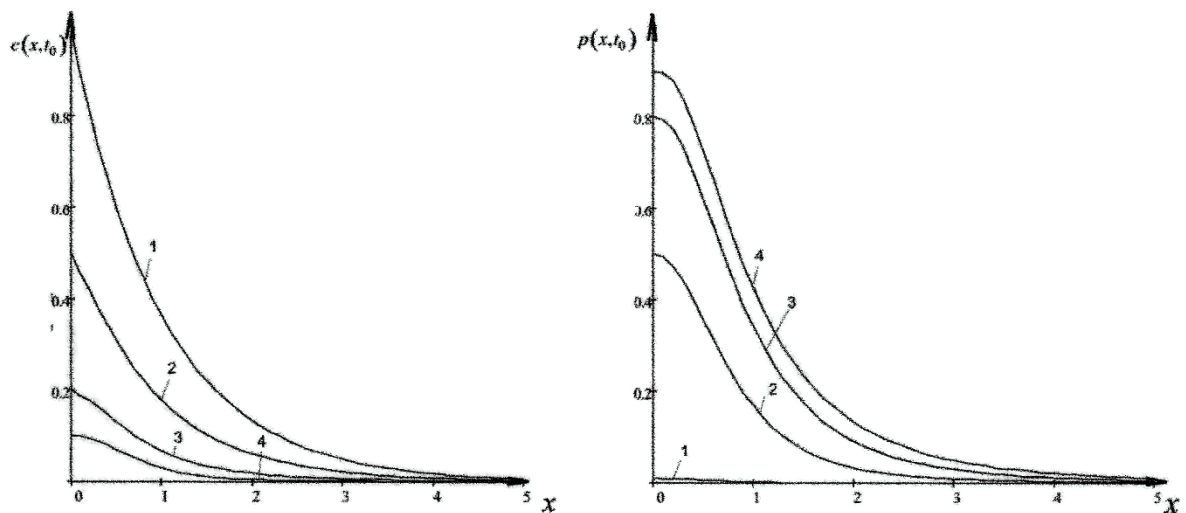


Рис.5 Розподіл $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ в різні миті часу.

На рисунку 6 ми можемо побачити сам поділ концентрацій $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ у часі t при:

$x_0 = 0,1$ - криві 1;

$x_0 = 1$ - криві 2;

$x_0 = 1,5$ - криві 3;

$x_0 = 2$ - криві 4;

$x_0 = 2,5$ - криві 5;

$x_0 = 3$ - криві 6.

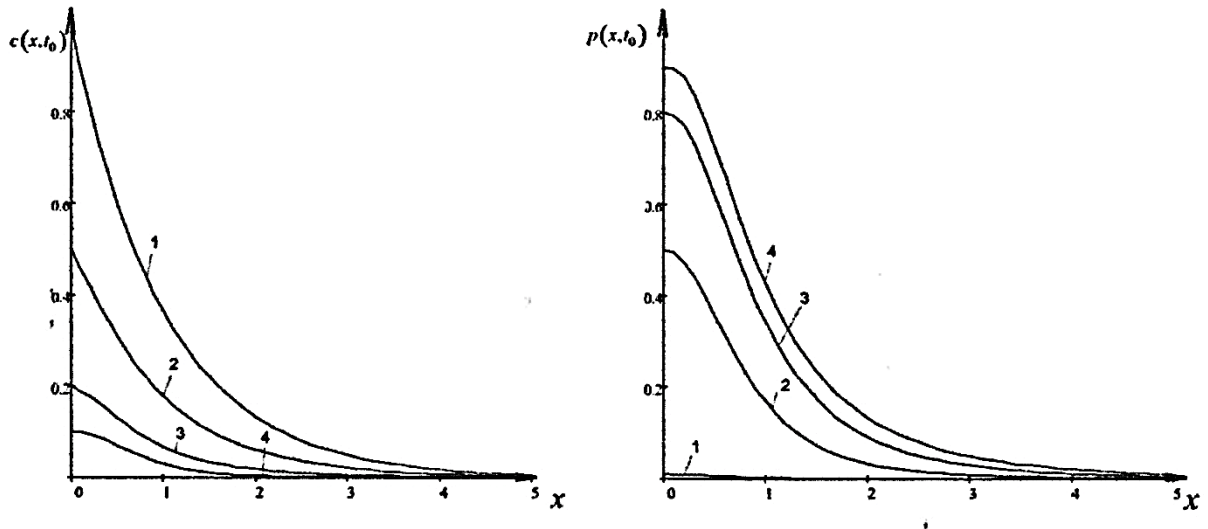


Рис.6 Поділ $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ в неоднакових точках x .

Ось така вище розглянута методика висвітлення уже для нас відомої моделі Мінца методом переходу до задачі (2.2.1), (2.2.2) так би мовити дозволяє зберегти строгість відомих законів, котрі дають нам чіткий опис явища руху рідини в середовищі з порами. Якщо ж будувати її розв'язок, не починаючи «спочатку», доповнювати відомі розв'язки різними поправками. Варто відмітити, що вище розробленим метод можна користуватися і при розв'язуванні відповідних задач за умови $\tau = 0$, та у випадках більш складної будови такого коефіцієнта дифузії. Для прикладу якщо

$$D = \varepsilon (1 + \mu h(c(x, y, t))), \text{ чи } D = \varepsilon \left(1 + \mu \int_0^t c(x, y, \bar{t}) d\bar{t} \right), \text{ чи } D = \varepsilon \left(1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i a_i c^i \right)$$

де μ, a_i - будь-які дійсні числа.

РОЗДІЛ III. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПЕРВИННОЇ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ

3.1 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ВОДИ ІЗ ЗАВИСЛИМИ ЧАСТИНКАМИ БЕЗ УРАХУВАННЯ ДИФУЗІЇ

Насправді є досить величезна кількість досліджень, котрі присвячені питанню фільтрування мало насичених суспензій активного мулу, проте на сьогоднішній день механізм фільтрування активного мулу та деструкції органічних речовин є не до кінця розкритим. Напевно це пояснюється тим, що досить важко відразу ж знайти ряд параметрів. Для прикладу, питомий об'єм мулу, котрий є у фільтруючому завантаженні чи нехай швидкість окислення органічних речовин та інші. Через те, що ось цих даних немає, ми не можемо повноцінно використовувати можливості, котрі наявні у фільтрувальному методі доочищення.

Чи не мала кількість вчених (Мінц Д.М., Веригін М.М. та інші) працювали над вивченням цікавого питання, а саме моделювання процесу доочистки води при фільтрації крізь двошарове завантаження [8, 14, 20]. Але є деякі чи не менш важливі складові методу очищення збурених вод у їхніх моделях, котрі залишилися неврахованими. Якщо говорити більш докладно, то їхні моделі не числять втрати концентрації забруднень водою, не досить ідеально побудований зв'язок між числом відкладень, котрі назбиралися у фільтрі та завислих речовин, які випадають із забрудненої рідини. Пропоную переглянути нижче наведену задачу, котра описує процес очистки води [10] саме за допомогою двошарового каркасно-засипного фільтра з урахуванням вище поставлених запитів:

$$v(x) \cdot c_x + \gamma(x) \cdot F(x, t) + c_t = 0, \quad (3.1.1)$$

$$u_t - \gamma(x) \cdot F(x, t) = 0, \quad (3.1.2)$$

$$F(x,t)=\begin{cases} c(x,t), \text{ якщо } c(x,t)<c_*^*-u(x,t), \\ c_*^*-u(x,t), \text{ якщо } c(x,t)\geq c_*^*-u(x,t), \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$$c|_{x=x_*}=c_*(t), \quad c|_{t=0}=c_0^0(x), \quad u|_{t=0}=0, \quad (3.1.4)$$

де $0 < x_* \leq x \leq x^* < \infty$, $l = x^* - x_*$ – висота фільтру, $0 < t < \infty$, $c(x,t)$ – насиченість речовини котра забруднюється у воді, що фільтрується, $u(x,t)$ – концентрація забруднення, яка зостається у фільтрі, $\gamma(x)$ – функція швидкості масообміну (дана функція описує темп масообміну в гравійному та гравійно-піщаному шарах, c_*^* – концентрація граничного насичення, c_* , c_0^0 – функції достатньої гладкості, котрі чітко визначені між собою в точці $(x_*, 0)$

Функція $F(x,y)$ відповідає за встановлення зв'язку між концентраціями $c(x,t)$ та $u(x,t)$. Попри це все, врахувавши ще кілька додаткових умов $c_*^* = u(x^*, t)$, $c_{**} > c(x^*, t)$ ми власне зможемо визначити час повного забруднення фільтру, а також час роботи цього ж фільтру, протягом якого концентрація забруднень вже при виході з нього не перевищуватиме граничної c_{**} .

Розв'язок вище поставленої нами задачі (3.1.1) – (3.1.4) приведемо до розв'язання $m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) задач відповідно на інтервалах часу $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$, $n = \overline{0, m}$ (де m – стала, котра знаходиться у ході розв'язування задачі в залежності від виконання певних додаткових умов), τ – стала, вибір котрої залежить від задалегідь вказаної точності розв'язку:

$$v(x) \cdot c_{nx} + \gamma(x) \cdot F_n(x,t) + c_{nt} = 0, \quad u_{nt} - \gamma(x) \cdot F_n(x,t) = 0,$$

$$F_n(x,t) = \begin{cases} c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau), \text{ якщо } c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) < c_*^* - u(x, t - \tau), \\ c_*^* - u(x, t - \tau), \text{ якщо } c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) \geq c_*^* - u(x, t - \tau), \end{cases}$$

$$c|_{x=x_*} = c_*(t), \quad c|_{t=n\tau} = \begin{cases} c_0^0(x), \text{ якщо } n=0, \\ c_{n-1}(x, n\tau), \text{ якщо } n>0, \end{cases}$$

$$u|_{t=n\tau} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n=0, \\ u_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases}$$

де $f^{-1}(x)$ – є функцією, до того ж оберненою до функції $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$.

Результатом розв'язання є:

$$u_n(x, t) = \gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x, s) ds + u_{n-1}(x, (n-1)\tau),$$

$$c_n(x, t) = \begin{cases} -\gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x, s) ds + c_{n-1}(f^{-1}(f(x) - t), (n-1)\tau), & t \leq f(x), \\ -\int_{x_*}^x \frac{\gamma(s) F_n(x, s)}{v(s)} ds + c_*(t - f(x)), & t > f(x). \end{cases}$$

Тепер пропоную розглянути власне покрокове розв'язання описаної вище задачі:

1. Перше, що ми робимо – це задаємо умови $c_*(t)$ – граничну та $c_0^0(x)$ – початкову, також функцію темпу масообміну, c_*^* – концентрацію граничного насичення, константу ε , далі вказуємо кількість вузлів розбиття – l відрізка $[x_*, x^*]$. І врешті решт виконуємо присвоєння: $m := 0$, де m (лічильник).

2. Тепер, користуючись формулою $x_i = x_* + (x^* - x_*)i/l$, $i = \overline{0, l}$ ми знаходимо вузли розбиття. Зафіксуємо сталу $\tau = f(x_1 - x_0)$, $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$.

3. Користуючись формулами, поданими нижче, шукаємо розв'язок нашої задачі у конкретний час $n\tau$, $n=1$:

$$F_1(x) = \begin{cases} c_0^0(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } c_0^0(x - f^{-1}(\tau)) < c_*^* - u(x, 0), \\ c_*^* - u(x, 0), & \text{якщо } c_0^0(x - f^{-1}(\tau)) \geq c_*^* - u(x, 0), \end{cases}$$

$$u_1(x_i, \tau) = \gamma(x_i) F_1(x_i) \tau,$$

$$c_1(x_i, \tau) = \begin{cases} -\gamma(x) F_1(x_i) \tau + c_0^0(f^{-1}(f(x_i) - \tau)), & i > 0, \\ c_*(\tau), & i = 0. \end{cases}$$

4. Далі, дивимось чи виконується наша умова $c_1(x^*, \tau) \geq c_*^*$. При позитивній відповіді ми «топаємо» до пункту 7, якщо ж умова не виконується – здійснюємо присвоєння: $n := n+1$.

5. Користуючись формулами, поданими нижче, шукаємо розв'язок нашої задачі у конкретний час $n\tau$:

$$F_n(x) = \begin{cases} c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)) < c_*^* - u(x, (n-1)\tau), \\ c_*^* - u(x, (n-1)\tau), & \text{якщо } c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)) \geq c_*^* - u(x, (n-1)\tau), \end{cases}$$

$$u_n(x_i, n\tau) = \gamma(x_i) F_n(x_i) \tau + u_{n-1}(x_i, (n-1)\tau),$$

$$c_n(x_i, n\tau) = \begin{cases} -\gamma(x) F_n(x_i) \tau + c_{n-1}(f^{-1}(f(x_i) - \tau), (n-1)\tau), & i > 0, \\ c_*(n\tau), & i = 0. \end{cases}$$

6. Відправляємося до пункту 4.

7. Якщо ж $m=0$, то робимо присвоєння $R_1 := n\tau$ (час ефективної роботи фільтру), а також здійснюємо присвоєння $m := m+1$, $l := l+1$, та рухаємось до пункту 2. Якщо ж у нас $m \neq 0$, то робимо присвоєння $R_2 := n\tau$.

8. Коли $|R_1 - R_2| < \varepsilon$, то R_2 – час ефективної роботи фільтру, але якщо $|R_1 - R_2| > \varepsilon$ – здійснюємо присвоєння: $R_1 := R_2$, $l := l+1$, та рухаємось до пункту 2.

Звернемо увагу на те, що під час виконання вище описаного алгоритму ми дістаємо розподіл забруднень у воді, котра фільтрується у моменти часу $n\tau$, але й також ми маємо розподіл забруднень, котрі в свою чергу утворюють осад у фільтрі.

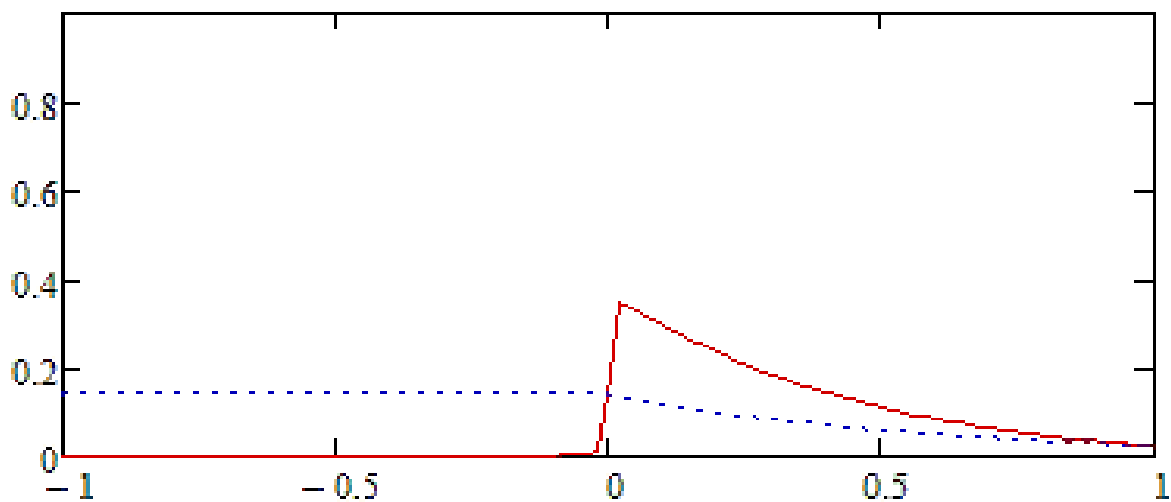
Результати обчислювальних експериментів.

Ось такий вище описаний алгоритм покрокового розв'язання поставленої нами задачі був втілений у програмі *MathCAD*.

Результати розрахунків, вище описаного алгоритму, одержано при $x_* = -1$, $x^* = 1$, де $c_*^* = 0.8$ концентрація граничного насичення, $\tau = f(x_1)$, в точках $x_i = x_* + ((x^* - x_*) \cdot i) / n$, $i = \overline{0, n}$, $n \in N$.

А тепер математична модель! Так саме вона! Модель до якої ми йшли, зображена на рисунку 7. Вона висвітлює процес доочистки води за допомогою фільтра з двошаровим завантаженням при вхідних даних: $c_{**} = 0.05$ та функціями, котрі є в міру гладкі й взаємозв'язані між собою: $c_0^0(x) = \text{arcctg}(400(x+1)) / 7\pi$, $c_*(t) = \text{arcctg}(-400t) / 7\pi$; $v(x) = 0.4$, $n = 100$ – число точок розбиття та функції темпу масообміну – $\gamma(x) = 1/3 + \text{arcctg}(400x) / (3\pi)$ у моменти часу $t_1 = 12.93$, $t_2 = 22.41$, $t_3 = 38.00$.

Голуба крива вказує нам на потік води що забруднилася, а червона крива – на забруднення фільтру.



a)

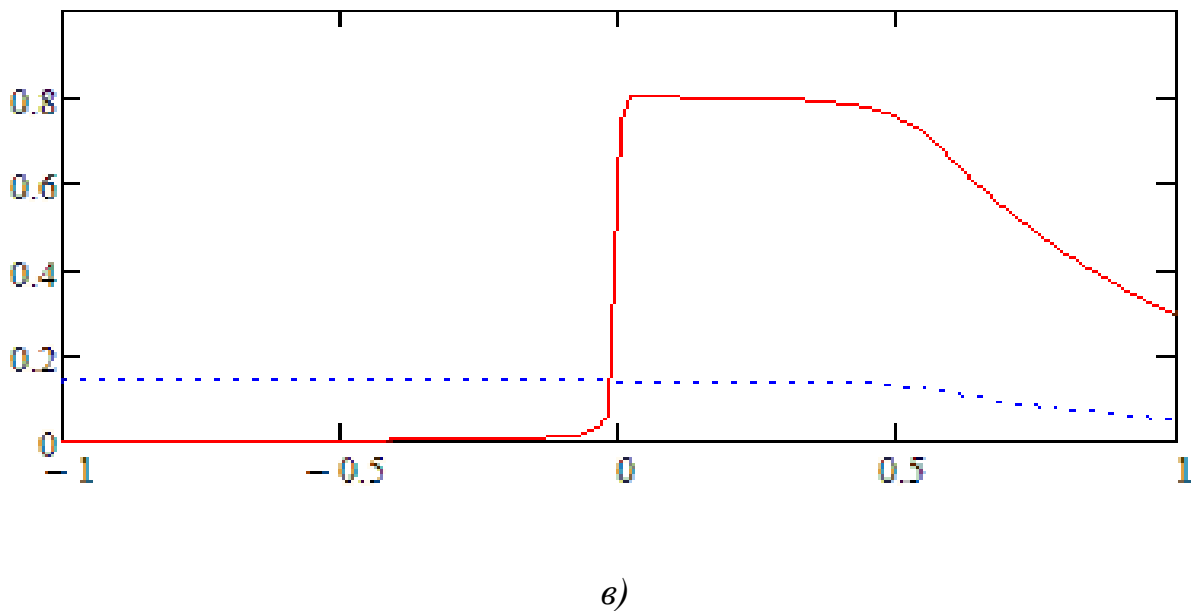
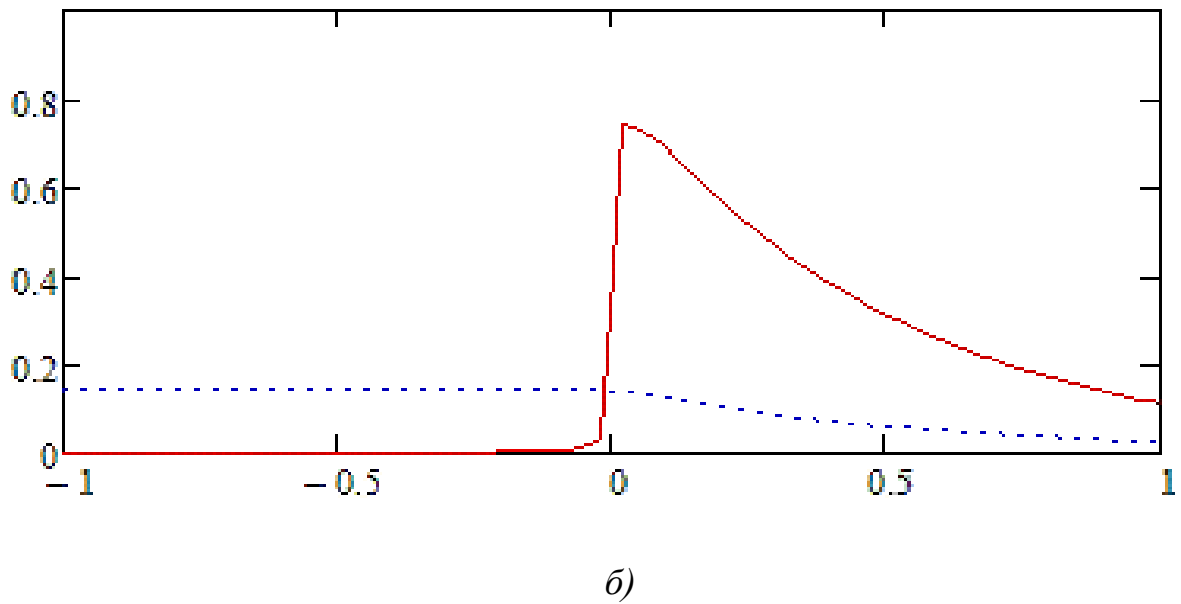


Рис.7. Розподіл концентрацій забрудненості у завантаженій речовині фільтру й самої рідини фільтрування.

А на рисунку 8 показано поділ насиченості розчиненої речовини у воді (криві 1–5) та забруднення у фільтрі (криві 1*–5*) у моменти $t_1 = 5.9$, $t_2 = 7.4$, $t_3 = 9.1$, $t_4 = 11.3$, $t_5 = 13.8$, коли $c_{**} = 0.1$, $c_0^0(x) = \text{arcctg}(400(x+1))/(2\pi)$, $c_*(t) = \text{arcctg}(-400t)/(2\pi)$ (тривалість активної дії фільтра $t_p = 13.8$).

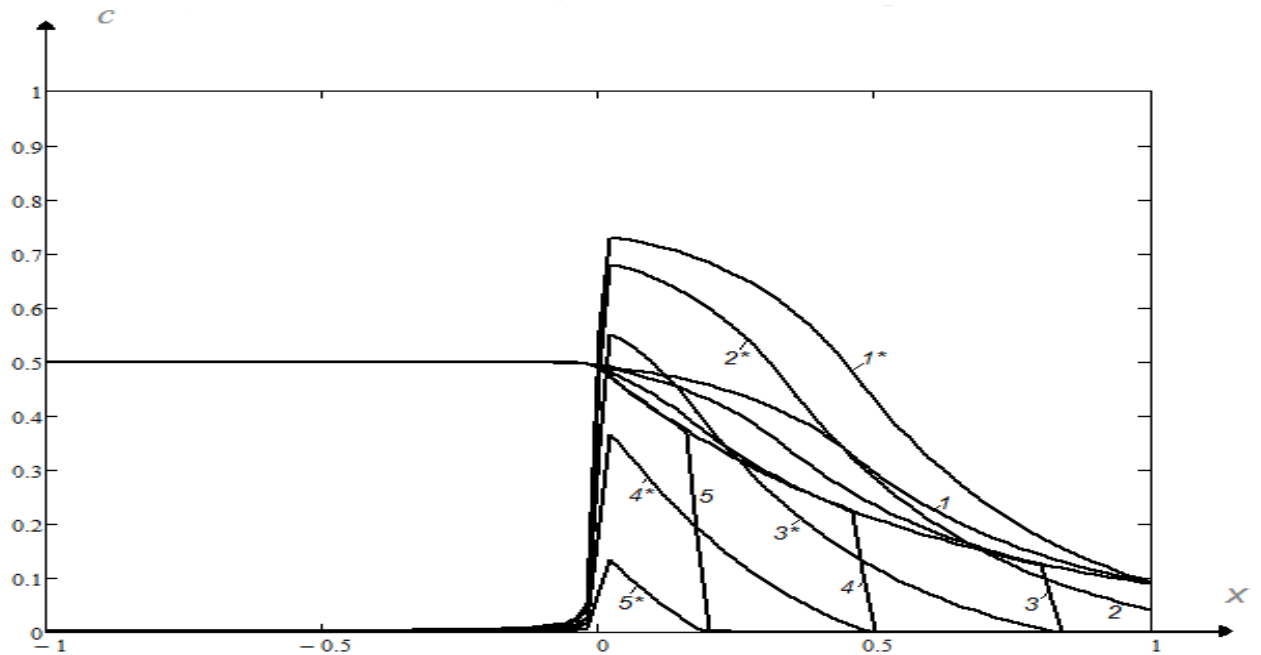


Рис.8. Забрудненість фільтру.

На рисунку 9 зображена крива, що показує залежність висоти фільтру від тривалості його ефективної роботи при $c_{**}=0.02$, $c_0^0(x)=\text{arcctg}(500 \cdot (x+1))/9\pi$, $c_*(t)=\text{arcctg}(-500t)/9\pi$, $v(x)=0.3$, $n=110$, $\gamma(x)=2/5+\text{arctg}(500x) \cdot 4/(5\pi)$. Поділ насиченості розчинної речовини у воді та забруднення у фільтрі в моменти часу $t_1=3.93$, $t_2=6.66$, $t_3=7.87$, $t_4=9.39$, $t_5=11.75$ коли $c_{**}=0.1$, $c_0^0(x)=\text{arcctg}(500 \cdot (x+1))/2\pi$, $c_*(t)=\text{arcctg}(-500t)/2\pi$ (тривалість роботи фільтру $t_p=11.75$) зображено на рисунку 10 (криві відповідно 1–5 та 1*–5*).

Поділ насиченості розчинної речовини у воді та забруднення, котре залишається у фільтрі (криві 1*–3* та 1–3) відповідно при $\gamma_1(x)=2/5+\text{arctg}(500x) \cdot 4/(5\pi)$, $\gamma_2(x)=1/5+\text{arctg}(500x) \cdot 2/(5\pi)$, $\gamma_3(x)=1/14+\text{arctg}(500x) \cdot 1/(7\pi)$ у момент, коли $t=4.966$ (а) і $t=3.733$ (б) та $v(x)=0.4$, $n=150$ зображено на рис.11.

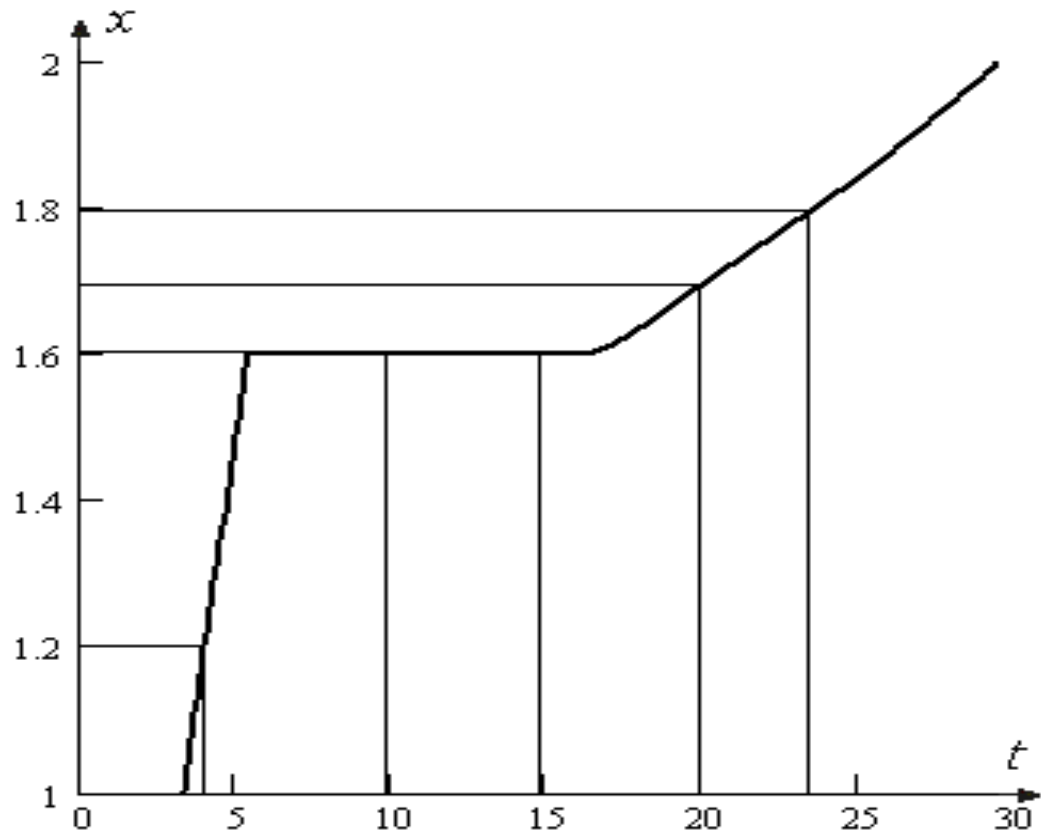


Рис.9. Крива взаємозв'язку висоти фільтру від тривалості його ефективної роботи.

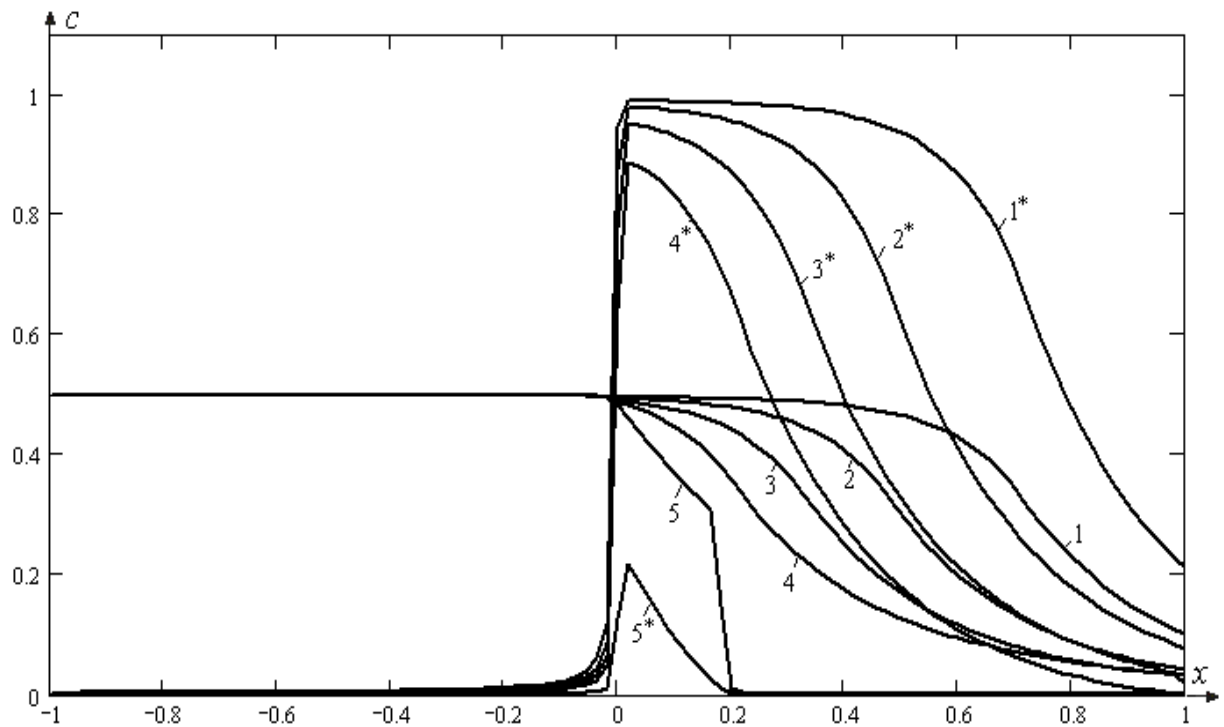


Рис.10. Забрудненість фільтру.

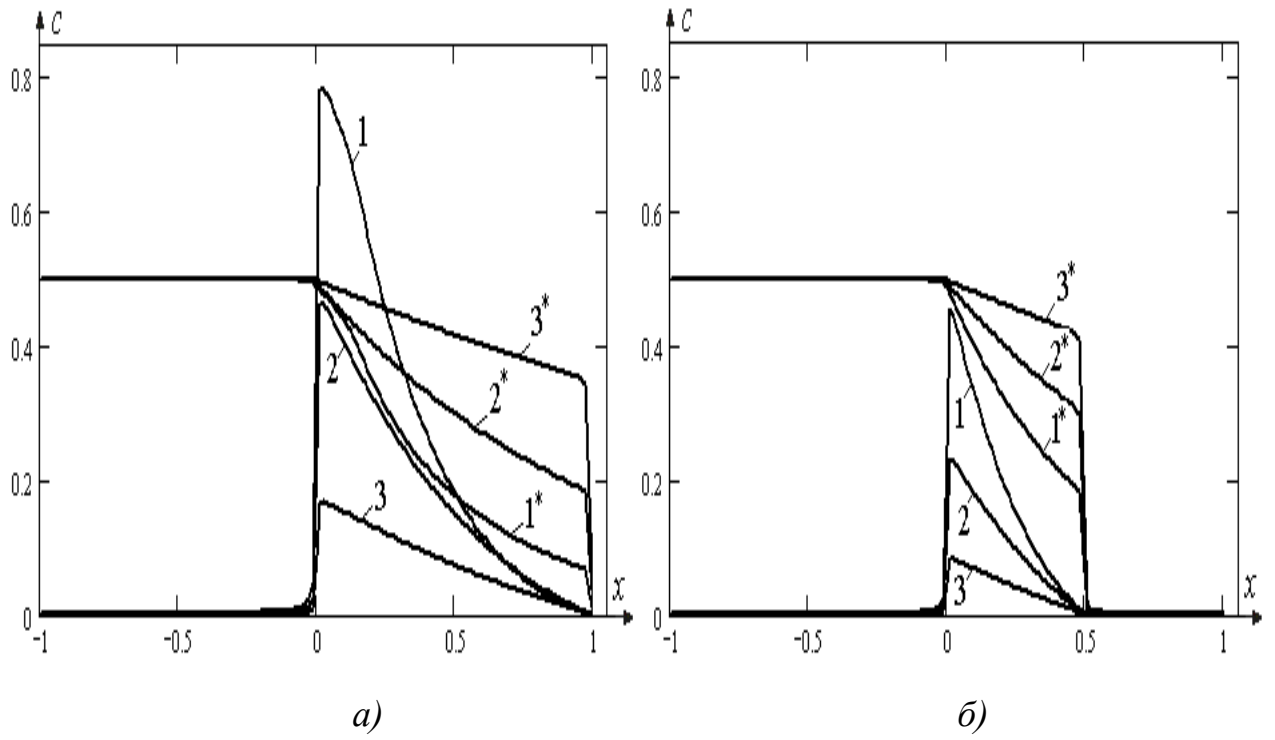


Рис. 11 Поділ концентрації забрудненості у воді та забруднення, котре залишається у фільтрі у моменти $t=4.966$ (а) та $t=3.733$ (б).

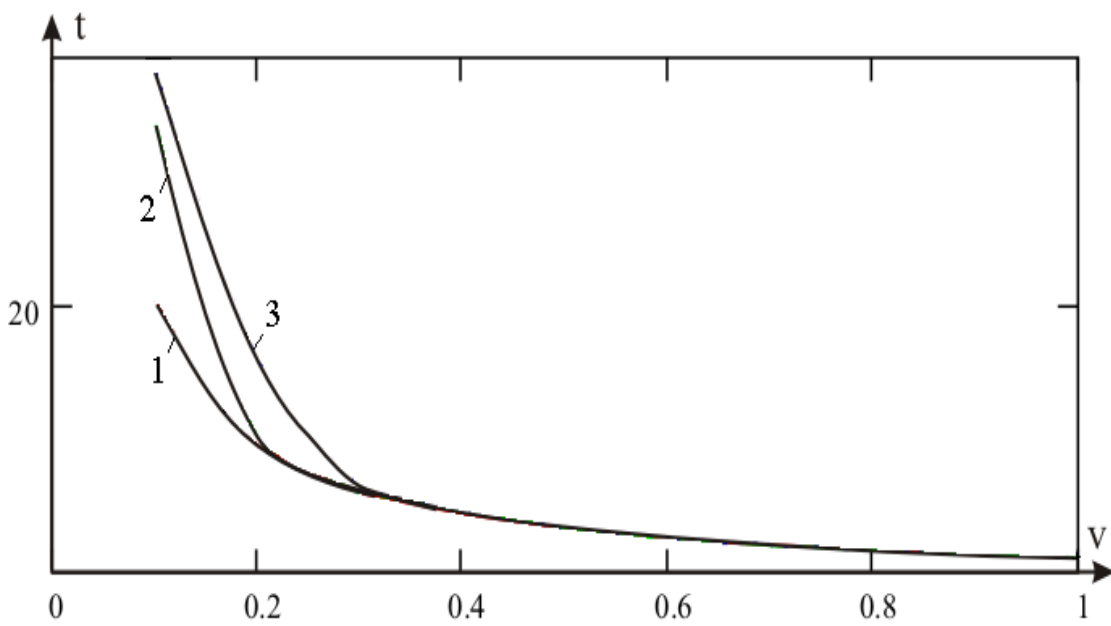


Рис.12 Залежність часу робочої дії фільтру від темпу фільтрації.

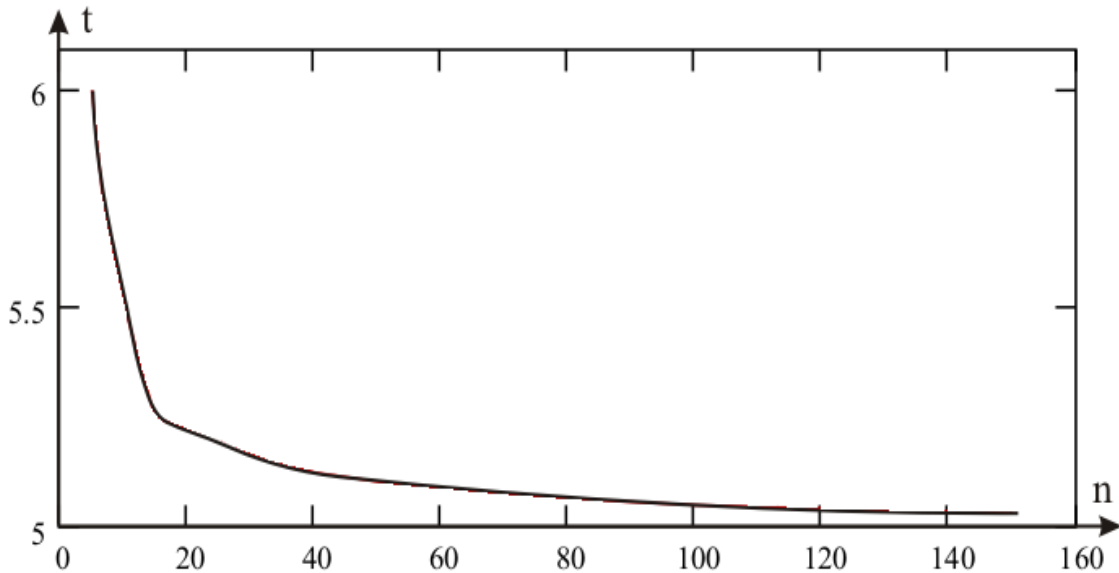


Рис.13. Взаємозв'язок стабілізації часу активної дії фільтру до кількості точок розбиття.

Рисунок 12 показує нам залежність робочої дії фільтру від темпу фільтрування забрудненої речовини, коли $n=80$ і $\gamma_1(x)=1/14+\arctg(500\cdot x)\cdot 1/(7\pi)$, $\gamma_2(x)=0.1+\arctg(500\cdot x)\cdot 0.2/\pi$, $\gamma_3(x)=0.2+\arctg(x\cdot 500)\cdot 0.4/\pi$ (криві 1-3). І нарешті на рисунку 13 зображено стабілізацію часу дії фільтру t стосовно кількості точок розбиття n при $\nu(x)=0.4$, $\gamma(x)=0.2+\arctg(500\cdot x)\cdot 0.4\pi$.

3.2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ДВОШАРОВОГО КАРКАСНО-ЗАСИПНОГО ФІЛЬТРУ.

Загальновідомо, що верхні шари багатошарових фільтрів складаються з досить легких та не дуже міцних матеріалів. Чому так спитаєте? Це є досить очевидно, адже саме це є своєрідним так би мовити бар'єром щодо користування більш дієвого методу очистки фільтрів із використанням води. Більше того, при великих інтенсивностях промивки деякі шари переміщуються та виносяться. Так що ж таке каркасно-засипний фільтр?

Багатошаровий фільтр, для відновлення якого не потрібна поверхнева промивка, але можливо здійснювати водну, називається *каркасно-засипним фільтром*. Такий фільтр має два шари: гравійно-каркасний та гравійно-піщаний.

Математичну модель процесу очистки води на каркасно-засипних фільтрах досліджували такі науковці, як: Сівак В.М., Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. [17] Спираючись на вище сказану модель, нами була створена математична модель самого процесу очистки двошарового каркасно-засипного фільтру, котрий містить зернисте наповнення та застосування численного методу розв'язання складеної відповідно задачі.

Математична модель. Пропоную розглянути власне наступну модельну задачу процесу очистки двошарового каркасно-засипного фільтру:

$$\frac{v(x)}{k} \cdot u_x + \gamma(x) \cdot F(x,t) + u_t = 0, \quad (3.2.1)$$

$$c_t - \gamma(x) \cdot F(x,t) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$F(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{якщо } u(x,t) < u_*^* - c(x,t), \\ u_*^* - c(x,t), & \text{якщо } u(x,t) \geq u_*^* - c(x,t), \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$u|_{x=x_*} = 0, u|_{t=0} = u_0^0(x), c|_{t=0} = 0, \quad (3.2.4)$$

де $0 < x_* \leq x \leq x^* < \infty$, $\ell = x^* - x_*$ – висота фільтру, $0 < t < \infty$, $u(x,t)$ – насиченість забруднення, котра залишилася у завантаженні, $c(x,t)$ – насиченість забруднення, котре відірвалось від завантаження у певній точці x за час t , k – стала, $\gamma(x)$ – функція, яка описує темп масообміну в гравійному та гравійно-піщаному шарах, u_*^* – межава насиченість відіраного бруду від завантаження, u_0^0 – задана функція, котра є в міру гладкою.

Функція $F(x,y)$ відповідає за встановлення зв'язку між концентраціями $c(x,t)$ та $u(x,t)$. Попри це все, врахувавши ще кілька додаткових умов $c(x^*,t) = u_*^*$, $c_{**} > u(x^*,t)$ ми власне зможемо визначити час повної очистки фільтру.

Розв'язок вище поставленої нами задачі (3.2.1) – (3.2.4) приведемо до розв'язування $m+1$ ($m \in N$) задач на відповідних проміжках часу $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$, $n = \overline{0, m}$ (де m – стала, котра знаходиться у ході розв'язування

задачі в залежності від виконання певних додаткових умов), τ – стала, вибір котрої в свою чергу залежить точності розв'язку, заданої спочатку:

$$\frac{v(x)}{k} \cdot u_{nx} + \gamma(x) \cdot F_n(x, t) + u_{nt} = 0,$$

$$c_{nt} - \gamma(x) \cdot F_n(x, t) = 0,$$

$$F_n(x, t) = \begin{cases} u(x - f^{-1}(\tau), t - \tau), & \text{якщо } u(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) < u_*^* - c(x, t - \tau), \\ u_*^* - c(x, t - \tau), & \text{якщо } u(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) \geq u_*^* - c(x, t - \tau), \end{cases}$$

$$u|_{x=x_*} = 0, \quad u|_{t=n\tau} = \begin{cases} u_0^0, & \text{якщо } n=0, \\ u_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases}$$

$$c|_{t=n\tau} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n=0, \\ c_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases}$$

де $f^{-1}(x)$ – функція, яка є оберненою до функції $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$.

Результатом розв'язання є:

$$c_n(x, t) = \gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x, s) ds + c_{n-1}(x, (n-1)\tau),$$

$$u_n(x, t) = \begin{cases} -\gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x, s) ds + u_{n-1}(f^{-1}(f(x) - t), (n-1)\tau), & t \leq f(x), \\ -k \int_{x_*}^x \frac{\gamma(s) F_n(x, s)}{v(s)} ds + u_*(t - f(x)), & t > f(x), \end{cases}$$

Тепер пропоную розглянути власне алгоритм числового розв'язання вище описаної задачі:

1. Перше, що ми робимо – це задаємо умови $u_*(t)$ – граничну та $u_0^0(x)$ – початкову, також функцію темпу масообміну, u_*^* – концентрацію допустимого межового насичення, константу ε , далі вказуємо кількість вузлів розбиття – l відрізка $[x_*, x^*]$. І врешті решт виконуємо присвоєння: $m := 0$, де m (лічильник).

2. Тепер, користуючись формулою $x_i = x_* + (x^* - x_*)i/l$, $i = \overline{0, l}$ ми знаходимо вузли розбиття. Зафіксуємо сталу $\tau = f(x_1 - x_0)$, $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$.

3. Користуючись формулами, поданими нижче, шукаємо розв'язок нашої задачі у певний момент часу $n\tau$, $n=1$:

$$F_1(x) = \begin{cases} u_0^0(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } u_0^0(x - f^{-1}(\tau)) < u_*^* - c(x, 0), \\ u_*^* - c(x, 0), & \text{якщо } u_0^0(x - f^{-1}(\tau)) \geq u_*^* - c(x, 0), \end{cases}$$

$$c_1(x_i, \tau) = \gamma(x_i)F_1(x_i)\tau,$$

$$u_1(x_i, \tau) = \begin{cases} -\gamma(x)F_1(x_i)\tau + u_0^0(f^{-1}(f(x_i) - \tau)), & i > 0, \\ u_*^*(\tau), & i = 0. \end{cases}$$

4. Далі, дивимось чи виконується наша умова $u_1(x^*, \tau) \geq u_*^*$. При позитивній відповіді ми «топаємо» до пункту 7, якщо ж умова не виконується – здійснюємо присвоєння: $n := n + 1$.

5. Користуючись формулами, поданими нижче, шукаємо розв'язок нашої задачі у певний момент часу $n\tau$:

$$F_n(x) = \begin{cases} u_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } u_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)) < u_*^* - c(x, (n-1)\tau), \\ u_*^* - c(x, (n-1)\tau), & \text{якщо } u_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)) \geq u_*^* - c(x, (n-1)\tau), \end{cases}$$

$$c_n(x_i, n\tau) = \gamma(x_i)F_n(x_i)\tau + c_{n-1}(x_i, (n-1)\tau),$$

$$u_n(x_i, n\tau) = \begin{cases} -\gamma(x)F_n(x_i)\tau + u_{n-1}(f^{-1}(f(x_i) - \tau), (n-1)\tau), & i > 0, \\ u_*^*(n\tau), & i = 0. \end{cases}$$

6. Відправляємося до пункту 4.

7. Якщо ж $m=0$, то робимо присвоєння $R_1 := n\tau$ (час ефективної роботи фільтру), а також здійснюємо присвоєння $m := m + 1$, $l := l + 1$, та рухаємось до пункту 2. Якщо ж у нас $m \neq 0$, то робимо присвоєння $R_2 := n\tau$.

8. Коли $|R_1 - R_2| < \varepsilon$, то R_2 – час ефективної роботи фільтру, але якщо $|R_1 - R_2| > \varepsilon$ – здійснюємо присвоєння: $R_1 := R_2$, $l := l + 1$, та рухаємось до пункту 2.

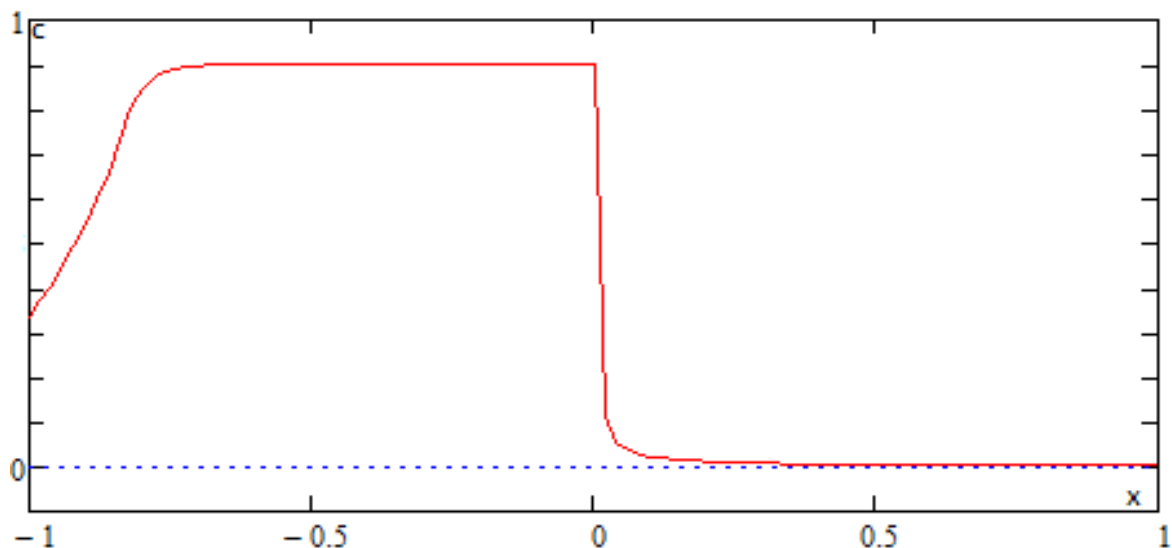
Результати експериментів при обчисленні.

Ось такий вище описаний алгоритм обчислення поставленої нами задачі був втілений у програмі *MathCAD*.

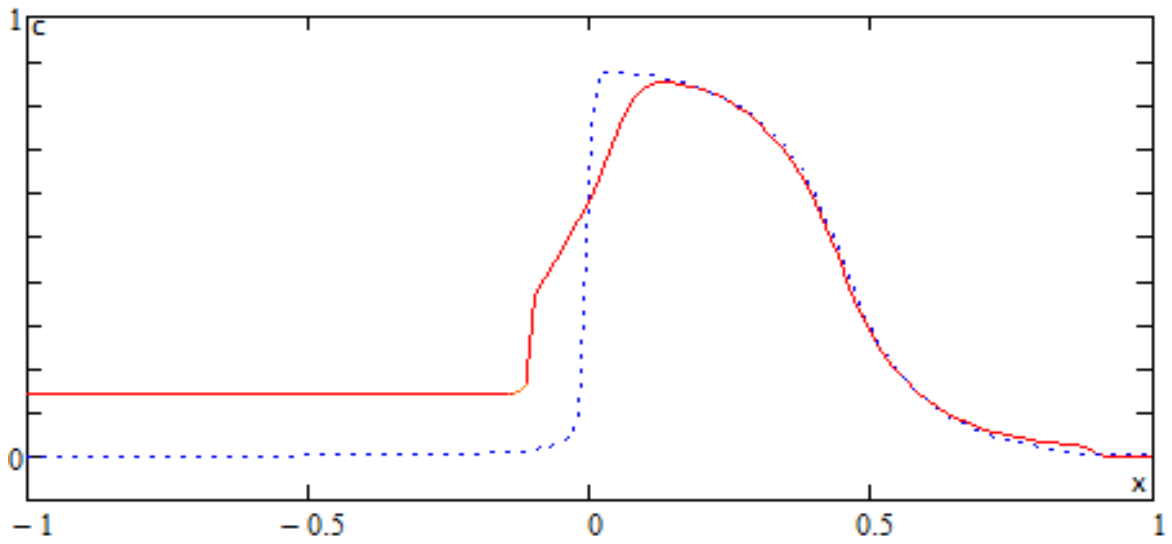
Результати розрахунків, вище описаного алгоритму, отримано при $x_* = -1$, $x^* = 1$, $c_*^* = 0.8$ (концентрації допустимого межового насичення), $\tau = f(x_i)$, в точках $x_i = x_* + ((x^* - x_*) \cdot i) / n$, $i = \overline{0, n}$, $n \in N$.

А тепер математична модель! Модель процесу очистки двошарового каркасно-засипного фільтру, котрий має такі вхідні дані: $c_{**} = 0.05$ – частота на виході з фільтру, $n = 100$ – число точок розбиття та функції темпу масообміну – $\gamma(x) = 2/5 + \text{arcctg}(600x)4/(5\pi)$ у моменти часу $t_1 = 12.93$, $t_2 = 22.41$, $t_3 = 38.00$ зображено на рисунку 14.

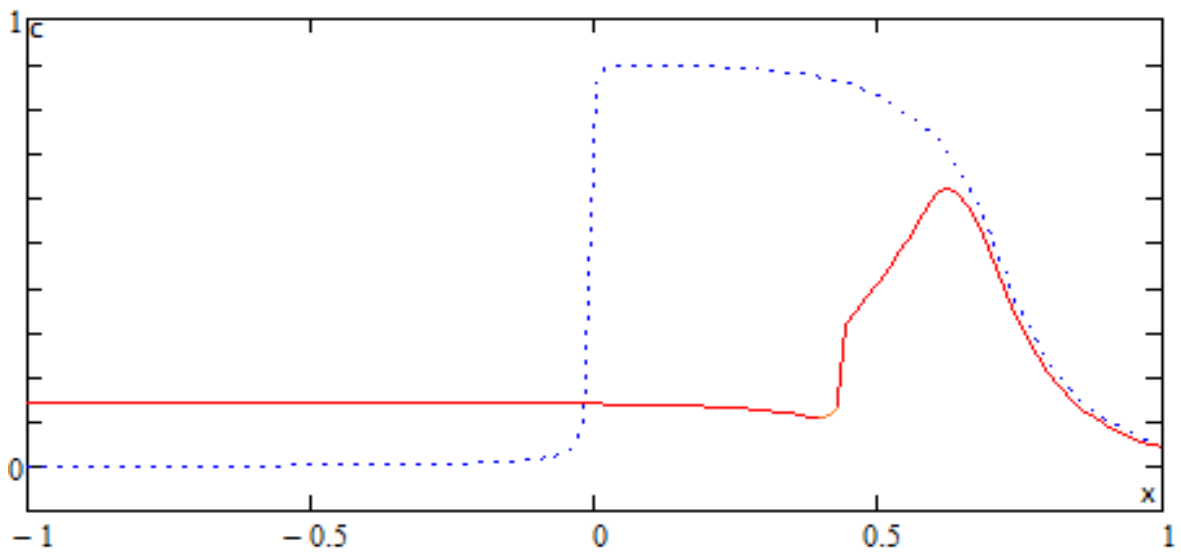
Голуба крива вказує нам на потік води, а червона крива – на грязеємність фільтру.



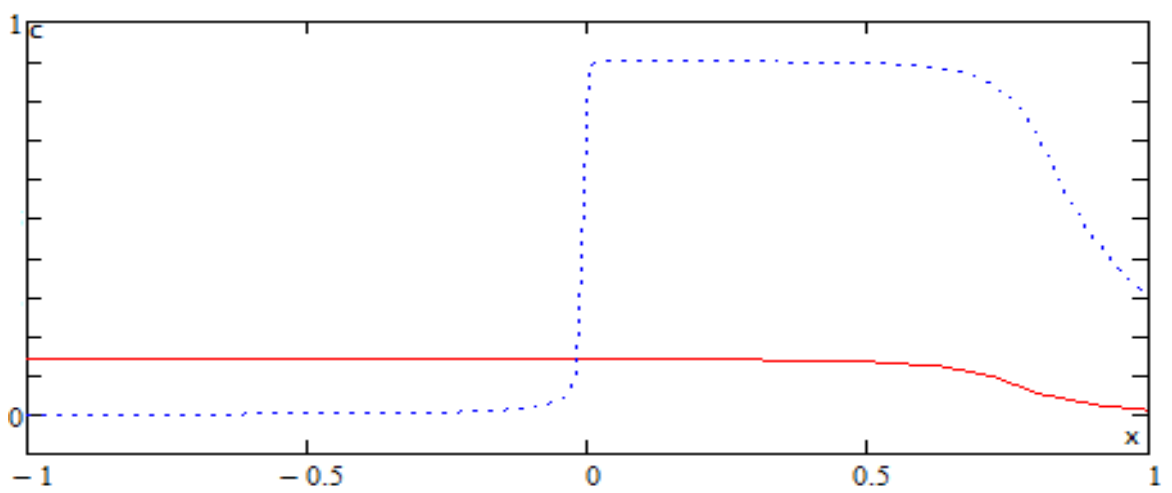
a)



б)



в)



г)

Рис.14 Поділ концентрації забруднення при промивці фільтру.

На рисунку 15, ми можемо побачити залежність висоти фільтру від часу його промивки.

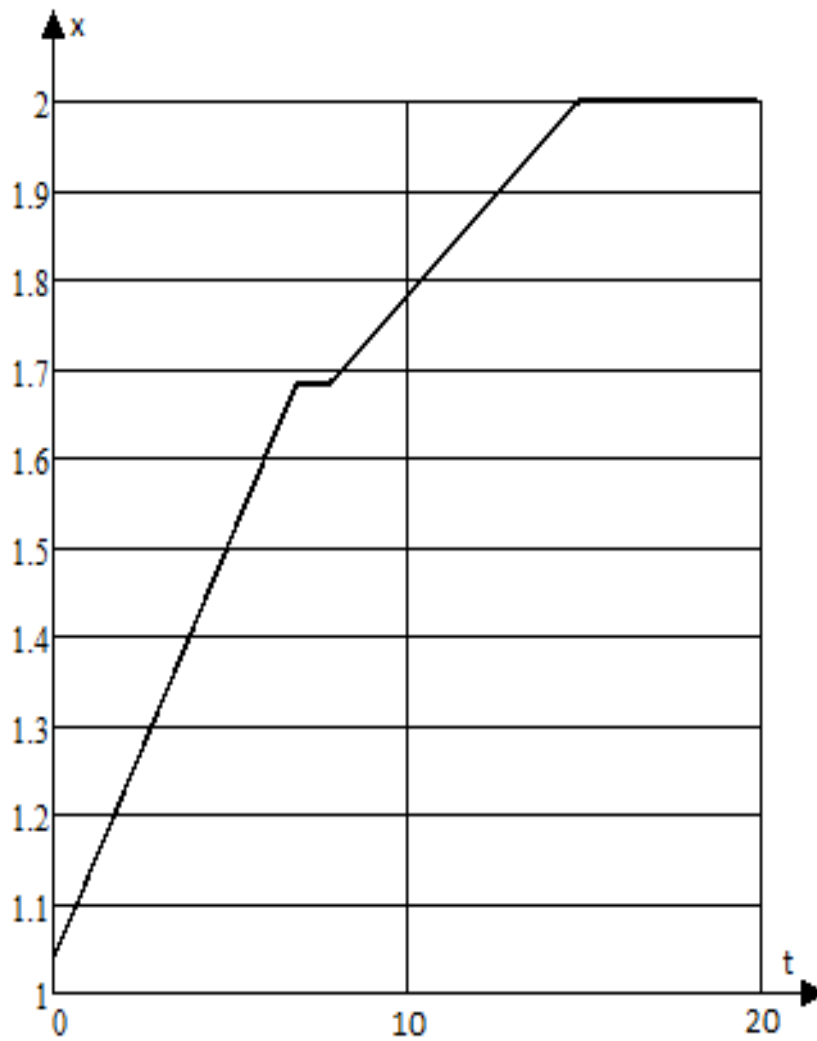


Рис.15. Крива взаємозв'язку висоти фільтру від часу його промивки.

Поділ концентрації забруднення, котре відірвалася від завантаження (криві 1–6) і насиченість бруду, що забирається водою з фільтру ($1^* - 6^*$) у відповідну мить часу $t_1 = 1.4$, $t_2 = 3.0$, $t_3 = 5.5$, $t_4 = 7.3$, $t_5 = 8.6$, $t_6 = 10.6$ при $c_{**} = 0.1$ - час промивки фільтру $t_n = 10.6$, показує нам рисунок 16.

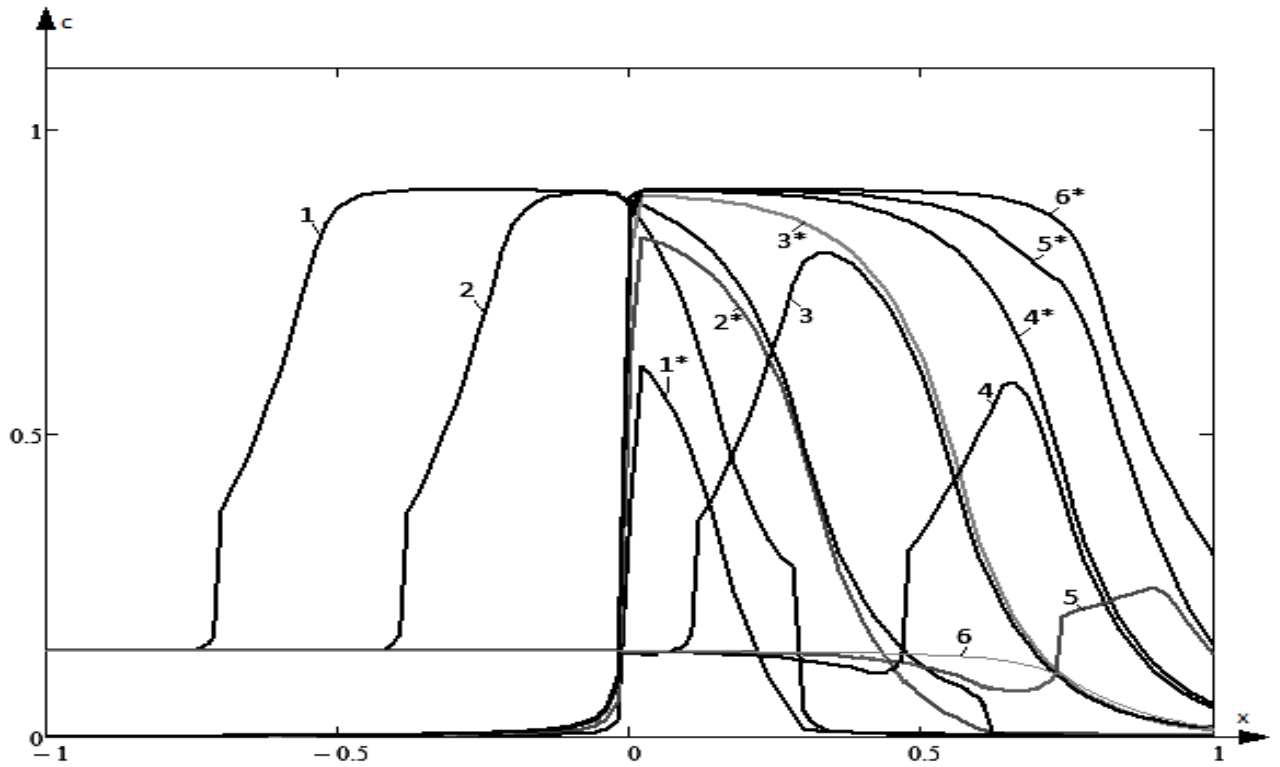
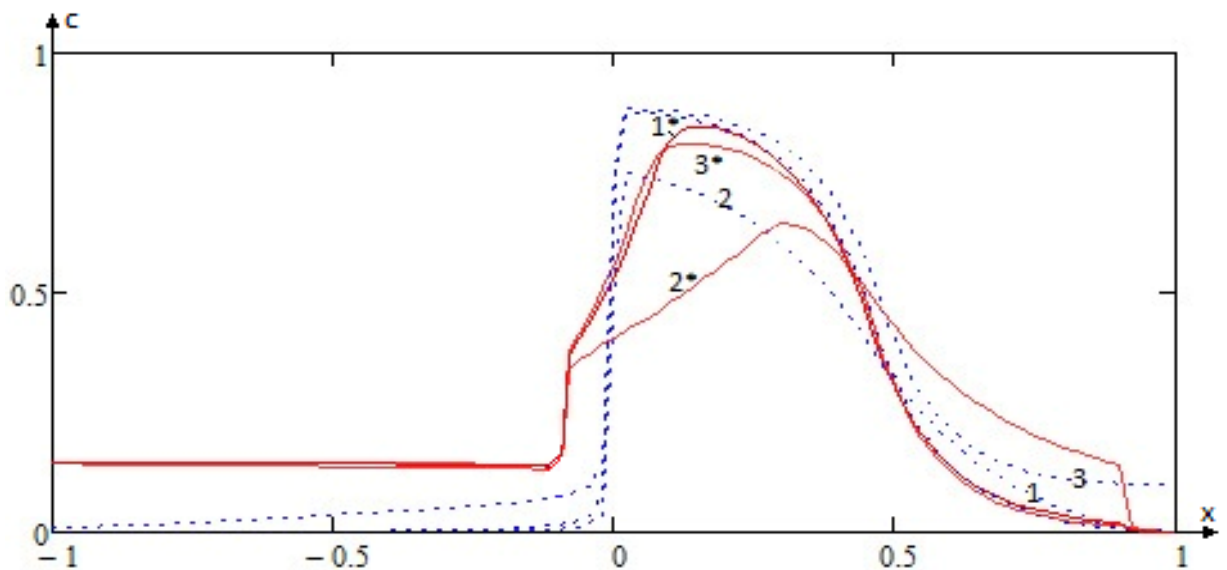
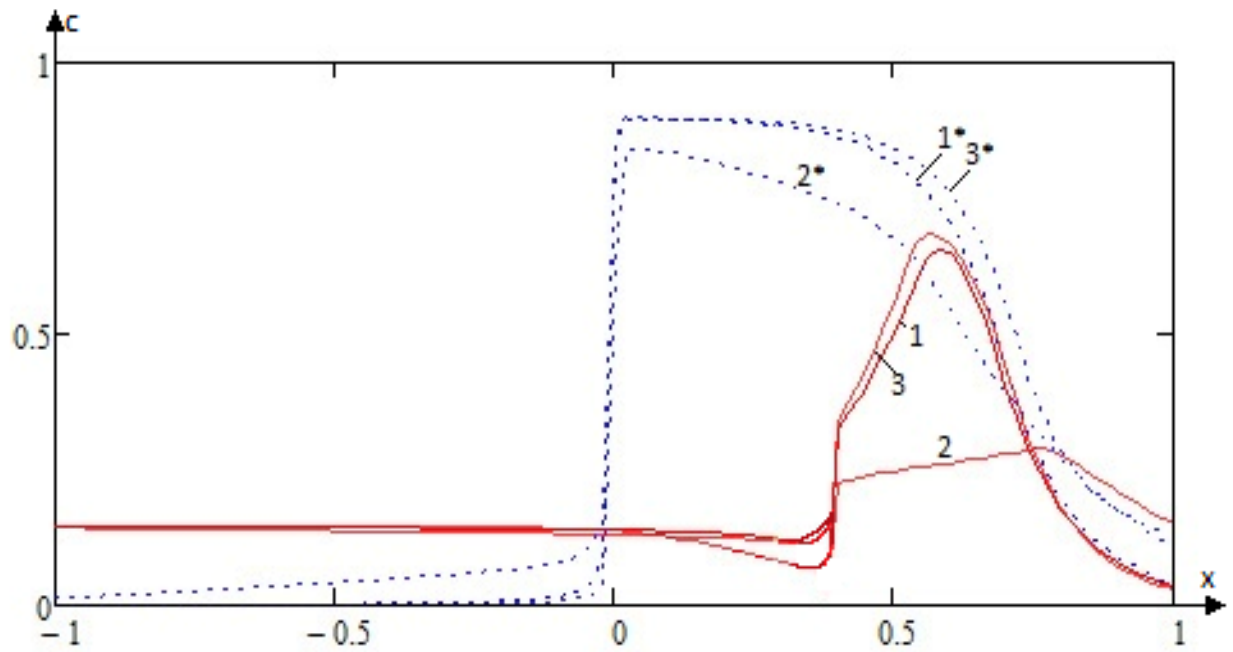


Рис.16. Поділ насиченості забруднень у різні періоди часу.

На рисунку 17 зображено поділ насиченості забруднення, котре вже осіло у завантаженні (криві $1^* - 3^*$) та насиченості забруднення, яке відірвалося від завантаження у певній точці x за час t (криві $1 - 3$) відповідно при $\gamma_1(x) = 2/5 + \arctg(600x) \cdot 4/(5\pi)$, $\gamma_2(x) = 1/5 + \arctg(600x) \cdot 2/(5\pi)$, $\gamma_3(x) = 4/9 + \arctg(600x) \cdot 6/(7\pi)$ та $v(x) = 0.2$, $n = 150$ рис.17 (а) в моменти часу $t = 4.566$ та на рисунку 17 (б) в моменти часу $t = 6.966$.



a)



б)

Рис.17. Поділ насиченості забруднення, котре вже осіло у завантаженні та насиченості забруднення, яке від'єдналося від завантаження в точці x за час t .

ВИСНОВОК

В ході виконання бакалаврської роботи на тему: «Математичне моделювання процесу первинної очистки води на каркасно-засипному фільтрі» були підбиті підсумки і виконано наступне:

1. Було описано що таке фільтрування, які є його основні види.
2. Здійснено опис фізичної моделі фільтрування.
3. Була наведена класифікація фільтрів із зернистим навантаженням, за низкою найважливіших ознак.
4. В описовому та табличному варіантах було наведено основні вимоги до якості води.
5. В роботі наведено закономірності фільтрування рідини на двошарових каркасно-засипних фільтрах з урахуванням дифузії.
6. Розглянуто модель самого процесу очищення води на каркасно-засипних фільтрах з урахуванням зворотного зв'язку.
7. Математично змодельовано процес фільтрування води з домішками без урахування дифузії з використанням програмного забезпечення MathCad.
8. Було змодельовано та у графічному вигляді зображено процес промивки двошарового каркасно-засипного фільтру.

Матеріал даної бакалаврської роботи може бути використаний для проведення факультативних занять; при проведенні лекцій, написанні робіт в Малій академії наук.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бербер В.А. Современное состояние в области исследования по обеспечению и контролю промышленной чистоты гидросистем. *Промышленная чистота рабочих жидкостей гидросистем и фильтрация*. Челябинск, 1983. С. 20-21.
2. Бродский Г.С., Слесарев Б.В. Повышение надежности гидропривода – средство эффективного внедрения гидравлических экскаваторов на горных предприятиях СНГ. *«Горный журнал»*. 2002. №4. С. 54-57.
3. Джеймс А. У. Математические методы контроля загрязнения воды: монография. Мир, 1981. 471 с.
4. Дронова Н. Д. Питна вода як фактор ризику. *Kyiv Weekly*, 2006. №44. 229 с.
5. Запольський А. К. Водопостачання, водовідведення та якість води: підручник. Київ. 2005. 671 с.
6. Запольський А. К., Мішкова-Клименко Н.А., Астрелін І.М. Фізико-хімічні основи технології очищення стічних вод: підручник. Київ: Логос, 2000. 552 с.
7. Кочмарский, В.З., Демчик И.И. Статистическая интерпретация математической модели фильтрования Минца *Теорет. основы хим. технологии*. Київ. 1989. №3, т. 23. С. 405-407.
8. Крылов, В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Наука. Т1, 1976. 584 с.; Т2, 1977. 611с.
9. Кучеренко О.Ю. Питна вода має стати національним пріоритетом. *«Якість питної води: нові підходи та шляхи вирішення»*: 2008 рік: матеріали Міжнародн. наук.-практ. конф., 2008 р. Київ: МПВтСР, 2008. С. 14-21.
10. Сівак, В. М., Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. Комп'ютерне моделювання процесів очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. 2005. Вип. 4 (32). С. 164-169.
11. Скопецкий, В.В. Бомба А.Я., Присяжнюк И.М. Сингулярно

возмущенные задачи типа «конвекция-диффузия» в многосвязных областях.
Компьютерная математика. 2004. №2. С. 99-104.

12. Терентьев О.М., Ворфоломеев А.В. Фізичні методи очищення рідин: конспект лекцій. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 162 с.

13. Україна. Наказ. Про затвердження Державних санітарних норм та правил «Гігієнічні вимоги до води питної, призначеної для споживання людиною»: [затверджений Міністерством охорони здоров'я України 12 травня 2010 р.] // Законодавство України. – 2010. – №400 (12 травня).

14. Хертель Г. Современные гидравлические жидкости для украинской промышленности «*Бизнес-мост*». 2007. №3. С. 34-35.

15. Шехтман Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. Москва: АН СССР, 1961. 212 с.