Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему

Операційний метод розв'язування лінійних диференціальних та різницевих рівнянь

Виконала студентка 2 курсу
магістратури групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта
«Математика»
Кондратюк Катерина Михайлівна

Керівник: д. т. н. проф. Власюк А. П.

Рецензенти:

к. т. н., доц. Батишкіна Ю. В.

к. фіз. мат. н., проф. Крайчук О. В.

Рівне – 2020 року

Зміст

ВСТУП

Операційне числення – один із методів математичного аналізу, що дозволяє в ряді випадків за допомогою простих засобів розв'язувати складні математичні задачі [18].

Операційне числення спирається на символічний метод, який дозволяє значно спрощувати розв'язання багатьох задач. Таким чином, операційне числення застосовують до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, лінійних рівнянь з частинними похідними, за допомогою яких описуються перехідні процеси лінійних систем в задачах електротехніки, радіоелектроніки імпульсної техніки та інших прикладних дисциплін. В деяких випадках лише класичними методами не вдається знайти точний розв'язок диференціального рівняння, його можна знайти методом операційного числення. Цінність операційного числення полягає у тому, що методи операційного числення дозволяють операцію диференціювання замінити на операцію множення; операцію інтегрування замінити на операцію ділення, а лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами перевести в алгебраїчні рівняння і т. ін.

Актуальність теми дослідження визначається кількома групами взаємопов'язаних чинників:

1) зростаючою роллю математичних наук у сучасному світі;

2) перетворення Лапласа застосовують в різних областях сучасного природознавства, математичної фізики, у теорії спеціальних функцій;

3) важливе значення це перетворення має у сучасних галузях науки техніки таких як автоматика і телемеханіка, теорія систем, теорія регулювання та успішно застосовується при розв'язанні задач механіки, електротехніки, радіотехніки, теплопередачі та ін.;

4) практичною значимістю для вирішення конфліктів і суперечностей, які направлені на вироблення максимально оптимізованої і ефективної концепції програмного забезпечення, чия потужність вже давно здатна оброблювати подібні дані;

Метою роботи є вивчення, аналіз та оцінка основних понять та властивостей перетворення Лапласа до розв'язування диференціальних і різницевих рівнянь операційним методом, а також застосовування цього перетворення до розв'язання прикладних задач.

У роботі були використані різноманітні **джерела дослідження**, такі як: методичні матеріали, посібники, підручники, практикуми, статті.

Практичне значення одержаних результатів. Дана робота може бути використана студентами факультету математики та інформатики при вивченні операційного числення.

Структура роботи зумовлена її метою та завданнями. Магістерська робота містить вступ, де в загальних рисах окреслені основні параметри даного дослідження. У першому розділі міститься основна теорія по звичайним диференціальним рівнянням. Другий розділ описує різницеві рівняння першого та другого порядку. А третій демонструє застосування операційного методу до розв'язування диференціальних та різницевих рівнянь. Робота також містить висновки, де окреслюються та узагальнюються всі основні аспекти дослідження, а також список джерел та літератури і додатки.

РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1. Поняття звичайних лінійних диференціальних рівнянь

Звичайним диференціальним рівнянням називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1.1.1)$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = y(x)$ цієї змінної і похідними $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Позначення, використані у наведеному означенні, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через t, шукана функція – через *s, f,* ϕ*, F* тощо.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння.

У рівнянні n-го порядку (1.1.1) вважається, що похідна n-го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

$y = xy' + y'^3, \qquad y' + |y'| = 0, \quad y'' + y = cosx$

$x^{IV} - 4x''' + 5x'' - 2x' = xe^x, \qquad y^{(10)} = x.$

Перші два з наведених рівнянь мають перший порядок, третє рівняння – другий порядок, четверте рівняння – четвертий порядок, п'яте – десятий порядок.

Розв'язком рівняння (1.1.1) на деякому інтервалі *(a, b),*$-\infty \leq a < b \leq +\infty$, називають функцію $y = y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння(1.1.1). Це означає що для всіх $y \in (a, b)$ справджується тотожність

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x) \equiv 0$$

Нариклад; функція $\mathrm{y} = \cos 2x$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y'' + 4y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Розв'язками цього рівняння є також $y = \sin 2x\,, y = 3\cos 2x\,, y = \cos 2x - \sin 2x$ і всі функції $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, де C_1, C_2 — довільні сталі [5].

З геометричної точки зору, розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають *інтегральною кривою*. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають *сім'єю інтегральних кривих.*

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають *інтегруванням* цього рівняння.

Приклади диференціальних рівнянь

а) Відому з математичного аналізу задачу про відшукання всіх первісних даної функції f(x) можна записати у вигляді рівняння

$$y' = f(x) \qquad (1.1.2)$$

де f (x) – задана неперервна функція, y = y(x) – невідома функція, y′ = dy/dx. Таке рівняння є простим прикладом звичайного диференціального рівняння. Як доводиться в інтегральному численні, якщо f(x) неперервна на деякому інтервалі (a,b), то рівняння (1.1.1) має на ньому нескінченну сім'ю розв'язків, яка задається формулою

$$y=F(x)+C \qquad (1.1.3)$$

де F(x) – будь-яка фіксована первісна функції f(x), а параметр C пробігає всі дійсні значення.

б) Не менш важливою властивістю функції y = e^x є те, що дана функція збігається зі своєю похідною; ця властивість записується у вигляді звичайного диференціального рівняння y′ = y, розв'язками якого, разом із функцією y = e^x, будуть також усі функції сім'ї y = Ce^x.

в) З урахуванням механічного змісту другої похідної (прискорення), рівнянням прямолінійного рівноприскореного руху буде записуватися у формі $\ddot{x} = a$ (точками будемо надалі позначати похідні за часом). Послідовне інтегрування останнього рівняння в межах від 0 до t дає

$$x = at + v_0 \quad \left(v_0 = \dot{x}(0)\right), \quad x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 \quad (x_0 = x(0))$$

г) Якщо в рівнянні кола $x^2 + y^2 = R^2$ змінні x та y вважати гладкими функціями деякого параметра s (x = x(s), y = y(s)) і продиференціювати рівняння за параметром s , то отримаємо диференціальне рівняння сім'ї всіх кіл із центром на початку координат $x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = 0$. Одним з розв'язків цього рівняння є пара функцій $x = \sin s,\ \ y = \cos s$, яка задовольняє систему диференціальних рівнянь $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ [11].

1.2. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих

Нехай маємо рівняння сім’ї кривих, залежної від одного дійсного параметра C:

$$\Phi(x, y, C)=0 \qquad (1.2.1)$$

Побудуємо диференціальне рівняння сім’ї кривих (1.2.1), тобто рівняння, яке описує властивості, притаманні всім кривим цієї сім’ї. Для цього продиференціюємо за змінною x обидві частини рівності (1.2.1), враховуючи, що y = y(x):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} * \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1.2.2)$$

Якщо співвідношення (1.2.2) не містить C, то воно буде виражати ту загальну властивість, яка притаманна усім кривим сім’ї (1.2.1) (наприклад, якщо y = x+C, то y′ = 1). У загальному випадку рівність (1.2.2) залежатиме від параметра C. Тоді, виключаючи цей параметр із системи, складеної з рівнянь (1.2.1), (1.2.2), одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, y, y')=0 \qquad (1.2.3)$$

Рівняння (1.2.3) називають диференціальним рівнянням сім’ї кривих (1.2.1). Воно виражає спільну властивість кривих (1.4), незалежно від сталої C [11].

Приклад 1. Знайти диференціальне рівняння сім’ї парабол, які проходять через початок координат і мають осі симетрії, паралельні до осі ординат.

Розв'язання. Сім'ю парабол з умови задачі можна описати за допомогою формули у $= x^2 + Cx$, де C – довільна стала. Складемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - Cx, \\ y' = 2x = C \end{cases}$$

і виключимо з неї сталу *С*. Для цього знайдемо *С* з першого рівняння системи і підставимо у друге:

$C = \frac{x^2 - y}{y} \Rightarrow y' = 2x - \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + y}{x}$.

Відповідь: $xy' = x^2 + y$ [13].

1.3. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) \tag{1.3.1}$$

Якщо рівняння (1.3.1) можна розв'язати відносно старшої похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{1.3.2}$$

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна n разів на інтервалі (a, b), називають розв'язком рівняння (1.3.1) на цьому інтервалі, якщо вона для всіх $x \in (a, b)$ перетворює це рівняння у тотожність.

Для рівняння (1.3.1) задача Коші формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який для $x = x_0$ задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{1.3.3}$$

де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа, які називають *початковими даними розв'язку у = у(х)* . Число x_0 називають початковим значенням незалежної змінної *x*, сукупність чисел $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – початковими даними рівняння (1.3.2), а умови (1.3.3) – початковими умовами [30].

Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1.3.4}$$

задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \qquad (1.3.5)$$

З геометричної точки зору задача Коші (1.3.4), (1.3.5) полягає у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку $(x_{0,}y_0)$ і має у цій точці заданий напрям дотичної y'_0, тобто $tg\alpha_0 = t'_0$.

Зауважимо, що єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння n-го порядку (1.3.1) не означає, що через точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива, як це було для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної. Наприклад, єдиність розв'язку задачі Коші (1.3.4), (1.3.5) означає, що через кожну точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива рівняння (1.3.5), дотична до якої у цій точці утворює з додатним напрямом осі Ox кут α_0, для якого $tg\alpha_0 = y'_0$. Водночас, крім цієї інтегральної кривої через точку (x_0, y_0) можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної у цій точці [41].

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + y = 0, y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Розв'язання. Можна довести, що всі розв'язки рівняння містяться в формулі

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

де $C_1\ і\ C_2$ – довільні сталі. Звідси $y = -C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Виберемо C_1 і C_2, щоб задовольнити початкові умови. Очевидно, що $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Отже, шуканим розв'язком є $y = \cos x$. Цей розв'язок єдиний. Однак через точку (0,1), окрім кривої $y = \cos x$, проходить безліч інших інтегральних кривих, які можна описати формулою $y = \cos x + C_2 \sin x$, де C_2 – довільна стала, відмінна від нуля, але жодна з дотичних до них у точці (0,1) не збігається з дотичною до кривої $y = \cos x$ у цій точці [13].

1.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами – важливий клас звичайних диференціальних рівнянь. Їх розв'язки виражаються через елементарні функції або у квадратурах. Такі рівняння часто є диференціальними моделями багатьох прикладних задач, зокрема з теоретичної механіки і електрики [36].

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$ – дійсні числа, а права частина *f(x)* неперервна на інтервалі (a, b) функція (зокрема, вона може бути й сталою на цьому інтервалі) [2].

Для знаходження загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $L[y] = 0$, потрібно знати хоча б одну фундаментальну систему розв'язків $y_1, y_2, \dots, y_n$ цього рівняння. Тоді, згідно з основною теоремою, загальним розв'язком цього рівняння є

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.

Легко переконатися, що лінійне однорідне рівняння першого порядку $y' + a$, де a – дійсна стала, має частинний розв'язок $y_1 = e^{-ax}$. Спробуємо й для лінійного однорідного рівняння n-го порядку $L[y] = 0$ частинний розв'язок відшукати у вигляді

$$y = e^{kx} \tag{1.3.6}$$

де k – деяке, поки що невизначене, число (дійсне або комплексне). Підставляючи (1.3.6) в ліву частину рівняння $L[y] = 0$, одержуємо:

$$L(e^{kx}) = (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1} k + a_n) \cdot e^{kx} \tag{1.3.7}$$

З (1.3.7) випливає, що функція (1.3.6) буде розв'язком диференціального рівняння $L[y] = 0$ тоді і тільки тоді, коли число k є коренем алгебраїчного рівняння

$$P(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0 \tag{1.3.8}$$

Многочлен $P(k)$ називають характеристичним многочленом, рівняння (1.3.8) – характеристичним рівнянням, яке відповідає рівнянню $L[y] = 0$, а його корені – характеристичними числами рівняння $L[y] = 0$. Легко бачити, що складаючи характеристичне рівняння, потрібно в $L[y] = 0$ похідні різних порядків замінити відповідними степенями k [13].

РОЗДІЛ 2. РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

2.1. Поняття різницевих рівнянь

Рівняння вигляду

$$\Phi\left(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^k x(n)\right) = 0 \qquad (2.1.1)$$

або

$$\Phi\big(n, x(n), \Delta x(n+1), \dots, x(n+k)\big) = 0, \qquad (2.1.2)$$

де $x(n)$ – шукана функція, називається різницевім рівнянням, або рівнянням в скінченних різницях.

Виражаючи різниці Δx(n), $\Delta^2 x(n), \dots, \Delta^k x(n)$ через відповідні значення $x(n)$ завжди можна перейти від рівняння (2.1.1) до рівняння (2.1.2).

Зведемо різницеве рівняння $a_0\Delta^2 x(n) + a_1\Delta x(n) + a_2 x(n) = f(n)$ до рівняння (2.1.2):

$$\Delta^2 x(n) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n), \Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

Підставляємо в дане рівняння

$$a_0 x(n+2) - 2a_0\Delta x(n+1) + a_1 x(n+1) - a_1 x(n) + a_2 x(n) = f(n)$$

або

$$a_0 x(n+2) - (a - 2a_0)x(n+1) + (a_0 - a_1 + a_2)x(n) = f(n)$$

Різницеве рівняння вигляду (2.1.2) називається рівнянням k-го порядку, якщо воно в явному вигляді містить функцію $x(n)$ і $x(n+k)$. Якщо різницеве рівняння вигляду (2.1.1) входить найвища різниця $\Delta^k x(n)$, то це ще не означає, що рівняння є k-го порядку. В цьому разі можна тільки стверджувати, що порядок різницевого рівнянняне більше k [39].

Встановимо наприкладі різницевого рівняння

$$\Delta^3 x(n) + \Delta^2 x(n) -, \Delta x(n) - x(n) = n^2$$

Замість різниць підставимо відповідні значення функції:

$$x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) +$$

$$+2x(n+1) + x(n) - x(n+1) + x(n) - x(n) = n^2.$$

$$x(n+3) - 2x(n+2) = n^2.$$

Поклавши n+2=m, маємо $x(m+1)-2x(m)=(m-2)^2$.

Це рівняння першого порядку.

Аналогом різницевих рівяннь є диференціальні рівняння для функцій неперервного аргументу.

Різницеве рівняння вигляду

$$x(n+k)+a_1x(n+k-1)+\cdots+a_kx(n)=f(n), \tag{2.1.3}$$

де $a_1,a_2,\dots a_k,\ f(n)$ – деякі решітчасті функції, називається, аналогічно диференціальному рівнянню, лінійним різницевим рівнянням. Будемо розглядати тільки лінійні різницеві рівняння, до яких приводять рівняння імпульсних систем автоматичного регулювання [46].

Якщо в рівнянні (2.1.3) функція f(n)=0, то рівняння називається однорідним, якщо f(n)$\neq$ 0, рівняння називається неоднорідним.

Однорідне лінійне рівняння має вигляд

$$x(n+k)+a_1(n+k-1)+\cdots+a_kx(n)=0 \tag{2.1.4}$$

Будемо вважати, що $a_k\neq 0$, тобто це рівняння k-го порядку. Між лінійними різницевими рівняннями і лінійними диференціальними рівняннями є багато спільного. Так, якщо система решітчастих функцій $x_1(n),x_2(n),\dots,x_r(n)$ є розв′язками лінійного рівняння (2.1.4), то їх лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{r}\alpha_ix_i$ буде також розв`язком цього рівняння.

Загальний розв`язок рівняння (2.1.4) має вигляд

$$x(n)=\sum_{i=1}^{k}C_ix_i(n), \tag{2.1.5}$$

де C_i – довільні сталі; $x_i(n)$ – лінійно-незалежні розв`язки цього рівняння.

У випадку, коли коефіцієнти $a_1,a_2,\dots a_k$ в рівнянні (2.1.4) будуть сталими, розв′язок цього рівняння можна шукати у вигляді

$$x(n)=\lambda^n, \tag{2.1.6}$$

де λ – деяке число (дійсне або комплексне). Підставляючи рівняння (2.1.6) в рівняння (2.1.4) одержимо

$$\lambda^{t+k}+a_1\lambda^{n+k-1}+\cdots+a_k\lambda^n=0$$

або

$$\lambda^n(\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k) = 0$$

λ=0 дає тривіальний розв′язок рівняння (2.4):x(n)=0

Рівняння

$$\lambda^n(\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k) = 0 \quad (2.1.7)$$

називається характеристичним рівнянням для рівняння (2.1.4)

Якщо характеристичне рівняння має тільки прості корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ то загальний розв′язок однорідного рівняння (2.1.4) має вигляд

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} C_i \lambda_i^n. \quad (2.1.8)$$

Приклад; Знайти загальний розв′язок різницевого рівняння

$$\Delta^2 x(n) - 3\Delta x(n) + 2x(n) = 0.$$

Запишемо це рівняння у вигляді (2.1.2), тобто, замінимо різницю відповідними значеннями функції

$$x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) - 3[x(n+1) - x(n) + 2x(n)] = 0;$$
$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Коренями цього рівняння будуть $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Отже, загальний розв′язок має вигляд

$$x(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Якщо один із коренів характеристичного рівняння λ має кратність r, то йому відповідає r частинних лінійно незалежних розв′язків: $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n$ [17].

Приклад; Знайти загальний розв′язок різницевого рівняння

$$x(n+3) - 5x(n+2) + 8x(n+1) - 4x(n) = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

Корені рівняння $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Їм відповідають три частинні розв′язки рівняння

$$x_1(n) = 1^n = 1, x_2(n) = 2^n, x_3(n) = n \cdot 2^n.$$

Загальний розв′язок буде

$$x(n) = C_1 + C_2 2^n + C_3 n 2^n.$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння з дійсними коефіцієнтами знайдеться комплексний корінь $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, або $\lambda = \rho(cos\varphi + +isin\varphi)$, йому буде відповідати ще один комплексний корінь, спряжений з ним $\lambda = \overline{\lambda_1} = \rho(cos\varphi - isin\varphi)$. Ці два корені λ_1 і λ_2 входять в загальний розв′язок рівняння з комплексно-спряженими коефіцієнтами:

$$C_1\lambda_1^n + \overline{C_1}\overline{\lambda_1^n},$$

де $\mathrm{C}_1 = \alpha_1 + i\beta_1$; а $\overline{C_2}$=$\alpha_1 - i\beta_1$.

Тоді

$$C_1\lambda_1^n + \overline{C_1}\overline{\lambda_1^n} = (\alpha_1 + i\beta_1)\rho^n(cosn\varphi + isin\, n\varphi) + (\alpha_1 - i\beta_1)\rho^n(cosn\varphi -$$
$$-isin\, n\varphi) = \rho^n(\alpha_1 cosn\varphi + i\alpha_1 sin\, n\varphi + i\beta_1 cosn\varphi - \beta_1 sin\, n\varphi + \alpha_1 cosn\varphi -$$
$$-i\alpha_1 sin\, n\varphi - i\beta_1 cosn\varphi - \beta_1 sin\, n\varphi) = \rho^n(2\alpha_1 cos\, n\varphi - 2\beta_1 sin\, n\varphi).$$

Позначивши $2\alpha_1 = \mathrm{C}'_1, -2\beta_1 = C'_2$, маємо

$$C_1\lambda_1^n + \overline{C_1}\overline{\lambda_1^n} = \rho^n(\mathrm{C}'_1\, cos\, n\varphi + C'_2\, sin\, \varphi).$$

Отже, парі спряжених коренів $\lambda = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$ і $\bar{\lambda} = \rho(cos\, \varphi - isin\, \varphi)$ відповідають два частинних розв′язки: $x_1(n) = \rho^n cos\, n\varphi$ і $x_1(n) = \rho^n sin\, n\varphi$.

Приклад. Знайти частинний розв′язок різницевого рівняння

$$x(n+3) - 4x(n+2) + 8x(n+1) - 8x(n) = 0,$$

що задовольняє початковим умовам $x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 6$.

Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda - 8 = 0,$$

його корені $\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(cos\frac{\pi}{3} \pm isin\frac{\pi}{3}\right)$.

Частинні розв′язки цього рівняння будуть:

$$x_1(n) = 2^n;\ x_2(n) = 2^n cos\frac{\pi}{3};\ x_3(n) = 2^n\ sin\frac{\pi}{3}n.$$

Тому, загальний розв′язок буде

$$x(n) = C_1 2^n + 2^n\left(C_2 \cos n\frac{\pi}{3} + C_3\ sin\ n\frac{\pi}{3}\right).$$

Для знаходження C_1, C_2, C_3 підставляємо в загальний розв′язок початкові умови:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cdot 2^0 + C_2\ cos\ 0 + C_3\ sin\ 0; \\ 1 = C_1 \cdot 2 + 2\left(C_2\ cos\frac{\pi}{3} + C_3\ sin\ \frac{\pi}{3}\right); \\ 6 = C_1 \cdot 2^2 + 2^2\left(C_2\ cos\ 2\frac{\pi}{3} + C_3 \sin 2\ \frac{\pi}{3}\right); \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 = 0; \\ 2\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \sqrt{3}\mathrm{C}_3 = 14; \\ 4\mathrm{C}_1 - 2\mathrm{C}_2 + 2\sqrt{3}\mathrm{C}_3 = 6. \end{cases}$$

Звідси маємо $\mathrm{C}_1 = 1, \mathrm{C}_2 = -1, \mathrm{C}_3 = 0$.

Отже,

$$x(n) = 2^n - 2^n\ cos\ n\frac{\pi}{3} \rightarrow x(n) = 2^n\left(1 - cos\ n\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow x(n) = 2^{n+1} sin^2 n\frac{\pi}{6}.$$

Розглянемо тепер лінійне неоднорідне різницеве рівняння (2.3). Загальний розв′язок цього рівняння можна шукати у вигляді

$$x(n) = \varphi(n) + \psi(n) \tag{2.1.9}$$

де $\varphi(n)$ – загальний розв′язок відповідного однорідного рівняння; $\psi(n)$ -- частинний розв′язок даного неоднорідного рівняння [56].

Лінійні неоднорідні різницеві рівняння можна розв′язати також методом варіації довільних сталих. Так, розв′язок рівняння (2.3) можна шукати у вигляді

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} C_i(n) x_i(n), \tag{2.1.10}$$

де $x_i(n)$ (*i=1,2,…,k)* – лінійно незалежні розв′язки відповідного однорідного рівняння; $C_i(n)$ деякі решітчасті функції, які можна знайти з системи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(n) \cdot x_i(n+1) = 0; \\ \sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(n) \cdot x_i(n+2) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \sum_{i=1}^{k} \Delta C_i(n) \cdot x_i(n+k-1) = 0; \\ \sum_{i=1}^{л} \Delta C_i(n) \cdot x_i(n+k) = 0. \end{cases} \qquad (2.1.11)$$

Визначник цієї системи завжди відмінний від нуля.

Приклад. Знайти розв′язок різницевого рівняння

$$x(n+3) - 4x(n+2) + 5x(n+1) - 2x(n) = 0$$

при початкових умовах *x(0)=x(1)=x(2)=0.*

Для знаходження частинних розв′язків відповідного однорідного рівняння складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

Корені рівняння будуть $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Отже, маємо

$$x_1(n) = 1, x_2(n) = n, x_3(n) = 2^n.$$

Загальний розв′язок неоднорідного рівняння буде

$$x(n) = C_1(n) + C_2(x) \cdot n + C_3(n) \cdot 2^n.$$

Для знаходження $C_1(n)$, $C_2(n)$, $C_3(n)$ складаємо систему рівнянь (2.1.11)

$$\begin{cases} \Delta C_1(n) + \Delta C_2(n) \cdot (n+1) + \Delta C_3(n) \cdot 2^{n+1} = 0; \\ \Delta C_1(n) + \Delta C_2(n) \cdot (n+2) + \Delta C_3(n) \cdot 2^{n+2} = 0; \\ \Delta C_1(n) + \Delta C_2(n) \cdot (n+3) + \Delta C_3(n) \cdot 2^{n+3} = n. \end{cases}$$

Звідси $\Delta C_1(n) = n^2$, $\Delta C_2(n) = -n$, $\Delta C_3(n) = n \cdot 2^{-(n+1)}$. За різницями $C_i(m)$ знаходимо самі $C_i(n)$ за формулою $F(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta F(m) + C$.

$$C_i(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta C_i(n) + C_i^* = \sum_{m=0}^{n-1} m^2 + C_1^*;$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} m^2 = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1).$$

Отже, $\text{C}_1(n) = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + C_1^*$;

$$C_2(n) = \sum_{m=0}^{n-1} (-m) + C_2^*. \quad \sum_{m=0}^{n-1} m = \frac{1}{2} n(n-1);$$

$$C_2(n) = -\frac{1}{2} n(n-1) + C_2^*;$$

$$C_3(n) = \sum_{m=0}^{n-1} m \cdot 2^{-m-1} + C_3^*;$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} m \cdot 2^{-m-1} = -(n+1)2^{-n};$$

$$\text{C}_3(n) = C_3^* - (n+1)2^{-n}.$$

Загальний розв҆язок неоднорідного рівняння буде

$$x(n) = \text{C}_1(n) + C_2(n)n + C_3(n)2^n =$$

$$= \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + C_1^* - \frac{1}{2} n^2(n-1) + C_2^* n + C_3^* 2^n - n - 1;$$

$$x(n) = C_1 + C_2 n + C_3 \cdot 2^n - \frac{1}{6} n(n^2-1).$$

Для знаходження сталих підставляємо в розв҆язок початкові умови *x(0)=x(1)=x(2)=0,* звідки маємо систему

$$\begin{cases} \text{C}_1 + \text{C}_3 = 0; \\ \text{C}_1 + \text{C}_2 + 2\text{C}_3 = 0; \\ \text{C}_1 + 2\text{C}_2 + 4\text{C}_3 = 1. \end{cases}$$

З цієї системи маємо $\text{C}_1 = -1$, $\text{C}_2 = -1$, $\text{C}_3 = 1$. Отже

$$x(n) = -1 - n + n \cdot 2^n - \frac{1}{6} n(n^2-1)$$

або

$$x(n) = 2^n - \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

Приклад. Розв′язати різницеве рівняння $x(n+2) + x(n) = e^{an}$ з нульовими початковими умовами x(0)=x(1)=0 [1].

Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$, яке має корені $\lambda = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $\bar{\lambda} = -\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

Загальний розв′язок відповідного однорідного рівняння буде

$$x(n) = C_1 cos\frac{\pi}{2}n + C_2 sin\frac{\pi}{2}n,$$

звідки загальний розв′язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$x(n) = C_1(n) cos\frac{\pi}{2}n + C_2(n) sin\frac{\pi}{2}n.$$

або

$$\Delta C_1(n) = -\frac{1}{2}e^{an}\left(e^{i\frac{\pi}{2}n} + e^{-i\frac{\pi}{2}n}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{\left(a+i\frac{\pi}{2}\right)n} + e^{\left(a-i\frac{\pi}{2}\right)n}\right);$$

$$\Delta C_2(n) = -\frac{1}{2i}\left(e^{\left(a+i\frac{\pi}{2}\right)n} + e^{\left(a-i\frac{\pi}{2}\right)n}\right).$$

Звідси знаходимо $C_1(n), C_2(n)$:

$$C_1(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta C_1(n) + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\left(e^{\left(a+i\frac{\pi}{2}\right)m} + e^{\left(a-i\frac{\pi}{2}\right)m}\right) + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{\left(a+i\frac{\pi}{2}\right)}}{1 - e^{a+i\frac{\pi}{2}}} + \frac{1 - e^{\left(a-i\frac{\pi}{2}\right)n}}{1 - e^{a-i\frac{\pi}{2}}}\right) + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{an}\left(cos\frac{\pi}{2}n + isin\frac{\pi}{2}n\right) +}{1 - ie^a} + \frac{1 - e^{an}\left(cos\frac{\pi}{2}n - isin\frac{\pi}{2}n\right)}{1 + ie^a}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{-1 + e^{an} cos\frac{\pi}{2}n - e^{(a+1)n} sin\frac{\pi}{2}n}{1 + e^{2a}} + C_1;$$

$$C_2(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta C_2\,(n) + C_2 = -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\left(e^{\left(a+i\frac{\pi}{2}\right)m} - e^{\left(a-i\frac{\pi}{2}\right)m}\right) + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1 - e^{\left(a+i\frac{\pi}{2}\right)}}{1 - e^{a+i\frac{\pi}{2}}} - \frac{1 - e^{\left(a-i\frac{\pi}{2}\right)}}{1 - e^{a-i\frac{\pi}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{-e + e^{an}\sin\frac{\pi}{2}n - e^{a(n+1)}\cos\frac{\pi}{2}n}{1 + e^{2a}} + C_2.$$

Загальний розв́язок буде

$$x(n) = \frac{-1 + e^{an} cos\frac{\pi}{2}n - e^{a(n+1)} sin\frac{\pi}{2}n}{1 + e^{2a}} + C_1 cos\frac{\pi}{2}n +$$

$$+\frac{-e^{a} + e^{an} sin\frac{\pi}{2}n - e^{a(n+1)} cos\frac{\pi}{2}n}{1 + e^{2a}}\sin\frac{\pi}{2}n + C\,_2 sin\frac{\pi}{2}n,$$

$$x(n) = \frac{e^{an}}{1 + e^{2a}} - \frac{cos\frac{\pi}{2}n - e^{a} sin\frac{\pi}{2}n}{1 + e^{2a}} + C_1 cos\frac{\pi}{2}n + C_2 sin\frac{\pi}{2}n.$$

Враховуючи початкові умови x(0)=x(1)=0, маємо $C_1(n) = C_2(n)$ =0. Отже,

$$x(n) = \frac{e^{an}}{1 + e^{2a}} - \frac{cos\frac{\pi}{2}n - e^{a} sin\frac{\pi}{2}n}{1 + e^{2a}} [17].$$

2.2. Розв'язки однорідних та неоднорідних різницевих рівнянь першого порядку.

Лінійним різницевим рівнянням першого порядку називається рівняння

$$\Delta y_i + p_i \cdot y_i = q_i$$

Якщо $q_i = 0$, то таке рівняння є однорідним, в протилежному випадку – неоднорідним.

Лінійне різницеве рівняння першого порядку записують у вигляді

$$y_{i+1} + p_i \cdot y_i = q_i, \text{ звідси } y_{i+1} = (1 - p_i) \cdot y_i + q_i. \qquad (2.2.1)$$

Знайдемо розв'язок рівняння (2.2.1) з початковою умовою y_0. Розглянемо перші чотири значення

$y_1 = (1 - p_0) \cdot y_0 + q_o,$

$y_2 = (1 - p_1) \cdot y_1 + q_1 = (1 - p_0) \cdot \big((1 - p_0) \cdot y_0 + q_o\big) + q_1 =$

$= (1 - p_1) \cdot (1 - p_0) \cdot y_0 + (1 - p_1) \cdot q_0 + q_1,$

$y_3 = (1 - p_2) \cdot y_2 + q_2 =$

$= (1 - p_2) \cdot \big((1 - p_1) \cdot (1 - p_0) \cdot y_0 + (1 - p_1) q_o + q_1\big) + q_2 =$

$= (1 - p_2) \cdot (1 - p_1) \cdot (1 - p_0) \cdot y_0 + (1 - p_2) \cdot (1 - p_1) \cdot q_o +$

$+(1 - p_2) \cdot q_1 + q_2,$

$y_4 = (1 - p_3) \cdot y_3 + q_3 =$

$=(1 - p_3) \cdot ((1 - p_2) \cdot (1 - p_1) \cdot (1 - p_0) \cdot y_0 + (1 - p_2) \cdot (1 - p_1) q_o +$

$+(1 - p_2) \cdot q_1 + q_2) + q_3 = (1 - p_3) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_1) \cdot (1 - p_0) \cdot y_0 +$

$+(1 - p_3) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_1) \cdot q_o + (1 - p_3) \cdot (1 - p_2) \cdot q_1 +$

$+(1 - p_3) \cdot q_2 + q_3$

За індукцією зробимо висновок, що

$$y_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - p_j) \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{n-2} q_i \cdot \prod_{k=j+1}^{n-i-1} (1 - p_k) + q_{n-1}.$$

Наслідок. Розв'язок лінійного однорідного різницевого рівняння першого порядку має вигляд:

$$y_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - p_j) \cdot y_0 \qquad [28].$$

2.3. Розв'язки лінійних різницевих рівнянь другого порядку. Критерій їх стійкості

Лінійним однорідним різницевим рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0, \qquad (2.3.1)$$

де a та b константи.

Рівняння (2.3.1) шукають у вигляді $x_t = \lambda^t$, а також користуються тим міркуванням, що лінійна комбінація розв'язків також є розв'язком.

Підставивши в рівняння , отримаємо $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$,звідси $\lambda^t \cdot (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$.

Рівняння $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ називають характеристичним.

1) Якщо $a^2 - 4b > 0$, то корені характеристичного рівняння будуть

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд $x_i = C_1 \cdot \lambda_1^t + C_2 \cdot \lambda_2^t$, де C_1 і C_2 довільні константи.

2) Якщо $a^2 - 4b = 0$,

$\lambda = -\frac{a}{2}$- двократний корінь характеристичного рівняння.

В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд:

$x_t = C_1 \cdot \lambda^t + C_2 \cdot t \cdot \lambda^t$, де C_1 і C_2 - довільні константи.

3) Якщо $a^2 - 4b < 0$,

то корені характеристичного рівняння

$$\lambda_1 = \frac{-a - i \cdot \sqrt{4b - a^2}}{2} = \alpha - i \cdot \beta,$$

$$\lambda_2 = \frac{-a + i \cdot \sqrt{4b - a^2}}{2} = \alpha + i \cdot \beta$$

Ці корені треба записати у тригонометричній формі

$$\lambda_1 = \rho \cdot (\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)),$$
$$\lambda_2 = \rho \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)),$$

де $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,, tg(\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}$.

В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд:

$$x_i = \rho^t (C_1 \cdot \cos(t \cdot \varphi) + C_2 \cdot \sin\,(t \cdot \varphi)),$$

де C_1 і C_2 - довільні константи.

Константи C_1 і C_2 знаходяться з початкових умов (тобто треба задати x_0 і x_1).

Лінійне однорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами завжди має тривіальний розв'язок $x_t = 0$.

Якщо всі інші розв'язки наближаються до нього, то він називається стійким, в протилежному випадку нестійким.

Якщо $|\lambda_1| < 1$ і $|\lambda_2| < 1$, то тривіальний розв'язок є стійким.

У випадку комплексних чисел під модулем розуміють модуль комплексного числа (тобто число ρ) [37].

Приклад. Знайти розв'язок різницевого рівняння $x_{n+2} - 5 \cdot x_{n+1} + 6 \cdot x_n = 0$ з початковими умовами $x_0 = 2, x_1 = 5$.

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Його корені $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Підставляючи початкові умови, отримаємо:

$$x_0 = C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot 3^0$$
$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 3^1.$$

Таким чином, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення C_1 та C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 + 3C_2 = 5 \end{cases}$$

Її розв'язок C_1 =1 ; C_2=1.

Таким чином $x_n = 2^n + 3^n$.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок різницевого рівняння

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Воно має єдиний двократний корінь λ = 3. Таким чином, загальний розв’язок рівняння

$$x_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок різницевого рівняння

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} + 13x_n = 0.$$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 4 + 3 \cdot i$, $\lambda_2 = 4 - 3 \cdot i$. Знайдемо тригонометричну форму коренів рівняння. Модуль коренів $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $tg\ (\varphi) = \frac{3}{4}$, $\varphi = arctg\left(\frac{3}{4}\right)$.

Таким чином, загальний розв’язок рівняння

$$x_n = \left(C_1 \cdot sin\left(arctg\left(\frac{3}{4}\right) \cdot n\right) + C_2 \cdot cos\left(arctg\left(\frac{3}{4}\right) \cdot n\right)\right) \qquad [55].$$

РОЗДІЛ 3. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ́ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

3.1. Перетворення Лапласа

Операційне числення будується на основі інтегральних перетворень, тобто операцій вигляду

$$F(p) = \int_a^b K(t,p)f(t)dt, \tag{3.1.1}$$

де функція $K(t,p)$ називається ядром перетворення. Існує декілька різних перетворень (Бесселя, Мелліна, Фур'є, Лапласа, Карсона-Хевісайда та ін.), які різняться межами інтегрування і ядром. Форма перетворення визначається характером задач, до розв'язання яких воно застосовується. Ми будемо розглядати перетворення Лапласа, яке є одним з найбільш уживаних.

Нехай $f(t)$ – дійсна або комплексна функція дійсної змінної *t* (під *t* будемо розуміти час або координату).

Функція $f(t)$ називається оригіналом, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) $f(t)$ – кусково-неперервна при $t \geq 0$, тобто вона неперервна або має точки розриву 1-го роду, причому, на кожному скінченному проміжку осі *t* таких точок тільки скінченна множина; $f(0) = f(+0)$;

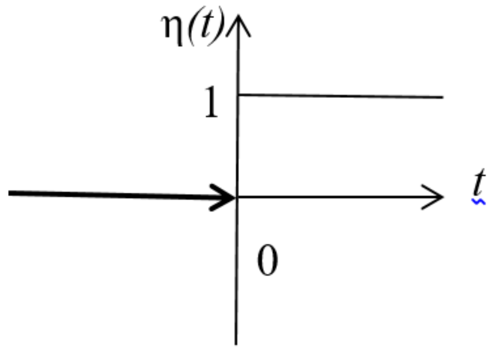
3) існують такі числа $M > 0$ i $s > 0$ що для усіх $t > 0$ виконується нерівність $|f(t)| < M \cdot e^{st}$, тобто при зростанні *t* функція $f(t)$ може зростати не швидше деякої експоненціальної функції e^{st}. Число $s_0 \geq 0$, таке, що подана нерівність виконується при $s < s_0$ і не виконується при $s < s_0$, називається показником зростання функції $f(t)$.

Перша умова означає, що деякий фізичний процес, який описує функція $f(t)$, починається у момент часу *t=0* і розвиток цього процесу до початкового моменту (тобто при $t < 0$) не має значення. Третій умові задовольняють обмежені функції ($s_0 = 0$ степеневі $t^n (n > 0)$ й багато інших. Однак не є оригіналами, наприклад, функції вигляду $f(t) = Me^{t^2}$ (не виконується умова 3), функції $f(t) = \frac{a}{t^n}, n > 0$ (не виконується умова 2). Відзначимо, що умови 1) – 3) виконуються для більшості функцій, що описують реальні фізичні процеси. Зазначимо також, що комплексна функція дійсної змінної $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ буде оригіналом тільки у тому випадку, якщо обидві дійсні функції $f_1(t)$ і $if_2(t)$ також будуть оригіналами [20].

Найпростішим оригіналом є функція вигляду

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

яка називається одиничною функцією або функцією Хевісайда. Її графік наведений на рисунку 3.1.



Функція Хевісайда

Рисунок 3.1.

Неважко бачити, що, якщо довільна функція *f(t)* задовольняє умовам 2), 3), але не задовольняє умові 1), то функція $f(t) \cdot \eta(t)$ задовольняє усім умовам, тобто є оригіналом. Тому, зазвичай. заради скорочення записів множник $\eta(t)$ опускають, маючи на увазі, що усі функції *f(t)*, які розглядаються у якості оригіналів, дорівнюють 0 при від'ємних значеннях *t*.

Зображенням за Лапласом (далі просто зображення) оригінала *f(t)* називається функція *F(p)* комплексної змінної $p = s + i\sigma$ така, що визначається інтегральним перетворенням

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \qquad (3.1.2)$$

яке називається *перетворенням або оператором Лапласа*. Неважко бачити, що у (3.1) межі інтегрування *a=0, b=+∞,* а ядро перетворення $K(t,p) = e^{-pt}$. Інтеграл справа у (3.1.2) називається *інтегралом Лапласа*. Функція *F(p)* визначена на множині тих значень *p*, при яких інтеграл Лапласа збігається, і *F(p)*→ 0 при $Re\, p \to +\infty$.

Відповідність між оригіналом *f(t)* та зображенням *F(p)* будемо записувати у вигляді *f(t)*→ $F(p)$ (існує й багато інших позначень перетворення Лапласа, наприклад, *f(t)=F(p)*, $f(t) \leftarrow F(p)$, $F(p) = L\{f(t)\}, \dots$). Оригінал будемо позначати малою буквою, а його зображення - відповідною великою, наприклад,$x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$ [38]

Приклад 1. Знайти зображення одиничної функції *η(t).*

Розв'язання. За означенням (3.1.2) перетворення Лапласа при $s = Rep > 0$ $(s_0) = 0$ знаходимо

$$F(p) = \int_0^\infty \eta(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-pt} dt = = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{p} \cdot$$

$$e^{-pt} \Big|_0^b = -\frac{1}{p}\left(\lim_{b\to\infty} e^{-bt} - e^0\right) = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p}.$$

Отже,

$$\eta(t) \to \frac{1}{p} \text{ або } 1 \to \frac{1}{p}. \qquad (3.1.3)$$

Приклад 2. Знайти зображення функції e^{at} , де а – довільне число. Розв'язання. Візьмемо таке *p*, що $Re\, p > Re\, a$. Тоді за означенням (3.1.2) перетворення Лапласа знаходимо

$$F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty\infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt =$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \frac{1}{p-a} \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-(p-a)\cdot b}\right) =$$

$$= \frac{1}{p-a}\left(1 - \lim_{b\to\infty} e^{-(Re\,p - Re\,a)\cdot b}\right) = \frac{1}{p-a},$$

оскільки $\lim_{b\to\infty} e^{-(Re\,p - Re\,a)\cdot b} = 0$ при $Re\,p > Re\,a$.

Отже,

$$e^{at} \to \frac{1}{p}\ (Re\,p > Re\,a) \qquad (3.1.4)$$

Відшукання зображень безпосередньо за означенням пов'язане з обчисленням невласних інтегралів і може бути достатньо складною задачею. У багатьох випадках для цього набагато зручніше використовувати властивості перетворення Лапласа. Наведемо найважливіші з цих властивостей [8].

3.2. Основні властивості перетворення Лапласа

Теорема додавання (лінійність перетворення Лапласа). Лінійній комбінації оригіналів відповідає та ж сама лінійна комбінація зображень, тобто, якщо $f_i(t) \to F_i(p)$, то для будь-яких комплексних сталих $a_i(i = \overline{1,n})$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p) \qquad (3.2.1)$$

Справедливість формули (3.2.1) випливає з означення (3.1.2) перетворення Лапласа і того, що інтегрування є лінійною операцією.

Приклад 1. Знайти зображення функцій $\cos t$, $\sin t$, sht i cht.

Розв'язання. Оскільки $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $sht = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$, $cht = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$, то за формулою (3.1.4) і властивістю (3.2.1) маємо

$$sint \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{p^2+1}, \quad cost \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1},$$

$$sht \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}, \quad cht \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}$$

Теорема подібності. Якщо функція $f(t)$є оригіналом й $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого числа $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \tag{3.2.2}$$

Доведення. Нехай u=αt. Тоді $t = \frac{u}{\alpha}, dt = \frac{1}{\alpha} du$. Отже,

$$\int_0^\infty f(\alpha t)\, e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(u)\, e^{-\frac{p}{\alpha}u} \frac{1}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

оскільки неважливо, якою буквою позначена змінна інтегрування [50].

Приклад 2. Знайти зображення функцій $\sin at$, $\cos at$, $sh\ at, ch\ at$.

Розв'язання. За властивістю (3.2.2) з попереднього маємо

$$\sin at \to \frac{1}{a} \frac{1}{(\frac{p}{a})^2 + 1} = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \cos at \to \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{(\frac{p}{a})^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + a^2}, \tag{3.2.3}$$

$$sh\ at \to \frac{1}{a} \frac{1}{(\frac{p}{a})^2 - 1} = \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad ch\ at \to \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{(\frac{p}{a})^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - a^2} \tag{3.2.4}$$

Теорема зсунення. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом й $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого числа α

$$e^{-\alpha t} f(t) \to F(p + \alpha). \tag{3.2.5}$$

Доведення. Безпосередньо з означення (3.2.2) маємо

$$e^{-\alpha t} \to \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(\alpha+p)t} dt = F(p + \alpha).$$

Приклад 3. Знайти зображення функцій $e^{at} \sin bt$ та $e^{at} \cos bt$.

Розв'язання. За властивістю (3.2.5) (де α замінюємо на $-a$) та за формулами (3.2.6) маємо

$$e^{at}\sin bt \to \frac{b}{(p-a)^2+b^2}, \quad e^{at}\cos bt \to \frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}. \tag{3.2.6}$$

Теорема запізнювання. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом й $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого числа $t_0 > 0$

$$f(t-t_0) \to e^{-t_0 p}F(p) \tag{3.2.7}$$

Зауваження. Теорема запізнювання є двоістою до теореми зсунення. Термін *"запізнювання"* означає, що якщо функція $f(t)$ є оригіналом і описує деякий фізичний процес, то функція $f(t-t_0)$ *також є оригіналом* і описує *той самий процес*, але *такий*, що почався із *затримкою* на час t_0 . Тому графік функції $f(t-t_0)$ утворюється шляхом зсуву графіка функції $f(t)$ праворуч на t_0 одиниць згідно рисунку 3.2. Функцію $f(t-t_0)$ називають оригіналом із запізнюванням

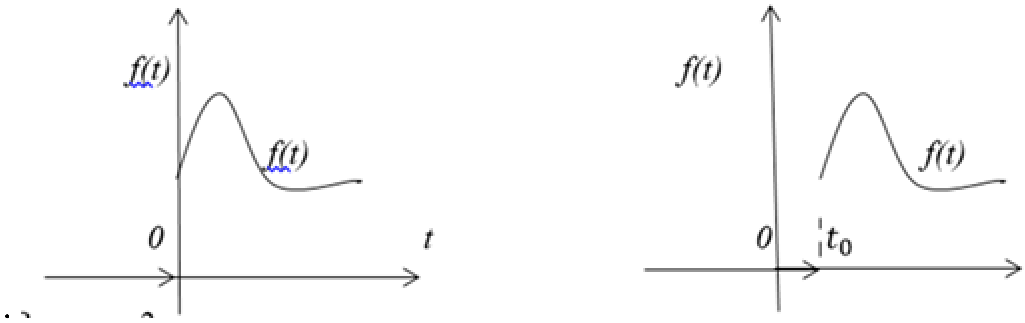


Рисунок 3.2 Оригінал із запізнюваням

Доведення. Нехай $u = t - t_0$. Тоді $t = u + t_0,\ dt = du$. При зміненні t від 0 до ∞ змінна u змінюється від $-t_0$ до ∞ . Отже,

$$\int_0^\infty f(t-t_0)e^{-pt}dt = \int_{-t_0}^\infty f(u)e^{-(u+t_0)}du = \int_{-t_0}^\infty f(u)e^{-pu}du\,.$$

Але ж $f(u) = 0$ при $u < 0$, тобто на інтервалі $(-t_0, 0)$. Тому

$$e^{-pt_0}\int_{-t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-pu}du = e^{-pt_0}F(p).$$

Із використанням теореми запізнювання дуже зручно знаходити зображення кусково-неперервних функцій, а також функцій, що описують імпульсні процеси [22].

Приклад 4. Знайти зображення узагальненої одиничної функції

$$\eta(t-t_0)=\begin{cases}1, & t\geq t_0,\\ 0, & t<t_0\end{cases} \qquad (3.2.8)$$

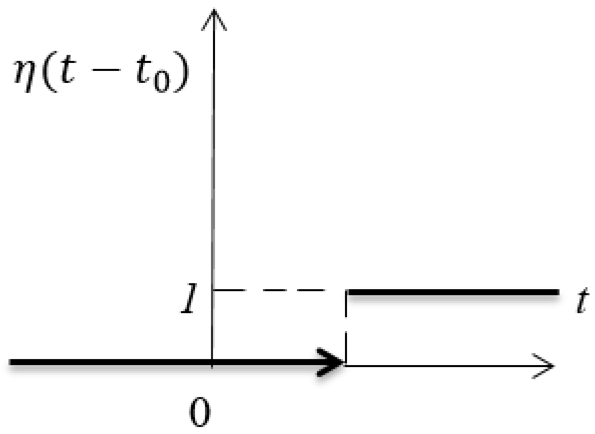


Рисунок 3.3 Узагальнена одинична функція

Розв'язання. Оскільки $\eta(t)\to\frac{1}{p}$, то за теоремою запізнювання

$$\eta(t-t_0)\to\frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Узагальнена одинична функція виявляється дуже корисною для опису імпульсних і кусково-неперервних функцій. Цей опис базується на формулі

$$f(t)=\varphi(t)\cdot[\eta(t-a)-\eta(t-b)], \qquad (3.2.9)$$

за допомогою якої подається функція $f(t)=\begin{cases}0, \ t<a, \ t>b,\\ \varphi(t)\neq 0 \ \forall t\in(a,b)\end{cases}$ (рис. 3.4).

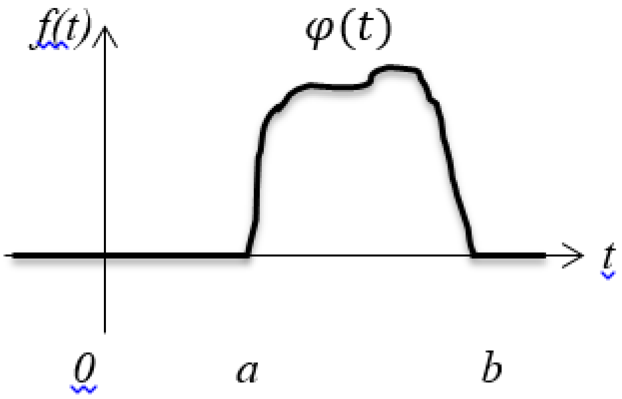


Рисунок 3.4 Графік функції $f(t)$

Зауваження. Слід відрізняти звичайний оригінал $f(t-t_0)\cdot\eta(t)$від оригіналу із запізнюванням $f(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0)$ (рис. 3. 5). Отже, щоб уникнути

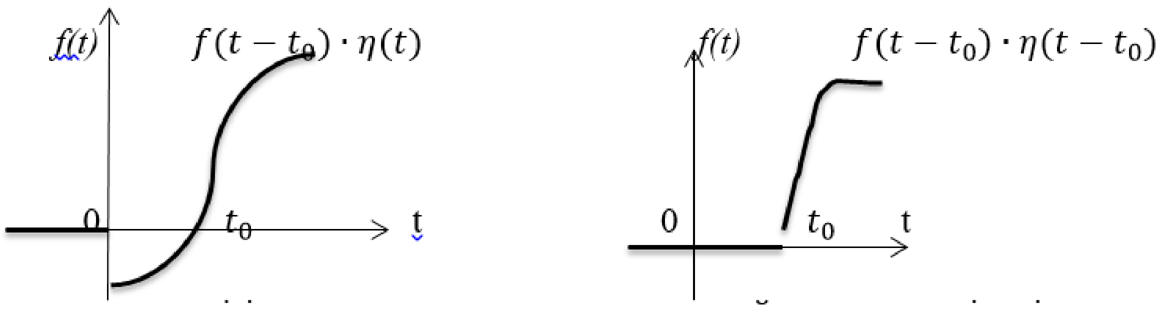


Рисунок 3.5 Графік оригіналу (зліва) і графік із запізнюванням (справа)

неоднозначності і не уточнювати кожен раз, який саме з оригіналів мається на увазі, домовимося надалі множник $\eta(t-t_0)$ у запису оригіналу із запізнюванням не опускати і застосовувати теорему запізнювання у вигляді

$$f(t-t_0)\eta(t-t_0)\to e^{-t_0p}F(p). \qquad (3.2.10)$$

Приклад 4. Знайти зображення імпульсної функції $f(t)=\begin{cases}0, & t<3,\\ h, & 3\le t<5,\\ 0, & t\ge 5.\end{cases}$

Розв'язання. Графік функції наведений на рис. 6.

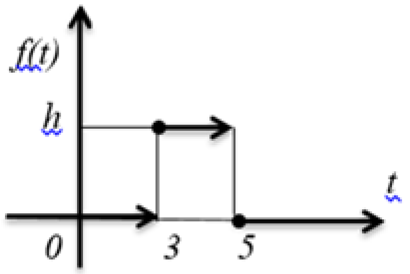


Рисунок 3.6 Зображення імпульсивної функції

За формулою (3.2.10) задана функція може бути записана у вигляді

$$f(t) = h\cdot[\eta(t-3) - \eta(t-5)].$$

Тоді за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t) \to h\left(e^{-3t}\frac{1}{p} - e^{-5t}\frac{1}{p}\right) = h\frac{e^{-3t}}{p}(1-e^{-2t}).$$

Приклад 6. Знайти зображення кусково-неперервної функції, графік якої зображений на рис. 3.7.

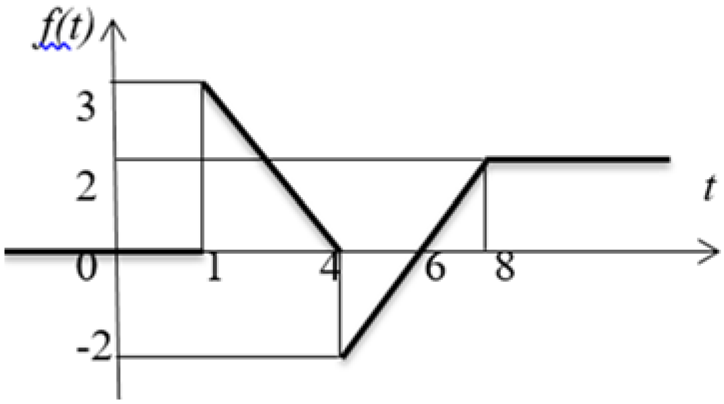


Рисунок 3.7 Кусково неперервна функція

Розв’язання. Опишемо задану функцію:

$$\begin{cases} 0, & t < 1, \\ 4-t, & 1 < t < 4, \\ t-6, & 4 < t < 8, \\ 2, & t > 8. \end{cases}$$

Тоді, за формулою (3.2.9), вона може бути подана у вигляді

$$f(t) = (4-t)\cdot[\eta(t-1) - \eta(t-4)] + (t-6)\cdot[\eta(t-4) - \eta(t-8)] + 2\eta(t-8)$$

або

$$f(t) = (4-t)\cdot\eta(t-1) + 2(t-5)\cdot\eta(t-4) + (8-t)\cdot\eta(t-8).$$

Отже, за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t) \to F(p) = \left(\frac{4}{p} - \frac{1}{p^2}\right) \cdot e^{-p} + 2\left(\frac{1}{p^2} - \frac{5}{p}\right) \cdot e^{-4p} + (\frac{8}{p} - \frac{1}{p^2}) \cdot e^{-8p}.$$

Теорема запізнювання має особливе значення в теорії керування. Користуючись нею, можна досліджувати системи з ланками, що запізнюються, кусково-неперервні функції, зокрема, "східчасті" функції, що на практиці описують скидання або приєднання сталих навантажень [33].

Теорема про диференціювання оригіналу. Нехай функція $f(t)$ та її похідні $f'(t), f''(t), f'''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ є оригіналами, причому, $f(t) \to F(p)$.

Тоді

$$f'(t) \to pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \to p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \to p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0),$$

……………………………………………………….

$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0),$$

$$f^{(i)}(0) = \lim_{t\to 0+0} f^{(i)}(t) \quad (i = 0,1, \ldots, n-1).$$

Ця теорема є одним з найважливіших обґрунтувань застосування перетворення Лапласа до розв'язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь і систем таких рівнянь.

Приклад 7. Знайти зображення диференціального виразу

$x''(t) + 5x'(t) - 7x(t) + 2$ при початкових умовах $x(0) = 4$, $x'(0) = 0$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу $x'(t) \to pX(p) - 4$, $x''(t) \to p^2X(p) - 4p - 0$. За властивістю лінійності $x''(t) + 5x'(t) - 7x(t) + 2 \to p^2X(p) - 4p + 5pX(p) - 20 - 7X(P) + \frac{2}{p} =$ $(p^2 + 5p - 7)X(p) - 4(p + 5) + \frac{2}{p}$. (Тут враховано, що $2 = 2\eta(t) \to 2 + \frac{1}{p}$).

Теорема про інтегрування оригіналу. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом й $f(t) \to F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}, \tag{3.2.11}$$

тобто *інтегруванню оригіналу від 0 до t відповідає ділення зображення на p* .

Приклад 8. Знайти зображення інтеграла $\int_0^t (u - \cos u)du$.

Розв'язання. Оскільки $f(t) = t - \cos t$ є оригіналом і $t - \cos t \to \frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1}$, то за теоремою про інтегрування оригіналу

$$\int_0^t (u - \cos u)du \to \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Теорема про диференціювання зображення. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом й $f(t) \to F(p)$, то

$$-t \cdot f(t) \to F'(p), \tag{3.2.12}$$

тобто множенню оригіналу на $-t$ відповідає диференціювання зображення.

Доведення.

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{dp}(e^{-pt})f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty (-t)e^{-pt}f(t)dt = -\int_0^\infty e^{-pt}tf(t)dt \leftarrow -tf(t).$$

Аналогічно

$$F''(p) = \frac{d}{dp}(-\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt) = \int_0^\infty \frac{d}{dp}(e^{-pt})f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}t^2f(t)dt \leftarrow t^2f(t).$$

Послідовне застосування (3.2.12) дає

$$-t^3f(t) \to F'''(p),$$

……………………..

$$(-1)^n t^n f(t) \to F^{(n)}(p)$$

Приклад 9. Знайти зображення функцій $t^n (n \in N), t\sin at, t\cos at$. Розв'язання. Оскільки $1 \to \frac{1}{p}$, то за (2.16) маємо $-t \cdot 1 \to -\frac{1}{p^2}$. Далі знаходимо $-t^2 \to (\frac{1}{p^2})_p^I = -\frac{2}{p^3}$, тобто $t^2 \to \frac{2!}{p^3}$. Продовжуючи диференціювання, отримаємо

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Оскільки sin $\sin at \to \frac{a}{p^2+a^2}$, то $\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)_p^I \to -tsin\, at,$ тобто $-\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2} \leftarrow -tsin\, at$, звідки $t\sin at \to \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$.

Аналогічно знаходимо $t\cos at \to \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$ [15].

Теорема про інтегрування зображення. Якщо *f (t) → F(p)* і $\frac{f(t)}{t}$ теж є оригіналом, то

$$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^\infty F(q)dq, \qquad (3.2.13)$$

тобто діленню оригіналу на t відповідає інтегрування зображення від *p* до ∞ .

Приклад 10. Знайти зображення функцій $\varphi(t) = \frac{\sin at}{t}$ й $\varphi(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$.

Розв'язання. Оскільки границя $\lim\limits_{t\to 0+0} \frac{\sin at}{t} = a$ є скінченною, то $\varphi(t) = \frac{sin\, at}{t}$ є оригіналом. Оскільки $f(t) = \sin at \to \frac{a}{p^2+a^2} = F(p)$, то, на підставі теореми про інтегрування зображення (3.2.13),

$$\frac{\sin at}{t} \to \int\limits_p^\infty \frac{a}{q^2+a^2} dq = a \cdot \frac{1}{a} \cdot \lim_{B\to\infty} arctg \frac{q}{a}\Big|_p^B = \frac{\pi}{2} - arctg \frac{p}{a}.$$

Зауваження. З останнього співвідношення випливає, що

$$\int\limits_p^\infty \frac{\sin at}{t} e^{-pt} dt = \frac{\pi}{2} - arctg \frac{p}{a}$$

При p = 0 маємо

$$\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

Функція $Si(t) = \int_0^t \frac{sin\tau}{\tau} d\tau$ називається *інтегральним синусом*. Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу маємо

$$Si(t) \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\, p\right).$$

Щоб викласти наступну властивість, введемо поняття згортки функцій. Нехай функції *f (t)* й *g(t)* неперервні при $t \geq 0$. Згорткою цих функцій називається інтеграл

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Згортка позначається $f * g$, тобто

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (3.2.14)$$

Дія отримання згортки називається згортанням функцій. Операція згортання підкорюється законам комутативності, асоціативності і дистрибутивності відносно додавання. Зокрема, $f * g = g * f$, звідки

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Крім того, $|f * g| \leq |f| * |g|$. Згортка є неперервною функцією, а якщо *f (t)* й *g(t)* є оригіналами з показниками зростання s_1 і s_2, то їх згортка також є оригіналом з показником зростання $s_0 \leq \max\{s_1, s_2\}$.

Приклад 11. Знайти зображення згортки функцій $f(t) = t$ й $g(t) = e^t$.

Розв'язання. Оскільки обидві функції неперервні при $t \geq 0$, то за (3.2.14).

$$f * g = \int_0^t \tau \cdot e^{t-\tau} d\tau = \begin{vmatrix} u = \tau, & dv = e^{t-\tau}d\tau \\ dt = d\tau, & v = -e^{t-\tau} \end{vmatrix} =$$

$$= -\tau \cdot e^{t-\tau} \Big|_0^t + \int_0^t e^{t-\tau} d\tau = -t \cdot e^{t-\tau} \Big|_0^t =$$

$$= -t - 1 + e^t \to -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Теорема про множення зображень (теорема Бореля). Якщо функції $f(t)$ й $g(t)$ є оригіналами і $f(t) \to F(p)$ й $g(t) \to G(p)$, то

$$f(t) * g(t) \to F(p) \cdot G(p), \qquad (3.2.15)$$

тобто *згортці двох функцій відповідає добуток зображень цих функцій.*

Так у попередньому прикладі за теоремою Бореля $t * e^t \to \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1}$.

При розв'язуванні задач (зокрема при відшуканні оригіналів за заданими зображеннями, коли зображення подається у формі добутку з відомими оригіналами множників) корисним може бути зворотне формулювання:

$$F(p) \cdot G(p) \leftarrow f(t) * g(t),$$

тобто добутку зображень відповідає згортка оригіналів.

Приклад 12. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)} \cdot \frac{1}{(p^2 + a^2)}$$

і $\frac{1}{p^2+a^2} \leftarrow \frac{1}{a} \cdot \sin at$, то за теоремою Бореля

$$F(p) \leftarrow \int_0^t \frac{1}{a} \cdot sin\, a\tau \cdot \frac{1}{a} \sin a\,(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \int_0^t (\cos a(2\tau - t) - \cos at) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{2a} \cdot sin a(2\tau - t) \Big|_0^t - \cos at \cdot \tau \Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\frac{1}{a} \sin at - t cos\, at\right) = \frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cdot \cos at),$$

$$\text{тобто } \frac{1}{(p^2+a^2)^2} \leftarrow \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cdot\cos at).$$

Наслідок (інтеграли Дюамеля). З теореми про диференціювання оригіналу та теореми Бореля безпосередньо випливає наступне співвідношення, яке називається інтегралом (формулою) Дюамеля за ім'ям математика, який уперше (1853 р.) застосував його при розв'язуванні задач динаміки:

$$p\cdot F(p)\cdot G(p) \leftarrow \int_0^t f(\tau)\cdot g'(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0) \qquad (3.2.16)$$

Доведення. Інтеграл у правій частині (3.2.16) є згорткою функцій $f(t)$ й $g'(t)$, тобто

$$\int_0^t f(\tau)\cdot g'(t-\tau)d\tau = f(t) * g'(t).$$

За властивістю лінійності і теоремою про множення зображень будемо мати

$$g(0)\cdot f(t) + f(t) * g'(t) \rightarrow g(0)\cdot F(p) + F(p)\cdot[p\cdot G(p) - g(0)] = p\cdot F(p)\cdot G(p).$$

З урахуванням комутативності згортки отримуємо ще три аналогічні співвідношення:

$$p\cdot F(p)\cdot G(p) \leftarrow \int_0^t g'(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0) \qquad (3.2.17)$$

$$p\cdot F(p)\cdot G(p) \leftarrow \int_0^t g(\tau)\cdot f'(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(0) \qquad (3.2.18)$$

$$p\cdot F(p)\cdot G(p) \leftarrow \int_0^t f'(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t) \qquad (3.2.19)$$

З формул (3.2.16-3.2.19) ми можемо зробити висновок, що, якщо одна з даних функцій диференційована, а друга є неперервною, то згортка даних функцій є диференційовною. Інтеграли Дюамеля використовують для відшукання оригіналів і зображень, також для розв́язування диференціальних рівнянь, які мають нульові початкові умови (а саме метод Дюамеля).

Приклад 13. Знайти оригінал, що відповідає зображеню

$$F(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Розв′язання: Оскільки

$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1}$ i $\frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t = f(t)$, $\frac{p}{p^2+1} \leftarrow \cos t = g(t)$,

То за формулою Дюамеля (3.2.16)

$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \leftarrow 2\int_0^t cos\tau \cdot \cos(t-\tau)\, d\tau + \sin 0 \cdot \cos t = 2\int_0^t \frac{1}{2}(\cos(2\tau - t) + \cos t) d\tau = \frac{1}{2}\sin(2\tau - t)\Big|_0^t + \cos t \cdot \tau \Big|_0^t = sint + t \cdot \cos t$ [42]

Зведенні перетворення Лапласа зведені у табл. 1.

3.3. Обернене перетворення Лапласа

Розглянемо інтеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp \quad , \qquad (3.3.1)$$

взятий вздовж прямої $Re\, p = a > 0$, яка проходиться знизу вгору. Позначимо ще через Γ_R та Γ'_R частини кола

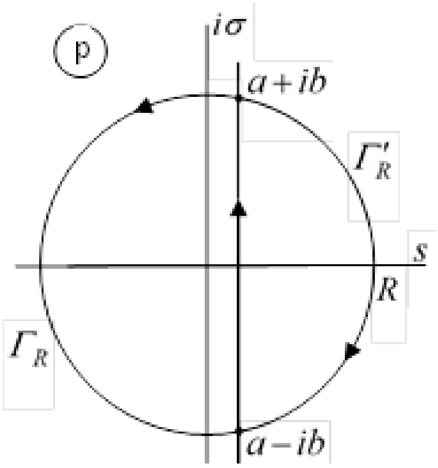


Рисунок 3.8 Одинична функція

$|p| = R$, які знаходяться відповідно ліворуч та праворуч від прямої $Re\, p = a$, а через $a - ib$ та $a + ib$ - кінці Γ_R та Γ'_R (рис.3.8) [5].

Нехай $t > 0$; оскільки $\frac{1}{p} \to 0$ при $R \to +\infty$ рівномірно відносно $\arg p$, то за лемою Жордана з курсу теорії функції комплексної змінної (замінюємо в лемі iz на p) маємо:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=0.$$

Тому з теореми Коші про лишки, згідно з якою

$$\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp+\int_{\Gamma_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=2\pi i\,\underset{p=0}{res}\frac{e^{pt}}{p}=2\pi i,$$

при $R\to+\infty$ дістанемо

$$f(t)=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp=1\,(t>0).$$

Якщо $t<0$, то за тією ж лемою Жордана (замінюємо тепер в лемі iz на $-p$) маємо:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma'_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=0,$$

а за теоремою Коші

$$\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp+\int_{\Gamma'_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=0,$$

звідки при $R\to+\infty$ дістаємо

$$f(t)=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp=0\,(t<0).$$

Отже, інтеграл (3.3.1) являє собою одиничну функцію. Зрозуміло, що, якщо замінити t на $t-\tau$, де τ - фіксоване число, то дістанемо функцію

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{p(t-\tau)}}{p}dp=\eta(t-\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ 1, & t>\tau.\end{cases} \tag{3.3.2}$$

Підставляючи в (3.3.2) $\tau=\tau_1$, а потім $\tau=\tau_2>\tau_1$ і віднімаючи отриманий другий інтеграл від першого, дістаємо представлення східчастої функції

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\frac{e^{-p\tau_1}-e^{-p\tau_2}}{p}dp=\begin{cases}0, & t<\tau_1,\\ 1, & \tau_1<t<\tau_2,\\ 0, & t>\tau_2.\end{cases} \tag{3.3.3}$$

Нехай тепер $f(t)$ - довільний оригінал. Зафіксуємо деяке $u > 0$ і розіб′ємо відрізок $[0; u]$ на частини з допомогою точок τ_k: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = u$. Розглянемо східчастої функцію $h(t)$, яку визначимо так:

$h(t) = 0$, якщо $t \notin [0; u]$; $h(t) = f(\tau_k)$, якщо $\tau_k < t < \tau_{k+1}$, $k = 0,1,2, \dots, n-1$.

Позначимо ще $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Скориставшись представленням (3.3.3), функцію $h(t)$ можемо подати у вигляді інтеграла

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p}dp = ,$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)e^{-p\tau_k}\Delta'\tau_k\right)dp \qquad (3.3.4)$$

де $\Delta'\tau_k = \dfrac{1 - e^{-p\Delta\tau_k}}{p} = \Delta\tau_k - \dfrac{(\Delta\tau_k)^2}{2!}p + \dfrac{(\Delta\tau_k)^3}{3!}p^2 - \dots$.

Якщо тепер число n збільшувати так, щоб $\max\Delta\tau_k$ прямувало до нуля, то $\Delta'\tau_k$ буде нескінченно малою величиною, еквівалентною $\Delta\tau_k$, і сума в дужках у формулі , яка мало відрізняється від інтегральної для функції $f(\tau)e^{-p\tau}$ на проміжку $[0; u]$, перейде в інтеграл. Тому логічно очікувати, що ми дістанемо інтегральне представлення функції $f(t)$ на інтервалі $(0; u)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left(\int_0^u f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right)dp .$$

Спрямувавши u до $+\infty$, отримаємо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left(\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right)dp .$$

Але інтеграл в дужках є перетворенням Лапласа функції $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau . \qquad (3.3.5)$$

Тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp . \qquad (3.3.6)$$

Формула (3.3.6) називається оберненим перетворенням Лапласа.

Сформулюємо остаточний результат.

Теорема. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ - зображенням для $f(t)$, то в будь-якій точці t, де $f(t)$ задовольняє умові Гьольдера, справедлива рівність (3.3.6), де інтеграл береться вздовж довільної прямої $Re\, p = a > s_0$ в розумінні головного значення.

Безпосередньо з вищезгаданої теореми випливає така теорема.

Теорема. Оригінал $f(t)$ цілком визначається своїм зображенням $F(p)$ з точністю до значень в точках розриву функції $f(t)$.

Справді, за теоремою визначення інтегралу, з функції, що задовольняє умову Гельдера, значення оригіналу в точці його неперервності виражається через зображення $F(p)$ за формулою (3.3.5). Значення оригіналу в точках розриву, очевидно, не впливають на зображення. [14]

Наведемо ще, також без доведення, умови, достатні для того, щоб задана функція комплексної змінної $F(p)$ була зображенням деякого оригіналу.

Теорема. Якщо функція $F(p)$ аналітична в півплощині $Re\, p > s_0$, прямує до нуля при $p \to \infty$ в довільній півплощині $Re\, p \geq a > s_0$ рівномірно відносно $\arg p$ і інтеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)dp$ абсолютно збігається, то $F(p)$ є зображенням функції $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)dp$.

3.4. Операційний метод розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

Операційний метод особливо просто застосовується до розв′язування задач Коші для звичайних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Отже, нехай дано диференційне рівняння

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t), \qquad (3.4.1)$$

де $a_j = const,\ j = 1, 2, \ldots, n$, з початковими умовами

$$x(0)=x_0\,,\; x'(0)=x_1\,,\;\ldots,\; x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}\,. \qquad (3.4.2)$$

Вважатимемо, що $a_0 \neq 0$, а функція $f(t)$ і розв′язок $x(t)$ з його похідними до п–го порядку є оригіналами. Позначимо $X(p)$, $x(t)$, $F(p)$, $f(t)$. За правилом диференціювання оригіналу (формули $f'(t) = pF(p)$ та $f^{(n)}(t) = p^nF(p) - -p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$) та властивістю лінійності замість диференційного рівняння (3.4.1) з початковими умовами (3.4.2) одержуємо операторне рівняння

$$\left(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n\right)X(p) = F(p) + x_0\left(a_0p^{n-1} + \right.$$
$$\left. + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) + x_1\left(a_0p^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\right) + \ldots + x_{n-1}a_0$$

або

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p), \qquad (3.4.3)$$

де $A(p)$ та $B(p)$ - відомі многочлени. З цього рівняння легко знаходимо операторний розв′язок:

$$X(p) = \frac{F(p)+B(p)}{A(p)}\,. \qquad (3.4.4)$$

Якщо рівняння (3.4.1) з початковими умовами (3.4.2) має розв′язок $x(t)$, що задовольняє умовам, накладеним на оригінали (такий розв′язок в прийнятих умовах існує завжди), то цей розв′язок є оригіналом для $X(p)$ [25].

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв′язати задачу Коші

$$x'' - 4x = e^{-t}\,, \qquad x(0) = 2,\; x'(0) = -3\,.$$

Розв’язування.

Відповідно до (4.3) операторне рівняння запишеться так: $(p^2-4)X(p) = \dfrac{1}{p+1} + 2p - 3$. Його розв′язок

$$X(p)=\frac{2p^2-p-2}{(p+1)(p^2-4)}=\frac{2p^2-p-2}{(p+1)(p+2)(p-2)}$$

є раціональною функцією, тому, розкладемо його на суму елементарних дробів:

$$X(p)=-\frac{1}{3}\frac{1}{p+1}+2\frac{1}{p+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{p-2}.$$

Скориставшись формулою 2 із додатку, а також властивістю лінійності, знаходимо оригінал для цього зображення, який і буде шуканим розв′язком задачі Коші:

$$x(t)=-\frac{1}{3}e^{-t}+2e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$

Приклад 2. Розв′язати задачу Коші

$x^{IV}+2x''+x=\sin t,\ x(0)=0,\ x'(0)=0.$

Розв’язування. Операторне рівняння дістанемо у вигляді $(p^4+2p^2+1)X(p)=\frac{1}{p^2+1}$, звідки легко дістаємо його розв′язок:

$$X(p)=\frac{1}{(p^2+1)^3}.$$

Очевидно, він є аналітичною функцією в усій комплексній площині, за винятком точок $p_{1,2}=\pm i$, які є полюсами третього порядку. Тому, за другою теоремою розкладу, маємо:

$$x(t) = \underset{p=i}{res}\left(\frac{1}{\left(p^2+1\right)^3}e^{pt}\right) + \underset{p=-i}{res}\left(\frac{1}{\left(p^2+1\right)^3}e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)^3}(p-i)^3\right)\Bigg|_{p=i} + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}(p+i)^3}{\left(p^2+1\right)^3}\right)\Bigg|_{p=-i} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^3}\right)\Bigg|_{p=i} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3}\right)\Bigg|_{p=-i} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2(p+i)^2 - 6t(p+i) - 12}{(p+i)^5}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=i} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{t^2(p-i)^2 - 6t(p-i) - 12}{(p-i)^5}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=-i} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3-t^2\right)sin\,t - \frac{3}{8}t\,cos\,t.$$

Приклад 3. Знайти розв′язок рівняння

$$x'' + \omega^2 x = a(\eta(t) - \eta(t-b)$$

з нульовими початковими умовами.

Розв′язання.

За властивістю лінійності та теоремою запізнення

$$a\big(\eta(t) - \eta(t-b)\big) \leftarrow \frac{a}{p}(1 - e^{-bp}).$$

Враховуючи нульові початкові умови, маємо

$$x'' + \omega^2 x \leftarrow (p^2 + \omega^2 x)X(p).$$

Отже, операторне рівняння буде таким:

$$(p^2 + \omega^2 x)X(p) = \frac{a}{p}(1 - e^{-bp}).$$

Тоді $X(p) = \frac{a}{p\left(p^2+\omega^2\right)} + \frac{ae^{-bp}}{p\left(p^2+\omega^2\right)}$. Розклавши раціональний дріб на суму елементарних і скориставшись формулами 1 і 4 з таблиці додатку А:

$$\frac{a}{p(p^2+\omega^2)} = \frac{a}{\omega^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+\omega^2}\right) \leftarrow \frac{a}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) = \frac{2a}{\omega^2}sin^2\frac{\omega t}{2},$$

і за теоремою запізнення

$$\frac{ae^{-bp}}{p(p^2+\omega^2)} \leftarrow \frac{2a}{\omega^2} sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2} \eta(t-b),$$

тому $x(t) = \frac{2a}{\omega^2}\left(sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2}\eta(t) - sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2}\eta(t-b)\right)$.

Відзначимо особливу роль інтеграла Дюамеля. Нехай потрібно розв′язати лінійне диференційне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L[x] = f(t) \tag{3.4.5}$$

при нульових початкових умовах.

Якщо відомий розв′язок $x_1(t)$ рівняння

$$L[x] = 1 \tag{3.4.6}$$

з тією ж лівою частиною і правою рівною одиниці, також з нульовими початковими умовами, то інтеграл Дюамеля дозволяє записати розв′язок рівняння (3.4.5) без особливих труднощів.

Справді, операторні рівняння, які відповідають (3.4.5) та (3.4.6), мають вигляд

$$A(p)X(p) = F(p), \quad A(p)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

звідки

$$X(p) = pX_1(p)F(p).$$

Тоді, враховуючи, що $x_1(0) = 0$, за формулою Дюамеля (3.2.16) отримаємо потрібний розв′язок рівняння (3.4.5) з нульовими початковими умовами

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau, \tag{3.4.7}$$

який, з огляду на (3.4.7), може бути записаний ще й так:

$$x(t) = x_1(t)f(0) + \int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau, \tag{3.4.8}$$

Приклад 4. Розв′язати рівняння з початковими умовами

$$x'' - 4x' = \frac{1}{1+e^{-2t}}, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

Розв’язання. Спочатку шукаємо розв′язок задачі

$$x'' - 4x' = 1, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

Відповідне операторне рівняння матиме вигляд

$$(p^2 - 4p)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

тому $X_1(p) = \frac{1}{p^2(p-4)} = -\frac{1}{16}\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{p-4} \leftarrow -\frac{1}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}e^{4t} = x_1(t).$

Тут ми скористались властивістю лінійності, а також формулами 1, 2 і 7 з таблиці оригіналів та зображень додатку А.

Очевидно, $x_1(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t}$. За формулою (3.4.7) знаходимо шуканий розв′язок

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^{-2\tau}}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4(t-\tau)}\right)d\tau = -\frac{1}{4}\int_0^t \frac{e^{2\tau}}{e^{2\tau}+1}d\tau +$$

$$+\frac{1}{4}e^{4t}\int_0^t \frac{e^{-4\tau}}{1+e^{-2\tau}}d\tau = \frac{1}{8}\left(\left(e^{4t}-1\right)ln\frac{e^{2t}+1}{2} - e^{2t} + (1-2t)e^{4t}\right).$$ [46].

3.5. Операційний метод розв’язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

Нехай задано рівняння

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \quad \text{і} \quad y(0) = y_0 \neq 0;\ y'(0) = y_0' \neq 0.$$

Вимагатимемо, щоб розв’язок був оригіналом і $y(t) \leftarrow Y(p)$. Тоді відповідне рівняння у зображеннях можна записати у вигляді

$$Y(p)(p^2 + a_1p + a_2) = py_0 + y_0' + a_1y_0.$$

Розв’язком відповідного рівняння у зображеннях буде

$$Y(p) = \frac{y_0(p + a_1) + y_0'}{p^2 + a_1p + a_2}.$$

Випадок 1. Виконується умова

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0,$$

тоді знаменник $p^2 + a_1 p + a_2$ можна подати у вигляді $(p - \alpha_1)(p - \alpha_2)$, де корені α_1 і α_2 - дійсні і різні. Отже,

$$\frac{y_0(p + a_1) + y_0'}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2};$$

тому оригінал можна записати у вигляді

$$y(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Випадок 2. Виконуються умови

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2;$$

тоді $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -\frac{a_1}{2}$.

Розв'язок відповідного рівняння у зображеннях можна подати у вигляді суми двох дробів:

$$Y(p) = \frac{A_1}{(p - \alpha)^2} + \frac{A_2}{p - \alpha}.$$

Перехід до простору оригіналів приводить до виразу

$$y(t) = A_1 t e^{\alpha t} + A_2 e^{\alpha t} = e^{\alpha t}(A_1 t + A_2) = e^{-\frac{a_1}{2}t}(A_1 t + A_2).$$

Випадок 3. Виконується умова

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0.$$

Тепер корені α_1 і α_2 є комплексними. Розв'язок такої задачі можна знайти за методикою випадку 1, скориставшись потім формулою Ейлера:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} = b_1 \pm j b_2,$$

де

$$b_1 = -\frac{a_1}{2}; \quad b_2 = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

За своїм утворенням невизначені коефіцієнти A_1 і A_2 будуть також комплексно-спряженими

$$A_1 = \frac{y_0}{2} + j\frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}; \qquad A_2 = \frac{y_0}{2} - j\frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}$$

або

$$A_{1,2} = m_1 \pm jm_2,$$

де

$$m_1 = \frac{y_0}{2}; \qquad m_2 = \frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}.$$

Згідно з випадком 1, маємо

$$y(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} = (m_1 + jm_2)e^{(b_1 + jb_2)t} + (m_1 - jm_2)e^{(b_1 - jb_2)t} =$$

$$= e^{b_1 t}[(m_1 + jm_2)(\cos b_2 t + j\sin b_2 t) + (m_1 - jm_2)(\cos b_2 t - j\sin b_2 t)],$$

$$y(t) = e^{b_1 t}(2m_1 \cos b_2 t - 2m_2 \sin b_2 t) = 2e^{b_1 t}(m_1 \cos b_2 t - m_2 \sin b_2 t).$$

Цей самий результат можна отримати іншим шляхом. Маємо

$$Y(p) = \frac{y_0(p + a_1) + y_0'}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{y_0 p + y_0 a_1 + y_0'}{p^2 + 2\frac{a_1}{2}p + \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_2} =$$

$$= \frac{y_0 p + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} = \frac{y_0(p - b_1) + y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{y_0(p - b_1)}{(p - b_1)^2 + b_2^2} + \frac{y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2}.$$

Тут величини b_1 і b_2 мають той самий зміст, що й раніше, а $B = y_0 a_1 + y_0'$.

Знаходимо оригінали

$$\frac{y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} \leftarrow \frac{1}{b_2}(y_0 b_1 + B)e^{b_1 t} sin\, b_2 t = -2m_2\, sin\, b_2 t\,;$$

$$\frac{y_0(p - b_1)}{(p - b_1)^2 + b_2^2} \leftarrow y_0 e^{b_1 t} cos\, b_2 t = 2m_1 e^{b_1 t} cos\, b_2 t.$$

Знову розв’язок отримаємо у вигляді

$$y(t) = 2e^{b_1 t}(m_1\, cos\, b_2 t - m_2\, sin\, b_2 t) \text{ [25]}.$$

3.6.Операційний метод розв’язування лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Метод подібності

Вище було розглянуто розв'язування операційним методом лінійних рівнянь і систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Однак перетворення Лапласа дає змогу розв'язувати деякі лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Нехай коефіцієнтами рівняння $a_k(t)$ є многочлен відносно незалежної змінної. У рівнянні

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_k(t)y^{(k)} + \cdots + a_n(t) = q(t) \qquad (3.6.1)$$

з початковими умовами

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y_0'; \dots ; \; y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

Коефіцієнти a_k є многочленами від t:

$$a_k(t) = b_{0k}t^m + b_{1k}t^{m-1} + b_{2k}t^{m-2} + \cdots + b_{mk},$$

$$b_{ik} = const, \;\; i = \overline{1,m}. \qquad (3.6.2)$$

Іншими словами, ліва частина рівняння є лінійною комбінацією виразів виду

$$t^r y^{(k)}(t), \qquad (3.6.3)$$

де r і k - цілі додатні числа.

Застосовуючи перетворення Лапласа у виразі виду (3.6.3) і використовуючи обидві теореми про диференціювання (див. п. 3.3), одержуємо

$$y^{(k)}(t) \leftarrow p^k Y(p) - p^{k-1}y_0 -$$

$$-p^{k-2}y_0' - \cdots - py_0^{(k-2)} - y_0^{(k-1)} = F_k(p);$$

$$t^r y^{(k)}(t) \risingdotseq (-1)^r \frac{d^r F_k(p)}{dp^r}.$$

Виконавши такі перетворення для кожного доданку рівняння (3.6.1), отримаємо зображувальне рівняння, яке у цьому випадку буде диференціальним. Легко помітити, що порядок диференціального рівняння у зображеннях дорівнюватиме показнику найвищого степеня r многочленів (3.6.2). Звідси випливає, що застосування операційного методу до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами виду (3.6.2) за певних умов може привести до пониження порядку рівнянь [24].

Метод подібності. В інженерній практиці часто зустрічаються рівняння зі змінними коефіцієнтами більш загального вигляду, ніж розглянуті вище. Як правило, такі рівняння шляхом індивідуальних у кожному випадку перетворень зводяться до рівнянь з відомими розв'язками. Перша спроба систематизації цих методів привела до так званого методу подібності, який полягає в тому, що у вихідному рівнянні шукана функція або незалежні змінні (або одне і друге разом) замінюються на інші змінні за допомогою коефіцієнтів подібності. Якщо ці коефіцієнти сталі, то подібність називається лінійною, а якщо змінні, то подібність називається нелінійною. Заміна змінних у вихідному рівнянні дає змогу перетворити його на простіше або на рівняння, розв'язання якого є відомим. Зокрема, метод подібності дає змогу за певних умов перейти від лінійного рівняння зі змінними коефіцієнтами до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Припустимо, що задане лінійне рівняння другого порядку

$$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0. \qquad (3.6.4)$$

де $P_1(x)$ - неперервно диференційовна функція; $P_2(x)$ – неперервна функція.

Заміною шуканої функції співвідношенням

$$y(x) = u(x)Y(x), \qquad (3.6.5)$$

де $u(x)$ - коефіцієнт подібності, рівняння (3.6.4) зі змінними коефіцієнтами можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами a_1 і a_2:

$$Y''(x) + a_1Y'(x) + a_2Y(x) = 0. \qquad (3.6.6)$$

Після підстановки отримаємо рівняння

$$uY'' + (2u' + P_1u)Y' + (u'' + P_1u' + P_2u)Y = 0,$$

яке шляхом нескладних перетворень зводиться до вигляду

$$uY'' + \frac{2u' + P_1u}{a_1}a_1Y' + \frac{u'' + P_1u' + P_2u}{a_2}a_2Y = 0.$$

Для остаточного переходу до рівняння (3.6.6) треба, щоб виконувалися рівності

$$u = \frac{2u' + P_1 u}{a_1} = \frac{u'' + P_1 u' + P_2 u}{a_2}. \tag{3.6.7}$$

Одержані умови (3.6.7) є необхідними і достатніми. Припускаючи, що a_1 відоме, розв'яжемо перше рівняння системи (3.6.7):

$$u = exp\left[\frac{1}{2}\int [a_1 - P_1(x)]dx\right]. \tag{3.6.8}$$

Якщо підстановка (3.6.8) перетворює друге рівняння системи (3.6.7)

$$u = \frac{u'' + P_1 u' + P_2 u}{a_2}$$

на тотожність, то задача перетворення рівняння (3.6.4) на (3.6.6) є розв'язаною. Щоб виконати цю підстановку, знаходимо похідні

$$u' = \frac{1}{2}[a_1 - P_1(x)]exp\left[\frac{1}{2}\int [a_1 - P_1(x)]dx\right]; \tag{3.6.9}$$

$$u'' = \left\{-\frac{1}{2}\left(P_1'(x) + \frac{1}{4}[a_1 - P_1(x)]^2\right)\right\}exp\left[\frac{1}{2}\int [a_1 - P_1(x)]dx\right].$$

Підставляючи (3.6.8) і (3.6.9) в (3.6.7) і скорочуючи на експоненту, дістаємо

$$a_2 = -\frac{1}{2}P_1'(x) + \frac{1}{4}[a_1 - P_1(x)]^2 + \frac{1}{2}[a_1 - P_1(x)]P_1(x) + P_2(x).$$

Після спрощень маємо

$$\frac{1}{2}P_1'(x) + \frac{1}{4}P_1^2(x) - P_2(x) = \frac{1}{4}a_1^2 - a_2 = \text{const}.$$

Отже, необхідною і достатньою умовою перетворення вихідного рівняння (3.6.4) на рівняння (3.6.6) зі сталими коефіцієнтами є інваріант, що складається з коефіцієнтів вихідного рівняння:

$$I(x) = \frac{1}{2}P_1'(x) + \left[\frac{1}{2}P_1(x)\right]^2 - P_2(x) = \alpha = \text{const}. \tag{3.6.10}$$

Звідси випливає умова, що дає змогу вибрати коефіцієнти:

$$\frac{1}{4}a_1^2 - a_2 = \alpha.$$

Залишаючи a_1 довільним, отримаємо

$$a_2 = \frac{1}{4}a_1^2 - \alpha. \tag{3.6.11}$$

Тому

$$Y''(x) + a_1 Y'(x) + \left(\frac{1}{4}a_1^2 - \alpha\right)Y(x) = 0. \tag{3.6.12}$$

Загальна схема переходу від рівняння зі змінними коефіцієнтами до рівняння зі сталими коефіцієнтами є такою: а) складаємо вираз інваріанта $I(x)$ за формулою (3.6.10) і знаходимо величину α; б) вибираємо значення коефіцієнта a_1 і обчислюємо значення коефіцієнта a_2 за формулою (3.6.11).

Загальний розв'язок рівняння (3.6.12) можна знайти операційним методом. Перехід до розв'язання вихідного рівняння (3.6.4) здійснюємо за формулою (3.6.5). Якщо рівняння (3.6.4) було доповнено початковими умовами $y(0) = y_0$;

$y(0) = y_0$; $y'(0) = y_0'$, то рівняння (3.6.12) треба розв'язувати за таких початкових умов:

$$Y(0) = \frac{y_0}{u_0}; \quad Y'(0) = \frac{y_0' u_0 - y_0 u_0'}{u_0^2},$$

де $u_0 = u(0), u_0' = u'(0)$ обчислюють за формулою (3.6.9) при $x = 0$.

Покажемо, як і за яких умов здійснюється заміна незалежної змінної. Нехай дано лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0, \tag{3.6.4}$$

де $P_1(x)$ - неперервна, а $P_2(x)$ - неперервно диференційована функція у деякій області.

Здійснюємо перехід від незалежної змінної x до аргументу ξ за формулою

$$x = \eta(\xi)\xi$$

таким чином, щоб рівняння перейшло у рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$Y''(\xi) + a_1 Y'(\xi) + a_2 Y(\xi) = 0, \tag{3.6.5}$$

де $\eta(\xi)$ - коефіцієнт подібності для незалежної змінної, а $Y(\xi) = y(x)$. Перетворимо похідні:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{d\xi}}\frac{dy}{d\xi};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}\frac{d^2y}{d\xi^2}-\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3}\frac{d^2x}{d\xi^2}\frac{dy}{d\xi}. \tag{3.6.6}$$

Підставивши (3.6.6) у (3.6.4), одержимо

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}+\left[\frac{P_1(x)}{\frac{dx}{d\xi}}-\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3}\frac{d^2x}{d\xi^2}\right]\frac{dy(\xi)}{d\xi}+P_2(x)y(\xi)=0. \tag{3.6.7}$$

Домноживши другий і третій доданки відповідно на $\frac{a_1}{a_1}$ і $\frac{a_2}{a_2}$, дістанемо умови, за яких рівняння (3.6.7) переходить у (3.6.5):

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}=\frac{P_1(x)}{a_1\frac{dx}{d\xi}}-\frac{1}{a_1\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3}\frac{d^2x}{d\xi^2}=\frac{P_2(x)}{a_2}. \tag{3.6.8}$$

Із двох рівнянь системи (3.6.8) вибираємо одне:

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}=\frac{P_2(x)}{a_2}.$$

Його розв’язок неважко знайти, оскільки змінні відокремлюються:

$$d\xi=\sqrt{\frac{P_2(x)}{a_2}}dx;\ \ \xi=\int\sqrt{\frac{P_2(x)}{a_2}}dx. \tag{3.6.9}$$

Задача перетворення рівняння (3.6.4) на (3.6.5) буде розв’язана, якщо вираз (3.6.9) задовольняє і друге рівняння системи (3.6.8):

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}=\frac{P_1(x)}{a_1\frac{dx}{d\xi}}-\frac{1}{a_1\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3}\frac{d^2x}{d\xi^2}. \tag{3.6.10}$$

Отже, підставивши (3.6.9) в (3.6.10), одержимо умови перетворення рівняння. Із (3.6.10) випливає, що

$$\frac{dx}{d\xi}=\sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}};\ \ \frac{d^2x}{d\xi^2}=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)=\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}}\right)=$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}}\right)\frac{dx}{d\xi} = -\frac{a_2 P_2'(x)}{2P_2^2(x)}. \qquad (3.6.11)$$

Підставивши (3.6.11) у (3.6.10), отримаємо

$$\frac{P_2(x)}{a_2} = \frac{P_1(x)\sqrt{P_2(x)}}{a_1\sqrt{a_2}} + \frac{P_2'(x)}{2a_1\sqrt{a_2}\sqrt{P_2(x)}}.$$

Після перетворення знову дістанемо інваріант, який позначимо через β:

$$I(x) = \frac{P_1(x)}{\sqrt{P_2(x)}} + \frac{P_2'(x)}{2\sqrt{P_2^3(x)}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_2}} = \beta. \qquad (3.6.12)$$

Знайдений інваріант дає змогу визначити клас рівнянь вигляду (3.6.4), які можна перетворити на множину рівнянь вигляду (3.6.5) зі сталими коефіцієнтами, оскільки умова (3.6.12) є необхідною і достатньою.

Розв'язуючи (3.6.12) відносно першого коефіцієнта $P_1(x)$, дістаємо

$$P_1(x) = \beta\sqrt{P_2(x)} - \frac{P_2'(x)}{2P_2(x)}.$$

Звідси робимо висновок, що рівняння виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\beta\sqrt{P(x)} - \frac{P'(x)}{2P(x)}\right]\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (3.6.13)$$

підстановкою

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \sqrt{P(x)}dx$$

можна перетворити на рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} + \beta\sqrt{a}\frac{dY}{d\xi} + aY = 0. \qquad (3.6.14)$$

У формулах (3.6.13) і (3.6.14) коефіцієнти не мають індексів, оскільки вони всюди однакові. Якщо інваріант (3.6.12) дорівнює нулю ($\beta = 0$) перетворене рівняння набуває вигляду

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} + aY = 0.$$

Приклад. Розглянемо рівняння Бесселя

$$t^2x''(t) + tx'(t) + (t^2 - n^2)x(t) = 0 \quad (t > 0, n \in Z)$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1$.

Розв'язування.

Нехай $x(t) \to X(p)$.

Тоді $x'(t) \to pX(p) - x_0, \quad x''(t) \to p^2X(p) - px_0 - x_1$.

Далі за теоремою диференціювання зображень маємо

$$tx'(t) \to -\frac{d}{dp}[pX(p) - x_0] = -\frac{d}{dp}[pX(p)],$$

$$tx''(t) \to \frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p) - px_0 - x_1] = \frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p)],$$

Тоді рівняння Бесселя в зображеннях буде мати вигляд:

$$\frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p)] - \frac{d}{dp}[pX(p)] + \frac{d^2X(p)}{dp^2} - n^2X(p) = 0$$

або

$$(1 + p^2)\frac{d^2X(p)}{dp^2} + 3p\frac{dX(p)}{dp} + (1 - n^2)X(p) = 0. \qquad (3.6.15)$$

Для розв'язування рівняння (3.6.15) введемо нову незалежну змінну і нову шукану функцію формулами

$$p = \operatorname{sh} u, \qquad X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u}$$

Рівняння (3.6.15) перейде при цьому в наступне

$$z''(u) - n^2(u) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$z(u) = C_1e^{nu} + C_2e^{-nu}$$

Оскільки $p = \operatorname{sh} u$, то одержимо $\operatorname{ch} u = \sqrt{p^2 + 1}$. Враховуючи вирази для $\operatorname{sh} u$ і $\operatorname{ch} u$ через показникові функції, знаходимо

$$e^u = \sqrt{p^2 + 1} + p, \quad e^{-u} = \sqrt{p^2 + 1} - p,$$

так що

$$z(u) = C_1(\sqrt{p^2 + 1} + p)^2 + C_2(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n.$$

Отже, для $X(p)$ одержуємо

$$X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u} = \frac{C_1(\sqrt{p^2+1}+p)^n + C_2(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Знайдемо сталі інтегрування C_1 і C_2. Покладаючи $n = 0$ і $n = 1$, відповідно одержуємо

$$X(p) = \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{p^2+1}} \to J_0(t) \quad \text{і} \quad X(p) = C_1 + C_2 + \frac{p(C_1 - C_2)}{\sqrt{p^2+1}} \to J_1(t).$$

Користуючись граничною теоремою і враховуючи, що $J_0(0) = 1$ і $J_1(0) = 0$, маємо

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad C_1 + C_2 + C_1 - C_2 = 0.$$

Звідси $C_1 = 0,\ \ C_2 = 1$. Тоді

$$X(p) = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Таким чином, $x(t) = J_n(t)$.

3.7. Диференціальні рівняння з частинними похідними

Операційний метод успішно застосовується до розв′язування так званих нестаціонарних задач для рівнянь математичної фізики. Для простоти обмежимось випадком, коли шукана функція залежить від двох змінних x та t, з яких першу трактуватимемо як координату, а другу як час. Крім того, припустимо, що диференціальне рівняння має вигляд

$$L[u] = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{3.7.1}$$

де a, b, c, a_1, b_1 - функції, які залежать тільки від x, задані та неперервні на проміжку $0 \le x \le l$.

Нестаціонарна задача в нашому випадку формулюється так.

Знайти розв′язок $u(x, t)$ диференціального рівняння (3.7.1) для $0 \le x \le l$ та $t \ge 0$ який задовольняє заданим початковим умовам

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$$

(друга умова задається тільки, коли завжди $a > 0,\ a_1 < 0$) та крайовим умовам

$$u(0,\ t) = f(t), \quad \alpha \frac{\partial u(l,\ t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(l,\ t)}{\partial t} = \gamma u(l,\ t),$$

де $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - сталі.

Нестаціонарність задачі полягає в тому, що розглядається розв′язок, який істотно залежить від початкових умов („перехідний” режим фізичного процесу).

Припустимо, що $u,\ \frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, які розглядаються як функції *t*, є оригіналами, і позначимо зображення функції и через

$$U(p,\ x) = \int_0^{+\infty} u(x,\ t) e^{-pt} dt$$

Відповідно до наших припущень тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} \risingdotseq \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

(диференціювання U по x ми позначаємо з допомогою символу d, а не ∂, бо розглядаємо p тільки як параметр). За правилом диференціювання оригіналів дістаємо також

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU - u(x,\ 0), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq p^2 U - u(x,\ 0)p - \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t},$$

або, враховуючи початкові умови,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU - \varphi(x), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Припустимо ще, що $f(t)$ є оригіналом і $F(p) \risingdotseq f(t)$, тоді крайові умови дають

$$U\big|_{x=0} = F(p), \quad \left(\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi)\right)\bigg|_{x=l} = \gamma U\big|_{x=l}.$$

Отже, операційний метод приводить розв′язання поставленої вище нестаціонарної задачі для рівняння

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)$$

в частинних похідних до розв′язання звичайного диференційного рівняння

$$a\frac{d^2U}{dx^2} + b\frac{dU}{dx} + AU + B = 0 \tag{3.7.2}$$

де

$$A = c + a_1 p^2 + b_1 p, \quad B = -a_1 p - a_1 \psi - b_1 p$$

і p - комплексний параметр, при таких граничних умовах:

$$U\big|_{x=0} = F(p), \quad \left(\alpha\frac{dU}{dx} + (\beta p - \gamma)U - \beta\varphi\right)\bigg|_{x=l} = 0 \tag{3.7.3}$$

Зауваження. Наведені вище міркування показують, що при заданих умовах зображення U розв′язку и нестаціонарної задачі задовольняє рівнянню (3.7.2) і граничній задачі (3.7.3). Якщо відомо, що нестаціонарна задача має єдиний розв′язок, який задовольняє разом зі своїми частинними похідними перших двох порядків по x умовам 1^0 - 3^0, накладеними на оригінали, і якщо задача (3.7.3) для рівняння (3.7.2) має єдиний розв′язок U, то розв′язок сформульованої вище задачі (3.7.1) для рівняння (3.7.2) можна дістати як оригінал для U. [27]

3.8. Застосування операційного методу до розв’язування різницевих рівнянь

Скінченно-різницеве рівняння

$$a_0 x(n) + a_1 x(n+1) + \cdots + a_k x(n+k) = u(n), \tag{3.8.1}$$

за допомогою формули

$$f(n+k) = \sum_{i=0}^{n} C_k^i \Delta^i f(n),$$

застосованої до невідомої функції, може бути перетворене до вигляду

$$b_0\Delta^k x(n) + b_1\Delta^{k1}x(n) + \cdots + b_k x(n) = u(n), \qquad (3.8.2)$$

в якому воно більше, ніж рівняння нагадує лінійне диференціальне рівняння k-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Роль k-ї похідної відіграє різниця k-го порядку. Треба, однак, зауважити, що порядок рівняння (3.8.1), не можна визначити як порядок старшої різниці невідомої функції, що входить у рівняння. Дійсно, у рівнянні

$$\Delta^2 f(n) + 4\Delta f(n) + 3f(n) = 0$$

Порядок старшої різниці невідомої функції дорінює 2. Перетворимо це рівняння за допомогою формули:

$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^k C_k^i f(n+k-i) \qquad (3.8.3)$$

$$f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) + 4f(n+1) - 4f(n) + 3f(n) + 0,$$

$$f(n+2) + 2f(n+1) = 0,$$

або

$$f(n+1) + 2f(n) = 0,$$

як бачимо, рівняння має перший порядок.

Тому, а також тому, що шукати зображення різниць невідомої функції за формулою

$$\Delta^k f(n) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}}} (e^q - 1)^k F^*(q) - e^p \sum_{i=0}^{k-1}(e^q - 1)^{k-1-i}\Delta^i f(0)$$

досить складно, намагаються розв'язувати скінченне різницеве рівняння у вигляді (3.8.1). Якщо ж воно задане у вигляді (3.8.2), його перетворюють у форму (3.8.1) використовуючи рівність (3.8.3).

Розглянемо тепер розв'язання скінченно-різницевого рівняння:

$$a_0 x(n) + a_1 x(n+1) + \cdots + a_k x(n+k) = u(n) \qquad (3.8.1)$$

операційним методом. Звичайно його треба розв'язувати для заданих початкових умов вигляду

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \dots, x(k-1) = x_{k-1}.$$

Розв'язком різницевого рівняння (3.8.1) називається будь-яка гратчаста функція $f(n)$, що після підстановки в рівняння замість невідомої функції $x(n)$ перетворює його в тотожність і задовольняє початкові умови

$$x(0) = x_0, \ x(1) = x_1, \dots, x(k-1) = x_{k-1}.$$

Застосування операційного методу до розв'язання рівняння $a_0 x(n) + +a_1 x(n+1) + \cdots + a_k x(n+k) = u(n)$ полягає в тому, що обидві частини рівняння піддають дискретному перетворенню Лапласа, в результаті чого дістають так зване операторне рівняння (або рівняння в зображеннях), у якому невідомою є функція $X^*(q) \xrightarrow{\cdot} x(n)$. Оскільки операторне рівняння зазвича алгебраїчне, то знайти з нього $X^*(q)$ неважко. Щоб по ньому визначити шуканий оригінал $x(n)$, використовують спеціальні методи, властивості D – перетворення і таблиці «оригінал - зображення». Аналогічним способом розв'язують і системи скінченно – різницевих рівнянь.

Приклад 1. Обчислити визначник n-го порядку такої тридіагональної матриці:

$$s(n) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{vmatrix}.$$

Якщо розкласти цей визначник за елементами першого рядка, знайдемо

$$s(n) = 4s(n-1) - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{vmatrix} = 4s(n-1) - 4s(n-2).$$

Таким чином, щоб знайти визначник $s(n)$, треба розв'язати рівняння

$$s(n) + 4s(n-2) - 4s(n-1) = 0,$$

яке відноситься до класу різницевих рівнянь. Перепишемо зазначене рівняння у вигляді

$$s(n+2) + 4s(n) - 4s(n+1) = 0,$$

Знайдемо $s(1) = |4| = 4$ і покладемо $s(0) = 1$. Неважко побачити, що для $s(0) = 1$ і $s(0) = 4$ з рівняння $s(n) + 4s(n-2) - 4s(n-1) = 0$ випливає, що $s(2) = 12$. Безпосередньо обчислюючи визначник $s(2)$, можна перевірити слушність цього результату. Таким чином, $s(0) = 1$ і $s(1) = 4$ є придатними початковими умовами для рівняння $s(n) + 4s(n-2) - 4s(n-1) = 0$. Введемо зображення $s(n) <\div S^*(q)$ і за теоремою випередження $s(n+1) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}} e^q[S^*(q) - s(0)] = e^q[S^*(q) - 1]$, $s(s+2) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}} e^{2q}[S^*(q) - -s(0) - s(1)e^{-q}] = e^{2q}S^*(q) - e^{2q} - 4e^q$. Застосовуючи дискретне перетворення Лапласа до рівняння $s(n+2) + 4s(n) - 4s(n+1) = 0$, отримуємо рівняння в зображеннях:

$$e^{2q}S^*(q) - e^{2q} - 4e^q + 4S^*(q) - 4e^qS^*(q) + 4e^q = 0,$$

з якого знаходимо

$$S^*(q) = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - 4e^q + 4} = \frac{e^{2q}}{(e^q - 2)^2} = \frac{1}{2}e^q \frac{2e^q}{(e^q - 2)^2}.$$

Формула $C_n^k a^n \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}} \frac{a^k e^q}{(e^q - a)^{k+1}}$ показує, що

$$C_n^k 2^n \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}} \frac{2e^q}{(e^q - 2)^2};$$

використовуючи далі теорему заміження, знаходимо шуканий розв'язок рівняння $s(n+2) + 4s(n) - 4s(n+1) = 0$:

$$s(n) = \frac{1}{2} C_{n+1}^{k} 2^{n+1} = (n+1)2^{n}.$$

Приклад 2. Система «імульсивний елемент – аперіодична ланка». Розглянемо послідовне з’єднання імпульсного елементу, що генерує імпульси прямокутної форми висоти 1, і аперіодичної ланки зі сталою часу T і коефіцієнтом підсилення k (рис 3.8). Періодична

Рисунок 3.8 Схема імпульсного елемента

послідовність імпульсів, що генерує імпульсний елемент (рис. 3.9), визначається параметрами: T_i – тривалістю імпульсу і T_n – тактом дискретної системи (періодом повторення імпульсів). Аперіодична ланка здається таким

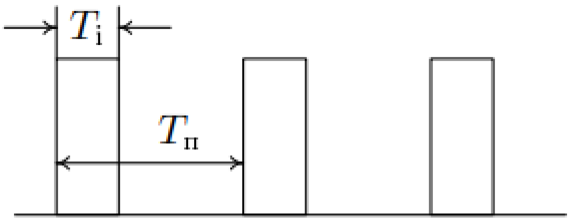


Рисунок 3.9 Послідовність імпульсів

диференціальним рівнянням:

$$T\dot{x} + x = ku,$$

де $u(t)$ – вхідний, $x(t)$ – вихідний сигнал ланки, t – час. Наприклад, ним може бути коливальний контур (рис. 3.10). Його рівняння:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = u,$$

тому $T = k = L/R$. Можна показати, що за певних умов функціонування системи «імпульсний елемент – аперіодична ланка» описується таким різницевим рівнянням

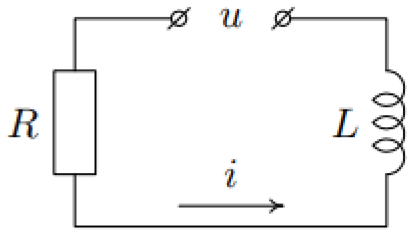


Рисунок 3.10 Коливальний контур

$$x(n+1) - \alpha x(n) = k\alpha(\alpha^{-\gamma} - 1)u(n),$$

де $\alpha = e^{-T_п/T}, \gamma = T_и/T_п$ – відносна тривалість імпульсу.

Розв'яжемо це скінченно – різницеве рівняння.

Позначимо у зазначеному рівнянні $\beta = k\alpha(\alpha^{\gamma} - 1)$ і подамо його у вигляді

$$x(n+1) - \alpha x(n) = \beta u(n).$$

Введемо зображення: $x(n) \xleftarrow{\cdot} X^*(q)$, $u(n) \xleftarrow{\cdot} U^*(q)$. За формулою випередження $x(n+1) \xleftarrow{\cdot} e^q[X^*(q) - x(0)]$. Припустимо, що $x(0) = 0$, і застосуємо дискретне перетворення Лапласа до рівняння $x(n+1) - \alpha x(n) = \beta u(n)$:

$$e^q X^*(q) - \alpha X^*(q) = \beta U^*(q).$$

Знаходимо зображення вихідного сигналу:

$$X^*(q) = \frac{\beta U^*(q)}{e^q - \alpha}.$$

Отримаємо розв’язок рівняння $x(n+1)-\alpha x(n)=\beta u(n)$ для двох різних вхідних сигналів.

а) Нехай $u(n)=d\sigma(n) \xleftarrow{\cdot} d$.

Подамо зображення вихідного сигналу в такому вигляді:

$$X^*(q)=\frac{\beta d}{e^q-\alpha}=\beta d e^{-q}\frac{e^q}{e^q-\alpha}$$

і зауважимо, що відповідно до формули

$$\alpha^n \xleftarrow{\cdot} \frac{e^q}{e^q-\alpha};$$

тоді за теоремою заміщування $x(n)=\beta d\alpha^{n-1},\ n\geq 1$.

б) Нехай $u(n)=\mathbb{I}(n) \xleftarrow{\cdot} \frac{e^q}{e^q-1}$. Запишемо зображення вихідного сигналу так:

$$X^*(q)=\frac{\beta d}{(e^q-1)(e^q-\alpha)}=\frac{\beta}{1-\alpha}\left(e^{-q}\frac{e^q}{e^q-1}-\alpha e^{-q}\frac{e^q}{e^q-\alpha}\right).$$

Отже,

$$x(n)=\frac{\beta}{1-\alpha}[\mathbb{I}(n-1)-\alpha^n].$$

Приклад 3. Розв’язати скінченно – різницеве рівняння:

$$x(n+2)-x(n+1)+x(n)=0$$

для початкових умов $x(0)=x(1)=1$.

Розв’язання. Позначимо $x(n) \xleftarrow{\cdot} X^*(q)$ зображення невідомої функції і за теоремою випередження знайдемо

$$x(n+1) \xleftarrow{\cdot} e^q[X^*(q)-1],\ \ x(n+2) \xleftarrow{\cdot} e^{2q}[X^*(q)-1-e^{-q}].$$

Тому використовуючи ці співвідношення і застосовуючи до заданого рівняння дискретне перетворення Лапласа, дістанемо таке операторне рівняння:

$$e^{2q}[X^*(q)-1-e^{-q}]-e^{q}[X^*(q)-1]+X^*(q)=0$$

або

$$X^*(q)(e^{2q}-e^{q}+1)=e^{2q}+e^{q}-e^{q},$$

з якого знайдемо зображення невідомої функції:

$$X^*(q)=\frac{e^{2q}}{e^{2q}-e^{q}+1}.$$

Перепишемо його таким чином:

$$X^*(q)=\frac{e^{q}(e^{q}-\cos\frac{\pi}{3})}{e^{2q}-2e^{q}\cos\frac{\pi}{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{e^{q}\sin\frac{\pi}{3}}{e^{2q}-e^{2q}\cos\frac{\pi}{3}+1}.$$

Використовуючи відповідності

$\sin\beta n \xleftarrow{\cdot\cdot} \frac{e^{q}\sin\beta}{e^{2q}-2e^{q}\cos\beta+1}$ та $\cos\beta n \xleftarrow{\cdot\cdot} \frac{e^{q}(e^{q}-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^{q}\cos\beta+1}$,

можемо записати розв’язок заданого скінченно – різницевого рівняння у вигляді:

$$x(n)-\cos\frac{\pi}{3}n+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}n+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3}n\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{\pi}{3}n\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}n\right),$$

або

$$x(n)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}.$$

Приклад 4. Розв’язати систему скінченно – різницевих рівнянь

$$\begin{cases} e^q X^*(q) - 2X^*(q) - 2Y^*(q) = \frac{e^q}{e^q-3}; \\ e^q Y^*(q) - X^*(q) - 3Y^*(q) = \frac{e^q}{e^q-2}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} X^*(q)(e^q - 2) - 2Y^*(q) = \dfrac{e^q}{e^q - 3}; \\ -X^*(q) + Y^*(q)(e^q - 3) = \dfrac{e^q}{e^q - 2}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^q - 2 & -2 \\ -1 & e^q - 3 \end{vmatrix} = (e^q - 2)(e^q - 3) - 2 = e^{2q} - 5e^q + 4 =$$
$$= (e^q - 1)(e^q - 4),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{e^q}{e^q - 3} & -2 \\ \dfrac{e^q}{e^q - 2} & e^q - 3 \end{vmatrix} = e^q + \frac{2e^q}{e^q - 2} = \frac{e^{2q}}{e^q - 2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^q - 2 & \dfrac{e^q}{e^q - 3} \\ -1 & \dfrac{e^q}{e^q - 2} \end{vmatrix} = e^q + \frac{2e^q}{e^q - 3} = \frac{e^q(e^q - 2)}{e^q - 3};$$

$$X^*(q) = \frac{e^{2q}}{(e^q - 2)(e^q - 1)(e^q - 4)}, \qquad Y^*(q) = \frac{e^q(e^q - 2)}{(e^q - 3)(e^q - 1)(e^q - 4)}.$$

Виконаємо розкладання отриманих виразів на елементарні дроби:

$$X^*(q) = e^q \frac{e^{2q}}{(e^q - 2)(e^q - 1)(e^q - 4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^q}{e^q - 1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{e^q}{e^q - 4} - \frac{e^q}{e^q - 2},$$

$$Y^*(q) = e^q \frac{e^q - 2}{(e^q - 3)(e^q - 1)(e^q - 4)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{e^q}{e^q - 3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{e^q}{e^q - 1} + \frac{8}{3} \cdot \frac{e^q}{e^q - 4}.$$

Використовуючи формулу

$$\alpha^n \longleftarrow\!\!\!\!\div \frac{e^q}{e^q - \alpha},$$

знаходимо оригінали цих функцій, які є розв'язком заданої системи рівнянь:

$$x(n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^n - 2^n = \frac{1}{3}(1 + 2^{2n+1} - 3 \cdot 2^n),$$

$$y(n) = -\frac{3}{2}3^n - \frac{1}{6} + \frac{8}{3}4^n = \frac{1}{6}(2^{2n+4} - 3^{n+2} - 1).$$

ВИСНОВКИ

Операційне числення є символічним методом, який дозволяє значно спрощувати розв'язання багатьох задач. Його застосовують при розв'язуванні різноманітних задач фізики, хімії, математики, та інших точних наук, які часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, що зв'язують одну або декілька незалежних змінних, невідому функцію цих змінних і похідні (або диференціали) цієї функції.

Методи операційного числення застосовуються також в математичній фізиці, теорії спеціальних функцій, при обчисленні інтегралів і рядів та ряді інших питань. Особливо велике і важливе значення вони мають в сучасних галузях науки і техніки, таких як автоматика та телемеханіка, теорія керування.

Отже, теорія операційного числення в сучасній математиці має велике значення як логічне продовження вивчення числа, способів розв́язування різноманітних задач природничо-математичних наук. Саме з цих причин курс операційного числення є необхідним для студентів ВНЗ, які спеціалізуються в галузі фізики і математики. Застосування операційного числення і комплексних чисел найбільш повно узагальнює математичні поняття і способи розв'язування диференціальних та різницевих рівнянь, які можна застосовувати не тільки в математиці.

На основі аналізу літературних джерел мною було вивчено та відібрано матеріал по темі магістерської роботи. Було вивчено застосування операційного числення до розв'язування диференціальних та різницевих рівнянь. Також у роботі розглянуто прикладні задачі.

Матеріал даної магістерської роботи може бути використаний студентами при поглибленому вивченні вищої математики та при написанні курсових робіт.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости./ Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. – М.: Наука, 1968. – 574 с.

2. Белослюдова В.В., Дронсейка І.П. Спеціальні розділи математики.Часть 1. Елементи теорії функцій комплексної змінної. Операційне числення: Курс лекцій для студентів другого курсу спеціальностей 050702, 050716 / ВКГТУ. – 2006.

3. Березанский Ю.М. Функциональный анализ/ Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. – К.:, Вища школа, 1990.

4. Биргкан С.Е., Брюханов Ю.А. Разностные уравнения: учеб. пособие / Яросл. гос. ун- т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 1994. - 62 с.

5. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного/ Бицадзе А.В. — М., 1972.

6. Бурд В.Ш. Введение в динамику одномерных отображений учеб. пособие для вузов / Яросл. гос. ун- им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 103 с. 8. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка, 1972. – 248 с.

7. Буров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уровнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985. – 464 с.

8. Ван-дер-Поль Б. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа/ Ван-дер-Поль Б., Бреммер Х. – М.: ИЛ, 1952

9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики: Учебник для физ.-тех. спец. вузов/ Владимиров В. С .– М.: Физматлит, 2004. – 327с.

10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики /Владимиров В.С. – М.: Наука, 1988. – 512 с

11. Гаращенко, Ф.Г. Г20 Диференціальні рівняння для інформатиків: підручник / Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, І.І. Харченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 352 с.

12. Гельфанд В.И. Исчисление конечных разностей. − М. : ГИФМЛ, 1959. – 400 с.

13. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с

14. Горгула В.І. Теорія функцій комплексної змінної і операційне числення: Навчальний посібник/ Горгула В.І., Сікора Б.С., Волковецький С.В. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1998. – 80 с.

15. Дасюк Я.І.. Функції комплексної змінної. Пертворення Лапласа/ Я.І. Дасюк, П.І. Каленюк, П.П. Костробій та ін - ДУ "Львівська політехніка", 1999 - 270 ст.

16. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. В 2 ч./ Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. – М., Высшая школа, 1986. – Ч. 2. – 478 с.

17. Дев́ятко В. І. Різницеві рівняння. Дискретне перетворення Лапласа: конспект лекцій для студ. енергетич. факультету ден. та заоч. форм. навч. – К: УДУХТ, 2000 – 56 с.

18. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. / Г. Деч - М.:”Наука”, 1971.

19. Диткин В. А. Операционное исчисление. – 2-е изд. / Диткин В. А., Прудников А. П. – М.: Высшая школа, 1975. – 406 с.

20. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление/ Диткин В. А., Прудников А. П. – М.: Гос. Изд-во физ-мат. лит-ры. 1961. —524с.

21. Дубровина Н. А., Полякова О. Ю. Моделирование экономической динамики: Конспект лекций / Харьковский национальный экономический ун-т. — Х.: ХНЭУ, 2004. — 168с.

22. Эфрос А.М. Операционное исчисление и контурные интегралы / А.М. Эфрос, А.М. Данилевский. – ДНТВУ, 1937.
23. Єршова В.В. Імпульсні функції. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Під ред. В.І. Азаматовим. Мінськ, 1976.
24. Зубова А. Ф., Малафеев О. А. Устойчивость по Ляпунову и колебательность в экономических моделях: Учеб. пособие / Санкт-Петербургский гос. ун-т. — СПб. : Издательство НИИХ СПбГУ, 2001. — 102с.
25. Клебанова Т. С., Дубровина Н. А., Полякова О. Ю., Раевнева Е. В., Милов А. В. Моделирование экономической динамики: Учеб. пособие / Харьковский национальный экономический ун-т. — 2. изд., стер. — Х. : ИД "ИНЖЭК", 2005. — 244с.
26. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст]: учеб. пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1981. – 302 с.
27. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексной переменной. / Лаврентьев М.А, Шабат Б.В — М., 1973.
28. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного. / Лаврентьев М.А, Шабат Б.В – М.: Наука, 1987. – 736 с.
29. Лаврик С. Про наближене розв'язування суттєво-просторової задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца у випадку областей з гладкими поверхнями./ Лаврик С – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2006. Вип. 11. С. 60–68.
30. Ладыженская О. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа./ Ладыженская О., Солонников В., Уральцева Н. – М.: Наука, 1967.
31. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Лопатинский Я.Б. - К.:Вища школа, 1984.

32. Лурье А.И. Операционное исчисление и его применение к задачам механики. / Лурье А.И. – М.-Л.:Гостехиздат, 1950.

33. Любін О. Г. Математичні методи у задачах радіоінженерії. / Любін О. Г., Лисова Л. О. – К.: Либідь, 1994.

34. Мантуров О. В. Курс высшей математики: Учебник для втузов./ Мантуров О. В., Матвеев Н. М. – М.: Высшая школа, 1986. – 426с.

35. Марыненко В. С. Операционное счисление: Учеб, пособие. —4-е иэд.,перераб. и доп. / Марыненко В. С —К.: Высш. шк.. 1990.—359с.

36. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / Маркушевич А.И. – М.: Наука, 1978. – 416 с.

37. Микусинский Я. Операционное исчисление / Микусинский Я. – М., 1956.

38. Милованов В.П. Неравновесные социально–экономические системы: синергетика и самоорганизация. М.: УРСС, 2001. 263 с.

39. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М.:Наука, 1977. - С. 258-259.

40. Овчинников П. П. Вища математика: Підручник для студ. вищ. техн. навч. закладів у 2 ч. Ч.2. / Овчинников П. П – К.: Техніка, 2004. – 790с.

41. Пак В.В. Вища математика [Текст]: підручник / В.В. Пак, Ю.Л. Носенко. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 496 с.

42. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики: Підручник для студентів фіз.-мат. та інж. спец. ун-тів./ Перестюк М. О., Маринець В. В – К.: Либідь, 2006. – 419с.

43. Пискунов Н. С. Диференциальное и интегральное исчисление./ Пискунов Н. С. – М.: Наука, 1985.– 340с.

44. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике [Текст] / Д. Г. Письменный. – 6-е изд. – М.: Айрис–пресс, 2008. – Ч. 2. – 245 с.

45. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного./ Привалов И.И. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

46. Романко В.К. Разностные уравнения: Учебное пособие – БИНОМ. Лаборатория знаний 2006, 112 с.

47. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння в прикладах і задачах. / Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. - Київ, Либідь, 1994.

48. Сергеева Л.Н. Моделирование поведения экономических систем методом нелинейной динамики (теория хаоса) Запорожье (ЗГУ) 2002.

49. Сергеева Л.Н. Моделирование структуры экономических систем и процессов Запорожье 2002.

50. Сергеева Л.Н. Нелинейная экономика: модели и методы. Запорожье 2003.

51. Сидоров Ю.В. Лекции по теории функцій комплексного переменного. / Сидоров Ю.В. М.В. Федорюк М.И. Шабунин – М.: Наука, 1982. -488с.

52. Стрелковська І.В. Операційне числення для фахівців в галузі зв’язку: навча. посіб. / Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2017. – 120 с.(ст. 5). Стрелковська І.В. Операційне числення для фахівців в галузі зв’язку: навча. посіб. / Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2017. – 120 с.(ст. 5).

53. Тальянський І. І. Методи математичної фізики. Тексти лекцій. Львівський державний унівенситет ім. І. Франка. / Тальянський І. І. — Львів, 1996.

54. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. / Тихонов А. Н., Самарский А. А. – М.: «Наука», 2004. – 735с.

55. Урманчев В. І. Різницеві рівняння. Методичні вказівки для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання/ В. І. Урманчев – К., 2018. – 44 с.

56. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. І. Функции одного переменного./ Шабат Б.В. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

57. Штокало И.З. Операционные методы и их развитие в истории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / Штокало И.З. – К.: Изд-во АН УССР, 1961.

58. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна меїханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. М. Копась. – Електронні текстові данні (1 файл: 2504 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.

ДОДАТКИ

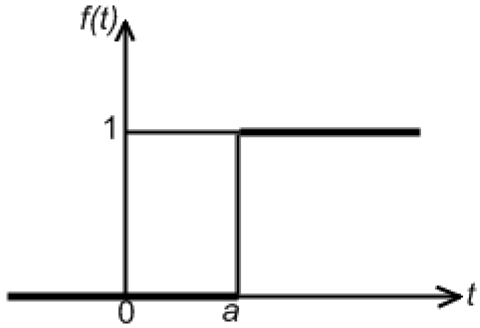
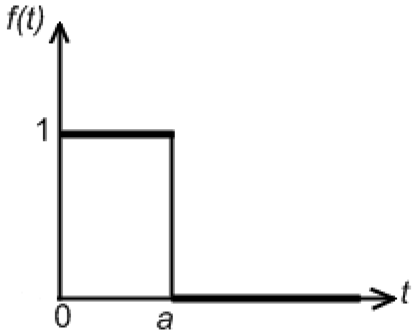
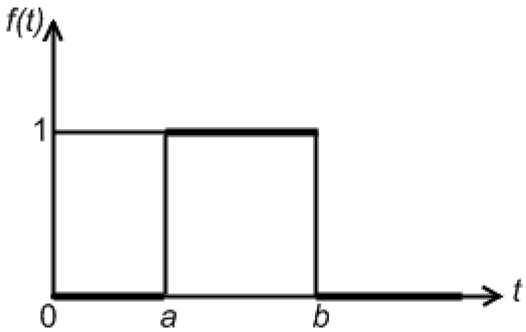
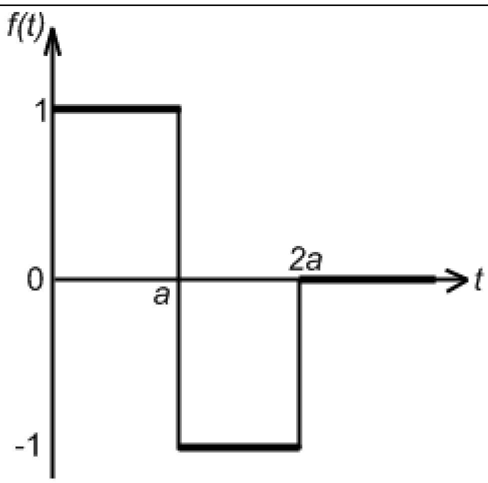
/п	Оригінал	Зображення
	1	$\frac{1}{p}$
	t	$\frac{1}{p^2}$
	e^{qt}	$\frac{1}{p-q}$
	$\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{1+ap}$
	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
	$\frac{1}{a}(e^{at}-1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$
	$1-e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{p(1+ap)}$
	te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$
0	$\frac{1}{a^2}te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1+ap)^2}$
1	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
2	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
3	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

4	$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
5	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
6	$\frac{1}{2}t^2e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^3}$
7	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$
8	$\frac{1}{a^2}(ch\, at-1)$	$\frac{1}{p(p^2-a^2)}$
9	$(t+\frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$
0	$\cos^2 at$	$\frac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
1	$ch^2\, at$	$\frac{p^2-2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
2	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
3	$sh^2\, at$	$\frac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
4	$\frac{1}{2}(sh\, at-\sin at)$	$\frac{a^3}{p^4-a^4}$
5	$\frac{1}{2}(ch\, at-\cos at)$	$\frac{a^2p}{p^4-a^4}$
6	$\frac{1}{2}(sh\, at+\sin at)$	$\frac{ap^2}{p^4-a^4}$
7	$\frac{1}{2}(ch\, at+\cos at)$	$\frac{p^3}{p^4-a^4}$
	$\sin at\, sh\, at$	$\frac{2a^2p}{p^4+4a^4}$

8		
9	$\cos at\ \ ch\, at$	$\dfrac{p^3}{p^4+4a^4}$
0	$\sin at\ \ ch\, at$	$\dfrac{a(p^2+2a^2)}{p^4+4a^4}$
1	$\cos at\ sh\, at$	$\dfrac{a(p^2-2a^2)}{p^4+4a^4}$
2	$\dfrac{1}{2}(\sin at - at\cos at)$	$\dfrac{a^3}{(p^2+a^2)^2}$
3	$\dfrac{t}{2}\sin at$	$\dfrac{ap}{(p^2+a^2)^2}$
4	$\dfrac{1}{2}(\sin at + at\cos at)$	$\dfrac{ap^2}{(p^2+a^2)^2}$
5	$\cos at - \dfrac{at}{2}\sin at$	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
6	$\dfrac{1}{2}(at\, ch\, at - sh\, at)$	$\dfrac{a^3}{(p^2-a^2)^2}$
7	$\dfrac{1}{2}t\, sh\, at$	$\dfrac{ap}{(p^2-a^2)^2}$
8	$\dfrac{1}{2}(sh\, at + at\, ch\, at)$	$\dfrac{ap^2}{(p^2-a^2)^2}$
9	$ch\, at + \dfrac{at}{2}\ sh\, at$	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)^2}$
0	$\dfrac{a\sin bt - b\sin at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{ab}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
1	$\dfrac{\cos bt - \cos at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
2	$\dfrac{a\sin at - b\sin bt}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$

3	$t-\frac{1}{a}\sin at$	$\frac{a^2}{p^2(p^2+a^2)}$
4	$\frac{1}{a}\,sh\,at-t$	$\frac{a^2}{p^2(p^2-a^2)}$
5	$\sin(at+b)$	$\frac{p\sin b+a\cos b}{p^2+a^2}$
6	$\cos(at+b)$	$\frac{p\cos b-a\sin b}{p^2+a^2}$
7	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
8	$\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
9	$\frac{1+2at}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{p+a}{p\sqrt{p}}$
0	$\frac{ate^{-at}+e^{-at}-1}{t^2}$	$p\ln\left(1+\frac{a}{p}\right)-a$
1	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}$
2	$\frac{\sin at}{t\sqrt{2\pi t}}$	$\sqrt{\sqrt{p^2-a^2}-p}$
3	$\frac{1-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p}$
4	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
5	$\frac{2sh\,at}{t}$	$\ln\frac{p+a}{p-b}$
6	$\sigma(t-a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$

7	$\dfrac{\sin at}{t}$	$arctg\ \dfrac{a}{p}$
8	$2\dfrac{\sin at\cos bt}{t}$	$arctg\ \dfrac{2ap}{p^2-a^2+b^2}$
9	$\dfrac{e^{at}-1}{t}\sin bt$	$arctg\ \dfrac{p^2-ap+b^2}{ab}$
0	$\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}(\ln 4p+C)$

1	 Рис. 1.1.	$\dfrac{e^{-ap}}{p}$
2	 Рис. 1.2.	$\dfrac{1-e^{-ap}}{p}$
3	 Рис. 1.3.	$\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}$
4	 Рис. 1.4.	$\dfrac{(1-e^{-ap})^2}{p}$

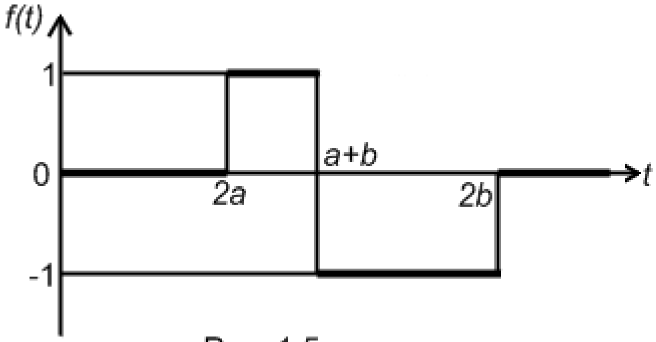
<table>
<tr><td>5</td><td>

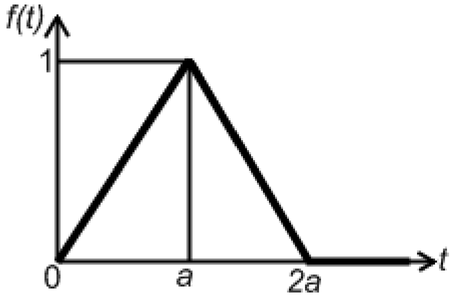
Рис. 1.5.</td><td>$$\frac{(e^{-ap}-e^{-bp})^2}{p}$$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>

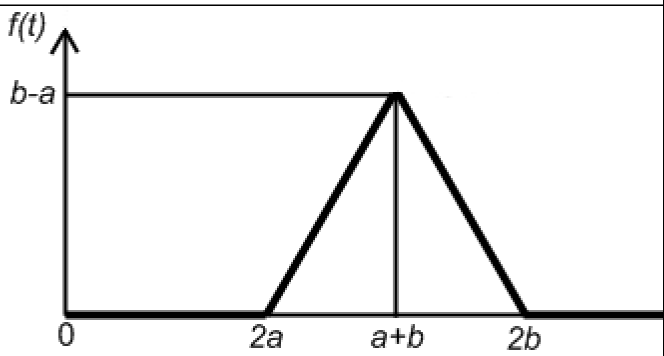
Рис. 1.6.</td><td>$$\frac{(1-e^{-ap})^2}{p^2}$$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>

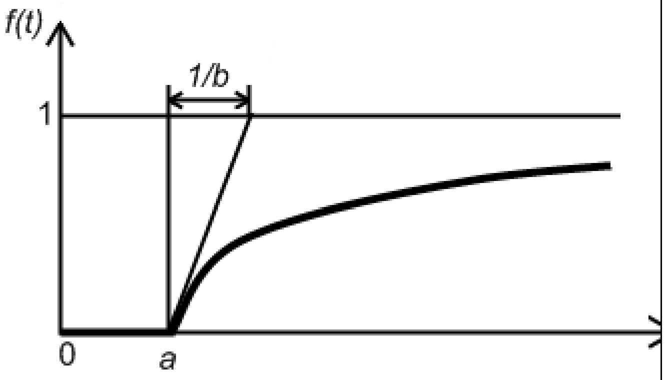
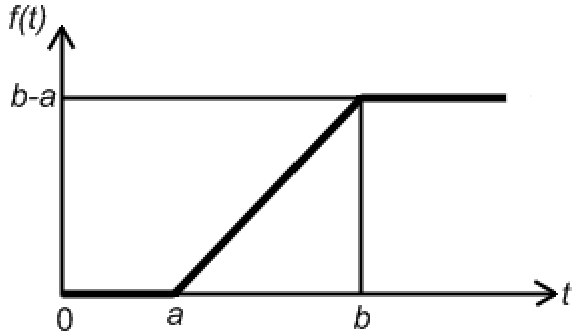
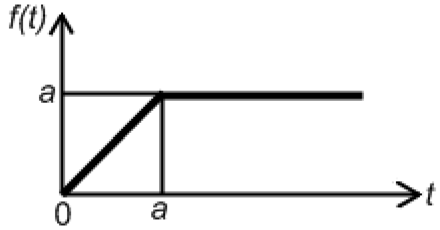
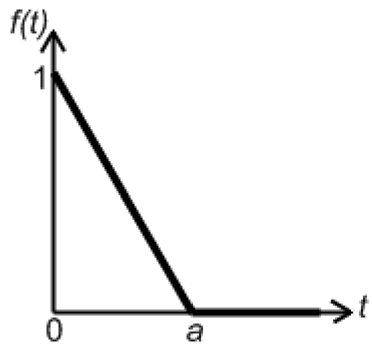
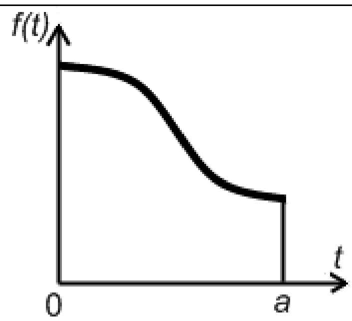
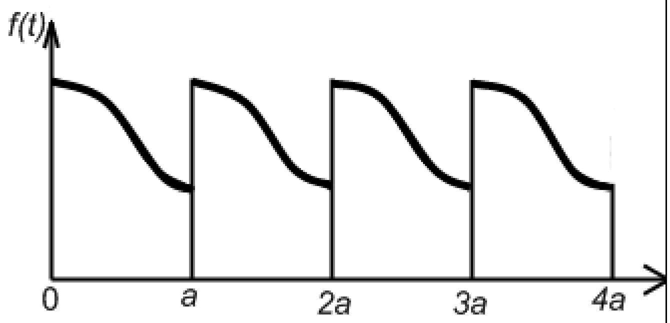
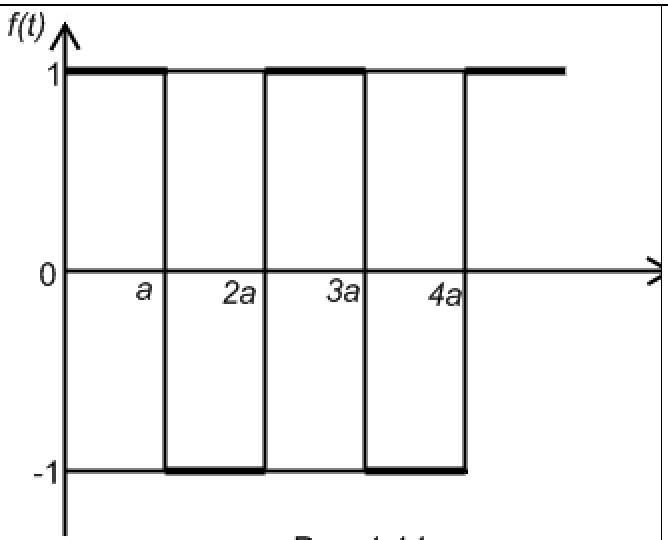
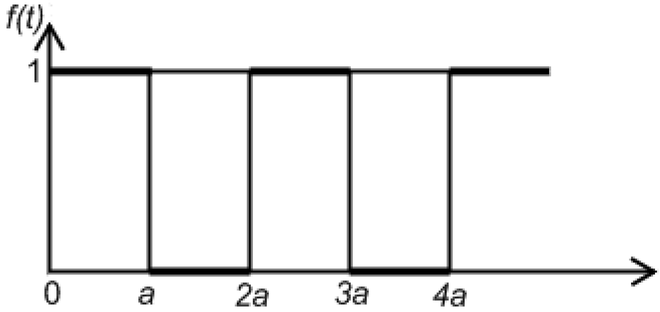
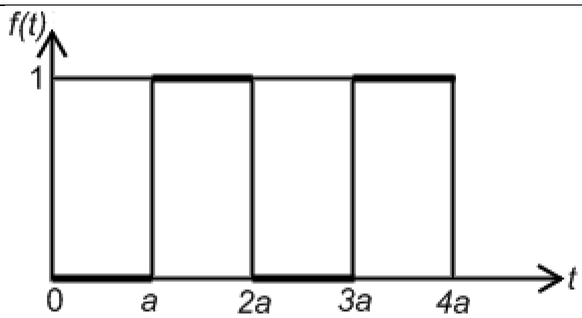
Рис. 1.7.</td><td>$$\frac{(e^{-ap}-e^{-bp})^2}{p^2}$$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>

Рис. 1.8.</td><td>$$\frac{be^{-ap}}{p(p+b)}$$</td></tr>
</table>

9	 Рис. 1.9.	$\dfrac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p^2}$
0	 Рис. 1.10.	$\dfrac{1 - e^{-ap}}{p^2}$
1	 Рис. 1.11.	$\dfrac{e^{-ap} + ap - 1}{ap^2}$
2	 Рис. 1.12.  Рис. 1.13.	$F(p) = \dfrac{Lf(t)}{1 - e^{-ap}}$

3	 Рис. 1.14.	$\dfrac{1-e^{-ap}}{p(1+e^{-ap})}$
4	 Рис. 1.15.	$\dfrac{1}{p(1+e^{-ap})}$
5	 Рис. 1.16.	$\dfrac{1}{p(1+e^{ap})}$