Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:
«Рівняння Хілла та його застосування для практичних досліджень»

Виконала: студентка IV курсу,
групи МІФ-41
спеціальності:014 Середня освіта
(Математика)
Конон Олена Миколаївна

Керівник: проф. Власюк А.П.

Рецензент: к.т.н., доц. Батишкіна Ю.В.

Рівне – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Рівняння виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)x = 0, \qquad (1)$$

де $a(t)$ неперервна періодична функція. В математиці її називають **рівнянням Хілла**. Воно в наступному частковому вигляді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt\right)x = 0,$$

де $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots$ - відомі сталі і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt$$

абсолютно збігається, знайдений у спогадах Хілла, які опубліковані в 1877 році та присвячені вивченню руху Місяця. Рівняння (1) у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\lambda + a\cos 2t)x = 0,$$

Матьє розглядав ще в 1868 році у зв'язку з вивченням коливань еліптичної мембрани.

З часів Хілла і Матьє рівняння (1) вивчалося в тій чи іншій формі багатьма авторами (Х.Кох, Н.Е. Кочин, А. Пуанкаре, Г.В. Бондаренко, А.П. Проскуряков, В.Ф. Журавльов, К.Г. Валєєв, В.В. Болотін та ін.) у зв'язку з вирішенням фізичних, технічних та астрономічних задач.

Оскільки ці проблеми мали прикладний характер і через відсутність теоретично розробленого методу розв'язання рівняння Хілла, автори обмежилися побудовою наближених рішень, які в тому чи іншому сенсі відповідали потребам практики. Для прикладу, Хілл для вирішення астрономічної задачі обмежувався використанням значення визначника лише третього порядку, який складався з центральних рядків і стовбців нескінченного визначника.

Згідно теорії Флоке розв'язок рівняння (1) має вигляд:

$$x(t) = e^{\mu t} \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p e^{ipt}$$

де μ – характеристичний показник, а вектор

$$\bar{y} = (\dots - y_n, \dots y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_n, \dots),$$

визначається як розв’язок нескінченної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, яка має розв’язок лише тоді, коли деякий нескінченний визначник, який залежить від μ, дорівнює нулю. Цей факт (наприклад, існування нескінченного детермінанта, його обчислення тощо) було скориговано при розробці методу побудови базової системи розв’язків рівняння Хілла. У цьому напрямку, незважаючи на те, що теорія лінійних диференціальних рівнянь була повністю розроблена, сьогодні існує мало теоретично розроблених методів вирішення лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Що стосується рівняння Хілла (1), середнє значення a_0 коефіцієнта $a(t)$ не дорівнює нулю і досягло певного успіху. Огляд літератури показує, що з епохи Хілла вивчення рівняння (1) проводилось лише за умови $a_0 = 0$, а результати, отримані, коли $a_0 = 0$, втратили значення. Тому випадок $a_0 = 0$ називають критичним.

Оскільки рівняння Хілла часто з’являється в задачах із застосуванням, а багато важливих рівнянь спрощено до рівняння Хілла після деяких перетворень, то актуальною проблемою є проведення повного дослідження рівняння Хілла в критичній ситуації (характерні задачі побудови рівнянь та розв'язуваність, розробка алгоритмів побудови систем базових розв’язків, поведінка фазових траєкторій та ін.) [22].

Мета роботи – розглянути рівняння Хілла, методи його розв’язування та застосування.

Об’єктом роботи є рівняння Хілла.

Предмет дослідження. Рівняння Хілла та його застосування для практичних досліджень.

Методи дослідження. В процесі дослідження були використані методи дослідження нелінійних звичайних диференціальних рівнянь та методи дослідження задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь II порядку.

Структура роботи. Дипломна робота нараховує 58 сторінок і складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі розглядаються нелінійні звичайні диференціальні рівняння II порядку та методи їх досліджень, а саме: метод лінеаризації, метод усереднення та метод малого параметру. У другому розділі подані методи дослідження задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь II порядку. Третій розділ містить рівняння Хілла та його застосування до вивчення стійкості нелінійних коливань. У четвертому розділі розглядається періодичний загальний розв’язок неоднорідного рівняння Хілла.

РОЗДІЛ І. НЕЛІНІЙНІ ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІІ ПОРЯДКУ ТА МЕТОДИ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Загальні поняття і означення про теорію нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння – рівняння, що містять незалежну змінну, функцію від цієї незалежної змінної та її похідні різних порядків. Функція може бути векторною та скалярною. Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називають звичайним. Якщо невідома функція є функцією багатьох змінних, то диференціальне рівняння називають рівнянням в частинних похідних [36].

Диференціальне рівняння – рівняння, в яке входить невідома функція під знаком похідної чи диференціала [18].

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, який входить у диференціальне рівняння. [36].

Диференціальне рівняння **n-го** порядку має вигляд:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Приклади першого та другого порядків:

$$y' + 1 = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \cdot \sin x \quad [18].$$

Лінійним називається диференціальне рівняння, якщо невідома функція і всі її похідні входять в нього у першому степені. [36].

Загальний вигляд лінійного диференціального рівняння n-го порядку:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = f(x)$$

Лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' + p(x)y = 0.$$

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' + p(x)y = q(x); q(x) \neq 0. \quad [36].$$

Інтегруванням диференціального рівняння називається процес знаходження розв'язків диференціального рівняння. Проінтегрувати диференціальне рівняння означає знайти розв'язки диференціального рівняння. [18].

Розв'язок диференціального рівняння – це неявно задана функція $F(x, y) = 0$, яка перетворює диференціальне рівняння у тотожність. Розв'язок диференціального рівняння досить часто називають інтегралом диференціального рівняння.

Множина розв'язків, яка містить всі без винятку розв'язки диференціального рівняння називається **загальним розв'язком** диференціального рівняння. Загальним роз'язком ще називають загальний інтеграл диференціального рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який задовольняє початково заданим умовам.

Степенем диференціального рівняння називається найвищий степінь, до якого піднесено похідну найбільшого порядку, що входить у рівняння.

Звичайні диференціальні рівняння – це рівняння, які залежать від однієї незалежної змінної, мають вигляд:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \text{ або } F = \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

де $y = y(x)$ – невідома функція, яка залежить від незалежної змінної x. Число n називається порядком диференціального рівняння. Найбільш важливими є диференціальні рівняння першого і другого порядку.

Основними задачами теорії диференціальних рівнянь є задачі Коші, крайові задачі.

Задача Коші - це задача знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння, яке задовольняє початкові умови.

Крайова задача полягає у знаходженняі частинного розв'язку диференціального рівняння другого порядку, яке задовольняє додаткові умови в граничних точках x_0 та x_1. Крайову задачу часто називають граничною [18].

1.2. Метод лінеаризації диференціальних рівнянь

Якщо рівняння нелінійні, то їх дослідження, розв'язок і навіть така операція, як виключення проміжних змінних, сильно ускладнюються. Тому першим кроком у вивченні нелінійної системи зазвичай є побудова її приблизної лінійної моделі, тобто лінеаризація початкового рівняння, де це можливо.

Лінеаризація – один з методів наближеного представлення замкнутих нелінійних систем, при якому вивчення нелінійної системи замінюється аналізом лінійної системи.

Існує кілька способів лінеаризації. Застосування того чи іншого залежить від особливостей досліджуваних властивостей чи процесів.

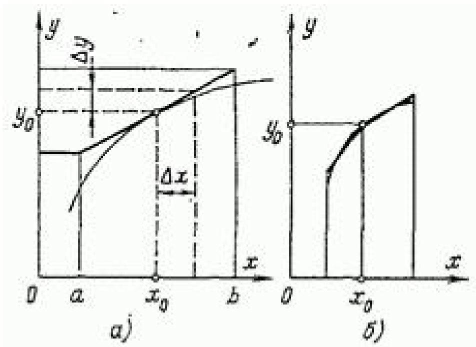

Рис. 1.2

Нехай статична характеристика елемента *y=f(x)* має вигляд, показаний на рис. 1.2, а. Лінеаризація зводиться до заміни криволінійної характеристики на певному інтервалі *(a, b)* зміни *x*, який називають робочим інтервалом, відрізком прямої. Окрім робочого інтервалу, дослідника зазвичай цікавить ще одна робоча точка (x_0, y_0) на характеристиці, наприклад точка рівноваги, з якої починається рух (початковий рівноважний стан), або точка, до якої прямує процес (кінцевий рівноважний стан). Робоча точка має бути загальною для вихідної характеристики і для апроксимуючої прямої.

Експеримент системи зазвичай починається з аналізу стійкості рівноваги в робочій точці. З цією метою досліджується поведінка системи при малих відхиленнях від робочої точки, а відрізок нелінійної характеристики в робочому інтервалі замінюється відрізком дотичній до кривої в робочій точці. Аналітично рівняння лінійного наближення характеристики отримують, розкладаючи функцію f в околі робочої точки в ряд Тейлора и залишаючи в розкладанні тільки лінійні члени:

$$y_0 + \Delta y \approx f(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} \Delta x,$$

які можна розбити на два рівняння

$$y_0 = f(x_0); \ \Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} \Delta x;$$

перше пов'язує значення змінних в робочій точці, друга – відхилення Δy і Δx цих змінних від робочої точки.

Коефіцієнт при Δx, тобто $(df/dx)_{x=x_0}$, - стала, рівна кутовому коефіцієнту дотичної в робочій точці.

А.М. Ляпунов показав, що при такій лінеаризації стійкість рівноваги вихідної нелінійної системи може бути суворо досліджена шляхом її лінійного наближення, такий метод дослідження стійкості «в малому» називають також першим методом Ляпунова. Крім стійкості, досить часто на лінійній моделі можна дослідити і динамічні процеси при невеликих відхиленнях, даний метод лінеаризації є основним в теорії лінійних систем.

При великих відхиленнях можна підвищити точність наближення, якщо замінити відрізки кривої вправо та вліво від робочої точки відрізками прямих (як показано на рис. 1.2, б), які знайдені за методом найменших квадратів, але рівняння системи при цьому залишаються нелінійними.

Розглянемо лінеаризацію рівнянь, записаних в нормальній формі

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_i, t). \tag{1.1}$$

Нехай функції f_i – аналітичні, мають всі неперервні похідні за всіма аргументами. Тоді вони можуть бути розкладені в ряди Тейлора. Якщо система автономна, тобто час t не входить в функції f_i явно, і стаціонарна, тобто коефіцієнти $a_{i3} = \partial f_i / \partial x_i$ не залежать від часу, то

$$f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, z_1, \dots, z_l) = f_i(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{mo}, z_{10}, \dots, z_{l0}) +$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{10}} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_{n0}} \Delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_{10}} \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_{m0}} \Delta u_m + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial z_{10}} \Delta z_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial z_{l0}},$$

де

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{j0}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_{j0}}, j = 1, \dots, n; \qquad \Delta x_j = x - x_{j0} \ ,$$

x_{j0} , $i = 1, \dots, n$ – значення змінних в робочій точці, які знаходяться з рівнянь статики

$$f_i = (x_{10}, \dots, x_{n0}, \dots, u_{10}, \dots, u_{m0}, \dots, z_{10}, \dots, z_{l0}) = 0. \tag{1.2}$$

Підставляючи отриманий розклад функції в (1.1) і виключаючи далі рівняння статики (1.2), отримуємо рівняння динаміки для відхилення змінних

$$\frac{d\Delta x_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \Delta u_k + \sum_{r=1}^{l} c_{ir} \Delta z_{r,} \tag{1.3}$$

де $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_{j0}}; \dots; \ b_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial u_{k0}}; \dots; \ c_{ir} = \frac{\partial f_i}{\partial z_{r0}}$ … сталі коефіцієнти.

В лівій частині останнього рівняння під знаком похідної змінна x_i замінена її приростом Δx_i тому, що $x_0 = const$ і $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x_0 + \Delta x)}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt}$.

Оскільки, в рівняння динаміки включають лише відхилення, а самі змінні не включаються, в подальшому, для спрощення запису символ Δ опускають і вважають, що буквами x, y, z, і позначаються відхилення змінних від їх встановлених значень.

Лінеаризація рівнянь при поелементному описі чи при описі за допомогою рівнянь відносно керованих величин здійснюється аналогічним способом.

При лінеаризації похідних деяких функцій зручно замість знаходження похідних підставляти в ці функції вирази $x_0 + \Delta x$, а $y_0 + \Delta y$ і потім, виконуючи операції, вказані цими функціями, викидати в результаті члени, які містять нескінченно малі вищих порядків, наприклад

$$xy = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \approx x_0 y_0 + y_0 \Delta x + x_0 \Delta y.$$

Якщо функція змінних є множником при похідній, то

$$f(x)\frac{dx}{dt} = \left[f(x_0) + \frac{df}{dx_0}\Delta x + \cdots\right]\frac{d\Delta x}{dt} \approx f(x_0)\frac{d\Delta x}{dt},$$

так як в коефіцієнті при $d\Delta x/dt$ можна знехтувати складовими, які містять відхилення, як малими в порівнянні зі сталою складовою.

З метою спрощення запису лінійних рівнянь для позначення операції диференціювання використовується символ p, а для позначення інтегрування - $1/p$. Так,

$$\frac{dx}{dt} \equiv px;\ \frac{d^k x}{dt^k} \equiv p^k x;\ \int_0^t x\, dt \equiv \frac{x}{p}.$$

Лінійні рівняння при поелементній формі мають вигляд:

$$D_i(p) x_{i\,\text{вих}} = M_i(p) x_{i\,\text{вх}},\ \ i = 1, \ldots, r, \tag{1.4}$$

де $D_i(p)$, $M_i(p)$ – поліноми від p виду

$$D_i(p) = a_{i0}p^l + a_{i1}p^{l-1} + \cdots + a_{i,l_1-1}p + a_{il};$$

$$M_i(p) = b_{i0}p^{l_1} + b_{i1}p^{l_1-1} + \cdots + b_{i,l_1-1}p + b_{il_1};$$

r – число елементів.

Рівняння системи відносно єдиної регульованої величини, має вигляд:

$$D(p)x = M_u(p)u + M_z(p)z, \tag{1.5}$$

де

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n;$$

$$M_u(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1}p + b_m;$$

$$M_z(p) = c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \cdots + c_{l-1}p + c_l;$$

n – порядок рівняння.

За наявності багатьох змінних може бути використаний також найбільш компактний запис в матричній формі.

Для поелементного опису

$$d(p)x_{\text{вих}} = m(p)x_{\text{вх}},$$

де $d(p)$, $m(p)$ – матриці $r \times r$:

$$d(p) = \begin{bmatrix} d_{11}(p) \dots d_{1r}(p) \\ d_{21}(p) \dots d_{2r}(p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{r1}(p) \dots d_{rr}(p) \end{bmatrix}; \quad m(p) = \begin{bmatrix} m_{11}(p) \dots m_{1r}(p) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ d_{r1}(p) \dots m_{ir}(p) \end{bmatrix};$$

$$x_{\text{вих}} = \begin{bmatrix} x_{\text{вих } 2} \\ \vdots \\ x_{\text{вих } r} \end{bmatrix}; \quad x_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} x_{\text{вх } 1} \\ \vdots \\ x_{\text{вх } r} \end{bmatrix}.$$

При описі через регульовані величини

$$D(p)x = M_u(p)u + M_z(p)z, \tag{1.6}$$

де $D(p)$, $M_u(p)$, $M_z(p)$ – матриці $k \times k$, $k \times m$ і $k \times l$ відповідно (*k,* m і l - кількості відповідно регульованих величин)

При нормальній формі запису

$$px = Ax + Bu + Cz, \tag{1.7}$$

де A, B та C – матриці коефіцієнтів [11, с.29-33].

1.3. Метод усереднення

Метод усереднення зародився дуже давно. Спочатку в небесній механіці. Перший етап її розвитку був пов'язаний з проблемами небесної механіки, і для їх вирішення було використано багато схем усереднення (наприклад, схеми Гаусса, Фату, Делоне тощо). Основним методом усереднення було те, що перші частини складних диференціальних рівнянь, що описують коливання чи обертання, були замінені на «згладжені», усереднені функції, які явно не містять часу t та швидко змінюються параметрів системи. В результаті усереднені рівняння були інтегрованими, або спрощеними, що дозволило отримати важливі висновки щодо вивченого руху якісного і кількісного характеру. Взагалі метод теорії усереднення давно залишається невідомим у теорії нелінійних коливань, хоча він неявно використовується давно.

1835 р. М.В. Остроградський, розглядаючи нелінійне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = ax^3,$$

отримав у першому наближенні рішення, яке збігається з рішенням, отриманим методом усереднення. А в 1682 році Ісаак Ньютон, вивчаючи рух маятника за наявності опору, знайшов формулу, яка визначала величину загасання малих коливань маятника при будь-якому законі опору середовища. Ця формула збігається з першим наближенням, отриманим методом усереднення. Систематичне застосування методу усереднення для вивчення нелінійних коливальних процесів у радіо- та електротехніці та механіці базувалося на відомих роботах голландського вченого Ван-дер-Поля, який розробив досить ефективний спосіб розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливальний процес у системі з одним ступенем свободи. Завдяки своїй простоті і чіткості метод Ван-дер-Поля почали використовувати інженери для вивчення коливальних процесів.

Слід зазначити, що при формулюванні методу усереднення, поданому Ван-дер-Полем, усереднені рівняння були отримані, використовуючи далеко не суворі міркування. Цей метод не може повністю відповідати вимогам практики, а також не може повністю задовольнити мінімальні вимоги переконливості та універсальності висновку. Однак для окремого випадку диференціальних рівнянь з періодичними правими частинами в 1928 р. П. Фату та у 1934 р. Л.І. Мендельштатом і Н.Д. Папалексі були зроблені деякі кроки у галузі математичного обґрунтування методу усереднення.

Розглянемо основні результати, отримані М.М., Боголюбовим в напрямку встановлення суворої теорії методів усереднення, що включає алгоритм побудови рівнянь усереднення з будь-якою точністю та математичним обґрунтуванням. М.М. Боголюбов показав, що метод усереднення пов'язаний з існуванням деякої підстановки змінних, що дозволяє виключати час t із правого боку рівнянь з будь-яким ступенем точності щодо малого параметра ε. Окрім того, він вказав, як побудувати не тільки систему першого наближення (систему усереднення), а й систему усереднення рівнянь вищих наближень, рішення яких наближають рішення початкової точної системи з точністю до величин, пропорційних вищим ступеням малого параметра ε.

Розглянемо нелінійні рівняння, припустивши, що вони зведені до стандартної форми

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1,2, \dots, n), \tag{1.8}$$

де ε – малий додатній параметр, t – час, а функції $X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ можуть бути подані у вигляді

$$X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_v e^{ivt} X_v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(k = 1,2, \dots, n) \tag{1.9}$$

Перепозначимо сукупність n величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ однією буквою x. Тоді рівняння (1.8) запишеться у векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x). \tag{1.10}$$

Тут x, X можна розглядати як точки n – вимірного евклідового простору E_n. При цьому вираз (1.9) набуде вигляду

$$X(t, x) = \sum_v e^{ivt} X_v(x). \tag{1.11}$$

Формули диференціювання складних функцій

$$\frac{dF_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} = \frac{\partial F_k}{\partial t} + \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_q} \cdot \frac{dx_q}{dt} \tag{1.12}$$

в прийнятих позначеннях можна записати в такий спосіб:

$$\frac{dF(t,x)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)F(t,x) \qquad (1.13)$$

де $\frac{\partial F}{\partial x}$ трактується як матриця

$$\left\|\frac{\partial F_k}{\partial x_q}\right\|,$$

прикладена до вектора $\frac{dx}{dt}$, і $\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – як операторний скалярний добуток

$$\sum_{q=1}^{n}\frac{dx_q}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x_q} \qquad (1.14)$$

Нехай, надалі, $F(t,x)$ – сума виду

$$F(t,x) = \sum_{v} e^{ivt}F_v(x) \qquad (1.15)$$

Введемо позначення

$$M_t\{\,F(t,x)\} = F_0(x),$$

$$\tilde{F}(t,x) = \sum\nolimits_{v\neq 0}\frac{e^{ivt}}{iv}F_v(x), \qquad (1.16)$$

$$\tilde{F}(t,x) = \sum_{v\neq 0}\frac{e^{ivt}}{(iv)^2}F_v(x)$$

і т.д., отримаємо тотожне

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial t} = \tilde{F},$$

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial t} = F - M(F). \qquad (1.17)$$

Оператор $\sim$ називають інтегруючим оператором, M – оператором усереднення констант x або оператором усереднення, що містить час.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (1.10), де ε – малий параметр і вирази $X(t,x)$ як функції часу t представляються сумами (1.11). форма наближеного розв’язку системи рівнянь (1.10) може бути знайдена, так як перші похідні $\frac{dx}{dt}$. Тому ми представляємо x як суперпозицію гладко змінного члена ξ та суми малих вібраційних доданків, а через малість останніх у першій частині рівняння (1.10) у першому наближенні ставимо x = ξ.

Враховуючи вираз (1.11), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \sum_{v} e^{ivt} X_v(\xi) \tag{1.18}$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \sum_{v \neq 0} e^{ivt} X_v\,(\xi) \tag{1.19}$$

Сума в правій частині рівняння (1.19), складається з малих синусоїдальних коливальних доданків. Припускаючи, що ці синусоїдальні коливальні умови викликають лише невеликі коливання x поблизу ξ і не впливають на систематичні зміни x (немає резонансу I), ігноруючи їх, ми дійшли до рівнянь першого наближення

$$\frac{dx}{dt} = \ \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon M\{X(t,x)\}. \tag{1.20}$$

Для отримання другого наближення у виразі x необхідно взяти до уваги коливальні члени; враховуючи в рівнянні (1.19) доданок $\varepsilon e^{ivt} X_v(\xi)$, в розв'язку x коливання виду

$$\frac{\varepsilon e^{ivt}}{iv} X_v(\xi),$$

приходимо до наближеного виразу

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{iv} X_v(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,x). \tag{1.21}$$

Підставляючи вираз (1.21) в рівняння (1.10), маємо

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi), \tag{1.22}$$

$\frac{dx}{dt} = \varepsilon M\left\{X\left(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi)\right)\right\}$ + малі синусоїдальні коливальні члени.

Отже, нехтуючи впливом синусоїдальних коливальних доданків на систематичні зміни ζ, отримуємо рівняння другого наближення

$$\frac{d\xi}{dt} = \ \varepsilon M\left\{X\left(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi)\right)\right\},$$

або, з точністю до величин другого порядку малості включно, відносно ε,

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M\left\{X(t,\xi) + \varepsilon\left(\tilde{X}(t,\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}. \quad (1.23)$$

Усім цим міркуванням легко надати обґрунтовану форму і показати, що насправді, використовуючи усереднення, в перетворених рівняннях нехтують величинами вищого порядку малості.

Для цього в рівнянні (1.10) зробимо заміну змінних за допомогою формул

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,x), \quad (1.24)$$

де ζ будемо розглядати як нові невідомі.

Вираз (1.24) розглядають тут не як наближений розв’язок системи (1.10), а як формулу заміни змінних.

Диференціюючи вираз (1.24), маємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Враховуючи тотожні співвідношення (1.17) інтегруючого оператора, маємо

$$\frac{\partial X}{\partial t} = X(t,\xi) - X_0(\xi).$$

Підставляючи вирази (1.24) і (1.25) в рівняння (1.10), отримуємо

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t,\xi) - \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon X\{t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\}$$

або

$$\left\{E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\right\}\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon\left\{X\big(t,\xi + \varepsilon X(t,\xi)\big) - X(t,\xi)\right\}, \quad (1.26)$$

де E – одинична матриця.

Множачи співвідношення (1.25) зліва на вираз

$$\left\{E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}, \quad (1.27)$$

для нових невідомих ζ, отримуємо рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\left\{E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}X_0(\xi) + \left\{E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}\left\{X\left(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi) - X(t,\xi)\right)\right\}. (1.28)$$

Далі, розкладаючи вираз (1.27) в ряд за ступенем параметра ε, маємо

$$\left\{E + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1} = E - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \dots , \quad (1.29)$$

де символ ε^m позначає величини порядку малості не нижче ε^m.

Беручи до уваги розклад (1.29), рівняння (1.28) можемо представити у вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \dots , \quad (1.30)$$

або, більш докладно

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X}(t,\xi) \frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t,\xi) + \varepsilon^3 \dots . \quad (1.31)$$

Нехтуючи в системі рівнянь (1.30) величинами другого порядку малості, отримаємо рівняння першого наближення

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi). \quad (1.32)$$

Якщо ξ задовольняють рівнянням (1.30), права частина яких відрізняється від правої частини рівнянь першого наближення (1.32) на величини другого порядку малості, то вираз

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi) \quad (1.33)$$

представляє точний розв’язок розглянутої системи рівнянь (1.10). Тому як перше наближення ми можемо прийняти

$$x = \xi, \quad (1.34)$$

взявши за ζ розв’язок рівняння першого наближення (1.32).

Вираз (1.33), в якому ξ задовольняє рівняння (1.32), називається покращеним першим наближенням.

Підставляючи покращене перше наближення (1.33) в точне рівняння (1.10), легко переконатися, що таке наближення задовольняє його з точністю до величини другого порядку малості.

Повертаючись до рівняння (1.32), можна помітити, що, згідно означення оператора усереднення,

$$X_0(\xi) = M\{X(t,\xi)\},$$

рівняння першого наближення можуть бути показані у вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M\{X(t,\xi)\}, \quad (1.35)$$

Таким чином, рівняння першого наближення (1.35) виходить з точних рівнянь (1.10) шляхом усереднення останніх по явному часі t. При розв'язуванні усереднення ξ розглядаються як сталі.

При побудові першого наближення шляхом заміни змінних (1.33) рівняння (1.10) були перетворені в рівняння (1.30)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \dots ,$$

відмінні від рівнянь, отриманих після усереднення правих частин точних рівнянь (1.10) на величини другого порядку малості відносно параметра ε. Тому різницею між точними рівняннями (1.30) та усередненими є величини другого порядку малості відносно параметра ε.

Для того, щоб отримати друге наближення знаходимо заміну змінних, що є аналогічною заміні (1.33), яка перетворює змінну x в змінну ξ, що задовольняє точне рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^3 \dots . \tag{1.36}$$

Щоб виконати заміну змінних природним способом, знайшли вираз

$$x = \phi(t, \xi, \varepsilon), \tag{1.37}$$

який для ξ, задовольняє рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi), \tag{1.38}$$

що задовольняло б рівняння (1.10) з точністю до величини порядку малості ε^3.

Так як при ξ, що визначена з рівняння першого наближення

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

вираз

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{iv} X_v(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$$

задовольняє рівняння (1.10) з точністю до величини порядку малості ε^2, то розв'язок рівняння (1.37) знайдемо в такій формі

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi), \tag{1.39}$$

де $F(t,\xi)$ представляється сумами

$$F(t,\xi) = \sum_{\mu} e^{i\nu t} F_{\mu}(\xi). \qquad (1.40)$$

Підставивши значення x згідно виразу (1.39) в праву частину системи (1.10), отримаємо

$$\xi X(t,\xi) = \varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon^2 P(t,\xi)\right) = .$$

$$= \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) + \varepsilon^3 \dots . \qquad (1.41)$$

З іншого боку, продиференціювавши вираз (1.39) і прийнявши при цьому до уваги рівняння (1.38), знайдемо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi} =$$

$$= \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots,$$

тобто

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots,$$

оскільки

$$\frac{\partial X}{\partial t} = X(t,\xi) - X_0(\xi).$$

Для того, щоб праві частини виразів (1.41) і (1.42) були рівними з точністю до величини порядку малості ε^3, потрібно підібрати функції $P(\xi)$ і $F(t,\xi)$ так, аби виконувалися співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \frac{\partial\tilde{X}}{\partial t}X_0(\xi) - P(\xi). \qquad (1.43)$$

Врахувавши те, що

$$\tilde{X}(t,\xi) = \sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}X_{\nu}(\xi); \quad X(t,\xi) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi), \qquad (1.44)$$

можна записати

$$\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) =$$

$$= \sum_{\nu,\nu''(\nu'\neq 0)} \nu^{i(\nu'+\nu'')t}\frac{1}{i\nu'}\left(X_{\nu'}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X_{\nu''}(t,\xi) - \qquad (1.45)$$

$$-\sum_{v'\neq 0}\frac{e^{ivt}}{iv}\cdot\frac{\partial X_v}{\partial \xi}X_0(\xi),$$

де сума розповсюджується на всі параметри (v', v'') частот v, в сумах (1.44).

Вираз (1.45) можемо показати у вигляді суми

$$\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)=\sum_{\substack{\mu\\(\mu=v,v'+v'')}}e^{i\mu t}\Phi_\mu(\xi)$$

і співвідношення (1.43) буде виконуватись, якщо

$$P(\xi)=\Phi_0(\xi)=M\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)\right\}=$$

$$=M\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} \qquad (1.46)$$

$$F(t,\xi)=\sum_{\mu\neq 0}\frac{e^{ivt}}{iv}\Phi_\mu(\xi)=\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)$$

Отже, можна стверджувати, що при ξ, яке визначене з рівняння

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon M\{X(t,\xi)\}+\varepsilon^2 M\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}, \qquad (1.47)$$

вираз

$$x=\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi)+\varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) \qquad (1.48)$$

задовольняє рівняння (1.10) з точністю до величини порядку ε^3.

Якщо розглядати отриманий вираз (1.48) не як наближений розв’язок рівняння (1.10), а як формулу заміни змінних, яка перетворює невідому x, що визначена точним рівнянням (1.10), до нової невідомої ξ, то вона буде задовольняти рівняння виду

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon M\{X(t,\xi)\}+\varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)+\varepsilon^3\ldots, \qquad (1.49)$$

яке відрізняється від рівняння (1.47) величинами, пропорційними ε^3.

Для цього продиференціюємо вираз (1.48), беручи до уваги позначення (1.46), маємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi} =$$

$$= \left(E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\,. \qquad (1.50)$$

Згідно визначення інтегруючого оператора,

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial t} = \varepsilon X(t,\xi) - \varepsilon M\{X(t,\xi)\} +$$

$$+\varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) - M\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\},$$

і тому із співвідношення (1.50) випливає

$$\frac{dx}{dt} = \left(E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) - \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 M\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}$$

В силу рівняння (1.10) цей вираз має бути рівний:

$$\varepsilon X(t,\xi) = \varepsilon X\big(t,\xi + \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2 F(t,\xi)\big)$$

$$= \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) + \varepsilon^3 . . .$$

Отже, змінна ξ задовольняє рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(1 + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^{-1}\Big[\varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) +$$

$$+\varepsilon^2 M\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3 . . .\Big] \qquad (1.51)$$

.

Але очевидно, що

$$\left(E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^{-1} = E - \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2 . . . ,$$

і тому рівняння (1.51) може бути представлене в формі

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 M\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3 . . . ,$$

що співпадає з (1.49).

Отже, якщо ξ задовольняє рівняння (1.49), а його права частина відрізняється від правої частини рівняння (1.47) на величину порядку малості ε^3, то вираз (1.48) являє собою точний розв'язок рівняння (1.10).

Як друге наближення візьмемо вираз

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi), \tag{1.52}$$

де ξ визначається рівнянням (1.47). Для другого наближення використовуємо вдосконалену формулу першого наближення, де ξ задовольняє не рівняння першого наближення, а рівняння другого наближення.

Вираз (1.48), де ξ визначено з рівняння (1.47), будемо називати покращеним другим наближенням.

Покращене друге наближення задовольняє точне рівняння (1.10) з похибкою порядку малості ε^3.

Все це узагальнюється і на рівняння виду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \varepsilon^2 Y(t, x), \tag{1.53}$$

в яке входять члени другого порядку малості.

В такому випадку рівняння другого наближення буде мати вигляд

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M\{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 M\{Y(t, \xi)\} + M\left\{\left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right\}, \tag{1.54}$$

і вираз другого наближення прийме вигляд

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi). \tag{1.55}$$

Для покращення другого наближення знаходимо

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2\tilde{Y}(t, \xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi). \tag{1.56}$$

Помітимо, що

$$M\left\{\varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi)\right) + \varepsilon^2 Y\left(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi)\right)\right\} =$$

$$= M\left\{\varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi)\right) + \varepsilon^2 Y(t, \xi)\right\} + \varepsilon^3 \ldots =$$

$$= M\left\{\varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) + \varepsilon^2 Y(t, \xi)\right\} + \varepsilon^3 \ldots, \tag{1.57}$$

і тому рівняння (1.54) ми можемо записати у будь-якій формі або у вигляді:

$$\frac{d\xi}{dt} = M\left\{\varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\right) + \varepsilon^2 Y(t,\xi)\right\}, \qquad (1.58)$$

або

$$M\left\{\varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\right) + \varepsilon^2 Y\left(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\right)\right\} \qquad (1.59)$$

оскільки в рівняннях другого наближення члени порядку ε^3 не враховуються.

Загалом, рівняння другого наближення можна отримати із точних рівнянь (1.53), якщо в їх правій частині підставити замість x покращену форму першого наближення та усереднити по часу t, приймаючи в процесі усереднення змінні ξ як постійні, а величини третього порядку малості можна відкинути.

Цей принцип усереднення можна сформулювати так: рівняння другого наближення отримують шляхом усереднення точних рівнянь (1.53), в обох частинах якого вдосконалене перше наближення, по явному часі. Рівняння другого наближення випливає з співвідношення

$$M\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = M\{\varepsilon X(t,x) + \varepsilon^2 Y(t,x)\}, \qquad (1.60)$$

де в обох частинах замість x стоїть $\xi + \tilde{X}(t,\xi)$, тоді як у процесі усереднення $\frac{d\xi}{dt}$ і ξ трактуються як сталі, і значення порядку малості ε^3 можуть бути неврахованими.

Нехай загальне рівняння в стандартній формі має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x) + \varepsilon^2 X_1(t,x) + \cdots + \varepsilon^m X_{m-1}(t,x), \qquad (1.61)$$

де $X_k(t,x)$ – деякі тригонометричні суми того ж типу, що й $X(t,x)$.

Для отримання m-наближення розглянемо вираз

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t,\xi) + \varepsilon^2 F_2(t,\xi) + \cdots + \varepsilon^m F_m(t,\xi), \qquad (1.62)$$

в якому $F_k(t,\xi)$ – суми виду

$$\sum_{\mu\neq 0} e^{i\mu t} F_{k\mu}(\xi)$$

і змінна ξ - розв’язок рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \cdots + \varepsilon^m P_m(\xi). \qquad (1.63)$$

Підставляючи вираз (1.62) в рівняння (1.61) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε до m-го порядку включно, підберемо $F_1(t,\xi)$, …, $F_m(t,\xi)$ і $P_1(\xi)$,…, $\varepsilon^m P_m(\xi)$ так, щоб вираз (1.62) задовольняв рівняння (1.61) з точністю до величини порядку малості ε^{m+1}.

В результаті отримаємо

$$P_1(\xi) = M\{X(t,\xi)\},$$

$$P_2(\xi) = M\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) + X_1(t,\xi)\right\},$$

$$F_1(t,\xi) = \tilde{X}(t,\xi),$$

$$F_2(t,\xi) = \left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}X(t,\xi) - \frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}M\{X(t,x) + \tilde{X}_1(t,\xi)\}\right).$$

Якщо тепер, визначивши $F_1(t,\xi)$,…, $F_m(t,\xi)$ і $P_1(\xi)$,…, $P_m(\xi)$, розглядати вираз (1.62) як деяку формулу заміни змінних, яка перетворює невідому x в нову невідому ξ, то для такої нової змінної будемо мати рівняння (точне)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \cdots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1}R(t,\xi,\varepsilon), \quad (1.64)$$

його права частина складається з «інтегрованої» частини та збурення $\varepsilon^{m+1}R(t,\xi,\varepsilon)$, що задовольняє рівняння (1.64), то вираз (1.62) являє собою точне рішення рівняння (1.61).

Тому в якості m-го наближення розв'язку рівняння (1.61) можна прийняти вираз

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t,\xi) + \cdots + \varepsilon^{m-1}F_{m-1}(t,\xi), \quad (1.65)$$

в якому ξ визначається рівнянням m-го наближення (1.63). Для такого ξ формула (1.62) являє собою вдосконалене m-наближення, що задовольняє точне рівняння (1.61) з похибкою порядку ε^{m+1}.

Зауважимо, що якщо формула вдосконаленого m-наближення відома, то рівняння m-наближення можна отримати з точних рівнянь (1,61), замінивши в них цю формулу, а потім усереднюючи за допомогою оператора М.

На практиці в основному використовують перше та друге наближення. Більш високі наближення зазвичай використовуються в загальних теоретичних міркуваннях та аналізі якісних властивостей, для власне побудови розв’язків вони рідко використовуються із-за стрімкого росту складності їх побудов.

Отримані приблизні рівняння мають головну перевагу перед точними тим, що вони не містять явного часу в правій частині і є автономними. Однак вони все ще є диференційованими, що накладає деякі обмеження можливостей вищевказаних методів.

Варто зазначити, що для найбільш цікавих практичних завдань усереднені рівняння вивчати набагато простіше. Однак у більшості випадків, коли загального рішення усереднених систем неможливо отримати, можна знайти, принаймні, часткові рішення.

При цьому в більшості випадків, у яких загальний розв’язок усереднених систем не вдається отримати, можна знайти, принаймні, частинні розв’язки. Так чином, при n=1 рівняння першого наближення інтегрується в квадратурах, при n=2 для дослідження може бути використана відома теорія Пуанкаре.

Для будь-якого n, якщо $X_0(\xi)$ стає нульовим в деякій точці $\xi = \xi_0$, можна розглядати «квазістатичний» розв’язок

$$x = \xi_0$$

рівняння першого наближення. Для дослідження стійкості цього розв’язку можна скласти для малих відхилень рівняння в варіаціях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \delta\xi. \tag{1.66}$$

Якщо всі дійсні члени коренів характеристичного рівняння

$$Det\left|E_p - \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi}\right| = 0 \tag{1.67}$$

від’ємні, то розглянутий квазістатичний розв’язок являється стійким.

Будь-який розв’язок усереднених рівнянь (рівнянь першого наближення), який виходить з початкових позначень, досить близьких до ξ_0, при $t \to \infty$ експоненціально наближається до «квазістатичного» розв'язку. Якщо, принаймі, для одного з коренів характеристичного рівняння (1.57) дійсна частина є додатною, то маємо випадок нестійкості.

Можемо також представити критичний випадок, коли деякі або всі дійсні частини дорівнюють нулю. Такий випадок часом може привести до одного з попередніх.

Вдосконалене перше наближення для розглянутого «квазістатичного» розв'язку

$$x = \xi_0 + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi_0) \tag{1.68}$$

представляється як сума постійного члена ξ_0 і малих синусоїдальних коливань з амплітудою $\varepsilon X_v(\xi_0)$ і «зовнішніми» силами *v*.

За допомогою заміни змінних (1.62) рівняння (1.61) зводиться до рівняння (1.64), що складається з «інтегруючої» частини і збурення $\varepsilon^{m+1}R(t, \xi, \varepsilon)$, що є величиною порядку ε^{m+1}. У цьому випадку, якщо зміна ξ задовольняє рівняння (1.64), то вираз (1.62) є точним розв'язком рівняння (1.61).

Розглянемо цей метод відносно границі, тобто в виразі (1.62) і рівнянні (1.64) ми спрямовуємо m до нескінченності. Якщо ряди (1.62) збігаються, то система рівнянь (1.61) буде зведена до «інтегруючої» системи

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P(\xi, \varepsilon). \tag{1.69}$$

Цей розв'язок методу є неможливимь для систем з квазіперіодичними по t функціями $X(t, x, \varepsilon)$, в формулах (1.62) з'являються малі дільники і ряди, визначені функціями $F_1(t, \xi)$,..., $F_m(t, \xi)$, розбігаються. Тому практичне застосування цього методу слід визначати асимптотичними властивостями для заданого нерухомого m при ε → 0. У загальному випадку потрібно, щоб для малого ε та нерухомого m вираз (1,62) давав досить точне уявлення про рішення рівняння (1,61) протягом досить тривалого проміжку часу. Через ці труднощі не завжди можливо використовувати вираз (1.62) та рівняння

(1.64) для вивчення якісних властивостей системи (1.61) протягом обмеженого періоду часу.

Але ці труднощі можна усунути завдяки модернізації методу, що призводить до швидкого зближення відповідних рядів, що придушуються малі дільники.

Як приклад, що ілюструє застосування представленого способу, розглянемо класичне **рівняння Ван-дер-Поля:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \tag{1.70}$$

яке шляхом введення нових змінних a, φ використовуючи формули заміни змінних

$$x = a\cos(t + \varphi),$$
$$\frac{dx}{dt} = -a\sin(t + \varphi) \tag{1.71}$$

легко зводиться до системи рівнянь в стандартній формі

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a}{2}\cos 2(t + \varphi) + \frac{a^8}{8}\cos 4(t + \varphi)\right\},$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a}{2}\sin 2(t + \varphi) - \frac{a^8}{8}\sin 4(t + \varphi)\right\}. \tag{1.72}$$

Зупинимося на побудові вдосконалених першого та другого наближень.

Згідно з вищезазначеним, для вдосконаленого першого наближення отримаємо

$$a = a_1 - \frac{\varepsilon a_1}{4}\sin 2(t + \varphi_1) + \frac{\varepsilon a_1^3}{32}\sin 4(t + \varphi_1),$$
$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right)\cos 2(t + \varphi_1) + \frac{\varepsilon a_1^2}{32}\cos 4(t + \varphi_1), \tag{1.73}$$

де a_1 і φ_1 визначаються з рівняння першого наближення в результаті усереднення правих частин системи (1.72)

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\varepsilon a_1}{2}\left(1 - \frac{a_1^2}{4}\right),$$
$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0. \tag{1.74}$$

Для стаціонарного режиму маємо

$$a(t) \to 2 \text{ і } t \to \infty,$$

і, отже, для установленого коливального режиму при $a_1 = 2$ із формул покращеного першого наближення (1.73) слідує

$$a = 2 - \frac{\varepsilon}{2}\sin 2(t+\varphi_1) + \frac{\varepsilon}{4}\sin 4(t+\varphi_1),$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varepsilon}{4}\cos 2(t+\varphi_1) + \frac{\varepsilon}{8}\cos 4(t+\varphi_1). \quad (1.75)$$

Підставляючи такі значення в першу формулу (1.71) отримаємо

$$x = \left[2 - \frac{\varepsilon}{2}\sin 2(t+\varphi_1) + \frac{\varepsilon}{4}\sin 4(t+\varphi_1)\right]\cos(t+\varphi_1) + \frac{\varepsilon}{4}\cos 2(t+\varphi_1) + \frac{\varepsilon}{8}\cos 4(t+\varphi_1), \quad (1.76)$$

або, нехтуючи членами другого порядку малості, після елементарних перетворень отримуємо вдосконалене наближення для стаціонарного розв’язку у вигляді

$$x = 2\cos(t+\varphi_1) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(t+\varphi_1) \qquad (\varphi_1 = const.) \quad (1.77)$$

У другому наближенні a і φ будуть визначатися виразами (1.73), де a_1 і φ_1 мають бути знайденими з рівняння другого наближення

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\varepsilon a_1}{2}\left(1 - \frac{a_1^2}{4}\right),$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\varepsilon^2\left(\frac{1}{8} - \frac{a_1^2}{8} + \frac{7a_1^4}{256}\right). \quad (1.78)$$

Для стаціонарного розв’язку в другому наближенні маємо

$$x = 2\cos(t+\varphi_1) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(t+\varphi_1),$$

де $\varphi_1 = -\frac{\varepsilon^2}{16} + const$ [28]

.

1.4. Метод малого параметру

Нехай $x(t)$ визначається диференціальним рівнянням

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \theta) \quad (\theta = \omega t), \tag{1.80}$$

де функція f передбачається періодичною по t з періодом $2\pi/\omega$, а величина ε являє собою малий параметр. Очевидно, що це рівняння має досить загальний вигляд; воно включає всі перераховані вище випадки, коли використовується розклад в околі лінеаризованої задачі та рівняння Хілла з малими періодичними коефіцієнтами.

Доведемо, що рівняння (1.80) має розв'язок з періодом $2\pi/\omega$, який може бути виражений у вигляді ряду за степенями ε. Замість того, щоб безпосередньо доводити збіжність такого степеневого ряду, простіше доказати, що для розглянутого рівняння існують періодичні розв'язки, які залежать від ε аналітично; звідси буде випливати можливість представлення цих розв'язків степеневим рядом по ε. Тому слід уявити, що f являє собою аналітичну функцію трьох комплексних змінних $x, \dot{x}$ та θ для всіх значень цих аргументів; параметр ε також вважають комплексною величиною. Звідси слідує, що всі розв'язки $x(t;\varepsilon)$ рівняння (1.80) залежать від t і ε аналітично.

Для того, щоб встановити існування періодичного розв'язку $x(t)$, можемо припустити, що фаза функції f в рівнянні (1.80) відповідним чином зрушена, прийняти, не порушуючи загальності, початкову умову $\dot{x}(0) = 0$. Отже, замість рівняння (1.80) можна написати

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \theta + \delta), \tag{1.81}$$

де δ – відповідно вибраний зсув фази. Шукані періодичні розв'язки повинні задовольняти початковим умовам

$$x(0) = A \qquad \dot{x}(0) = 0, \tag{1.82}$$

де A – комплексна величина.

Відомо, що для рівняння (1.81) єдиний розв'язок $x(t) = x(t; A, \delta, \varepsilon)$, який задовольняє початковим умовам (1.82), існує в області

$$|t| \leq T_1, \quad |x - A| \leq A_1, \quad |\dot{x}| \leq A_1, \quad A_1 = 3|A|,$$

в якій $x(t; A, \delta, \varepsilon)$ залежить аналітично від t, A, δ і ε. Зокрема, для $\varepsilon = 0$ розв'язок

$$x(t) = A\cos t \tag{1.83}$$

має дійсний період 2π. Наше завданння - встановити існування періодичних розв'язків в околі $\varepsilon = 0$, припускаючи, що $A = A(\varepsilon)$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, і вибираючи з розв'язків $x[t; A(\varepsilon), \delta(\varepsilon), \varepsilon]$ такі, які будуть періодичними. Період Т також буде функцією параметра ε,

тобто $T = T(\varepsilon) = 2\pi/\omega$, причому T має прямувати до 2π, коли ε прямує до нуля. Отже, потрібно показати, що границя T_1 для $|t|$ може бути вибрана більшою ніж 2π. Це може бути зроблено для достатньо малого ε за допомогою двох відношень, які, крім того, будуть мати вирішальне значення і для всього подальшого. Диференціальне рівняння (1.81) і початкові умови (1.82) можемо замінити еквівалентним інтегральним рівнянням

$$x(t) = A\cos t + \varepsilon \int_0^t f[x(\tau), \dot{x}(\tau),\ \ \omega\tau + \delta] \sin(t - \tau) d\tau. \tag{1.84}$$

Звідси

$$\dot{x}(t) = -A\sin t + \varepsilon \int_0^t f[x(\tau), \dot{x}(\tau), \omega t + \delta] \cos(t - \tau) d\tau. \tag{1.85}$$

Нехай ε вибрано достатньо малим, а саме

$$\varepsilon \le \frac{A}{3\pi M},$$

де M – максимум функції $f(x, \dot{x}, \theta)$ в області $|x - A| \le A_1$, $|\dot{x}| \le A_1, -\infty < \theta < \infty$. Тоді звичайним методом послідовних наближень із (1.84) можна отримати послідовність функцій $x_n(t)$, значення яких будуть знаходитись в області $|x - A| \le A_1, |\dot{x}| \le A_1$, якщо $|t| \le 3\pi$. Звідси за допомогою звичайних міркувань робимо висновок, що розв'язок $x(t)$ існує для $|t| \le 3\pi$.

Постараємось тепер визначити функції $A(\varepsilon), \delta(\varepsilon), T(\varepsilon)$ так, щоб розв'язок $x[t; A(\varepsilon), \delta(\varepsilon), \varepsilon]$, був періодичним з періодом $T = 2\pi/\omega$. Для цього достатньо показати, що аналітичні функції $A(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ та $\delta(\varepsilon)$ можуть бути вибрані так, щоб задовольнялись умови періодичності

$$x(T; A, \delta, \varepsilon) = x(0; A, \delta, \varepsilon),\quad \dot{x}(T; A, \delta, \varepsilon) = 0. \tag{1.86}$$

Ці умови періодичності являють собою два рівняння для трьох функцій $A(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ та $\delta(\varepsilon)$, так що якусь одну з цих величин, доводиться задавати попередньо.

Доведення існування періодичних розв'язків розглянутого диференціального рівняння ми звели до розв'язування рівнянь періодичності (1.86) в околі $\varepsilon = 0$. При розв'язуванні цих рівнянь доцільно скористуватись теоремою про неявні функції в околі точки $\varepsilon = 0$. Але ця теорема не може бути застосована безпосередньо до рівнянь (1.86) у тому вигляді, який вони мають, адже ці рівняння задовольняються, як відомо, тотожно для A при $T = 2\pi$ (тобто у випадку $\varepsilon = 0$). Цю складність можна подолати наступним методом. Введемо замість T нову змінну η за допомогою рівності

$$T = 2\pi + \varepsilon\eta(\varepsilon). \tag{1.87}$$

Тоді частота ω буде визначатись формулою

$$\omega = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon\eta}{2\pi}} \approx 1 - \frac{\varepsilon\eta}{2\pi} \text{ для } \varepsilon \text{ малих} \tag{1.88}$$

Тож рівність $T = 2\pi$ при $\varepsilon = 0$ виконується автоматично. Для того, щоб перетворити умови періодичності до вигляду, при якому вони не задовольнялись би тотожно, введемо наступні величини:

$$P = \frac{1}{\varepsilon}[A - x(T; A, \delta, \varepsilon)] = P(A, \delta, \eta; \varepsilon), \tag{1.89}$$

$$Q = -\frac{1}{\varepsilon}[\dot{x}(T; A, \delta, \varepsilon)] = Q(A, \delta, \eta; \varepsilon). \tag{1.90}$$

Тепер умови періодичності будуть мати вигляд

$$P = 0, \quad Q = 0. \tag{1.91}$$

Вибір виразів для P та Q визначається інтегральними представленнями (1.84) і (1.85) для $x(t)$ та $\dot{x}(t)$. Визначені таким чином функції P та Q дійсно є регулярними і аналітичними для $\varepsilon = 0$ і не перетворюються в тотожність за величиною A при $\varepsilon = 0$. Згідно (1.84) та (1.85), функції P та Q мають вигляд

$$P = A\frac{1}{\varepsilon}[(1 - \cos\varepsilon\eta] + \int_0^{2\pi+\varepsilon\eta} f[x(\tau), \dot{x}(\tau), \omega\tau + \delta]\sin(\tau - \varepsilon\eta)d\tau, \tag{1.92}$$

$$Q = A\frac{1}{\varepsilon}\sin\varepsilon\eta - \int_0^{2\pi+\varepsilon\eta} f[x(\tau), \dot{x}(\tau), \omega\tau + \delta]\cos(\tau - \varepsilon\eta)d\tau, \tag{1.93}$$

де ω виражається через η, згідно (1.87). функції $\varepsilon^{-1}\sin\varepsilon$ та $\varepsilon^{-1}(1-\cos\varepsilon)$ можуть бути розкладені в степеневі ряди в точці $\varepsilon = 0$, як регулярні та аналітичні в цій точці; те ж саме тому має місце і для P та Q, розглянутих як функції комплексних змінних ε, δ та η.

Користуючись рівностями (1.92) та (1.93), можемо дослідити умови періодичності $P = 0$, та $Q = 0$, починаючи з рівнянь, відповідних $\varepsilon = 0$. Якщо б вдалося показати, що ці рівняння при $\varepsilon = 0$ мають розв'язок для будь-якої можливої пари значень $(A, \eta), (A, \delta), (\delta, \eta)$ та при будь-якому довільному значенні третьої з цих величин, причому якобіан J_0 величин P та Q для відповідних пар значень не перетворюється в нуль при $\varepsilon = 0$, то з теореми про неявні функції слідувало б, що рівняння періодичності можуть бути розв'язані в околі $\varepsilon = 0$ і дають або $[A(\varepsilon), \eta(\varepsilon)]$, або $[A(\varepsilon), \delta(\varepsilon)]$, або $[\delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)]$. За цими умовами встановлено існування періодичних розв'язків рівняння (1.80); ці розв'язки мають період $T = 2\pi + \varepsilon\eta$, є регулярними аналітичними функціями ε в околі $\varepsilon = 0$ і тому для них існує представлена у вигляді степеневого ряду по ε в околі $\varepsilon = 0$. Отже, в кожному даному випадку, тобто для кожної даної функції f в рівнянні (1.80), питання про існування рядів по малому параметру зводиться до дослідження деякого якобіана. Після того як встановлено існування цього степеневого представлення, його коефіцієнти можуть бути послідовно визначені формальними процесами [13, с. 218-222].

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІІ ПОРЯДКУ.

2.1. Методи регулярних розкладів по незалежній змінній і малому параметру

Метод розкладу в ряд Тейлора по незалежній змінній

Розв'язок задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.1}$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \tag{2.2}$$

можна шукати у вигляді ряду Тейлора за степенями різниці (x-x_0):

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(\ x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \tag{2.3}$$

Перші два коефіцієнти $y(x_0)$ і $y'(x_0)$ у (2.3) задаються початковими умовами (2.2). Наступні значення похідних шуканої величини визначаються з (2.1) і його наслідків з урахуванням (2.2). Поклавши в рівнянні (2.1) $x = x_0$ та підставляючи значення (2.2), знайдемо значення другої похідної

$$y''(x_0) = f(x_0, y_0, y_1) \tag{2.4}$$

Продиференціювавши рівняння (2.1), маємо третю похідну. Підставивши значення $x = x_0$, початкові умови та значення другої похідної, знайдемо значення третьої похідної. І наступні похідні аналогічно.

Метод прямого розкладу по малому параметру

Розглянемо рівняння загального вигляду з параметром ε

$$y'' + f(x, y, y', \varepsilon) = 0 \tag{2.5}$$

Нехай функція f може бути представлена у вигляді степеневого ряду

$$f(x, y, y', \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n\ (x, y, y') \tag{2.6}$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння (2.5) при $\varepsilon \to 0$ шукають у вигляді регулярного розкладу за степенем малого параметра

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n\ (x) \tag{2.7}$$

Вираз (2.7) підставляють у рівняння (2.5) з урахуванням (2.6). Потім функцію f_n розкладають в ряд по малому параметру і об'єднують члени при однакових степенях ε. Прирівнявши отримані вирази до нуля, приходимо до системи рівнянь для функцій y_n

$$y_0'' + f_0(x, y_0, y_0') = 0 \tag{2.8}$$

$$y_1'' + F(x, y_0, y_0')y_1' + G(x, y_0, y_0')y_1 + f_1(x, y_0, y_0') = 0 \tag{2.9}$$

Тут виписані тільки перші два рівняння. Успіх цього методу головним чином залежить від можливості побудови рішення рівняння (2.8) для головного члена розкладу. [29].

2.2. Методи збурень, які використовуються в механіці та фізиці.

Методи збурень широко застосовуються для вирішення задач нелінійної механіки та теоретичної фізики, що описуються диференціальними рівняннями з малим параметром. Основним завданням цих методів є отримання приблизного рішення, яке однаково застосовно до $\varepsilon \to 0$ для всіх (включаючи великі та малі) значень незалежної змінної. Рівняння з малим параметром можна поділити на два типи:

1) якщо порядок рівняння зберігається при $\varepsilon = 0$;
2) якщо порядок є меншим при $\varepsilon = 0$.

Для першого типу рівнянь рішення відповідних задач буде досить гладким.

Кажуть, що рівняння другого типу вироджується, коли ε = 0.

Усі методи збурень мають обмежений діапазон. Можливість використання певного методу залежить від типу рівняння чи задачі. [29].

2.3. Метод послідовних наближень і чисельні методи

Метод послідовних наближень складається з двох етапів. На першому етапі задача Коші

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.9}$$

$$y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y' \tag{2.10}$$

за допомогою введення нової змінної $u(x)=y'$ зводиться до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$u(x) = y_0' + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t), u(t)\big)dt, y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} u(t)dt. \quad (2.11)$$

Потім розв’язок системи (2.11) можемо знайти за допомогою послідовних наближень за формулами

$$\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}_0' + \int_{x_0}^{x} \mathrm{f}\big(\mathrm{t}, \mathrm{y}_\mathrm{n}(\mathrm{t}), \mathrm{u}_\mathrm{n}(\mathrm{t})\big)\mathrm{dt}, \ \mathrm{y}_{\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{u}_\mathrm{n}(\mathrm{t})\mathrm{dt}.$$

Метод Рунге – Кутта для диференціальних рівнянь другого порядку

Для рівняння

$$y'' = f(x, y, y')$$

мають місце наступні формули:

$$k_1 = hf(x_v, y_v, {y'}_v),$$

$$k_2 = hf\left(x_v + \frac{h}{2}, y_v + \frac{h}{2}{y'}_v + \frac{h}{8}k_1, \ {y'}_v + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_v + \frac{h}{2}, y_v + \frac{h}{2}{y'}_v + \frac{h}{8}k_1, \ {y'}_v + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf\left(x_v + h, \ y_v + h{y'}_v + \frac{h}{2}k_3, \ {y'}_v + k_3 \right),$$

$$y_{v+1} = y_v + hA_v,$$

де

$$A_v = {y'}_v + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3),$$

$${y'}_{v+1} = A_v + \frac{1}{6}(k_2 + k_3 + k_4).$$

Зокрема, для рівняння

$$y'' = f(x, y)$$

вони зводяться до формул:

$$k_1 = hf(x_v, y_v),$$

$$k_2 = hf\left(x_v + \frac{h}{2}, y_v + \frac{h}{2}{y'}_v + \frac{h}{8}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_v + h,\ \ y_v + h{y'}_v + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$y_{v+1} = y_v + hB_v,$$

де

$$B_v = {y'}_v + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2),$$

$${y'}_{v+1} = B_v + \frac{1}{6}(2k_2 + k_3) \quad [20, c. 177].$$

РОЗДІЛ ІІІ. РІВНЯННЯ ХІЛЛА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО ВИВЧЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

3.1. Механічні та електричні задачі, які приводять до рівняння Хілла

Важка матеріальна точка, прикріплена до кінця невагомого стержня, який обертається навколо іншого кінця, має два врівноважених положення, перпендикулярні до центру обертання: одне під центром обертання, інше над ним; маятник в останньому, очевидно, нестабільному положенні рівноваги називається оберненим.

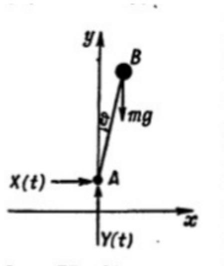

Рис. 3.1

Однак, якщо центр обертання стержня може вільно ковзати по вертикальній лінії, якщо періодична вертикальна сила з відповідною амплітудою та частотою прикладена до нижнього кінця стрижня, нестабільне положення перевернутого маятника стає стабільним. Такий цікавий приклад відразу призводить до задачі, розгляд якої є основною метою цього розділу.

На рис. 3.1 зображено маятник, який відхилений від вертикалі. Рух відбувається в площині xy під дією сили тяжіння mg, прикладеної зовнішньої сили $Y(t)$ та реакції $X(t)$ в точці A стержня. Оскільки масою стержня ми нехтуємо, центр тяжіння системи відносно осі, що проходить через цю точку, можна вважати рівним нулю. Координата точки B рівна

$$x = l \sin \vartheta. \tag{3.1}$$

Система здійснює плоский рух , що визначається рівняннями

$$m\ddot{x} = X \tag{3.2}$$

і

$$Yl\sin\vartheta - Xl\cos\vartheta = 0. \qquad (3.3)$$

Перше рівняння представляє закон руху центру тяжіння, а друге рівняння являє собою теорему моменту (якщо зазначеним моментом інерції знехтувати). Рівняння (3.1) – (3.3) визначають рух.

Допустимо, що кут ϑ достатньо малий, тобто що $\sin\vartheta$ можна замінити на ϑ, а $\cos\vartheta$ на 1. Тоді, виключивши ϑ з (3.2) за допомогою (3.1) і (3.3), маємо наступне диференціальне рівняння:

$$ml\ddot{\vartheta} - Y\vartheta = 0. \qquad (3.4)$$

Зовнішня сила $Y(t)$ являє собою суму двох членів: постійного, рівного вазі mg, і змінного, що залежить від часу,

$$Y(t) = mg - mp(t). \qquad (3.5)$$

Таким чином, рівняння (3.4) має вигляд

$$\vartheta + \left(-\frac{g}{l} + \frac{\ddot{1}}{l}p(t)\right)\vartheta = 0. \qquad (3.6)$$

Якщо $p(t)$ періодична функція часу (припускається пізніше), то рівняння (3.6) називається рівнянням Хілла.

При виведенні рівняння (3.6) ми вважали кут ϑ малим, а обернений маятник можна зробити стійким за допомогою відповідного вибору періодичної частини - $mp(t)$ вертикальної сили $Y(t)$. Зрозуміло, що якщо всі рішення рівняння (3.6) не обмежені усіма додатними значеннями t, кут неможливо вважати малим для похідних ϑ та початкового значення ϑ. Помітимо, що якщо $p(t) \equiv 0$, то розв’язок рівняння (3.6) буде лінійною комбінацією величин

$$e^{\sqrt{g/l\,t}} \text{ та } e^{-\sqrt{g/l\,t}}$$

а, значить, буде необмежено зростати з ростом t; це відповідає тій обставині, що обернений маятник нестійкий. Функцію p (t) неможливо вибрати безпосередньо, щоб усі рішення рівняння (3.6) були обмежені. Але функцію $p(t)$ можна взяти у вигляді $p(t) = A\cos\omega t$ та при цьому підібрати сталі A та ω так (навіть при довільно малих значеннях A), що всі розв’язки рівняння (3.6) були обмеженими.

Інакше кажучи, якщо до центру обертання прикласти вертикальну періодичну силу з відповідною амплітудою та частотою, нестійкий обернений маятник може перетворитись у стійкий маятник. Якщо прикласти до точки підвісу відповідним чином вибрану періодичну вертикальну силу, то стійке положення рівноваги простого маятника (при якому маса знаходиться під точкою підвісу) можна перетворити в нестійке. Диференціальне рівняння (3.6) зберігається і для цього випадку, але знак у g буде протилежним, у відповідності до зміни напрямку сили тяжіння по відношенню до маятника. Якщо в цьому випадку взяти $p(t) \equiv 0$, то всі розв'язки диференціального рівняння будуть обмеженими, так як вони будуть являти собою лінійні комбінації функцій $\cos\sqrt{g/l\ t}$ та $\sin\sqrt{g/l\ t}$. Періодична сила $mp(t)$ довільно малої амплітуди може бути вибрана таким чином, що стійке «нормальне» положення маятника перетвориться в нестійке.

Ми можемо дати електромеханічну схему системи, яку також можна отримати з рівняння Хілла. Її можна здійснити за допомогою контура з постійною самоіндукцією і послідовно ввімкненим конденсатором, якщо переміщати рухливі пластини конденсатора механічним шляхом так, щоб його ємність змінювалась періодично в часі. Якщо q – заряд, L – самоіндукція і $C(t)$ – ємність конденсатора, то диференціальне рівняння для q матиме вигляд

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C(t)}q = 0; \qquad (3.7)$$

так як $C(t)$ передбачається періодичною функцією від t, то це рівняння є рівнянням Хілла. Така механіко-електрична система зручна для експериментального дослідження рівняння Хілла.

Відомі також інші приклади фізичних задач, які приводять до рівняння Хілла.

Проблема вивчення стійкості періодичних розв'язків нелінійних систем завжди призводить до рівняння Хілла. У цих випадках рівняння у варіаціях, яке визначає малі відхилення від даного періодичного руху, стійкість якого досліджується, являє собою рівняння Хілла. Можна сказати, що якщо всі розв’язки відповідного рівняння в зміні пов'язані з усіма додатними значеннями t, даний періодичний рух є стабільним; якщо рівняння в зміні має деякі необмежені розв’язки, воно нестабільне. Тому проблема стійкості розглянутого періодичного руху залежить від характеру сукупності розв’язків відповідного рівняння Хілла, а також вищезазначеної задачі щодо стійкості оберненого маятника.

Вислів «стійкий розв’язок» рівняння Хілла позбавлений, взагалі кажучи, сенсу; однак цей вираз часто застосовують для того, щоб вказати на обмеженість всіх розв’язків цього рівняння.

Важливий частинний випадок рівняння Хілла, коли періодичний коефіцієнт являє собою просто тригонометричну функцію незалежної змінної, називається рівнянням Матьє [13,с.186-189].

РОЗДІЛ IV. ПЕРІОДИЧНИЙ ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВЯЗОК НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ХІЛЛА

4.1. Постановка задачі

В інженерній практиці іноді виникають проблеми, пов'язані із забезпеченням періодичних режимів роботи різних механізмів та обладнання. При цьому умови початку руху таких механізмів носять випадковий характер, інакше кажучи, початкові умови в таких задачах час від часу можуть істотно змінюватись. Прикладом таких механізмів є вібраційні класифікатори. У цій конструкції жорстка рама класифікатора приводиться в коливальний рух за допомогою дебалансних вібраторів. Вздовж рами на рівних відстанях розташовані жорстко пов’язані з нею осі валків, валки вільно посаджені на осі. Під дією вібратора рама і разом з нею і осі валків здійснюють рух по еліптичній або по круговій траєкторії в вертикальній площині. При цьому під дією сил інерції в русі приводяться також валки, перекочуючись по осях без проковзування. Перекочуваня валків по осях відбувається з кутом запізнення α по відношенню до кута повороту рами класифікатора ψ. З точки зору якісної роботи класифікатора важливо витримувати постійний проміжок між валками. А це значить, що обертання валків мають бути періодичними. Рівняння для кута запізнювання при обертанні валків має вигляд:

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = -p(t)\sin\alpha(t) + \varepsilon\cos\big(\psi(t) - \alpha(t)\big) \qquad (4.1)$$

В цьому рівнянні ε - малий параметр. При побудові асимптотичного розкладу розв’язку даного рівняння з’являється послідовність неоднорідних рівнянь типу Хілла, з яких визначаються коефіцієнти розкладу. В свою чергу, асимптотичний розклад розв’язку може бути періодичним тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти асимптотичного розкладу будуть періодичними функціями одного і того ж періоду. Враховуючи сказану вище невизначеність початкових умов, а також той факт, що всі численні валки повинні виконувати періодичні обертання, дуже важливо, щоб розв’язок розглянутого рівняння був періодичним за будь-яких початкових умовах. А це значить, що загальний розв’язок кожного з рівнянь для коефіцієнтів асимптотичного розкладу повинен бути періодичним. Наступний матеріал присвячений отриманню необхідних і достатніх умов, при яких загальний розв’язок неоднорідного рівняння типу Хілла буде періодичним.

Розглянемо проблему побудови загального періодичного розв’язку неоднорідного рівняння Хілла:

$$\ddot{z}(t) + q(t)z(t) = F(t) \tag{4.2}$$

в якому функції $q(t)$ І $F(t)$ є $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичними. Виникає завдання: вибрати параметри в рівнянні (4.2) так, щоб розв’язок цього рівняння був періодичним незалежно від початкових умов.

4.2. Однорідне рівняння Хілла

З метою розв’язку цієї проблеми розглянемо, найперше, однорідне рівняння Хілла, відповідне (4.2):

$$\ddot{z}(t) + q(t)z(t) = 0 \tag{4.3}$$

Розв’язавши для рівняння (4.3) дві задачі Коші з початковими умовами

$$z_1(0) = 1; \quad \dot{z}_1(0) = 0; \qquad z_2(0) = 0; \quad \dot{z}_2(0) = 1\ , \tag{4.4}$$

отримаємо дві функції $z_1(t)$ і $z_2(t)$. Ці розв’язки будуть лінійно незалежними, так як для них визначник Вронського

$$W(t) = W(0) = \begin{vmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ \dot{z}_1(0) & \dot{z}_2(0) \end{vmatrix} = 1. \tag{4.5}$$

Маючи фундаментальну систему розв’язків рівняння (4.3) $z_1(t)$ і $z_2(t)$, можна будь-який його частинний розв’язок виразити у вигляді:

$$z(t) = 6C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) \tag{4.6}$$

з довільними сталими C_1 і C_2. Ці сталі визначаються з початкових умов

$$z(0) = y_0, \quad \dot{z}(0) = y_1, \tag{4.7}$$

тобто частинний розв’язок з урахуванням (4.4) може бути записано у вигляді:

$$z(t) = y_0 z_1(t) + y_1 z_2(t) \tag{4.8}$$

Функції $z_1(t)$ і $z_2(t)$ в загальному випадку не будуть $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичними функціями. Встановимо, при яких значеннях y_0 і y_1 розв'язок (4.8) буде $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичною функцією t. Так як коефіцієнти в рівнянні (4.3) є $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичними функціями, для цього необхідно и достатньо виконати умови

$$z\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = z(0); \quad \dot{z}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \dot{z}(0). \qquad (4.9)$$

Звідси, (4.7) і (4.8), слідує:

$$\left(z_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - 1\right)y_0 + z_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)y_1 = 0; \quad \dot{z}_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)y_0 + \left(\dot{z}_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - 1\right)y_1 = 0. \qquad (4.10)$$

При нульовому розв'язку системи (4.10) частинний розв'язок (4.8) стає тривіальним. Тому для існування нетривіального $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичного розв'язку рівняння (4.3) необхідно і достатньо перетворення в нуль визначника системи (4.10), тобто виконання рівності

$$\begin{vmatrix} z_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - 1 & z_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \\ \dot{z}_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) & \dot{z}_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.11)$$

З урахуванням виразу (4.5) для визначника Вронського рівняння (4.11) може бути записано у вигляді:

$$1 - 2L + W\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0,$$

де

$$2L = z_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) + \dot{z}_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right). \qquad (4.12)$$

Число L називається характеристичною сталою Ляпунова і досить часто використовується при аналізі розв'язків диференціальних рівнянь та їх стійкості. Таким чином, виявляється, що нетривіальні $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичні розв'язки рівняння (4.3) можуть існувати тільки при $L = 1$. При виконанні умови (4.11) система (4.10) має нескінченне число розв'язків вигляду $y_1 = ky_0$, яким буде відповідати також нескінченна кількість частинних розв'язків (4.8). Однак неважко показати, що всі ці розв'язки будуть лінійно залежні. Тому фундаментальна система розв'язків рівняння (4.3) буде містити розв'язок, який не є $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичним. Отже, загальний розв'язок рівняння (4.3) не може бути $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичною функцією. При $L \neq 1$ розв'язком рівняння (4.3) не може бути $\frac{2\pi}{\omega}$ періодична функція. Тому виникає наступна задача: побудувати фундаментальну систему періодичних розв'язків рівняння (4.3), але вже періоду, відмінного від $\frac{2\pi}{\omega}$. Для цього проводяться наступні міркування.

На основі фундаментальної системи розв'язків рівняння (4.3) $z_1(t)$ і $z_2(t)$ будується довільний розв'язок цього рівняння виду (4.6). Здійснюється зміна цієї функції на $\frac{2\pi}{\omega}$;

$$z\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = C_1 z_1\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) + C_2 z_2\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right). \tag{4.13}$$

Так як коефіцієнти рівняння (4.1) $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичні по t, зміна в цьому рівнянні на $\frac{2\pi}{\omega}$ не поміняє вигляд цього рівняння. Тому функція (4.13) є розв'язком рівняння (4.3). В свою чергу, функції $z_1(t)$ і $z_2(t)$ також є розв'язками рівняння (4.3), і тому при зміні на $\frac{2\pi}{\omega}$ вони залишаться розв'язками рівняння (4.3). Тому їх можна представити у вигляді (4.6) з деякими частинними значеннями констант C_1 і C_2:

$$z_1\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = a_{11}z_1(t) + a_{12}z_2(t); \quad z_2\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = a_{21}z_1(t) + a_{22}z_2(t); \tag{4.14}$$

Підставляючи (4.14) в (4.13), отримаємо:

$$z_1\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = (C_1a_{11} + C_2a_{21})z_1(t) + (C_1a_{12} + C_2a_{22})z_2(t). \tag{4.15}$$

Введемо параметр σ з допомогою рівностей

$$C_1a_{11} + C_2a_{21} = \sigma C_1; \quad C_1a_{12} + C_2a_{22} = \sigma C_2, \tag{4.16}$$

еквівалентних

$$(a_{11}-\sigma)C_1 + a_{21}C_2 = 0; \quad a_{12}C_1 + (a_{22}-\sigma)C_2 = 0. \tag{4.17}$$

Для того, щоб розв'язок (4.13) був нетривіальним, необхідно і достатньо, щоб визначник алгебраїчної системи (4.16) був рівний нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\sigma & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{4.18}$$

З (4.14) і початкових умов (4.4) отримуємо:

$$z_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = a_{11}; \quad \dot{z}_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = a_{12}; \quad z_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = a_{21}; \quad \dot{z}_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = a_{22};$$

Тому рівність (4.18) зводиться до вигляду:

$$\begin{vmatrix} z_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - \sigma & z_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \\ \dot{z}_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) & \dot{z}_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - \sigma \end{vmatrix} = \sigma^2 - 2L\sigma + 1 = 0. \tag{4.19}$$

З урахуванням (4.16) рівність (4.15) можна записати у вигляді:

$$z\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sigma z(t). \tag{4.20}$$

Вважаючи $\sigma = e^{\frac{2\pi}{\omega}\mu}$ і вводять функцію

$$U(t) = e^{-\mu t} z(t). \tag{4.21}$$

Тоді за означенням

$$U\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = e^{-\mu\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)} z\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = e^{-\mu t} e^{-\frac{2\pi}{\omega}\mu} z\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) =$$

$$e^{-\mu t} e^{-\frac{2\pi}{\omega}\mu} \sigma z(t) = e^{-\mu t} z(t) = U(t),$$

Тобто введена рівністю (4.21) функція $U(t)$ при виконанні відносно $z(t)$ рівності (4.20) виявляється $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичною. При цьому використана в останній рівності функція $z(t)$ будується у вигляді (4.4) зі сталими C_1 і C_2, визначеними із системи (4.17) при виконанні рівності (4.18). Таким чином, лінійне однорідне рівняння (4.3) с періодичними коефіцієнтами має розв’язок виду:

$$z(t) = e^{\mu t} U(t), \tag{4.22}$$

де $U(t)$ – періодична, періоду $\frac{2\pi}{\omega}$ функції. Причому з (4.17) слідує, що

$$C_2 = -\frac{z_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - \sigma}{z_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} C_1 = -\frac{\dot{z}_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)}{\dot{z}_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - \sigma} C_1, \tag{4.23}$$

де σ – корінь рівняння (4.19). Корені рівняння (4.19) мають вигляд:

$$\sigma_{1,2} = L \pm \sqrt{L^2 - 1}, \tag{4.24}$$

тому при $L \neq 1$ рівняння (4.19) має два різних корені: σ_1 і σ_2.

Тому і рівності (4.23) буде дві:

$$C_{12} = h_1 C_{11}; \qquad C_{22} = h_2 C_{12}, \tag{4.25}$$

де зазначено

$$h_1 = -\frac{z_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-\sigma_1}{z_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)}; \qquad h_2 = -\frac{z_1\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-\sigma_2}{z_2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)}. \qquad (4.26)$$

Отже, рівності (4.25) відповідають два розв'язки рівняння (4.3) виду (4.6):

$$\eta_1(t) = C_{11}\big(z_1(t) + h_1 z_2(t)\big); \quad \eta_2(t) = C_{12}\big(z_1(t) + h_2 z_2(t)\big). \qquad (4.27)$$

Обчислюючи визначник Вронського для розв'язків (4.25), ми можемо бути впевнені, що завдяки $h_1 \neq h_2$, функції (4.27) лінійно незалежні, тобто вони утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.3). При цьому обидві ці функції можуть бути представлені у вигляді (4.22):

$$\eta_1(t) = e^{\mu_1 t} U_1(t); \qquad \eta_2(t) = e^{\mu_2 t} U_2(t). \qquad (4.28)$$

де $U_1(t)$ і $U_2(t)$ - $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичні функції,

$$\mu_i = \frac{\omega}{2\pi} \ln \sigma_i\,, \quad i = 1{,}2. \qquad (4.29)$$

При $|L| > 1$, як слідує з (4.4) обидва корені рівняння (4.19) будуть дійсними і різними. Тому і μ_1 і μ_2 будуть дійсні. А при дійсних μ_1 і μ_2 функції (4.28) не можуть бути періодичними. Крім того, за теоремою Вієта $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$, що означає, що один з коренів, наприклад σ_1, буде по модулю більше одиниці, а інший, σ_2, менше одиниці по модулю. Звідси слідує, що μ_1 буде додатним дійсним числом. Тому функція $\eta_1(t)$ буде прямувати до нескінченності при $t \to \infty$.

Таким чином, при $|L| > 1$ розв'язок рівняння Хілла (4.3) є неперіодичним і, до того ж, нестійким. При $|L| = 1$ рівняння (4.18) має корінь σ кратності 2, тому виходить тільки одна функція $\eta_1(t)$, яка має вигляд (4.14) і володіє властивістю (4.20). Інша ж, яка має вигляд (4.14) і лінійно незалежна з $\eta_1(t)$ функція повинна мати вигляд (4.14) з коефіцієнтом $a_{22} = \sigma$, так як в цьому випадку дискримінант рівняння (4.18) дорівнює нулю і корінь цього рівняння

$$\sigma = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}.$$

Але так як $a_{11} = \sigma$, то звідси слідує, що і $a_{22} = \sigma$. Тому у випадку кратного кореня σ в рівняння (4.11) два лінійно незалежні розв'язки рівняння (4.4) будуть мати вигляд:

$$\eta_1\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sigma\eta_1(t);\quad \eta_2\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=a_{21}\eta_1(t)+\sigma\eta_2(t). \qquad (4.30)$$

Рівняння (4.11) не може мати нульового кореня, так як це означало б, що визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0,$$

а це, в свою чергу, означало б, що функції $\eta_1(t)$ і $\eta_2(t)$ – лінійно залежні. При $|L|=1$ представимо функцію $\eta_2(t)$ у вигляді:

$$\eta_2(t)=e^{\mu_1 t}\varsigma(t). \qquad (4.31)$$

Підставивши $\eta_1(t)$ і $\eta_2(t)$ у (4.28) і (4.31) відповідно в другу рівність (4.30) отримаємо, що $e^{\frac{2\pi}{\omega}\mu_1}=\sigma$

$$e^{\mu_1\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)}\varsigma\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=a_{21}e^{\mu_1 t}U_1(t)+\sigma e^{\mu_1 t}\varsigma(t),$$

звідки слідує

$$\varsigma\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\varsigma(t)+\frac{a_{21}}{\sigma}U_1(t). \qquad (4.32)$$

Визначимо тепер функцію $U_3(t)$ співвідношенням

$$\varsigma(t)=\frac{\omega a_{21}}{2\pi\sigma}tU_1(t)+U_3(t). \qquad (4.33)$$

Підставивши (4.33) в (4.32), отримаємо:

$$\frac{\omega a_{21}}{2\pi\sigma}\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)U_1\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+U_3\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\frac{\omega a_{21}}{2\pi\sigma}tU_1(t)+U_3(t)+\frac{a_{21}}{\sigma}U_1(t),$$

звідки з урахуванням $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичності функції $U_1(t)$ слідує:

$$U_3\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=U_3(t),$$

тобто функція $U_3(t)$ є $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичною. Тому, підставляючи (4.33) в (4.32), отримаємо, що у випадку кратного кореня рівняння (4.18), чи (4.19), два лінійно незалежні розв'язки рівняння (4.3) подаються у вигляді:

$$\eta_1(t)=e^{\mu_1 t}U_1(t);\qquad \eta_2(t)=e^{\mu_1 t}\left[\frac{\omega a_{21}}{2\pi\sigma}tU_1(t)+U_3(t)\right], \qquad (4.34)$$

де $U_1(t)$ і $U_3(t)$ - $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичні функції. Відмітимо, що функція $\eta_2(t)$ є неперіодичною. Крім того, при $t\to\infty$ модуль цієї функції необмежено зростає. Тобто розв'язок $\eta_2(t)$ є нестійким. При $|L|<1$ корені рівняння (4.19)

$$\sigma_{1,2} = L \pm i\sqrt{1 - L^2} \tag{4.35}$$

будуть комплексними спряженими. При цьому

$$\left|\sigma_{1,2}\right| = \sqrt{L^2 + (1 - L^2)} = 1. \tag{4.36}$$

Вводячи позначення $\daleth = L, v = \sqrt{1 - L^2}$, отримаємо, що $\sigma_1 = \daleth + iv$; $\sigma_2 = \daleth - iv$. Функція ln від комплексного аргументу визначається рівністю

$$\ln\sigma = \ln(\daleth + iv) = \ln|\sigma| + i\arg\sigma, \tag{4.37}$$

де

$$\arg\sigma = \begin{cases} arctg\frac{v}{\daleth}, & \daleth > 0 \\ arctg\frac{v}{\daleth} + \pi, & v \leq 0,\ \daleth < 0 \\ arctg\frac{v}{\daleth} - \pi, & v < 0,\ \daleth < 0. \end{cases} \tag{4.38}$$

Внаслідок рівності модулів σ_1 і σ_2 одиниці, в рівності (4.37) для цих величин отримуємо $\ln\sigma_1 = \ln\sigma_2 = 0$ і тому

$$\mu_1 = i\frac{\omega}{2\pi}\arg\sigma_1 \quad \mu_2 = i\frac{\omega}{2\pi}\sigma_2. \tag{4.39}$$

Так як величини σ_1 і σ_2 є комплексно спряженими, для них справедлива рівність $\arg\sigma_2 = -\arg\sigma_1$. Тому , позначивши $\beta = \arg\sigma_1$, отримаємо, що при $|L| < 1$ розв'язки (4.28) будуть представлені у вигляді:

$$\eta_1(t) = e^{i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}U_1(t); \qquad \eta_2(t) = e^{-i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}U_2(t). \tag{4.40}$$

Функція $e^{i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}$ при раціональному $\frac{\omega\beta}{2\pi}$ є періодичною. При $\beta = 2\pi$ її період рівний $\frac{2\pi}{\omega}$. Однак в цьому випадку число σ_1 виявляється дійсним. Дійсно, в цьому випадку $\ln\sigma_1 = i2\pi$, тобто $\sigma_1 = e^{2\pi i} = 1$. Але формули (4.40) справедливі тільки для комплексних σ. Взагалі, якщо

$$\beta = n\pi, \tag{4.41}$$

де n – натуральне число, то виявляється, що $\sigma_1 = \cos\beta + i\sin\beta = \pm 1$ в залежності від парності і непарності n. Тобто і в цьому випадку число σ_1 виявляється дійсним, тому для значень β по формулі (4.41) формули (4.40) несправедливі. В той же час будь-яке інше значення β, яке відрізняється від (4.41), є допустимим. Помітимо, що період T функції $e^{i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}$ рівний $T = \frac{4\pi^2}{\omega\beta}$.

Зазвичай, при $\beta = \frac{\pi}{2}$ отримуємо $T = \frac{8\pi}{\omega}$; при $\beta = \frac{2\pi}{3}$ маємо $T = \frac{6\pi}{\omega}$. Таким чином, показано, що існують такі значення $\beta = \arg\sigma_1$, при яких період перших множників в формулах (4.40) буде цілим кратним $\frac{2\pi}{\omega}$, тобто буде справедливо представлення періоду у вигляді:

$$T_n = n\frac{2\pi}{\omega} \tag{4.42}$$

з натуральним $n \geq 3$. А так як в формулах (4.40) функції $U_1(t)$ і $U_2(t)$ мають період $\frac{2\pi}{\omega}$, то і в цілому період розв'язків (4.40) буде рівний T_n. Отже, при $|L| < 1$ вдається отримати T_n періодичну фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.3). тому будь-який частинний розв'язок рівняння (4.3) в цьому випадку може бути представлено у вигляді:

$$z(t) = C_1\eta_1(t) + C_2\eta_2(t) \tag{4.43}$$

і цей розв'язок буде T_n періодичним. Тут

$$\eta_1(t) = e^{i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}U_1(t); \qquad \eta_2(t) = e^{-i\frac{\omega\beta}{2\pi}t}U_2(t), \tag{4.44}$$

з натуральним $n \geq 3$ і $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичними функціями $U_1(t)$ і $U_2(t)$.

4.3. Неоднорідне рівняння Хілла

Тепер розглянемо неоднорідне рівняння Хілла (4.2). Використавши форму розв'язку (4.43) і застосовуючи метод варіації похідних довільних сталих, отримаємо, що загальний розв'язок рівняння (4.2) матиме вигляд:

$$\begin{gathered} z(t) = C_1(0)\eta_1(t) + C_2(0)\eta_2(t) - \\ -\eta_1(t)\int_0^t \frac{F(\tau)\eta_2(\tau)}{\Delta(\tau)}d\tau + \eta_2(t)\int_0^t \frac{F(\tau)\eta_1(\tau)}{\Delta(\tau)}d\tau\,, \end{gathered} \tag{4.45}$$

Тут визначник Вронського фундаментальної системи розв'язків (4.44) позначений

$$\Delta(t) = \eta_1(t)\dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_1(t)\eta_2(t).$$

Коефіцієнти в рівнянні (4.2) можна вважати такими, що мають період T_n. Тому для того, щоб розв'язок (4.45) був T_n періодичним, необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності:

$$z(T_n) = z(0); \quad \dot{z}(T_n) = \dot{z}(0). \tag{4.46}$$

Підставивши (4.45) в (4.46), отримаємо:

$$C_1(0)\eta_1(T_n) + C_2(0)\eta_2(T_n) - \eta_1(T_n)I_1(T_n) + \eta_2(T_n)I_2(T_n) =$$
$$= C_1(0)\eta_1(0) + C_2(0)\eta_2(0);$$
$$C_1(0)\dot{\eta}_1(T_n) + C_2(0)\dot{\eta}_2(T_n) - \dot{\eta}_1(T_n)I_1(T_n) + \dot{\eta}_2(T_n)I_2(T_n) =$$
$$= C_1(0)\dot{\eta}_1(0) + C_2(0)\dot{\eta}_2(0), \tag{4.47}$$

де

$$I_1(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)\eta_2(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau; \quad I_2(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)\eta_1(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau. \tag{4.48}$$

З урахуванням T_n- періодичності функцій $\eta_1(t)$ і $\eta_2(t)$ із (4.34) слідує:

$$-\eta_1(T_n)I_1(T_n) + \eta_2(T_n)I_2(T_n) = 0; \ -\dot{\eta}_1(T_n)I_1(T_n) + \dot{\eta}_2(T_n)I_2(T_n) = 0. \tag{4.49}$$

Визначник системи (4.49) є визначник Вронського фундаментальної системи розв'язків (4.44), взятий з протилежним знаком. Тому він відрізняється від нуля, і система (4.49) має тільки тривіальний розв'язок

$$I_1(T_n) = 0; \quad I_2(T_n) = 0. \tag{4.50}$$

Рівності (4.50) є необхідними і достатніми умовами існування T_n-періодичних розв'язків рівняння (4.2). Тому, якщо функція F(t) в правій частині неоднорідного рівняння Хілла (4.2) задовольняє умовам (4.50), будь-який розв'язок рівняння (4.2) буде T_n періодичним.

4.4. Алгоритм чисельно-аналітичної побудови періодичного загального розв'язку

Побудову загального розв'язку неоднорідного рівняння Хілла (4.2) принципово можливо виконати в аналітичному вигляді. Для цього, як слідує із формули (4.45), достатньо знайти періодичну фундаментальну систему $\eta_1(t)$ і $\eta_2(t)$ розв'язків однорідного рівняння (4.45). Для побудови цієї фундаментальної системи розв'язків необхідно, перш за все,знайти аналітично неперіодичну фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.45) $z_1(t)$ і $z_2(t)$

з початковими умовами (4.46). Функції $z_1(t)$ і $z_2(t)$ знаходяться у вигляді рядів Фур'є з невизначеними коефіцієнтами. Представлення розв'язку в такому вигляді вимагає, щоб функція q(t) також розкладалася в ряд Фур'є. Тому процедура підстановки форми розв'язку у вигляді рядів Фур'є в рівняння (4.45) призводить до необхідності почленного перемноження двох рядів Фур'є в добутку $q(t)z(t)$. Цей добуток рядів повинен бути представлений у вигляді ряду Фур'є. Це призводить до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу. Таку систему можна вирішити лише у вигляді досить великих виразів, які не дуже підходять для аналізу. Тобто вже на першому етапі побудови розв'язку в аналітичній формі виникають значні незручності. Тому в цьому випадку чисельно-аналітичний алгоритм побудови періодичного загального розв'язку рівняння (4.2) є більш раціональним. Цей алгоритм полягає в наступному.

1. Чисельно, наприклад методом Рунге-Кутта, розв'язати дві задачі Коші для рівняння (4.45) з початковими умовами (4.46), визначивши тим самим фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.45) $z_1(t)$ і $z_2(t)$. Так як для подальшого важливо знати не тільки функції $z_1(t)$ і $z_2(t)$, але і їх перші похідні, зручно рівняння (4.45) представити у вигляді системи:

$$\dot{z}(t) = u(t); \qquad \dot{u}(t) + q(t)z(t) = 0. \tag{4.51}$$

2. За формулою (4.12) обчислити L. Якщо $|L| \geq 1$, змінити параметри системи (в даному випадку q(t)) і досягти, щоб виконувалась нерівність $|L| < 1$.

3. Знайти корені σ_1 і σ_2 рівняння (4.19).

4. Для цих σ_1 і σ_2 за формулами (4.25) і (4.26) розрахувати величини $C_{2s} = C_{2s}(C_{2s}, \sigma_s), s = 1{,}2.$

5. За коефіцієнтами C_{11}, C_{21}, і C_{12}, C_{22} за допомогою формули (4.6) побудувати розв'язок $z_1(t)$ і $z_2(t)$.

6. За допомогою формули (4.29) знайти

$$\mu_s = \frac{\omega}{2\pi}\ln\sigma_s, \qquad s = 1{,}2.$$

7. За допомогою формули (4.22) знайти функції

$$U_s(t) = e^{-\mu_s t} z_s(t), \quad s = 1,2.$$

8. Підставити функції $U_s(t)$ в формули (4.44), отримавши тим самим періодичну фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння (4.3).

9. В рівності

$$T = \frac{4\pi^2}{\omega\beta}$$

Підібрати β так, щоб період T функцій $\eta_1(t)$ і $\eta_2(t)$ в (4.44) був рівний T_n, знайденим за формулою (4.42) з натуральним $n \geq 3$.

10. Із необхідних і достатніх умов періодичності розв'язків вирахувати одну з можливих функцій F(t). Тоді при $q(t)$ і $F(t)$, знайдених за даним алгоритмом, загальний розв'язок (4.3) неоднорідного рівняння Хілла (4.2) буде $n\frac{2\pi}{\omega}$ періодичним.

Тому за цих умов рівняння Хілла (4.2) може мати $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичний частинний розв'язок. Однак загальний розв'язок рівняння Хілла як однорідного, так і неоднорідного $\frac{2\pi}{\omega}$ періодичним бути не може. В той же час існують такі функції $q(t)$ і $F(t)$, при яких загальний розв'язок неоднорідного рівняння Хілла стає $n\frac{2\pi}{\omega}$ періодичним при $n \geq 3$. [33].

ВИСНОВКИ

У ході роботи було розглянуто загальні поняття і означення з теорії нелінійних диференціальних рівнянь, вивчено методи досліду нелінійних звичайних диференціальних рівнянь II порядку: - метод лінеаризації, метод усереднення (в якості прикладу, що ілюструє застосування методу, було розглянуто *класичне рівняння Ван-дер-Поля*) та метод малого параметру.

Також були наведені методи дослідження задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь: методи регулярних розкладів по незалежній змінній і малому параметру, методи збурень, які використовуються в механіці та фізиці, метод послідовних наближень і чисельні методи.

Було досліджено рівняння Хілла та його застосування до вивчення стійкості нелінійних коливань, механічні та електричні задачі, які приводять до рівняння Хілла.

Значну увагу було приділено пошуку періодичного загального розв'язку неоднорідного рівняння Хілла. Було розглянуто неоднорідне рівняння Хілла, в якому коефіцієнти і права частина є періодичними функціями одного і того ж періоду T. Показано, що тільки деякі частинні випадки цього рівняння можуть бути періодичними з періодом T. Отримані необхідні та достатні умови для того, щоб загальний розв'язок неоднорідного рівняння Хілла був періодичним. Розроблений алгоритм чисельної побудови періодичної фундаментальної системи розв'язків відповідного однорідного рівняння Хілла. Показано, як за допомогою цієї фундаментальної системи розв'язків отримати загальний періодичний розв'язок неоднорідного рівняння Хілла.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. 368 с.
2. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во Ленинградского университета, 1981, 276 с.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольський Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е. Физматгиз,1963.
4. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, К., 1945.
5. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике. – Сб. Ин-та строит. механики АН УССР, 1950. 538 с.
6. Бондаренко Г.В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. - М: АН СССР, 1936. 48 с.
7. Бурд В. Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке для дифференциальных уравнений с последействием нейтрального типа. Нелинейные колебания и теории упругости. Ижевск, 1978. 280 с.
8. Валеев К.Г., Важговская М.Я. Исследования устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, 1971. 960 с.
9. Валеев К.Г. Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с синусоидальными коэффициентами. 1962.
10. Валеев К.Г. К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. 1963. 19-25 с.
11. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. Изд-во: Энергия. Москва, 1980.
12. Д'анжело Г. Линейные системы с переменными коэффициентами. Анализ и синтез. Под редакцией Н. Т. Кузовкова (Пер. с англ.).- М.: Машиностроение, 1974. 288 с.

13. Дж. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Издательство Иностранной литературы, 1952. 264 с.
14. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. -М.: Издательство МГУ, 1998. 480с.
15. Домшлак Ю.И. О колеблемости решений дифференциальных уравнений второго порядка, Дифференциальные уравнения,1978.296 с.
16. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Изд-во: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 448 с.
17. Журавлев В. Ф., Орешников В.Г. К определению характеристических показателей линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами и малым параметром. 1976. 65-69 с.
18. Загальні поняття і означення про диференціальні рівняння. URL:http://www.cleverstudents.ru/differential_equations/differential_equations_definitions.html (дата звернення: 04.12.2019).
19. Илюхин А.Г., Пустовой Н.А. Об устойчивости решения линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Украинский математический журнал. 1968. 810 с.
20. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 1971. 576 с.
21. Каримов С. О характеристических числах линейного однородного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. 1972. 44-47 с.
22. Карасаев И. К. Об одном методе исследования уравнения Хилла. URL:https://www.dissercat.com/content/ob-odnom-metode-issledovaniya-uravneniya-khilla (дата звернення: 10.12.2019).
23. Карасаев И. К. Об одном способе определения характеристических показателей линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. 1981. 380 с.
24. Карасаев И.К. Построение фундаментальной системы решений уравнения Хилла. 2007. 240-245 с.

25. Карасаев И.К. Построение характеристического уравнения. Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2010. 360 с.
26. Липницкий А. В. Оценка характеристических показателей уравнения Хилла с переодическими коэффициентами. Дифферент уравнения. 1996. 340 с.
27. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. Изд-во АН СССР, 1956. 399 с.
28. Метод усереднення.
URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/23148/1/SerdiukVV_magistr.pdf (дата звернення: 08.12.2019).
29. Методи дослідження задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/ode/odenlin2.pdf (дата звернення: 17.12.2019).
30. Митропольский Ю. А. Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободи. 1950. 370 с.
31. Моисеев Н.Н. Асимптотичні методи нелінійної механіки. Изд-во: Наука, 1969. 379 с.
32. Остапенко В. А., Надутий В.П., Ягнюков В.Ф. Синтез параметрів валкових класифікаторів вібраційного типу. Вид-во: Наукова думка, 2006. 189 с.
33. Періодичний загальний розв’язок неоднорідного рівняння Хілла. URL: file:///F:/дипломна/періодичний%20розвязок.pdf (дата звернення: 13.12.2019)
34. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник. Изд-во МГУ, 1984. 296 с.
35. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд-во: «Наука», 1982. 332 с.

36. Поняття про диференціальне рівняння. URL: https://lms2.sseu.ru/courses/eresmat/course1/razd6z1/par6_1z1.htm (дата звернення: 03.12.2019).
37. Проскуряков А.П. Характеристические числа решений дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, 1946. 211-219 с.
38. Сабуров М.С. Оптимальные критерии ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Изд-во: Прометей, 1994. 13-23 с.
39. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. 527 с.
40. Тарамова Х.С. Исследование устойчивости уравнения Хилла. Дубно, 2001. 398-407 с.
41. Тихонов Л.Н., Васильева Л.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. Изд-во: «Наука», 1980.
42. .Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциальных и интегральных исчислений. М.: Физматгиз, 1960. 656 с.
43. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. 426 с.
44. Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. 1992. 303 с.
45. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
46. Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.