Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:
Елементарні функції комплексної змінної

Виконала: студентка IV курсу,
групи МІФ-41
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Корнійчук Марія Анатоліївна

Науковий керівник: к. ф. – м. н., доц. Демчик С. П.

Рецензент: к. т. н. Присяжнюк О. В.

Рівне-2020 року

Зміст

Вступ

Комплексний аналіз має велике практичне значення, а також відіграє важливу роль як у науковому, технічному, економічному розвитку суспільства, так і в розвитку окремої особистості. Ті, хто на високому рівні володіли математичними інструментами, завжди мали великий потенціал для реалізації своїх ідей і становили стратегічний ресурс нації.

Теорію функцій комплексної змінної можна назвати ядром сучасної математики. Вона органічно поєднує в собі аналітичні та геометричні методи, вже визнанні класичними підходи та нові ідеї. Поняття й конструкції теорії функцій комплексної змінної є основними моделями, джерелами й відправними пунктами як різних розділів математики, так і багатьох прикладних наук.

Основи теорії закладено у XVIII ст., проте задачі, пов'язані з уявними величинами, вперше з'явилися у працях італійських математиків ще у XVI ст..

Ж. д'Аламбер був одним із перших, хто фактично започаткував дослідження функцій комплексної змінної та дослідив умови аналітичності функцій. Сьогодні ці умови відомі як умови д'Аламбера-Ейлера-Коші-Рімана, або просто Коші-Рімана.

Вихідні ідеї теорії функцій комплексної змінної виникли у другій половині XVIII ст. і пов'язані насамперед з іменем Леонарда Ейлера (1707-1783). В роботах Ейлера детально вивчені елементарні функції комплексної змінної, надані умови диференційованості та початкові основи інтегрального числення функцій комплексної змінної, наведені численні застосування цих функцій до різноманітних математичних задач, зокрема, закладені основи застосувань у гідродинаміці та картографії. Основний масив теорії був створений у XIX ст. переважно трудами Огюстена Коші (1789-1857) і Карла Вейєрштрасса (1815-1897), які розвили інтегральне числення і теорію подання функцій рядами, а також Бернхарда Рімана (1826-1866), який аргументував геометричні питання теорії функцій та їх застосування. Завдяки роботам цих і багатьох інших видатних вчених теорія функцій комплексної змінної остаточно сформувалася як найважливіша галузь математичного аналізу, така ж повна, як і теорія, що лежить в основі математичного аналізу функцій дійсної змінної.

Актуальність теми «Елементарні функції комплексної змінної» обумовлена тим, що завдяки зручній комплексній формі запису математичних формулювань широко застосовується у різних галузях науки й техніки, зокрема при побудові та дослідженні складних математичних моделей в електро- і радіотехніці, гідро- і аеродинаміці, теорії пружності, теорії коливань і багатьох інших.

Об'єкт дослідження: теоретичні відомості елементарних функцій, а саме основні методи розв'язування задач, які базуються на теорії функцій комплексної змінної.

Предмет дослідження: основні поняття теорії функції комплексної змінної, основні властивості та особливості процесу застосування теорій до розв'язування задач.

Мета дослідження: вивчити елементарні функції комплексної змінної які можуть бути використанні в курсі вищої математики і які формують у студентів навчально-пізнавальну діяльність та сприяють розвитку творчого мислення. Проілюструвати досліджений матеріал на прикладах.

Розділ 1. Поняття функції комплексної змінної

1.1. Означення та границя функції комплексної змінної

Нехай дано множину E комплексних чисел. До цієї множини, зокрема, може належати й точка $z = \infty$.

Означення. Якщо кожному числу $z \in E$ за певним правилом поставлено у відповідність одне або декілька комплексних чисел $w = u + iv$ з деякої множини комплексних чисел $G \subset C$, то кажуть, що на множині E визначено функцію комплексної змінної, і пишуть $w = f(z)$. В першому випадку функцію $f(z)$ називають *однозначною*, в другому – *багатозначною* [23, с. 17]. Множина E при цьому називається *областю (множиною) визначення функції*, або *областю (множиною) існування функції*, а множину G – *множиною її значень* [11, с. 60], $z -$ незалежною змінною (аргументом), $\mathrm{w} -$ залежною змінною (функцією).

Нехай F – множина всіх значень функції $w = f\,(z)$ для $z \in E$. Візьмемо довільну фіксовану точку w з множини F і поставимо їй у відповідність ті точки множини E, яким функція $w = f\,(z)$ поставила у відповідність точку w. Цим самим на множині F визначено функцію $z = \varphi\,(w)$, яку називають *оберненою функцією* відносно функції $w = f\,(z)$ і позначається так: $z = f^{-1}\,(w)$. Функцію $w = f(z)$ називають *прямою функцією*. Ясно, що коли пряма функція $w = f(z)$ однозначна, то обернена функція $z = f^{-1}\,(w)$ може бути як однозначною, так і многозначною [12, с. 233**].** Для того, щоб обернена функція $z = f^{-1}(w)$ була однозначною, необхідно і достатньо, щоб функція $w = f\,(z)$ кожним двом різним точкам з множини E ставила у відповідність дві різні точки з множини F, іншими словами, щоб функція $w = f\,(z)$ відображала множину E на множину F взаємно однозначно.

Функція $w = f\,(z)$, яка визначена на множині Е, називається *обмеженою* на цій множині, якщо існує число $C > 0$ таке, що $|f(z)| \leq C$ для всіх $z \in E$ [12, с. 234].

Якщо аналізувати множини E та G не на комплексній площині, а на сфері Рімана, то немає жодних підстав виділяти окремо точки $z = \infty$ та $w = \infty$.

Як і будь-яке комплексне число, функцію комплексної змінної $f(z)$ можна подати у вигляді суми дійсних функцій $u(x,y) = Re\, f(z)$ та $v(x, y) = Im\, f(z)$, тобто записувати цю функцію у вигляді

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{1.1}$$

де x та y набувають дійсних значень $(x, y) \epsilon R$, а $z = x + iy$, або подавати функцію $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = |f(z)|e^{iargf(z)}.$$

Функцію комплексної змінної можна геометрично подати як деяке відображення множини E площини z на множину G площини w.

У випадку, коли в множинах E та G не містяться нескінченно віддалені точки, кажуть про сукупність точок у комплексній площині, у протилежному випадку – це множини з розширеної комплексної площини. Зокрема, якщо множина E є множиною натуральних чисел, то значення функції комплексної змінної $w = f\ (z)$ утворюють послідовність комплексних чисел. Якщо ж множини E та G є множинами дійсних чисел, то така функція є функцією дійсної змінної.

Означення. Функція $w = f\ (z)$ називається *однолистою на множині* E, якщо двом довільним точкам $z_1, z_2 \epsilon E$; $z_1 \neq z_2$ відповідають два різні значення функції $f(z_1) \neq f(z_2)$. Множина E при цьому називається *областю (множиною) однолистості* [11, с. 61].

Наприклад, якщо функцію $w = z^2$ визначено в області $Im\, z > 0$ і точки $z_1 \neq z_2$ належать цій області, то $f(z_1) \neq f(z_2)$, тому, функція однолиста у верхній півплощині. Якщо ж ця функція визначена в усій комплексній площині, тоді задана функція не буде однолистою. Це випливає з того, що поклавши $z_1 = 1 + i \neq z_2 = -(1 + i)$, одержимо $f(z_1) = (1 + i)^2 = (-(1 + i))^2 = f(z_2)$.

Означення. Може бути таке, що в області визначення E функції комплексної змінної $f\ (z)$ існують замкнені криві γ, при повному обході вздовж яких функція отримує ненульовий приріст, тобто значення функції при виході з фіксованої точки z_0 не дорівнює її значенню при поверненні до точки після повного обходу вздовж контуру γ. Це означає, що одному й тому самому значенню змінної z відповідає два або більше значень функцій. Такі функції називаються *неоднозначними в даній області*, а різниця значень функції у фіксованій точці до та після обходу називається *приростом функції* $f\ (z)$ при обході вздовж контуру γ і позначається $[f\ (z)]|_{\gamma}$ [7, с. 402].

Означення. Якщо після кожного з $k-1$ обходів уздовж деякого замкненого контуру γ функція $f\ (z)$ отримувала ненульовий приріст відносно початкового значення, а після k-го обходу значення функції стало рівним початковому, то кажуть, що функція в області, яка містить контур γ, є *k-значною*. Якщо ж функція не повертається до початкового значення після довільної скінченної кількості обходів, то вона *нескінченнозначна*.

Наприклад, функція $w = z^2$ в області $|z| < 1$ однозначна, та не однолиста, а функція $w = \sqrt{z}$ у цій області є двозначною, оскільки корінь квадратний має дві гілки:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{2} + i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}\right), k = 0,1.$$

Функція $Ln(z) = ln(z) + iargz + i2k\pi$ є нескінченнозначною в цій області, а її приріст при кожному обході дорівнює $2\pi i$.

При вивченні багатозначних функцій головним етапом є дослідження однозначних гілок.

Означення. Однозначною гілкою багатозначної функції $F(z)$ в області D називається така однозначна в цій області функція $f(z)$, значення якої в кожній точці z збігається з одним із значень $F(z)$ [7, с. 402].

Якщо функція комплексної змінної в деякій області однозначна за означеннями, то вона може бути визначеною за допомогою поняття бінарного відношення та відображення.

Досить часто необхідно мати справу з відображеннями, які здійснюються за допомогою складних функцій. Нехай функція $w_1 = f_1(z)$ відображає точки множини E на множину G_1, а функція $w_2 = f_2(w_1)$ – множини G_1 на множину G. Таке відображення множини E на множину G здійснюється складеною функцією $w = f_2(f_1(z))$, яку називають *суперпозицією функцій* або *відображень* f_1 та f_2.

Поняття границі функції комплексної змінної вводиться аналогічно, як і для функції дійсної змінної, необхідно тільки всюди замість абсолютної величини писати модуль комплексного числа.

Нехай функція $f(z)$ визначена і однозначна в деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, окрім, можливо, самої точки z_0.

Означення границі функції за Коші. Якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, як завгодно малого, знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $w = f(z)$ відображає всі точки δ-околу точки z_0 (крім, може, самої точки z_0) всередину ε-околу точки w_0, то ми будемо говорити, що число w_0 є *границею функції* $f(z)$ *при* $z \to z_0$, і записують це символьно у вигляді [18, с. 49]

$$w_0 = u_0 + iv_0 = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Отже, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, якщо $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що коли $|z - z_0| < \delta$, то $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. Якщо ж $z_0 = \infty$, а w_0 – скінченне, то означення залишається вірним за умови, що $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $\rho(z, z_0) < \delta$ маємо $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, отже, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Якщо ж та w_0 нескінченне, то відповідні околи потрібно розглядати у сферичній метриці $\rho(f(z), w_0) < \delta$, тобто ця нерівність має вигляд $|f(z)| > \sqrt{1/(\delta^2 - 1)}$ [11, с. 63].

При цьому вважають, що z_0 й w_0 – *скінченні точки* комплексної площини.

Означення за Гейне. Комплексне число $w_0 \in E$ *є границею функції* $f(z)$ при $z \to z_0$, якщо для довільної збіжної до z_0 послідовності $\{z_n\}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0)$ та $\forall\, \varepsilon > 0$ існує $N = N(\varepsilon)$ таке, що $|f(z_n) - w_0| < \varepsilon\ \ \forall\, n > N$, тобто послідовність $\{f(z_n)\}$ збігається до w_0 $(\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0)$ [11, с. 63].

Це означення на випадок, коли $z_0 = \infty$ або $w_0 = \infty$, а також, коли $z_0 = \infty$ та $w_0 = \infty$ одночасно.

Кажуть, що функція (1.1) має границю в точці z_0, рівну числу $w_0 = u_0 + iv_0$, якщо

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} |f(z) - w_0| = 0 \tag{1.2}$$

В цьому випадку пишуть

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0\,.$$

Властивість (1.2) можна записати у вигляді рівності

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} = 0\,.$$

Звідси

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0\,, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0\,.$$

Оскільки означення границі зводиться до звичайного означення границі дійсних функцій, тоді основні властивості граничного переходу зберігаються для функцій комплексних змінних:

1) Функція $f(z)$, визначена на множині E, може мати у граничній точці цієї множини лише одну границю.
2) Якщо функція $f(z)$ має скінченну границю в точці z_0, то вона обмежена на множині $E_\delta(z_0)$ при досить малому $\delta > 0$.
3) Якщо функція $f(z)$ в точці z_0 має границю, відмінну від нуля, тоді й сама функція $f(z)$ відмінна від нуля для $z \in E_\delta(z_0)$ при досить малому $\delta > 0$, окрім, можливо, самої точки z_0.

4) Для того щоб функція $f(z)$ в точці z_0 мала скінченну границю, що дорівнює w_0, необхідно і достатньо, щоб функція $\omega(z) = f(z) - w_0$ мала в точці z_0 границю, яка дорівнює нулю.

5) Існування границі $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, де функція $f(z)$ має вигляд (1.1) $z_0 = x_0 + iy_0$ рівносильне існуванню двох границь $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)$ й $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$, причому $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) =$ $= \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$.

Справедливі наступні *властивості границь*. Нехай існують *скінченні* границі $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = m_0$. Тоді

6) Існують і скінченні границі $\lim\limits_{z \to z_0}[f(z) \pm g(z)]$, причому

$$\lim_{z \to z_0}[f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z) = w_0 \pm m_0 .$$

7) Існує скінченна границя $\lim\limits_{z \to z_0}[f(z) \cdot g(z)]$, причому

$$\lim_{z \to z_0}[f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) = w_0 \cdot m_0 .$$

8) якщо $m_0 \neq 0$, існує і скінченна границя $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}$, причому

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \frac{w_0}{m_0}.$$

За означенням функція $f(z)$ наближається до своєї границі незалежно від способу наближення точки z до точки z_0. Іншими словами, якщо границя існує, то при z, наближеної до z_0 по будь-якому закону, $f(z)$ буде наближатися до цієї границі.

Приклад 1.1. Знайти границю функції $w = z^2 - \bar{z} + 4$ в точці $z_0 = 3 + 2i$.

Розв'язання

Поклавши $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$. Підставимо ці значення в задану функцію:

$w = (x + iy)^2 - (x - iy) + 4 = x^2 + 2ixy - y^2 - x + iy + 4 = (x^2 - y^2 -$ $-x + 4) + i(2xy + y);$

Знайдемо границю функції w:

$$\lim_{z\to 3+2i} z^2-\bar{z}+4=\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}(x^2-y^2-x+4)+i\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}(2xy+y)=6+14i.$$

Відповідь: $\lim\limits_{z\to 3+2i} z^2-\bar{z}+4=6+14i.$

Приклад 1.2. Знайти границю функції $w=z^2-i\bar{z}$ в точці $z_0=1-4i.$

Розв'язання

Поклавши $z=x+iy$ та $\bar{z}=x-iy$, отримаємо:

$$w=(x+iy)^2-i(x-iy)=x^2+2ixy-y^2-ix-y=(x^2-y^2-y)+$$
$$+i(2xy-x).$$

Знайдемо границю функції w:

$$\lim_{z\to 1-4i} z^2-i\bar{z}=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -4}}(x^2-y^2-y)+i\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -4}}(2xy-x)=-11-9i.$$

Відповідь: $\lim\limits_{z\to 1-4i} z^2-i\bar{z}=-11-9i.$

Приклад 1.3. Знайти границю функції $w=\frac{|z|^2}{\sqrt{|z|^2+1}-1}$ в точці $z_0=0.$

Розв'язання

Для того, щоб знайти $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{|z|^2}{\sqrt{|z|^2+1}-1}$ домножимо чисельник та знаменник на $\left(\sqrt{|z|^2+1}+1\right)$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{\sqrt{|z|^2+1}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2\left(\sqrt{|z|^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{|z|^2+1}-1\right)\left(\sqrt{|z|^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2\left(\sqrt{|z|^2+1}+1\right)}{|z|^2+1-1}=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2\left(\sqrt{|z|^2+1}+1\right)}{|z|^2}.$$

Так як $|z|^2=x^2+y^2$, то $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{|z|^2\left(\sqrt{|z|^2+1}+1\right)}{|z|^2}=2.$

Відповідь: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{|z|^2}{\sqrt{|z|^2+1}-1}=2.$

1.2. Неперервність функції комплексної змінної

Означення. Якщо функція $w = f(z)$ визначена в точці z_0 і в деякому її околі та границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не тільки існує, але й рівна значенню функції $f(z)$ в точці z_0, тобто

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\,, \qquad (1.3)$$

то функцію $f(z)$ називають *неперервною в точці* z_0 [1, с. 24].

Оскільки є два рівносильні означення границі, за Гейне і за Коші, то є два рівносильні означення неперервності, за Гейне та за Коші.

Інакше кажучи, функція $f(z)$ неперервна в точці z_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, як завгодно малого, можна вказати таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для усіх точок z непроколеного δ-околу U_δ точки z_0 (тобто таких, що задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$) виконується нерівність $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ [26, с. 45].

З означення випливає, що неперервна функція $f(z)$ прямує до свого граничного значення $f(z_0)$ незалежно від шляху прямування точки z до z_0.

Таким чином, функція яка неперервна в точці z_0 має бути визначена в околі цієї точки, і в ній самій та має виконуватися рівність:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\,,\ (f(z+\Delta z) - f(z_0) \to 0,\ \Delta z \to 0). \qquad (1.4)$$

Рівність (1.3) еквівалентна двом рівностям:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)\,, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)\,.$$

Функція комплексної змінної (1.1) неперервна у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді й тільки тоді, коли її дійсна та уявна частини – функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ неперервні в точці (x_0,y_0) за сукупністю змінних x та y.

Наслідок. Необхідною й достатньою умовою збіжності послідовності комплексних чисел є збіжність послідовностей їх дійсних та уявних частин. І навпаки, з неперервності дійсної та уявної частин випливає неперервність функції комплексної змінної [11, с. 64]. Отже, неперервність функції $f(z)$

комплексної змінної $z = x + iy$ еквівалентна неперервності двох дійсних функцій $u(x, y) = Re\, f(z)$ і $v(x, y) = Im\, f(z)$ дійсних змінних x та y.

Отже, неперервність $f(z)$ в точці z_0 еквівалентна неперервності функцій u та v в точці (x_0, y_0). Причому існування границі модуля функції ніяк не впливає на її неперервність. Наприклад, $f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right)$ обмежена в точці $z = 0$, але не неперервна, оскільки в цій точці вона не має границі. Дійсно, поклавши $z = re^{i\varphi}$, маємо

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) = \sin 2\varphi.$$

Отже, значення $\lim_{r\to 0} f(z) = sin\, 2\varphi$ не залежить від прямування r до нуля й може бути рівним довільній величині з проміжку [–1,1].

Означення. Функція $f(z)$, яка не є неперервною в точці z_0 називається *розривною в ній*.

Легко встановити: якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ неперервні, то неперервні й функції $f(z) \pm g(z)$ та $f(z) \cdot g(z)$, а при $g(z) \neq 0$ неперервна й частка цих функцій $\frac{f(z)}{g(z)}$. Зрозуміло, що аналогічне твердження вірне й для довільної скінченної кількості функцій. А це означає, що сума, різниця, добуток і частка двох неперервних функцій по множині E в точці $z_0 \in E$ є функції, неперервні в точці z_0 по множині E.

Відмітимо без доведення, що для функцій, неперервних на замкнених обмежених множинах (в замкнених обмежених областях, на замкнених лініях або на відрізках ліній, що містять свої межові точки), залишаються дійсними звичайні властивості функцій, неперервних на замкнених сегментах.

Означення. Якщо $f(z)$ неперервна в кожній точці області D, то вона називається *неперервною в області* (в цьому випадку вона неперервна в кожній точці D в сенсі означення (1.3), або кожна точка z входить в D разом з деяким околом) [37, с. 31].

Теорема. Якщо функція $f(z)$ називається неперервною в області D і реалізує взаємно однозначну відповідність цієї області на деяку множину ϑ в площині w, то ϑ також є областю та обернена функція $z = \varphi\,(w)$ також неперервна в ϑ.

Означення. Функція $f(z)$ називається *неперервною в замкненій області К* якщо вона визначена в K й для кожної точки з цієї області, (включаючи межові точки) виконується рівність (1.3).

Означення. Функція $f(z)$ називається *рівномірно неперервною в замкненій області* $D \cup L$, якщо $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta(\varepsilon)$ таке, що $\forall\, z_1, z_2 \in D \cup L$ $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ при $|z_1 - z_2| < \delta$. Якщо області $D \cup L$ належить нескінченно віддалена точка, то використовується відповідна сферична метрика та з того, що $\rho(z_1, z_2) < \delta$, випливає: $\rho(f(z_1), f(z_2)) < \varepsilon\; \forall$ $z_1, z_2 \in D \cup L$ [11, с. 64].

Справедлива *теорема Кантора*: функція $f(z)$, яка неперервна на замкненій обмеженій множині E, рівномірно неперервна в цій множині.

Доведення

З неперервності $f(z)$ на множині E випливає нерівність $Re\, f(z)$ та $Im\, f(z)$ на цій множині. За теоремою Кантора з математичного аналізу функції $Re\, f(z)$ і $Im\, f(z)$ рівномірно неперервні на множині E. Використовуючи тепер нерівності

$$\left.\begin{matrix} |Re\, z| \\ |Im\, z| \end{matrix}\right\} \leq |z| \leq |Re\, z| + |Im\, z|,$$

легко доводимо рівномірну неперервність $f(z)$ на E [18, с. 11-12].

Якщо точка z_0 є ізольованою точкою множини E, тобто існує δ-окіл цієї точки, який не містить жодної іншої точки множини E, і функція $f(z)$ визначена в цій точці, то вона вважається неперервною в ній [11, с. 64].

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1 (Вейєрштрасса). Якщо функція $f(z)$ неперервна на обмеженій замкненій множині, то вона на цій множині обмежена, а її модуль досягає своїх найменшого та найбільшого значень.

Теорема 2 Вейєрштрасса. Якщо функція $f(z)$ неперервна в обмеженій замкненій області $D \cup L$, то вона й рівномірно неперервна в цій області, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ $\exists$ таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для будь-яких $z, z_a \in D \cup L$ при $|z - z_a| < \delta$ маємо $|f(z) - f(z_a)| < \varepsilon$.

Якщо зафіксувати точку z_0 і перейти до іншої точки $z \in D$, то аргумент зміниться на величину

$$\Delta z = z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y,$$

яка називається *приростом аргументу в точці* z_0. Відповідне змінення функції

$$\Delta w = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

називається *приростом функції в точці* z_0. Отже, неважко довести, що означення неперервності функції в точці можна подати у наступному: функція $f(z)$ називається *неперервною в точці* z_0, якщо вона визначена в *непроколеному* околі цієї точки й $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$.

Виділимо властивості функцій неперервних на *замкнених* множинах.

1. Будь-яка функція $f(z)$, неперервна на множині K, обмежена (тобто існує стала A така, що $|f(z)| \leq A$ для всіх $z \in K$).
2. Будь-яка функція $f(z)$, неперервна на множині K, рівномірно неперервна на цій множині своєю верхньою та нижньою межею (тобто існують точки $z_1, z_2 \in K$ такі, що $|f(z)| \leq |f(z_1)|$, $|f(z)| \geq |f(z_2)|$ для всіх $z \in K$).
3. Будь-яка функція $f(z)$, неперервна на множині K, рівномірно неперервна (тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ якщо $z_1, z_2 \in K$ і $\rho(z_1, z_2) < \delta$).

Означення. Будемо говорити, що якщо функція $f(z)$ неперервна в точці z_0 і $f(z_0) = \infty$ $\left(\lim\limits_{z \to z_0,\ z \in E} f(z) = \infty\right)$, то вона *неперервна в точці* z_0 *в узагальненому розумінні.* Таку функцію також називають *узагальнено-неперервною* [11, с. 65].

Наприклад, функція $f(z) = \frac{1}{2z^2}$ є узагальнено-неперервна в розширеній комплексній площині. Для неї

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 = f(\infty),\ \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty = f(0).$$

Означення. Нехай функція $f(z)$ неперервна на множині E. Будемо говорити, що задана функція *неперервна в області аж до її межі*, якщо $\forall\, \varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що при $\rho_E(z, z_a) < \delta$ має місце нерівність $|f(z) - f(z_a)| < \varepsilon$.

Для областей з розрізами неперервність аж до межі не рівносильна рівномірній неперервності, оскільки для області з розрізом існують точки z та z_a, для яких відстань $|z - z_a|$ як завгодно мала, у той час як $\rho_E(z, z_a)$ буде більше деякої додатної сталої, оскільки точки розрізу розташовані по різні його сторони. Тому відмінність між рівномірною неперервністю й неперервністю аж до межі полягає в тому, що рівномірно неперервна в області функція повинна мати однакові граничні значення при прямуванні до точки межі, незалежно від того, з якої сторони розрізу відбувається прямування до такої точки, а функція, неперервна аж до межі, може мати різні значення при прямуванню до межової точки з різних сторін розрізу [12, с. 66].

Надалі вважатимемо: якщо функція $f(z)$ неперервна аж до межі в області з розрізом, то її значення в точках межі визначені як з однієї, так і з іншої сторони розрізу.

Приклад 1.4. Показати, що функція $f(z) = z^2$ неперервна при будь-якому значенні z.

Розв'язання

Візьмемо довільну точку z_0 і довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки $f(z_0) = {z_0}^2$, то покажемо, що існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|z^2 - {z_0}^2| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$.

Якщо $z \to z_0$, то знайдеться таке число $M > 0$, що $|z| < M$ і $|z_0| < M$.

Тоді

$|z^2 - {z_0}^2| = |(z - z_0)(z + z_0)| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| < (|z| + |z_0|) \cdot |z - z_0| <$
$< 2M|z - z_0|.$

Якщо взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, то з нерівності $|z - z_0| < \delta$ випливає, що $|z^2 - {z_0}^2| < 2M\delta \leq \varepsilon$, тобто для будь-якого z_0 функція $w = f(z) = z^2$ неперервна.

Відповідь: функція $f(z) = z^2$ є неперервною.

Приклад 1.5. Дослідити на неперервність функцію $\frac{z\bar{z}}{z^2+1}$.

Розв'язання

Поклавши $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$, виділимо $u(x, y)$ та $v(x, y)$:

$f(z) = \frac{(x+iy)(x-iy)}{(x+iy)^2+1} = \frac{x^2-ixy+ixy+y^2}{x^2+2ixy-y^2+1} = \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2+1)+(2xy)i} =$

$= \frac{(x^2+y^2)\left((x^2-y^2+1)-(2xy)i\right)}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2} = \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2+1)-2ixy(x^2+y^2)}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2} = \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2+1)}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2} -$
$- \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2} i,$

звідки бачимо, що

$u(x, y) = \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2+1)}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2},$

$v(x, y) = -\frac{2xy(x^2+y^2)}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2}.$

Кожна з цих функцій є елементарною, отже, неперервною в усіх точках своєї області визначення, тобто в усіх точках $(x, y) \in R^2$, крім тих, для яких $(x^2 - y^2 + 1)^2 + (2xy)^2$, тобто $x = 0$ а $y = \pm 1$.

Відповідь: функція $\frac{z\bar{z}}{z^2+1}$ є неперервною на всій комплексній площині крім точок $\pm i$.

Приклад 1.6. Дослідити функцію $f(z)$ на неперервність:

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{(Im\, z\, Re\, z)^2}{|z|^2}, z \neq 0. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Функція $f(z)$ може мати розрив лише в точці $z = 0$. Якщо $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 0$, то функція в точці $z = 0$ буде неперервною. Знайдемо $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(Im\, z\, Re\, z)^2}{|z|^2} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}.$$

Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, при $x \to 0$ та $y \to 0$ радіус ρ також прямує до нуля.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(xy)^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\rho^2\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{4}\lim_{\rho\to 0}\sin^2 2\varphi.$$

Границя даної функції в точці $z = 0$ не існує, так, як кут φ може набувати довільного значення із пів сегмента $[0;2\pi)$, відповідно $\sin^2 2\varphi$ набуває будь-якого значення із сегмента $[-1;1]$.

Отже, функція $f(z)$ має розрив точці $z = 0$.

1.3. Диференційовність функцій комплексної змінної

Поняття диференційовності функцій комплексної змінної має багато спільного з відомими твердженнями, але, разом з тим, воно істотно відрізняється від диференційовності функцій дійсної змінної.

Проте диференційовність функцій комплексної змінної має у порівнянні з диференційовними функціями дійсної змінної багато додаткових властивостей, причина появи яких полягає в тому, що умова для існування похідної функції комплексної змінної, є більш обмежена, ніж умова для існування похідної функції дійсної змінної.

Нехай функція $w = f(z) = u + iv$ визначена в деякому околі U точки z, і в ній самій. Надамо незалежній змінній $z = x + iy$ приріст $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, який не виходить за межі околу U. Тоді функція $w = f(z)$ матиме відповідний приріст $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Означення. Якщо для точки $z_0 \in E$ існує при $\Delta z \to 0$ границя (граничне значення) відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то ця границя називається *похідною* функції $f(z)$ комплексної змінної z у точці z_0 і позначається

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{1.5}$$

Похідна позначається w', $f'(z)$, $\frac{dw}{dz}$ або $\frac{df}{dz}$.

Очевидно, рівність (1.5) можна замінити формулою:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{1.6}$$

З цього означення, як і для функції дійсної змінної, легко отримати формули для знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій. Ці формули аналогічні, як і в курсі математичного аналізу.

Основні правила диференціювання функцій:

1) Якщо $f(z) = const$, то $\frac{df(z)}{dz} = 0$;

2) Для довільної диференційовної функції $f(z)$ і константи c маємо $\frac{d[cf(z)]}{dz} = c\frac{df(z)}{dz}$;

3) Очевидно, що $\frac{dz}{dz} = 1$;

4) Якщо $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – комплексні сталі, то $\frac{d}{dz}(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1}$;

5) $(f_1(z) \pm f_1(z))' = f_1{}'(z) \pm f_2{}'(z)$;

6) $(f_1(z) \cdot f_1(z))' = f_1{}'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2{}'(z)$;

7) $\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \frac{f_1{}'(z) \cdot f_2(z) \pm (z) \cdot f_2{}'(z)}{f_2{}^2(z)}$, $f_2(z) \neq 0$;

8) якщо $\varphi(z)$ диференційовна в точці z, а $f(w)$ диференційовна в точці $w = f(z)$, то $(f(\varphi(z)))' = f_\varphi{}'(\varphi) \cdot \varphi_z{}'(z)$.

Покладемо, що функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ диференційовна в околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Вираз

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

називають *Якобіаном функції* $f(z)$. Лінійне відображення

$$u = u(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} (y - y_0),$$

$$v = v(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} (y - y_0)$$

є головною лінійною частиною відображення $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ у точці $z_0 = x_0 + iy_0$.

Зауваження. Границя (1.5) може бути скінченною, нескінченною або взагалі не існувати.

Означення. Функція називається *диференційовною в точці* z_0, якщо існує похідна в цій точці [25, с. 26].

Якщо функція диференційовна як в точці z_0, так і в деякому її околі, тоді вона називається *аналітичною в точці* z_0.

Вимога існування границі відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ і його незалежності від способу прямування Δz до нуля накладається на функцію $f(z)$ значно сильніші обмеження, ніж аналогічні вимоги для функції $y = \varphi(x)$ дійсної змінної x_0. Так, якщо функція $y = \varphi(x)$ має похідну, то це означає, що існує границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при наближенні точки $x_0 + \Delta x$ до точки x за двома напрямками: зліва (при $\Delta x < 0$) і з права (при $\Delta x > 0$), і що ці границі збігаються. Вимога для існування похідної для функції $f(z)$ комплексної змінної означає існування границі відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при наближенні точки $z_0 + \Delta z$ до точки z_0 по будь-якому напрямку, зокрема, за безліччю різних видів меж, і збіг всіх цих меж [1, с. 39].

Функція $f(z)$ називається *диференційовною в області*, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Функцію $w = f(z)$ називають *диференційовною в точці* z, якщо її приріст Δw в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta w = A\Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z \tag{1.7}$$

де комплексне число A не залежить від z, а функція $\alpha(\Delta z)$ є нескінченно малою при $\Delta z \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$.

Справді, розділивши обидві частини (1.7) на Δz, після переходу до границі при $\Delta z \to 0$ маємо $A = f'(z_0)$.

Диференціали позначаються символом d. Якщо поклавши $w = z$, то $\Delta w = \Delta z$, а $dw = dz = 1 \cdot \Delta z$. Отже, $dw = f'(z)dz$, а $\frac{dw}{dz} = f'(z)$.

Вираз $\frac{dw}{dz} = f'(z)$ називається *диференціальною формою* похідної функції $f(z)$ *в точці* z.

Теорема. Для того, щоб функція $f(z)$ була диференційовною в точці z_0, необхідно і достатньо, щоб вона мала похідну в цій точці, причому $f'(z_0) = C$ [33, с. 20].

Доведення

Необхідність. За означенням приріст диференційовної в точці z_0 функції можна подати у вигляді (1.7). Розділивши обидві частини цієї рівності на Δz, отримуємо

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = A + \alpha(\Delta z).$$

Оскільки $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$, то існує границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = A$, отже, згідно з (1.6), існує $f'(z_0) = A$.

Достатність. Нехай існує $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$. Позначивши

$$f'(z_0) - \frac{\Delta w}{\Delta z} = \alpha(\Delta z), \tag{1.8}$$

маємо, $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Рівність (1.8) запишемо у вигляді $f'(z_0) = \frac{\Delta w}{\Delta z} + \alpha(\Delta z)$. Після домноження обох частин цієї рівності на Δz отримуємо рівність (1.7) з $A = f'(z_0)$. Отже, функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0.

Теорему доведено.

Таким чином, рівність (1.7) є необхідною та достатньою умовою диференційовності функції $f(z)$ в точці z_0. Із (1.7), зокрема, слідує, що функція, диференційовна в точці z_0, непереривна в цій точці.

Як і в курсі математичного аналізу, легко показати, що із диференційовності функції в точці випливає її неперервність. Обернене твердження не вірне.

Головну лінійну частину приросту Δw відносно Δz в околі точки z називають *диференціалом функції* в цій точці й позначають $dw = f'(z)dz$, а $dz = \Delta z$ – *диференціалом незалежної змінної*.

Як ми побачили вище, означення похідної функції комплексної змінної нічим не відрізняється від відомого нам означення похідної функції дійсної змінної.

З курсу математичного аналізу відомо, що необхідною і достатньою умовою диференційовності функції однієї змінної у деякій точці є існування скінченної похідної в цій точці. Для функції двох дійсних змінних достатньою умовою її диференційовності є неперервність в точці частинних похідних за двома змінними. Умови ж диференційовності функції комплексної змінної значно більш обмежувальні. Внаслідок того, що границя (1.6) повинна існувати й не залежати від способу наближення точки $z_0 + \Delta z$ до точки z_0 при $\Delta z_0 \to 0$, дійсна та уявна частини диференційовної функції $f(z)$ не можуть бути довільними. Вони повинні бути пов'язані певними додатковими співвідношеннями. Умови диференційовності функції комплексної змінної даються наступною теоремою.

Теорема (критерій диференційовності функції комплексної змінної). Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy \in E(z_0)$, була диференційовною у точці $z_0 = x_0 + iy_0$, як функція комплексної змінної, необхідно і достатньо, щоб дійсні функції $u = u(x, y)$ та $v = v(x, y)$ як функції двох дійсних змінних були диференційовані в точці (x_0, y_0) і їхні частинні похідні в цій точці задовольняли співвідношення [19, с. 27-28].

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.9}$$

Умови (1.9) називаються *умовами Коші-Рімана* або *умовами Даламбера-Ейлера*, вони мають бути виконаними в кожній точці, в якій функція $f(z) = x + iy$ диференційована (має похідну) [1, с. 40].

Похідна при цьому дорівнює $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Доведення

Необхідність. Нагадаємо, що функція $\varphi(x, y)$ двох *дійсних* змінних називається *диференційовною в точці* (x, y), якщо її повний приріст в цій точці можна записати у вигляді $\Delta\varphi = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + {}$ $+\beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y$, де A й B – числа, які не залежать від Δx й Δy, а $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ й $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ й $\Delta y \to 0$. Якщо функція диференційовна в точці (x_0, y_0), то в цій точці $A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Нехай функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0. Тоді $\Delta f = f'(z) \cdot \Delta z + +\alpha(\Delta z) \cdot \Delta z$, де $\alpha(\Delta z) = \chi(\Delta x, \Delta y) + i\gamma(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta z \to 0$, отже, $\chi(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\gamma(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$. Оскільки $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, $f'(z) = A + iB$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, то після підставлення цих виразів у Δf і відокремлення дійсної та уявної частин отримаємо

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \chi\Delta x - \gamma\Delta y\,, \tag{1.10}$$

$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \chi\Delta x + \gamma\Delta y\,, \tag{1.11}$$

Отже, відповідно до означення диференційовності функції двох змінних, а також зв'язку диференційовності з існуванням частинних похідних, з рівності (1.10) випливає, що функція $u(x, y)$ диференційовна в точці (x_0, y_0) і в цій точці існують частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -B \tag{1.12}$$

Аналогічно з рівності (1.11) випливає диференційовність функції $v(x, y)$ в точці (x_0, y_0) та існування в цій точці похідних

$$\frac{\partial v}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A \tag{1.13}$$

З рівностей (1.12) та (1.13) легко випливають рівності (1.9).

Отже, необхідність доведена.

Достатність. При наданні аргументу z приросту $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, функція $w = f(z)$ отримає приріст

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v \tag{1.14}$$

Оскільки функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовні в точці (x_0, y_0), то

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \chi \cdot \Delta r, \tag{1.15}$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta r, \tag{1.16}$$

де $\chi = \chi(\Delta x, \Delta y) \to 0$ та $\gamma = \gamma(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta r = |\Delta z| = = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Підставивши рівності (1.15) та (1.16) в (1.14), з врахуванням умов Коші-Рімана (1.9), отримаємо:

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \chi\cdot\Delta r + i\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\Delta y + \gamma\cdot\Delta r\right) =$$

$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta y + \chi\cdot\Delta r + i\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta y + \gamma\cdot\Delta r\right)$. Замінивши $-\frac{\partial v}{\partial x} = i^2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, матимемо:

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot(\Delta x + i\cdot\Delta y) + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot(\Delta x + i\cdot\Delta y) + (\chi + i\cdot\gamma)\cdot\Delta r =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot(\Delta x + i\cdot\Delta y) + (\chi + i\cdot\gamma)\cdot\Delta r = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\Delta z +$$

$$+(\chi + i\cdot\gamma)\cdot\frac{\Delta r}{\Delta z}\cdot\Delta z.$$

Отже, ми отримали Δw у формі (1.7) з $A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$ та $\alpha = (\chi + i\cdot\gamma)\cdot\frac{\Delta r}{\Delta z} \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Тим самим доведена диференційовність функції $f(z)$ в точці z_0.

Теорему доведено.

У процесі доведення теореми встановлено зв'язок між похідною $f'(z)$ і частинними похідними дійсної та уявної частинами функції $f(z)$ у вигляді

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Зауважимо, що у полярних координатах $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ умови Коші-Рімана мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho},\ \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \tag{1.17}$$

де $f(z) = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) + iv(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. При виконанні (1.17) $f'(z)$ набуває однієї з наступних форм

$$f'(z) = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Теорема. Якщо в точці (x_0, y_0) функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ диференційовні, а їх частинні похідні пов'язані співвідношенням (1.9), то функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ є диференційовною функцією комплексної змінної z у точці $z_0 = x_0 + iy_0$.

Теорема (про диференційовність елементарних функцій). Функції $w = e^z$, $w = z^n\ (n \epsilon N)$, $w = sin\, z$, $w = cos\, z$, $w = tg\, z$, $w = ctg\, z$, $w = sh\, z$, $w = ch\, z, w = th\, z, w = cth\, z$ диференційовні в будь-якій точці комплексної площини, в якій вони означені.

Якщо функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ диференційовна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то виконуються умови:

1) функції $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ диференційовні в точці (x_0, y_0), (як функції двох дійсних змінних);

2) в точці (x_0, y_0) мають місце рівності (1.9).

Умови 1), 2) є водночас і достатніми для комплексної диференційовності функції $f(z)$ в точці z_0.

Приклад 1.7. Знайти область диференційовності функції $f(z) = z^2 + 5z - 2$.

Розв'язання

Виділимо дійсну та уявну частини функції $f(z) = z^2 + 5z - 2$.

$f(z) = (x + iy)^2 + 5(x + iy) - 2 = x^2 + 2ixy - y^2 + 5x + 5iy - 2 =$
$= (x^2 - y^2 + 5x - 2) + i(2xy + 5y)$.

$u = x^2 - y^2 + 5x - 2$; $v = 2xy + 5y$.

Знайдемо частинні похідні функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 5.$

Визначимо для яких значень змінних x та y виконуються умови Коші-Рімана

$$\begin{cases} 2x + 5 = 2x + 5 \\ -2y = -2y \end{cases}.$$

Отже, задана функція диференційовна у всій комплексній площині.

Відповідь: функція $f(z) = z^2 + 5z - 2$ диференційовна у всій комплексній площині.

Приклад 1.8. Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функції $w = Ln\, z$ і довести, що $(Ln\, z)' = \frac{1}{z}$.

Розв'язання

Виділимо дійсну та уявну частини заданої функції:

$Ln\, z = ln\sqrt{x^2+y^2} + i\left(arct\ \frac{x}{y} + 2\pi k\right), k \in Z.$

Отже, $u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$; $v = arct\ \frac{x}{y} + 2\pi k.$

Маємо: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}.$$

Умови Коші-Рімана виконуються. Крім того функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ мають повний диференціал (в області визначення). Отже, існує похідна

$(Ln\, z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\cdot\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{1}{z}.$

Приклад 1.9. Знайти область диференційовності функції $f(z) = z\, Re\, z$.

Розв'язання

Виділимо дійсну та уявну частини функції $f(z) = z\, Re\, z$.

$f(z) = (x+iy)x = x^2 + ixy.$

$u = x^2; v = xy.$

Знайдемо частинні похідні функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = y; \frac{\partial v}{\partial y} = x.$

Визначимо для яких значень змінних x та y виконуються умови Коші-Рімана

$\begin{cases} 2x = x \\ 0 = -y \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$

Отже, задана функція диференційовна на всій комплексній множині, крім точки $z = 0$.

Відповідь: функція $f(z) = z\, Re\, z$ диференційовна на всій комплексній множині, крім точки $z = 0$.

Розділ 2. Елементарні функції комплексної змінної

2.1. Показникова і логарифмічна функції

Показникову функцію $w = e^z$ при будь-якому комплексному показнику $z = x + iy$ визначаємо формулою:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny). \qquad (2.1)$$

Для функції e^z має місце теорема додавання про те, що

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \qquad (2.2)$$

Дійсно нехай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тоді

$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) +$
$+i\sin(y_1 + y_2) = e^{z_1+z_2}$.

Тобто, показникова функція переводить адитивну групу поля комплексних чисел у мультиплікативну групу цього ж поля шляхом відображення $z \to e^z$.

Функція (2.1) є періодичною з основним періодом $2\pi i$. Справді нехай $e^{z+w} = e^z$, $w = \alpha + i\beta$. Помножимо обидві рівності на e^{-z}. Отримаємо

$$e^w = e^\alpha \cos\beta + i\, e^\alpha \sin\beta = 1$$

або

$$\mathrm{e}^\alpha \cos\beta = 1,\ \ e^\alpha \sin\beta = 0.$$

Звідси знаходимо: $\alpha = 0, \beta = 2m\pi, w = 2m\pi i$, і т. д. $2\pi i -$ основний період функції w.

Функція (2.1) визначена на усій комплексній площині і на дійсній осі співпадає з відповідною функцією дійсної змінної [27, с. 40].

Показникова функція не набуває в множині C нульове значення, тобто початок координат не належить образу площини C при відображені $z \to e^z$. Доводимо це за допомогою формули (2.2) $z_1 = z, z_2 = -z$. Тоді $e^z e^{-z} = 1$. Звідси слідує, що якби в будь-якій іншій точці показникова функція перетворилася б у нуль, то в точці $-z$, вона була б визначеною, що суперечить її означенню.

Покажемо, що будь-яка інша точка площини w $(w \neq 0)$ належить образу площини C при відображенні (2.1). Нехай $w-$ будь-яка точка площини С, причому $w \neq 0$, $w \neq \infty$. Знайдемо за w, таке z, що $e^z = w$. Маємо

$$|w| = e^x.$$

Звідси випливає

$$x = ln|w|, \;\; y \,\epsilon\; Arg\, w.$$

Отже

$$z = x + iy = ln|w| + iy = ln|w| + i(arg\, w + 2k\pi), \;\; k \;\in\; Z \quad (2.3)$$

Бачимо, що існує нескінченна множина прообразів точок $w \;\in\; C$, $w \neq 0$. Всі вони лежать на прямій, паралельній осі Oy, на відстані 2π один від одного. Таким чином

$$w = e^z.$$

Це відображення однозначне, але не взаємно однозначне, оскільки кожна точка $w \;\in\; C, w \neq 0$, має нескінченну множину прообразів.

Будь-яка область, що не містить дві різні точки, в яких дійсні частини збігаються, а уявні відрізняються на $2k\pi$, $k \;\in\; Z$ буде областю однолистості показникової функції $z \to e^z$. Так областю її однолистості буде смуга $\text{M} = \{z \;\in\; C : \varphi < Im\, z < \varphi + 2\pi\}$. Її образом буде вся площина w з променем, що виходить із початку координат, під кутом φ.

Нехай $w = \rho e^{i\theta}$. Тоді із рівності $\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy}$ маємо $\rho = e^x, \theta = y$ тобто прямі $y = const$, функція $w = e^z$ переводить промені, а відрізки $\gamma = \{(x, y) \;\in\; R^2 : x = const,\; \varphi < y < \varphi + 2\pi\}$ – в кола з виколотою точкою, яка лежить на промені $\theta = y$.

Кожна горизонтальна смуга шириною 2π

$$M_k = \{z \;\in\; C : 2k\pi \; < Im\, z < 2(k+1)\pi\},$$

тобто на площині w з розрізом додатної дійсної півосі.

Функція, обернена до показникової $w = e^z$, називається *логарифмічною* і позначається $z = Ln\, w$. Областю визначення логарифмічної функції є множина значень, яких набуває показникові функція [12, с. 258]. Логарифмічна функція $Ln\,w$, $w \neq 0$. Оскільки $w = e^z$, $z \neq 0$ для будь-якого z, то нуль не входить в область визначення логарифмічної функції, тобто логарифм нуля не існує.

Оскільки

$$w = e^{x+iy} = e^x(cos\,y + i\,sin\,y),$$

то

$$|w| = e^x, Arg\,w = y,$$

отже,

$$z = Ln\,w = ln|w| + i\,Arg\,w. \quad (2.4)$$

В формулі (2.4) $Arg\,w$ може позначати будь-які значення аргумента w; тому кожне комплексне число $w \neq 0$ має безліч логарифмів [23, с. 35]. Всі значення логарифма числа $w \neq 0$, якщо вони існують, є у формулі (2.4). Тепер покажемо, що кожне значення, яке визначається правою частиною рівності (2.4) при заданому $\mathrm{w} \neq 0$, справді є логарифм числа w. З цією метою обчислимо значення показникової функції в точках

$$z = z_k = ln|w| + iArg\,w = ln|w| + i(arg\,w + 2k\pi)\ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Використовуючи властивість показникової функції, знайдемо:

$e^{z_k} = e^{[ln|w| + i(arg\,w + 2k\pi)]} = e^{ln\,w} \cdot e^{[i(arg\,w + 2k\pi)]} = |w|[cos(arg\,w + 2k\pi) +$
$+ i\,sin(arg\,w + 2k\pi)] = w.$

Отже,

$$Ln\,z = ln|z| + iArg\,z = ln|z| + iarg\,z + 2k\pi i\,, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (2.5)$$

Логарифм є нескінченнозначною функцією: її дійсна частина визначається однозначно, а уявна – з точністю до доданка кратного 2π.

Всі значення логарифма комплексного числа z – комплексні. Наприклад, обчислити всі значення комплексного виразу $Ln(i+1)$.

Розв'язання

$$Ln(i+1) = ln|i+1| + i\,Arg(i+1) = ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k = 0, \pm 1, \ldots$$

Усі точки вигляду (2.5) розташовані на одній прямій, яка паралельна уявній осі, і знаходяться одна від одної на відстанях, кратних 2π [19, с. 59].

Так як логарифмічна функція є многозначною, то при $k = 0$ отримуємо її головне значення або головну вітку. Всі значення логарифма пов'язані з його головним значенням рівністю

$$Ln\,z = ln\,z + 2k\pi i \ \ (k = 0,\ \pm 1,\ \dots), \tag{2.6}$$

де

$$ln\,z = ln|z| + i\,arg\,z\ , \tag{2.7}$$

називається *головним значенням натурального логарифму числа* z.

Якщо z – дійсне додатне число, $z = x < 0$, то $|z| = x,\ \arg z = 0$. Тому головне значення логарифма додатного числа збігається із значенням логарифма цього числа. Всі інші значення логарифма додатного числа уявні. Логарифм додатного числа обчислюється за формулою

$$Ln\,x = ln\,x + 2k\pi i\ (k = 0,\ \pm 1\ ,\ \dots).$$

Наприклад

$$Ln\,z|_{z=8} = ln\,8 + 2k\pi i \ \ (k = 0, \pm 1,\ \dots).$$

Якщо z – дійсне від'ємне число, $z = x < 0$, то $|z| = |w|,\ arg\,z = \pi$. Тому головне значення логарифма від'ємного числа x, що дорівнює

$$ln\,x = ln|x| + \pi i,$$

є число комплексне. Уявними будуть і всі інші значення логарифма. Логарифм від'ємного числа x обчислюється за формулою

$$Ln\,x = ln|x| + i(\pi + 2k\pi)\ (k = 0,\ \pm 1,\ \dots).$$

З курсу елементарної алгебри відомо, що «від'ємні числа не мають логарифмів». Тепер можна уточнити це твердження, сказавши, що «від'ємні числа не мають дійсних логарифмів» [12, с. 259].

Наприклад,

$$Ln(-7) = ln\sqrt{7} + (\pi + 2k\pi)i, (k = 0, \pm 1,\ \dots).$$

Користуючись формулою (2.5) і відомою властивістю логарифма добутку додатних чисел, а також властивістю аргументу добутку, можна отримати формулу для логарифма добутку двох комплексних чисел, відмінних від нуля. Ця формула має вигляд:

$$Ln(z_1 z_2) = Ln\, z_1 + Ln\, z_2. \tag{2.8}$$

Дійсно,

$Ln(z_1 z_2) = ln|z_1 z_2| + i\, Arg\,(z_1 z_2) = ln|z_1| + \ln|z_2| + i(Arg\, z_1 + Arg\, z_2) =$
$= Lnz_1 + Lnz_2.$

Аналогічно переконуємося в справедливості формули

$$Ln\, \frac{z_1}{z_2} = Ln\, z_1 - Ln\, z_2. \tag{2.9}$$

Формула (2.8), так само як і (2.9), означає рівність двох множин комплексних чисел, тобто кожне комплексне число з множини $Ln\,(z_1, z_2)$ міститься у множині $Ln\, z_1 + Ln\, z_2$ і навпаки, причому множину $Ln\, z_1 + Ln\, z_2$ дістаємо додавши будь-яке число з множини $Ln\, z_1$ до будь-якого числа з множини $Ln\, z_2$. Розглянемо твердження $Ln(-z) = Ln\, z$ для довільного $z \neq 0$. Справедливість цього твердження, здавалося б, випливає з декількох рівностей:

1) $Ln\,((-z)^2) = Ln\,(z^2)$;
2) $Ln\,(-z) + Ln\,(-z) = Ln\, z + Ln\, z$;
3) $2Ln\,(-z) = 2Ln\, z$;
4) $Ln(-z) = Ln\, z$.

Але рівності 2), 3) неправильні, оскільки

$$Ln\, z = ln|z| + i\arg z + 2k\pi i,$$

$$Ln(-z) = ln|-z| + i\, Arg\,(-z) = ln|z| + i\arg z + (2k+1)\pi i,$$

і жодне з чисел, взяте з множини $Ln\,(-z)$, не збігається з жодним з чисел, взятим з множини $Ln\, z$.

Помилка в цьому «доведенні» скривається в незаконному переході від правильної рівності 2) до неправильної рівності 3). Дійсно, $Ln\,(-z) + Ln\,(-z) \neq 2Ln\,(-z)$, оскільки множину чисел $Ln\,(-z) + Ln\,(-z)$ дістаємо додаванням будь-якого числа з множини $Ln\,(-z)$ до такого ж чи відмінного від нього числа тієї ж множини, тоді множину $2Ln\,(-z)$ дістаємо множенням на 2 кожного числа з множини $Ln\,(-z)$. Зрозуміло, що множина $2Ln\,(-z)$ є лише власна підмножина множини $Ln\,(-z) + Ln\,(-z)$.

Отже, $Ln\,(-z) + Ln\,(-z) \neq 2Ln(-z)$.

З тієї самої причини і

$$Ln\, z + Ln\, z \neq 2Ln\, z.$$

Поклавши в рівності (2.10) $z_1 = z_2 = z \neq 0$, матимемо:

$$Ln\, 1 = Ln\, z - Ln\, z.$$

Ця рівність правильна. Але не правильно, що її права частина дорівнює нулю. Вона дорівнює

$$Ln\, 1 = 2k\pi i \;\; (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Приклад 2.1. Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту при відображенні за допомогою функції $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ в точці $z_0 = i$.

Розв'язання

Виходячи із геометричного змісту похідної коефіцієнт розтягу $k = |f'(z_0)|$, а кут повороту $\alpha = arg\, f'(z_0)$.

Знаходимо похідну

$$f'(z) = \left(e^{z+\frac{1}{z}}\right)' = (1 - \tfrac{1}{z^2}) \cdot e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Визначимо значення похідної у точці $z_0 = i$.

$$f'(z_0) = f'(i) = \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \cdot e^{z+\frac{1}{z}}|_i = \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \cdot e^{i+\frac{1}{i}} = \left(1 - \frac{1}{-1}\right) \cdot e^{i-i} =$$

$$= (1 + 1) \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Знайдемо модуль і аргумент числа $f'(i)$ скориставшись властивостями модуля і аргументу комплексного числа:

$$k = |f'(z_0)| = |2| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2, \;\; \alpha = arg\, f'(z_0) = arg\, 2 = arctg\,\frac{0}{2} =$$

$$= arctg\, 0 = 0.$$

Отже, при відображенні функції $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ в точці $z_0 = i$ здійснюється розтяг у 2 рази і поворот на кут 0°.

Відповідь: $k = 2, \alpha = 0$.

Приклад 2.2. Обчислити $Ln\,(4+4i)$.

Розв'язання

За означенням (2.5) $Ln\,z = ln|z| + iarg\,z + 2k\pi i\,,\, k = 0,\ \pm 1, \pm 2,\ \ldots$

Знайдемо $|z| = |4+4i| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32},\ arg\,z = arg(4+4i) =$

$$= arctg\frac{4}{4} = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$Ln\,(4+4i) = ln\sqrt{32} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i = ln\sqrt{32} + i\,\pi\left(\frac{1}{4} + 2k\right),$$

$k = 0,\ \pm 1, \pm 2,\ \ldots$

Відповідь: $Ln\,(1+i) = ln\sqrt{32} + i\,\pi(\frac{1}{4} + 2k),\ k = 0,\ \pm 1, \pm 2,\ \ldots$

Приклад 2.3. Подати в алгебраїчній формі та обчислити $Ln\,(12+5i)$.

Розв'язання

Знайдемо модуль і головне значення аргументу числа $(12+5i)$:

Знайдемо $|z| = |12+5i| = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13,$

$arg\,z = arg(12+5i) = arctg\,\frac{5}{12}.$

Підставимо отримані значення в (2.5)

$$Ln\,(12+5i) = ln\,13 + i\left(arctg\frac{5}{12} + 2k\pi\right),\ k = 0,\ \pm 1, \pm 2,\ \ldots$$

Відповідь: $Ln\,(12+5i) = ln\,13 + i\left(arctg\frac{5}{12} + 2k\pi\right),$

$k = 0,\ \pm 1, \pm 2, \ldots.$

2.2. Тригонометричні і гіперболічні функції

Тригонометричні функції в комплексній області виражаються через показникову функцію. З формули Ейлера для всіх дійсних x ми маємо $e^{ix} = cos\,x + i\,sin\,x$, $e^{-ix} = cos\,x - i\,sin\,x$, звідки

$$sin\,x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2};\; cos\,x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

Визначимо тригонометричні функції комплексного змінного такими рівностями:

$$sin\,z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2};\; cos\,z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \qquad (2.10)$$

Із властивостей показникової функції та формул (2.10) випливають такі *властивості функцій* $sin\,z, cos\,z$.

1) Функції $sin\,z, cos\,z$ визначені та голоморфні в комплексній області, при цьому

$$(cos\,z)' = -\,sin\,z, (sin\,z)' = cos\,z,\;\; z \in C.$$

2) Для дійсних значень $z = x \in R$ функції $sin\,z, cos\,z$ збігаються з дійсними тригонометричними функціями $sin\,x, cos\,x$ дійсної змінної x.

3) $cos(-z) = cos\,z$ для довільного комплексного z, тобто функція $cos\,z$ – парна.

4) $sin(-z) = -\,sin\,z$ для довільного комплексного z, тобто функція $sin\,z$ – непарна.

5) Для довільного комплексного z справедлива рівність, яка називається *формулою Ейлера*

$$e^{iz} = cos\,z + i\,sin\,z\,. \qquad (2.11)$$

Для доведення формули (2.11) знайдемо:

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \ldots + \frac{(iz)^n}{n!} + \ldots = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = (1 + iz) +$$
$$+\left(-\frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!}\right) + \left(\frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!}\right) + \ldots.$$

Об’єднуючи члени ряду попарно, ми скористалися зі сполучної властивості збіжних рядів. З іншого боку, використовуючи властивості числових рядів, отримаємо:

$$cos\,z + i\,sin\,z = 1 + iz + \left(-\frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!}\right) + \left(\frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!}\right) + \ldots = e^{iz}\ .$$

6) Для довільного комплексного z справедливі рівності (2.10) які також називають *формулами Ейлера*.

Підставивши в формулу Ейлера (2.11) замість z значення $-z$, матимемо:

$$e^{-iz} = cos(-z) + i\,sin(-z) = cos\,z - i\,sin\,z\ . \qquad (2.12)$$

Додаючи рівності (2.11) і (2.13), знайдемо:

$$cos\,z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Віднімаючи їх, дістанемо:

$$sin\,z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (2.13)$$

Користуючись формулою Ейлера (2.11) можна від тригонометричної форми комплексного числа $z = |z|(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$ перейти до показникової форми $z = |z|e^{i\varphi}$.

7) Для довільних комплексних z і p справедливі рівності:

$sin(z + p) = sin\,z\,cos\,p + cos\,z\,sin\,p$; $cos(z + p) = cos\,z\,cos\,p - sin\,z\,sin\,p$.

Рівність

$$e^{i(z+p)} = e^{iz} \cdot e^{ip}$$

можна записати у вигляді

$$cos(z + p) + i\,sin(z + p) = (\,cos\,z + i\,sin\,z)(cos\,p + i\,sin\,p). \quad (2.14)$$

Підставивши в рівність (2.14) замість z і p значення $-z$ та $-p$ отримаємо:

$$cos(z + p) - i\,sin(z + p) = (\,cos\,z - i\,sin\,z)(cos\,p - i\,sin\,p). \quad (2.15)$$

Розкривши дужки у рівностях (2.14) і (2.15), а потім додавши їх, матимемо:

$$cos(z + p) = cos\,z\,cos\,p - sin\,z\,sin\,p\ .$$

Віднімаючи пункти (5) і (6), дістанемо:

$$sin(z + p) = sin\,z\,cos\,p + cos\,z\,sin\,p\ .$$

8) $sin\,2z = 2\,sin\,z\,cos\,z,\ cos\,2z = cos^2 z - sin^2 z$ для довільного комплексного z.

Ці формули можна дістати з формул пункту (7), замінивши в них t на z.

9) $cos^2 z + sin^2 z = 1.$ (2.16)

Щоб дістати цю рівність , досить у формулі для косинуса суми замінити t на $-z$.

10) $cos(z+2\pi) = cos\,z$, $sin(z+2\pi) = sin\,z$, тобто $cos\,z$ і $\sin z$ – періодичні функції з періодом 2π.

Дійсно,

$$cos(z+2\pi) = cos\,z\,cos\,2\pi - sin\,z\,sin\,2\pi = cos\,z\,,$$

$$sin(z+2\pi) = sin\,z\,cos\,2\pi + cos\,z\,sin\,2\pi = sin\,z\,.$$

11) $sin\,z,\ cos\,z$ – необмежені функції у комплексній площині.

Необмеженість показникової функції очевидна, оскільки при дійсному значенні $z,\ z = x$, маємо $e^x = e^x \to \infty\ (x \to +\infty)$ [12, с. 256]. Щоб впевнитися в необмеженості функції косинуса, знайдемо за формулою Ейлера (2.11) $cos(\,iy)$. Маємо:

$$cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2},$$

звідки

$$cos(iy) \to +\infty \text{ (при } y \to +\infty \text{ і } y \to -\infty).$$

З необмеженості $cos\,z$ та періодичності показникової функції (2.1) випливає необмеженість функції $sin\,z$.

12) $sin\,z = 0$ тільки при $z = k\pi\ \ (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots)$; $cos\,z = 0$ тільки при $z = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots)$.

Рівність $sin\,z = 0$ рівносильна рівностям

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0, e^{2iz} = 1.$$

Поклавши $z = x + iy$, знайдемо:

$$e^{2i(x+iy)} = 1, e^{-2y}e^{2ix} = 1.$$

Цю рівність можна записати у вигляді

$$e^{-2y}(cos\, 2x + i\, sin\, 2x) = 1.$$

Звідки випливає, що модуль комплексного числа, яке стоїть у правій частині останньої рівності, дорівнює e^{-2y}, а його аргумент $2x$. Тому

$$e^{-2y} = 1, 2x = 2k\pi$$

і, отже,

$$y = 0, x = k\pi, z = x + iy = k\pi \ (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Аналогічно знаходимо ті точки z, в яких $\cos z = 0$.

13) $cos^2(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}+2}{4}$, $sin^2(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}-2}{-4}$, $tg^2(z) = -\frac{e^{iz}+e^{-iz}-2}{e^{iz}+e^{-iz}+2}$, $ctg^2(z) = -\frac{e^{iz}+e^{-iz}+2}{e^{iz}+e^{-iz}-2}$.

Дійсно,

$$cos^2(z) = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}+2}{4},$$

$$sin^2(z) = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{-4} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}-2}{-4},$$

$$tg^2(z) = \left(\frac{sin\, z}{cos\, z}\right)^2 = \frac{sin^2(z)}{cos^2(z)} = -\frac{e^{iz}+e^{-iz}-2}{e^{iz}+e^{-iz}+2},$$

$$ctg^2(z) = \left(\frac{cos\, z}{sin\, z}\right)^2 = \frac{cos^2(z)}{sin^2(z)} = -\frac{e^{iz}+e^{-iz}+2}{e^{iz}+e^{-iz}-2}.$$

За допомогою розглянутих тригонометричних функцій для комплексної змінної $z \in C$ визначаються також функції

$$tg\, z = \frac{sin\, z}{cos\, z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}},\ z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$$

$$ctg\, z = \frac{cos\, z}{sin\, z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}},\ z \neq \pi k, k \in Z,$$

$$sec\, z = \frac{1}{cos\, z} = \frac{1}{e^{iz} + e^{-iz}},\ z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$$

$$cosec\, z = \frac{1}{sin\, z} = \frac{1}{e^{iz} - e^{-iz}}\ ,\ z \neq \pi k, k \in Z.$$

Для дійсних значень $z = x \in R$ ці функції збігаються з дійсними функціями $tg\, x$, $ctg\, x$ дійсної змінної $x \in R$. Відзначимо, що в точках, у яких знаменники виразів перетворюються в нуль, за допомогою яких визначені функції $tg\, z$ та $ctg\, z$, ці функції можна визначити нескінченністю.

Тригонометричні функції $tg\, z$, $ctg\, z$ є періодичними з періодом π голоморфними (регулярними за винятком точок, у яких знаменники дорівнюють нуль), і, як це випливає з формул

$$(tg\, z)' = \frac{1}{cos^2 z},\ ctg\, z = -\frac{1}{sin^2 z},$$

дані функції визначають конформні відображення в усіх точках області $D \in C$, якщо така область не містить точок $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $z \neq k\pi$, $k \in Z$, відповідно.

Відображення областей, що здійснюються за допомогою функцій $tg\, z$ і $ctg\, z$, зручно вивчати, якщо дані функції записані у вигляді

$$tg\, z = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},\ ctg\, z = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1},$$

а потім подати їх як суперпозицію лінійної $(z \to \xi = 2iz)$, показникової $(\xi \to \eta = e\xi)$ та відповідної дробово-лінійної функції. Областями однолистості для функції $tg\, z$ і $ctg\, z$ є вертикальні смуги

$$\{z \in C{:}x_0 < Re\, z < x_0 + h\},$$

де $0 < h \leq \pi,\ x_0 \in R$.

Використовуючи показникову функцію, можна визначити гіперболічний косинус $ch\, z$ та гіперболічний синус $sh\, z$ комплексної змінної

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{2.17}$$

і також гіперболічний тангенс та гіперболічний котангенс відповідно

$$th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}},\ cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

За формулами Ейлера (2.10) знайдемо: $sin\, iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i\, sh\, z$,

$$cos\, iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = ch\, z.$$

Отже, між тригонометричними та гіперболічними синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом існує певний зв’язок. Цей зв'язок виражається формулами

$$\sin iz = i\, sh\, z,\ \cos iz = ch\, z, tg\ iz = i\ th\ z, ctg\ iz = -i\ cth\ z. \quad (2.18)$$

Виходячи з цього зв’язку, можна будь-яке співвідношення між тригонометричними функціями $\sin z$ і $\cos z$ подати як відповідне співвідношення між гіперболічними функціями $sh\, z$ і $ch\, z$. Наприклад, рівність

$$\sin^2 iz + \cos^2 iz = 1,$$

яка пов’язує між собою тригонометричні функції, після заміни $\sin iz$ і $\cos iz$ за формулами (2.18) матиме вигляд

$$ch^2 z - sh^2 z = 1,$$

що встановлює певний зв’язок між гіперболічними функціями. Так зі звичайних тригонометричних формул можна дістати всі формули гіперболічної тригонометрії.

Приклад 2.3. Знайти значення модуля функції $w = \sin z$ в точці $z = \pi + i ln(2 + \sqrt{5})$.

Розв’язання

Запишемо алгебраїчну форму $z = x + iy$. Тоді

$w = \sin x\, ch\, y + i sh\, y\ \cos x.$

Обчислимо модуль функції w:

$|w| = |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\, ch^{\,2} y + \cos^2 x\, sh^{\,2} y} =$

$= \sqrt{\sin^2 x\, ch^{\,2} y + sh^2 y\,(1 - \sin^2 x)} = \sqrt{\sin^2 x\, ch^{\,2} y + sh^2 y\ - sh^2 y \sin^2 x} =$

$= \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}.$

Підставимо замість z значення $\pi + i ln(2 + \sqrt{5})$, та знайдемо значення модуля заданої функції в точці:

$\left|\sin \pi + i ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right| = \sqrt{\sin^2 \pi + sh^2 \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)} =$

$$= \sqrt{0 + sh^2\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)} = sh\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} - e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{5}-(2+\sqrt{5})^{-1}}{2} = \frac{2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} = \frac{4+4\sqrt{5}+5-1}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{8+4\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{4(2+\sqrt{5})}{2(2+\sqrt{5})} = 2.$$

Даний приклад показує, що тригонометрична функція $sin\, z$ в комплексній області може приймати значення, по модулю більше одиниці.

Відповідь: $|sin\, z| = 2$.

Приклад 2.4. Подати в алгебраїчній формі $sh\left(2 - \frac{\pi i}{3}\right)$.

Розв'язання

$$sh\left(2 - \frac{\pi i}{3}\right) = sh2ch\frac{\pi i}{3} - ch2sh\frac{\pi i}{3} = sh2\cos\frac{\pi}{3} - ich2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}sh2 -$$

$$-\frac{i\sqrt{3}}{2}ch2.$$

Використаємо формули (2.17), будемо мати

$$sh2 = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) = 3{,}63;\ ch2 = \frac{1}{2}(e^2 + e^{-2}) = 3{,}76.$$

Тоді остаточно маємо

$$w = \frac{1}{2}\cdot 3{,}63 - \frac{i\sqrt{3}}{2}\cdot 3{,}76 = 1{,}815 - i3{,}256.$$

Відповідь: $w = 1{,}815 - i3{,}256$.

2.3. Обернені тригонометричні і гіперболічні функції

Обернені тригонометричні функції визначаються як функції, обернені до тригонометричних функцій

$$z = \sin w,\ z = \cos w\ ,\ z = tg\, w,\ z = ctg w,$$

позначаються відповідно

$$w = Arcsin\, z,\ w = Arc\cos z,\ w = Arctg\ z,\ w = Arcctg\ z.$$

Якщо $z = \sin w$, то w називається *арксинусом числа* z і позначається

$$w = Arcsin\, z.$$

Аналогічно, якщо $z = \cos w$, то w називається *арккосинусом* z і позначається

$$w = Arccos\, z\,;$$

якщо $z = tg\, w$, то w називається *арктангенсом* z і позначається

$$w = Arctg\, z\,;$$

якщо $z = ctg\, w$, то w називається *арккотангенсом* z і позначається

$$w = Arcctg\, z.$$

Оскільки тригонометричні функції виражаються через показникову, тому можна сподіватися, що обернені тригонометричних функцій виражаються через логарифми [36, с. 115].

Дійсно, якщо $z = \sin w$, то на підставі рівності $z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, звідки $e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$

або

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

Позначення $e^{iw} = t$;

$$t^2 - 2izt - 1 = 0;$$

$$D = -4z^2 - 4;$$

$$t_{1,2} = \frac{2iz \pm 2i\sqrt{z^2 - 1}}{2} = i\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$iw = Ln\, i(\,z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$iw = Ln(i\,z + \sqrt{1 - z^2})$$

і

$$w = Arcsin\, z = -i\, Ln(\, iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad (2.19)$$

Але в силу формули (2.5) всі значення логарифма числа, модуль яких рівний одиниці, є уявними числами, оскільки перед знаком логарифма в правій частині (2.19) стоїть множник $-i$, то всі значення $Arcsin\, z$ будуть в розглянутому випадку, як і варто було очікувати, дійсними числами; у всіх інших випадках значення $Arcsin\ z$ дійсними бути не можуть.

Аналогічно з рівності $z = tgw$ отримаємо:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = \frac{e^{2iw} - 1}{i(e^{2iw} + 1)};$$

Позначимо $e^{2iw} = t$;

$$z = tgw = \frac{t - 1}{i(t + 1)};$$

$$izt + iz = t - 1,$$

або

$$t(iz - 1) = -1 - iz;$$

$$t = \frac{1 + iz}{1 - iz};$$

$$2iw = Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Оскільки $w = Arctg\ z$, то

$$w = Arctg\, z = -\frac{i}{2} Ln\frac{1+iz}{1-iz} \qquad (2.20)$$

Якщо z є будь-яким дійсним числом, то числа $1 + iz$ і $1 - iz$ будуть спряженими, тому їх модулі рівні, отже, модуль виразу, що стоїть під знаком логарифма в правій частині (2.20), рівний одиниці і в силу (2.5) всі значення цього логарифма уявні. В нашому випадку перед знаком логарифма в правій частині (2.20) стоїть множник $-\frac{i}{2}$ величина $Arctg\ z$, як і варто було очікувати, дійсна, у всіх інших випадках ця величина дійсною бути не може.

З рівностей (2.19) і (2.20) випливає, що функції $Arcsin\, z$ та $Arctg\, z$ – *нескінченнозначні*, оскільки такою є логарифмічна функція. Крім того, треба мати на увазі, що у формулі (2.19) вираз $\sqrt{1-z^2}$ для всіх $z \neq 1$ два значення.

Аналогічно можна отримати

$$Arccos\, z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), Arcctg\, z = \frac{i}{2} Ln \frac{z-i}{z+i}.$$

Обернені функції до функцій $sh\, z$, $ch\, z$, $th\, z$, $cth\, z$ називаються *оберненими гіперболічними функціями* і позначаються відповідно $Arsh\, z$, $Arch\, z$, $Arth\, z$, $Arcth\, z$.

Вони легко виражаються через логарифм:

$$Arsh\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),\ Arch\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$Arth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z},\ Arcth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{z+i}{z-i}. \quad (2.21)$$

Всі функції (2.21) багатозначні, бо Ln в правій частині формул може позначати довільне значення логарифма.

Головні значення цих функцій $Arcsin\, z$, $Arc\cos z$, $Arctg\, z$, $Arcctg\, z$, $Arsh\, z$, $Arch\, z$, $Arth\, z$, $Arcth\, z$ виражаються тими ж формулами із заміною Ln на його головну вітку ln [27, с. 42].

Приклад 2.5. Знайти $Arcsin\, i$.

Розв'язання

Скористаємось формулою (2.19) поклавши $z = i$. Тоді

$$Arcsin\, i = -i\, Ln(\, i^2 \pm \sqrt{1-i^2}) = -i\, Ln(-1 \pm \sqrt{2}\,).$$

Числа $-1+\sqrt{2}$ та $-1-\sqrt{2}$, дійсні причому перше додатне, а друге від'ємне. Тому

$\left|-1+\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1, arg\left(-1+\sqrt{2}\,\right) = 0.$ $\left|-1-\sqrt{2}\right| = 1+\sqrt{2},$

$arg\left(-1-\sqrt{2}\,\right) = \pi.$

Підставляючи ці значення у формулу (2.5), отримаємо дві послідовності значень $Arcsin\, i$:

$Arcsin\, i = -i\, Ln\left(-1+\sqrt{2}\,\right) = -i\,\left(ln\left(\sqrt{2}-1\right) + i2k\pi\right) =$

$= 2k\pi - i\,ln\left(\sqrt{2} - 1\right), k \epsilon Z$

та

$Arcsin\, i = -i\, Ln\left(-1 - \sqrt{2}\,\right) = -i\, \left(ln\left(\sqrt{2} + 1\right) + i(\pi + 2k\pi)\right) =$

$= (2k + 1)\pi - i\, ln\left(\sqrt{2} + 1\right), k \epsilon Z.$

Відповідь: $Arcsin\, i = 2k\pi - i\, ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$,

$Arcsin\, i = (2k + 1)\pi - i\, ln\left(\sqrt{2} + 1\right), k \epsilon Z.$

Приклад 2.6. Подати у алгебраїчній формі та обчислити $Arctg\ (2 - i)$.

Розв'язання

Покладемо у формулу (2.20) замість z значення $2 - i$, отримаємо

$Arctg\ (2 - i) = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+i(2-i)}{1-i(2-i)} = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+2i+1}{1-(2i+1)} = -\frac{i}{2} Ln \frac{2+2i}{-2i} = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+i}{-i} =$

$= -\frac{i}{2} Ln(i - 1) = -\frac{i}{2}(\ln|i - 1| + i arg(i - 1)).$

Обчислимо $|i - 1| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $arg(i - 1) = \frac{3\pi}{4}$ та підставимо їх значення

$Arctg\ (2 - i) = -\frac{i}{2}\left(ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} - i\frac{ln\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4} - i\frac{ln2}{4} \approx 1{,}178 - 0{,}173i.$

Відповідь: $Arctg\ (2 - i) = \frac{3\pi}{4} - i\frac{ln2}{4}$.

Приклад 2.7. Знайти всі значення $Arcsin\ (4i - 1)$.

Розв'язання

Замінимо в означенні (2.19) z на $4i - 1$, отримаємо

$Arcsin(4i - 1) = -i\, Ln(\, i(4i - 1) + \sqrt{1 - (4i - 1)^2}) = -i\, Ln(- 4 - i +$

$+\sqrt{1 - (-16 - 8i + 1)}) = -i\, Ln(- 4 - i + \sqrt{16 + 8i})) = -i\, Ln\Bigg(-4 - i \pm$

$2\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} + i\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)\Bigg)$

Позначимо $a = 2\sqrt{\sqrt{5} + 2}$, тоді $a^{-1} = 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}$ і

$Arcsin(4i - 1) = -i\, Ln(- 4 \pm \mathrm{a} + \mathrm{i}(\pm a^{-1} - 1)) =$

$$= \begin{cases} arctg\ \dfrac{a^{-1}-1}{a-4} + 2\pi n - \dfrac{i}{2} ln((a-4)^2 + (a^{-1}-1)^2), \\ arctg\ \dfrac{a^{-1}+1}{a+4} + \pi + 2\pi n - \dfrac{i}{2} ln((a+4)^2 + (a^{-1}+1)^2). \end{cases}$$

Розділ 3. Розклад в степеневий ряд елементарних функцій

3.1. Дробово-лінійна функція

Означення. Степеневим рядом в комплексній площині називається функціональний ряд вигляду [19, с. 112]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots, \quad (3.1)$$

членами якого є степеневі функції з цілим невід'ємним показником, де c_n – відомі коефіцієнти, z – комплексна змінна, z_0 – центр ряду.

При $z_0 = 0$ ряд (3.1) має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (3.1) збігається в точці $z_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається у крузі $|z - z_0| < R$, де $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Якщо степеневий ряд (3.1) розбігається в точці $z_2 \neq 0$, то він розбігається в точках z:

$$|z - z_0| > |z_2 - z_0|.$$

Наслідок. Степеневий ряд (3.1) абсолютно збігається в деякому інтервалі $(-R, R)$, який називають *інтервалом збіжності*, число R – *радіусом збіжності*.

Радіус збіжності R степеневого ряда (3.1) може бути обчислений за відомою формулою Коші-Адамара [28, с. 61]

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}.$$

Числа c_n обчислюють за формулою

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (3.2)$$

з якої видно, що степеневий ряд є ряд Тейлора своєї суми. Цю формулу можна замінити іншою:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (3.3)$$

де L – коло з центром у точці $z = z_0$, яке міститься в околі точки z_0, в якому функція $f(z)$ аналітична.

Збіжний степеневий ряд називається *розвиненням* або *рядом Тейлора.*

Теорема Тейлора. Функцію $f(z)$, що є аналітичною всередині круга $|z - z_0| < R$, можна представити в цьому крузі збіжним степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \,,$$

причому цей ряд визначається однозначно [15, с. 55].

Властивості степеневих рядів:

1) Сума будь-якого степеневого ряду всередині круга його збіжності є аналітичною функцією.

2) Степеневий ряд (3.1) можна почленно інтегрувати вздовж довільного шляху, яких лежить в його крузі збіжності [19, с. 113].

3) Степеневий ряд (3.1) усередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати [30, с. 13].

4) Коефіцієнти c_n степеневого ряду можуть бути обчислені через значення суми ряду та її похідних, визначених у центрі круга збіжності за формулами $f(z_0) = c_0$, та (3.2) [26, с. 155].

Функція $f(z)$, однозначна і аналітична в кільці $R_1 < |z - z_0| < R_2$ (включаючи випадки, коли $R_1 = 0$ і $R_2 = +\infty$), розкладається в цьому кільці в *ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \,,$$

де коефіцієнти c_n обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

де L – довільне коло з центром у точці z_0, що лежить в середині даного кола.

Приклад 3.1. Функцію $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ розкласти в степеневий ряд за степенями $z - i$ та визначити радіус збіжності ряду R.

Розв'язання

Перетворимо функцію $f(z)$ таким чином:

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)}{2i+(z-i)} = -\frac{i}{2} \cdot \frac{(z-i)}{1-\frac{i}{2}(z-i)}.$$

Для того, щоб розвинути функцію в степеневий ряд і знайти радіус збіжності цього ряду, розглядаємо $f(z)$ як суму нескінченно спадної геометричної прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} \text{ де } \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n. \tag{3.4}$$

У нас $q = \frac{i}{2} \cdot (z - i)$.

$$\frac{z-i}{z+i} = -\frac{i}{2} \cdot \frac{(z-i)}{1-\frac{i}{2}(z-i)} = -\frac{i}{2} \cdot (z-i) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot (z-i)^n}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot i^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(z-i)^n}{2^n \cdot i^n}.$$

З умови збіжності $|q| < 1$ знайдемо радіус збіжності R:

$\left|\frac{i}{2}(z-i)\right| < 1$, $|z - i| < 2$. Звідси $R = 2$.

Усередині круга $|z - i| < 2$ має місце розклад в степеневий ряд

$$\frac{z-i}{z+i} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(z-i)^n}{2^n \cdot i^n}.$$

Відповідь: $\frac{z-i}{z+i} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(z-i)^n}{2^n \cdot i^n}$, $R = 2$.

Приклад 3.2. Задану функцію $f(z) = \frac{z+1}{z+4}$ розкласти в степеневий ряд в точці $z_0 = 0$ та знайти радіус збіжності.

Розв'язання

Представимо $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів

$f(z) = \frac{z+1}{z+4} = \frac{z+4-3}{z+4} = \frac{z+4}{z+4} - \frac{3}{z+4} = 1 - \frac{3}{z+4} = 1 - 3 \cdot \frac{1}{z+4}$.

Розкладемо елементарний дріб $\frac{1}{z+4}$ за степенями z:

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{4^{n+1}}, |z| < 4.$$

$$\frac{z+1}{z+4} = 1 - 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{4^{n+1}}.$$

Відповідь: $\frac{z+1}{z+4} = 1 - 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{4^{n+1}}, R = 4.$

Приклад 3.3. Задану функцію $f(z) = \frac{z}{z+2}$ розкласти в ряд за степенями $z - 1$ та знайти радіус збіжності.

Розв'язання

Зробимо перетворення

$f(z) = \frac{z}{z+2} = \frac{z+2}{z+2} - \frac{2}{z+2} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{z+2}$.

Розкладемо елементарний дріб $\frac{1}{z+2}$ за степенями $z - 1$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{3^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Отримаємо:

$$\frac{z}{z+2} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{z+2} = 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}, |z| < 3.$$

Відповідь: $\frac{z}{z+2} = 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}, R = 3.$

Приклад 3.4. Розкласти функцію $f(z) = \frac{z+1}{z-4}$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = -1$.

Розв'язання

Перетворимо нашу дану функцію таким чином:

$f(z)=\frac{z+1}{z-5}=\frac{z+1}{-6+(z+1)}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{z+1}{1-\frac{z+1}{6}}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{z+1}{1-\frac{1}{6}\cdot(z+1)}$.

Розглянемо $f(z)$ як суму нескінченно спадної геометричної прогресії (3.4) в якій $q=\frac{1}{6}(z+1)$.

$$\frac{z+1}{z-5}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{(z+1)}{1-\frac{1}{6}(z+1)}=-\frac{1}{6}\cdot(z+1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{6^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n+1}}{6^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{6^n}.$$

Знайдемо радіус збіжності R: $\left|\frac{1}{6}(z+1)\right|<1$, $|z+1|<6$. Звідси $R=6$.

Усередині круга $|z+1|<6$ має місце розвинення в ряд Тейлора

$$\frac{z+1}{z-5}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{6^n}.$$

Відповідь: $\frac{z+1}{z-5}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{6^n}, R=6.$

Приклад 3.5. Розкласти функцію $f(z)=\frac{3-z}{z-4}$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0=3$ та визначити радіус збіжності.

Розв'язання

Перетворимо дану функцію наступним чином

$f(z)=\frac{3-z}{z-4}=\frac{-(z-3)}{-1+(z-3)}=\frac{z-3}{1-(z-3)}$.

Розглядаємо $f(z)$ як суму нескінченно спадної геометричної прогресії (3.4) в якій $q=z-3$.

$$\frac{z-3}{1-(z-3)}=(z-3)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(z-3)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(z-3)^n.$$

Знайдемо радіус збіжності R: $|\mathrm{z}-3|<1$. Звідси $R=1$.

Усередині круга $|z-3|<1$ має місце розвинення в ряд Тейлора

$$\frac{3-z}{z-4}=\sum_{n=1}^{\infty}(z-3)^n, R=1.$$

Відповідь: $\frac{3-z}{z-4}=\sum_{n=1}^{\infty}(z-3)^n, R=1.$

3.2. Показникова функція

Ряди Тейлора для елементарних функцій мають той самий вигляд, що і для функції дійсного аргумента. Оскільки відповідні степеневі ряди збіжні на всій числовій прямій, то (в силу теореми Абеля) вони будуть збіжними на всій комплексній площині. На практиці застосування формули (3.3) для обчислення коефіцієнтів c_n призводить до громіздких обчислень. Тому часто використовують відомі формули розкладу в ряд Тейлора елементарних функцій.

Основні розвинення в Тейлорів ряд в околі точки $z_0 = 0$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty \qquad (3.5)$$

Даний ряд збігається на всій комплексній множині, тобто $\mathrm{R} = +\infty$.

Приклад 3.6. Розкласти функцію $f(z) = e^z$ у Тейлорів ряд в околі точки $z_0 = \frac{1}{4}$.

Розв'язання

Перетворимо задану функцію та розкладемо її вряд Тейлора (3.5) в околі точки $z_0 = \frac{1}{4}$

$$e^z = e^{z-1/4+1/4} = e^{z-1/4} \cdot 4 = \sqrt{e} \cdot e^{z-\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{e} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z - \frac{1}{4}\right)^n}{n!}, n \in N.$$

Відповідь: $e^z = \sqrt[4]{e} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z - \frac{1}{4}\right)^n}{n!}, n \in N$ в околі точки $z_0 = \frac{1}{4}$.

Приклад 3.7. Розкласти функцію $f(z) = e^{iz}$ в степеневий ряд і вказати круг його збіжності.

Розв'язання

Використаємо відому формулу розкладу в ряд Тейлора елементарної функції $f(z) = e^z$ (3.5) та замінимо z на iz

$$f(z) = e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \ldots + \frac{(iz)^n}{n!} + \ldots = 1 + iz - \frac{z^2}{2} -$$

$$-\frac{iz^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\frac{iz^5}{120}-\ldots+\frac{(iz)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}, n\ \in N.$$

Даний ряд збігається на всій множині комплексних чисел. Тобто $\mathrm{R} = +\infty$.

$$\textit{Відповідь: } e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}, n\ \in\ N, \mathrm{R}=+\infty.$$

Приклад 3.8. В околі початку координат розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=e^{\frac{2}{z}}$.

Розв'язання

Розкладемо функцію $f(z)=e^{\frac{2}{z}}$ в околі точки $z_0=0$.

$$f(z)=e^{\frac{2}{z}}=1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{2!\,z^2}+\frac{2^3}{3!\,z^3}+\ldots+\frac{2^n}{n!\,z^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}.$$

Тобто головна частина ряду Лорана містить необмежену кількість членів.

$$\textit{Відповідь: } e^{\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}.$$

Приклад 3.9. Написати перші чотири члена розкладу в ряд Тейлора в околі точки $z_0=1$ функції $e^{\frac{1}{1-z}}$.

Розв'язання

Використаємо основний розклад в Тейлорів ряд функції e^z (3.5) в околі точки $z_0=1$.

Тоді перші чотири члена розкладу в ряд Тейлора матимуть вигляд

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e^{-\frac{1}{z-1}}=1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!\,(z-1)^2}-\frac{1}{3!\,(z-1)^3}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}.$$

$$\textit{Відповідь: } e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}.$$

Приклад 3.10. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z) = e^{\frac{z-1}{z+1}}$ в околі точки $z_0 = -1$.

Розв'язання

Функція $f(z) = e^{\frac{z-1}{z+1}}$ не є аналітичною в точці $z_0 = -1$. Але її можна розкласти в ряд Лорана за степенями $z + 1$, оскільки область аналітичності (вся комплексна площина за винятком точки $z_0 = -1$) можна подати у вигляді кільця з центром в точці $z_0 = -1$ та радіусами $r = 0$ та $R = \infty$.

Перетворимо задану функцію та розкладемо її вряд за степенями $z + 1$.

$e^{\frac{z-1}{z+1}} = e^{\frac{(z+1)-2}{z+1}} = e \cdot e^{\frac{-2}{z+1}}$.

Використаємо відому формулу розкладу в ряд Тейлора елементарної функції $f(z) = e^z$ (3.5):

$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad (0 < |z| < \infty)$.

Замінимо z на $\frac{-2}{z+1}$:

$$e^{\frac{-2}{z+1}} = 1 - \frac{2}{z+1} + \frac{2^2}{2!\,(z+1)^2} - \ldots + \frac{(-1)^n 2^n}{n!\,(z+1)^n} + \ldots.$$

Ряд Лорана для даної функції в околі точки $z_0 = -1$ матиме вигляд

$$e^{\frac{z-1}{z+1}} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z+1)^n}.$$

Отриманий ряд збігається до даної функції на всій комплексній площині, з якої виключається точка $z = -1$.

Відповідь: $e^{\frac{z-1}{z+1}} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z+1)^n}$.

Приклад 3.11. Безпосереднім обчисленням $f^{(n)}(0)$ довести справедливу для всіх z формулу $e^{\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n$.

Розв'язання

Оскільки справедлива рівність $(e^{\alpha z})^{(n)} = \alpha^n \cdot e^{\alpha z}$, то в точці $z = 0$ маємо

$(e^{\alpha z})^{(k)} = \alpha^n$, якщо $k = n$.

Тому за теоремою Тейлора одержуємо

$$e^{\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n \,, |z| < \infty.$$

Приклад 3.12. Розкласти в Тейлорів ряд функцію $f(z) = e^{3z-2}$ за степенями $z - 1$.

Розв'язання

Перетворимо задану функцію та розкладемо її вряд Тейлора за степенями $z - 1$.

$$e^{3z-2} = e^{3(z-1)+1} = e \cdot e^{3(z-1)}.$$

Використаємо відому формулу розкладу в ряд Тейлора елементарної функції $f(z) = e^z$ (3.4) та замінимо z на $3(z-1)$

$$e^{3(z-1)} = 1 + 3(z-1) + \frac{3^2(z-1)^2}{2!} + \frac{3^3(z-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{3^n(z-1)^n}{n!} + \ldots.$$

Ряд Тейлора для даної функції за степенями $z - 1$ матиме вигляд

$$e^{3z-2} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot (z-1)^n \,.$$

Відповідь: $e^{3z-2} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot (z-1)^n$.

Приклад 3.13. Записати перші три члени розкладу в ряд Лорана функції $f(z) = e^{\frac{z}{z+2}}$ в околі точки $z = \infty$.

Розв'язання

Покладемо $z = \frac{1}{\vartheta}$, отримаємо $f\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = e^{\frac{\frac{1}{\vartheta}}{\frac{1}{\vartheta}+2}} = e^{\frac{1}{1+2\vartheta}}$, причому точка $\vartheta = 0$ є для цієї функції правильною точкою. Позначимо $f\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = \varphi(\vartheta)$.

Будемо мати

$\varphi'(\vartheta) = \frac{2}{(1+2\vartheta)^2} \cdot e^{\frac{1}{1+2\vartheta}}$,

$\varphi''(\vartheta) = \left(\frac{8}{(1+2\vartheta)^8} + \frac{4}{(1+2\vartheta)^4}\right) \cdot e^{\frac{1}{1+2\vartheta}}$

і так далі.

$\varphi(0) = e,\ \varphi'(\vartheta) = -2e,\ \varphi''(\vartheta) = 12e$ ....

Звідси

$\varphi(\vartheta) = e(1 - 2\vartheta + 6\vartheta^2 + \ldots)$,

тобто

$e^{\frac{z}{z+2}} = e\left(1 - 2\frac{1}{z} + 6\frac{1}{z^2} + \ldots\right)$.

Ряд знаходиться поза колом радіуса $R = 2$ (тобто $|z| > 2$), оскільки точка $z = -2$ є єдиною особливою точкою функції $e^{\frac{z}{z+2}}$.

Відповідь: $e^{\frac{z}{z+2}} = e \cdot \left(1 - 2\frac{1}{z} + 6\frac{1}{z^2} + \ldots\right)$.

Приклад 3.14. Розкласти функцію $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в околі точки $z = 0$.

Розв'язання

Розкладемо в ряд Лорана функцію $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots$, $|z| > 0$ отримаємо

$z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots\right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} +$

$+ \frac{1}{4!z} \ldots + \frac{1}{n!z^{n-3}} + \ldots$, $|z| > 0$

або

$$z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!\, z^n},\ |z| > 0.$$

Відповідь: $z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!\, z^n},\ |z| > 0.$

Приклад 3.15. Розкласти функцію $f(z) = e^{-z^2}$ в степеневий ряд та вказати круг його збіжності.

Розв'язання

У відомій формулі розкладу в ряд Тейлора елементарної функції $f(z) = e^z$ (3.5) замінимо z на $-z^2$

$$e^{-z^2} = 1 - z^2 + \frac{(-z^2)^2}{2!} + \frac{(-z^2)^3}{3!} + \frac{(-z^2)^4}{4!} + \frac{(-z^2)^5}{5!} + \ldots + \frac{(-z^2)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 - z^2 + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \ldots + \frac{(-z)^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2n}}{n!}.$$

Даний ряд збігається на всій множині комплексних чисел. Тобто $\mathrm{R} = +\infty$.

Відповідь: $e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2n}}{n!}$, $\mathrm{R} = +\infty$.

3.3. Тригонометричні та гіперболічні функції

За допомогою відомих формул для коефіцієнтів рядів Тейлора елементарних дійсних функцій можна записати розкладання відповідних елементарних функцій комплексної змінної

$$cos\, z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ |z| < \infty,$$

$$sin\, z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (3.6)$$

$|z| < \infty$.

Приклад 3.16. Розкласти функції $f(z) = sh\, z, g(z) = ch\, z$ в ряд Тейлора.

Розв'язання

Подаючи e^z у вигляді суми степеневого ряду, дістанемо розклад у степеневий ряд функцій $sh\, z$ і $ch\, z$:

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots - \left(1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(-1)^n z^n}{n!} + \ldots\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) =$$

$$= z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots + 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n z^n}{n!} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \quad (3.7)$$

Ряд Тейлора для даних функцій $sh\, z$, $ch\, z$ матиме вигляд

$$sh\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ ch\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ |z| < \infty.$$

$$\text{\textit{Відповідь:}}\ sh\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ ch\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ |z| < \infty.$$

В кожній точці $z \in C$ ряди для функцій $sin\, z$, $cos\, z$, $sh\, z$, $ch\, z$ абсолютно збіжні, їх можна почленно диференціювати скільки завгодно разів.

Приклад 3.17. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(z) = tgz$.

Розв'язання

Функція $f(z) = tgz = \frac{sin\, z}{cos\, z}$ в досить малому околі $z = 0$ є аналітичною функцією.

$(tg\, z)' = \frac{1}{cos^2(z)}$, $cos\, z \neq 0$.

Отже, дану функцію $f(z) = tg\, z$ можна розкласти в ряд Тейлора за степенями z, хоча загальний вигляд коефіцієнта важко обчислити.

За формулою (3.2) маємо $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 2$, і так далі.

Ряд Тейлора для даної функції за степенями z матиме вигляд

$tgz = z + \frac{2z^3}{3!} + \ldots.$

Відповідь: $tgz = z + \frac{2z^3}{3!} + \ldots.$

Приклад 3.18. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(z) = cos^2 z$.

Розв'язання

Використаємо тригонометричну формулу половинного кута $cos^2 z = \frac{1}{2} \cdot (1 + cos\, 2z)$ і розкладемо в степеневий ряд функції $f(z) = \cos z$ із (3.6). Отримаємо:

$$cos^2 z = \frac{1}{2} \cdot (1 + cos\, 2z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot cos\, 2z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\text{\textit{Відповідь:}}\ cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Приклад 3.19. Знайти перших чотири члена, відмінних від нуля, розкладу в ряд функції $f(z) = \sqrt{cos\, z}$ ($f(0) = 1$) в околі точки $z = 0$. Знайти радіус збіжності ряду.

Розв'язання

Запишемо функцію $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \sqrt{cos\, z} = (1 - (1 - cos\, z))^{\frac{1}{2}}.$$

Замінимо $w = 1 - cos\, z$, отримаємо

$$\sqrt{cos\, z} = (1 - \ w)^{\frac{1}{2}}.$$

Розкладемо функцію w в ряд Тейлора

$$w = 1 - cos\, z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} -$$

$$- \frac{z^8}{8!} + \ldots ,$$

$$(1 - \ w)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{w}{2} - \frac{1}{8} w^2 - \frac{1}{16} w^3 - \frac{5}{128} w^4 - \ldots, |w| < 1,$$

тоді

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \ldots\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \ldots\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \ldots\right)^3 - \frac{5}{128} \cdot \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \ldots\right)^4 - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \ldots\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \ldots\right) - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{z^6}{8} - \ldots\right) - \ldots.$$

Ряд Тейлора для даної функції за степенями z матиме вигляд

$$f(z) = \sqrt{cos\, z} = 1 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{96} - \frac{19z^6}{5760} - \ldots.$$

Радіус збіжності отриманого ряду буде $R = \frac{\pi}{2}$, бо точка $z = \frac{\pi}{2}$ – найближча до точки $z = 0$, в якій порушується аналітичність функції $f(z)$.

Відповідь: $\sqrt{cos\, z} = 1 - \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^4}{96} - \dfrac{19z^6}{5760} - \ldots.$

Приклад 3.20. Розкласти в степеневий ряд функції $f(z) = sh^2(z)$, $g(z) = ch^2(z)$.

Розв'язання

Беручи до уваги рівності $ch^2(z) = \frac{1+ch2\,z}{2}$, $sh^2(z) = \frac{-1+sh2\,z}{2}$ і розклад цих функцій в степеневий ряд (3.7). Отримаємо

$$ch^2(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \ldots + \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!};$$

$$sh^2(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \ldots + \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Відповідь: $ch^2(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $sh^2(z) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Приклад 3.21. Розкласти функцію $f(z) = sin\frac{1}{z-1}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$.

Розв'язання

Функція $sin\frac{1}{z-1}$ аналітична в кільцевій області $z \in C\ 0 < |z-1| < \infty$.

Використаємо відому формулу розкладу в ряд Тейлора елементарної функції $f(z) = sin\,z$ (3.6) та замінимо z на $\frac{1}{z-1}$.

$$sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}}.$$

Із розкладу даної функції в ряд Лорана слідує, що $z = 1$ – істотно особлива точка функції $f(z)$.

Відповідь: $sin\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}}$.

Приклад 3.22. Безпосереднім обчисленням $f^{(n)}(0)$ довести наступну справедливу для всіх z формулу $sh\,\alpha z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

Розв'язання

Оскільки справедлива рівність $(sh\,\alpha z)^{(2n)} = \alpha^{2n} \cdot sh\,\alpha z$, $(sh\,\alpha z)^{(2n+1)} = \alpha^{2n+1} \cdot ch\,\alpha z$, то в точці $z = 0$ маємо

$$(sh\,\alpha z)^{(k)} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k = 2n \\ \alpha^{2n+1}, \text{ якщо } k = 2n+1. \end{cases}$$

За теоремою Тейлора одержуємо

$$sh\,\alpha z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1},\ |z| < \infty.$$

Відповідь: $sh\,\alpha z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1},\ |z| < \infty.$

Приклад 3.23. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z) = sin\frac{z}{z-i}$ в околі точки $z_0 = i$.

Розв'язання

Перетворимо функцію за допомогою формули додавання та використаємо розклад елементарних функцій в ряд Лорана:

$$sin\frac{z}{z-i} = sin\left(1 + \frac{i}{z-i}\right) = sin\,1 \cdot cos\frac{i}{z-i} + cos\,1 \cdot sin\frac{i}{z-i} =$$

$$= sin\,1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{i}{z-i}\right)^{2n} + cos\,1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{i}{z-i}\right)^{2n+1},\ |z-i| > 0.$$

Відповідь: $sin\frac{z}{z-i} = sin\,1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{i}{z-i}\right)^{2n} +$

$$+cos\,1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{i}{z-i}\right)^{2n+1},\ |z-i| > 0.$$

Приклад 3.24. Розкласти функцію $f(z) = cos\,z$ в степеневий ряд за степенями $z + \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання

Перетворимо функцію за допомогою формули додавання та використаємо розкладання елементарних функцій в ряд за степенями z, замінивши в них z на $z+\frac{\pi}{4}$:

$$cos\, z = cos\left(\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\frac{\pi}{4} + sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\frac{\pi}{4} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

Радіус збіжності даного ряду $R=+\infty$, бо функція $f(z)=cos\, z$ не має особливих точок.

Відповідь:

$$cos\, z=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

Висновки

Елементарні функції комплексної змінної є необхідною частиною в розвитку науки. Їх використання сприяє більш глибокому засвоєнню знань, формуванню наукових понять та законів. Крім того, вони сприяють підвищенню наукового рівня знань студентів, розвитку логічного мислення та їх творчих здібностей.

У своїй бакалаврській роботі я розглянула три розділи: поняття функції комплексної змінної, елементарні функції комплексної змінної та розклад в степеневий ряд елементарних функцій. В першому розділі роботи було наведено невеликі відомості про функцію, її границю, неперервність, похідну та умови диференційованості. У другому розділі були розглянуті показникові, логарифмічні, тригонометричні, гіперболічні, обернені тригонометричні та гіперболічні функції. У третьому розділі наведені приклади розкладу в степеневий ряд таких елементарних функцій комплексної змінної: дробово-лінійних, показникових, тригонометричних та гіперболічних функцій.

Використання матеріалу дослідження у навчальному процесі допоможе студентові усунути ті труднощі, які виникають при вивченні елементарних функцій в курсі комплексного аналізу в університеті, сприятиме формуванню в студентів стійкого інтересу як до вивчення даного курсу.

Даний матеріал сприяє систематизації, поглибленню і розширенню знань, навичок та умінь з комплексного аналізу. Також може бути використаний на факультативах з математики для загального розвитку учнів старших класів, при підготовці до олімпіад. А також можна використовувати у вищому навчальному закладі при читанні курсу «Комплексний аналіз» під час виконання різних типів теоретичних і практичних завдань.

Список використаних джерел

1) Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Вид. 2-е. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 415 с.

2) Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного: учебник для вузов. Изд. 3-е, допов. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 320 с.

3) Білокос Є. Д., Щека Д. Д. Збірник задач з комплексного аналізу: навч. посіб. для студентів природничих факультетів. Київ: КНТУ ім. Т. Шевченка, 2004. 57 с.

4) Білокос Є. Д., Зайцев Л. Л., Щека Д. Д. Збірник задач з комплексного аналізу. Функції комплексної змінної: метод. розробка для студентів природничих факультетів. Київ: КНТУ ім. Т. Шевченка, 2004. Ч. 1. 71 с.

5) Босовський М. В., Демченко О. Г. Елементи комплексного аналізу: навч.-метод. посіб. Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. 124 с.

6) Боярчук А. К. Справочное пособие по высшей математике: Функции комплексного переменного: теория и практика. Москва: Едиториал УРСС, 2001. Т. 4. 352 с.

7) Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: учеб. для вузов. Изд. 6-е, стереотип. Москва: Дрофа, 2004. Т. 3. 512 с.

8) Вища математика у прикладах та задачах. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення / А. Д. Тевяшев та ін. Харків: ХІ1УРЕ, 2002. Ч. 3. 596 с.

9) Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие. Изд. 4-е, испр. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 312 с.

10) Гладун Л. В. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Теорія функцій комплексної змінної» для студентів напряму підготовки 6. 040301 «Прикладна математики» денної форми навчання. Рівне: НУВГП, 2015. Ч. 1. 24 с.

11) Грищенко О. Ю., Оноцький В. В. Курс лекцій з комплексного аналізу. Київ, 2015. Ч. 1. 144 с.

12) Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу: підручник. Київ: Вища школа, 1979. Ч. 3. 384 с.

13) Диференціальне та інтегральне функцій однієї змінної: конспект лекцій / уклад. В. О. Гайдей та ін. Київ: НТУУ «КПІ», 2013. 108 с.

14) Домрин А. В., Сергеев А. Г. Лекции по комплексному аналізу. В 2 частях. Москва: МИАН, 2004. 176 с.

15) Єжов С. М., Разумова М. А. Теорія функцій комплексної змінної: навч. посіб. для студентів фізичних спеціальностей університетів. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. 191 с.

16) Збірник задач і вправ з комплексного аналізу (для студентів математичного факультету) / уклад. Т. І. Звоздецький та ін. Чернівці: Рута, 2004. 40 с.

17) Клочко В. І., Кирилащук С. А. Вища математика з комп’ютерною підтримкою. Теорія функцій комплексної змінної: навч. посіб. Вінниця: ПП «Торговий дім Едельвейс і К», 2010. 128 с.

18) Комплексний аналіз: підручник / Гольдберг А. А. та ін. Львів: Афіша, 2008. 203 с.

19) Комплексний аналіз. Приклади і задачі: навч. посіб. / В. Г. Самойленко та ін. Київ: Київський університет, 2010. 224 с.

20) Краєвський В. О. Функції комплексної змінної: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2013. 143 с.

21) Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. Изд. 3-е, испр. Москва: Единориал УРСС, 2003. 208 с.

22) Курс высшей математики. Изд. 9-е, стереотип / под ред. В. В. Абгарян. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. Т. 3, Ч. 2. 672 с.

23) Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е, перероб. и доп. Москва: Наука, 1965. 749 с.

24) Мельник Т. А. Комплексний аналіз: підручник. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015. 192 с.

25) Методичні вказівки та розрахунково-графічні завдання до контрольних робіт з вищої математики (розділи: кратні інтеграли, елементи теорії поля, теорії функцій комплексної змінної, операційне числення) для студентів ФРЕТ та ФКНТ заочної форми навчання / уклад. Т. І. Левицька та ін. Запоріжжя: ЗНТУ, 2015. 86 с.

26) Нікулін О. В., Наконечна Т. В. Вища математики: факти і формули, задачі і тести: навч. посіб. Дніпропетровськ: Біла К. О., 2015. 188 с.

27) Павленко А. В., Кагадій Л. П., Копорулін В. Л. Теорія функцій комплексної змінної. Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. 188 с.

28) Половинкин Е. С. Теория функцій комплексного переменного: учебник. Изд. 3-е, испр. Москва: МФТИ, 2014. 253 с.

29) Поляк І. Й., Погоріляк І. Й. Теорія функцій комплексної змінної: методичні вказівки до практичних занять з теорії функцій комплексної змінної для студентів математичного факультету. Ужгород: ФОП Бреза А. Е., 2012. Ч. 1. 32 с.

30) Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: практикум / уклад. І. В. Алексеева та ін. Київ: НТУУ «КПІ», 2013. 160 с.

31) Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функцій комплексного переменного: учеб. для вузов. Изд. 3-е, испр. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 480 с.

32) Теория функций комплексной переменой из серии. Курс высшей математики и математической физики. / под ред. А. Г. Свешникова та ін. Москва: Наука, 1974. В. 4. 319 с.

33) Теорія функцій комплексної змінної: конспект лекцій для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / Валяшек В. Б. та ін. Тернопіль: ТНТУ, 2015. 87 с.

34) Титчмарш Е. Теория функцій. Изд. 2-е, испр. / пер. с англ. В. А. Рахліна. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 463 с.

35) Фукс Б. А., Шабат Б. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Изд. 3-е. Москва: Наука, 1964. 388 с.

36) Функції комплексної змінної: практикум з комплексного аналізу для студентів 3 курсу фіз.-мат. ф-ту / за ред. В. В. Дрозд. Київ: НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2017. 88 с.

37) Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Москва: Наука, 1969. 571 с.