Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ

Виконала: студентка II курсу магістратури
Групи М-М – 61
Спеціальності: 014
Середня освіта (Математика)
Кравчук Ірина Миколаївна
Керівник: канд. техн. наук, доцент
Присяжнюк Ігор Михайлович
Рецензенти:
д.т.н., проф. Сафоник А.П.

Рівне – 2020

Зміст

Вступ

Актуальність. Диференціальні рівняння, що містять малий параметр при похідній привертають протягом останніх років увагу багатьох авторів, що займаються асимптотичними методами теорії диференціальних рівнянь. Викликаний такий інтерес потребами практики через інтенсивний розвиток, зокрема, таких областей, як дослідження та моделювання процесів поширення концентрацій забруднень в пористих та водних середовищах. Процеси очищення стічних вод від розчинних у воді забруднень можна описати відповідними задачами конвективної дифузії для систем сингулярно збурених рівнянь. Процес фільтрації через пористі однорідні середовища все ще залишається одним з найбільш поширених і технологічно складних процесів у більшості галузей промисловості. Адже за останні роки спостерігається така невтішна тенденція, що верхні шари землі фактично втратили здатність самим стабілізувати свій стан. Тому, проблема моделювання, а, отже, й дослідження вказаних процесів є нагальною, актуальною і важливою.

Фундаментальні дослідження в цій галузі щодо прогнозування та моделювання процесів конвективної дифузії та масопереносу забруднюючої речовини були здійснені, зокрема, Н.Н. Веригіном, І.Г. Богуським, А.Н. Патрашевим, В.І. Лавриком та іншими вченими.

Ефективний асимптотичний метод розв’язування сингулярно збурених задач (крайові задачі з малим параметром, що знаходиться при старших похідних) запропонований М.І.Вішиком і Л.А.Люстерником, суть якого зводиться до використання суттєво нової процедури згладження зовнішніх і внутрішніх пограншарових функцій [14]. Ця процедура дозволила отримати досить точне наближення розв’язку поставленої задачі.

В.Ф. Бутузов запропонував свій підхід до побудови асимптотичного наближення розв’язків типових параболічних та еліптичних крайових задач із сингулярними збуреннями у областях прямокутного типу із урахуванням гладкості різних рівнів граничної та початкової умов [10],[12], [13] . У даних задачах було враховано узгодженість умов у кутових точках області. Такого типу алгоритми вдосконалено Бомбою А.Я. [1-5] та застосовано до побудови асимптотичних наближень розв'язків задач типу 'дифузія-конвекція' у випадку фільтрації в областях типу 'криволінійний чотирикутних'. Ці області є обмеженими двома еквіпотенціальними лініями, двома лініями течії. Також вважається, що конвективні складові процесу превалюють над дифузійними. Це в свою чергу зумовлює появу малого параметра біля членів рівняння із старшими похідними у відповідному параболічному рівнянні. Ці ж методи вдало використано при розв'язуванні такого типу задач для областей які є двохзв'язними. Актуальною є проблема побудови асимптотичних наближень розв'язків аналогічних задач для багато-зв'язних областей, відповідні області комплексних потенціалів яких є об'єднанням прямокутників і смуг.

Метою роботи є дослідження особливостей побудови асимптотичних наближень розв'язків сингулярно збуреної задачі для рівнянь конвективної дифузії у одно та багатозв'язних областях, систематизація та вдосконалення алгоритмів розрахунків концентрації забруднюючої речовини у випадках однозв'язних, двохзв'язних та тризв'язних областей.

Об'єкт дослідження – сингулярно збурені процеси конветивної дифузії та побудова асимптотичних розвинень розв'язків відповідних модельних сингулярно збурених крайових задач.

Предмет дослідження – сингулярно збурені модельні задачі типу 'дифузія- конвекція' в однозв'язних, двохзв'язних та тризв'язних областях.

Методи дослідження – асимптотичні методи, теорія сингулярних збурень, методи теорії функції комплексного потенціалу, числові методи наближення функцій.

Відповідно до мети, визначено наступні **завдання дослідження**:

- здійснити систематизацію практичного та теоретичного та матеріалу за тематикою роботи;

- набути спеціальних фундаментальних умінь та знань з побудови асимптотичних наближень розв'язків збурених задач типу 'дифузія-конвекція';
- дослідити моделі процесів конвективної дифузії у багатозв'язних областях;

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів основної частини, висновків та списку використаних джерел.

Обґрунтованість та вірогідність результатів роботи забезпечено математичною строгістю поставлених задач, використанням обґрунтованих і надійних числових та асимптотичних методів їх розв'язання, несуперечністю одержаних числових результатів, їхньою узгодженістю із відомими аналогічними результатами у науковій літературі.

Апробація результатів. Основні положення і результати роботи були повідомлені та обговорювалися на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2020 рік, та на «Осінні наукові читання», LII Міжнародна науково-практична інтернет-конференція. – м. Дніпро, 25 вересня 2020 року. – Ч.3, С. 53-55.

РОЗДІЛ 1. РОЗВИТОК АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ У ТЕОРІЇ СИНГУЛЯРНИХ ЗБУРЕНЬ ЗАДАЧ

1.1. Місце асимптотичних методів в загальній теорії диференціальних рівнянь.

Сама ідея асимптотичного наближення розв'язків диференціальних рівнянь з'явилася у науці про природу і стала підсумком досить жвавого та тривалого в часі розвитку теорії збурень орбіт планет. Тому досить довгий час вчені думали, що ця ідея матиме відношення лише до вивчення механіки небесних тіл. Однак на даний момент ця ідея є однією із найбільш глибоких і важливих у математиці. І найчастіше використовується там, де спостерігається тісний зв'язок з фізикою. Асимптотичний метод став дуже затребуваним при розв'язуванні різних рівнянь, які відповідають тим чи іншим процесам. Та ще більш важлива роль асимптотичного підходу як методу, що дає нам прямий доступ до повного розуміння складних систем. А це в свою чергу дає поштовх розвитку інтуїції, а також сприяє швидкому формуванню дослідником нових понять та виявленню ним різного рівня складних зв'язків, зокрема, між різного рівня фізичними теоріями. Саме слово "асимптотологія" було запропоноване американським математиком Крускалом М. науковому співтовариству в саме такому контексті. І саме цим він вказав на універсальність явищ з асимптотичною поведінкою. Універсальність же полягала в тому, що ці методи можна розглядати з одної та єдиної точки зору, незалежно у якій формі, у якій області науки про природу вони не зустрічалися нам. Міждисциплінарними по суті були введені поняття теорії коливань, теорії катастроф, кібернетики та синергетики, асимптотології. Це відіграло сильну стимулюючу роль, бо розвинуло і синтезувало представлення, породжені інтуїцією, які найчастіше мали за джерело досить далекі між собою за своїм змістом наукові розділи.

Швидкий розвиток та застосування асимптотичних методів до задач природознавства спостерігається у математичному аналізі вісімнадцятого століття. Асимптотичні методи широко починають використовувати у своїх працях Лагранж, Лаплас, Леверр'є і ін. Саме вони заклали досить сильну основу теорії збурення. Задачі астрономії зумовили появу методів Ньютона, Гільдена, Ліндштедта, Боліна та ін.

Над розвитком асимптотичного типу наближеннями за незалежною змінною для розв'язків з.д.р. різних порядків працювали І. М. Рапопорт [23], Н. Левінсон, Пуасон, Е. Коддінгтон, Е. Камке, А. Пуанкаре, А. Ердейї, Е. Айнс [1], Ф. Трикомі, Ж. Хорн, И. З. Штокало, О. М. Ляпунов, О. Перрон, та ін. Так А.М. Ляпунов та А. Пуанкаре в кінці 19 ст. отримали досить точні та обґрунтовані результати які доводили збіжність побудованого ними асимптотичного ряду. Так вони розвинули одну з найбільш важливих форм методів збурень, який назвали методом малого параметра. Цей метод не дозволяв поділ змінних на швидші та повільніші, але застосовувався тільки при обчисленні режимів періодичного типу (при цьому, питання про ті значення малого параметра, які забезпечили б збіжність відповідного розкладу, не були повністю висвітленими). Паралельно з цим Пуанкаре уперше показав, що розклад за малим множником (параметром), який використовували в науці астрономія, не завжди повинен бути збіжним. Вони, зокрема, можуть представляти собою певні об'єкти особливої природи, які назвали асимптотичними рядами. Такі ряди в певному сенсі досить добре наближали шукані дослідником функції. Так вперше в математичних науках виникла не стандартна ситуація, коли неможливо досягнути абсолютну точність розв’язків рівнянь, цілком певне значення має малий параметр у кожній конкретно вибраній системі.

Вчені Л. А. Люстернік, В. Пугачов, Я. Д. Тамаркін, І. Ж. Ліувілль, К. ШтурмА., Х. Территін, Пуанкаре, М. І. Шкіль[26], М. М. Боголюбов, Г. Біркгофф, О. М. Ляпунов, Л. Шлезінгер, В. А. Стеклов, П. Нуайон, М. М. Крилов, С. Ф. Фещенко[25], Ю. О. Митропольський, М. Й. Вішик,С. О. Ломов, И. 3. Штокало, В. М. Волосов, А. М. Тихонов [24] , А. Б. Васильева [11], І .С. Градштейн, М. М. Красовський, І. Г. Малкін, С. Г. Крейн, та ін. займалися побудовою асимптотичних наближень розв'язків за певним параметром для з. д. р.

Над вдосконаленням асимптотичних методів наближення розв’язків д. р. працювали також відомі вчені світу.

У працях Б. Ван-дер-Поля, И.З. Штокала, М.В. Федорюка розвиваються асимптотичні наближення розв'язків для з. д. р. за незалежною змінною та малим параметром. У багатьох працях, які беруть свій початок ще від робіт А. Пуанкаре і О. М. Ляпунова вивчається обмеженість, порядок та стійкість росту розв'язків ЗДР на нескінченних та скінчених інтервалах.

Вчені, як Л. Чезарі, Н. С. Бахвалов, С. Ф. Фещенко, Є. Іссакова [8], О. Олійник, В. Вазов, В. Тржицинський, В. Штернберг, Н. Левінсон, [5], Л. Г. Магнарадзе, С. Каменомостська [6], М. В. Келдиш, Є. Жидков [7], Д. Аронсон, М. Вішик, Т. Цуцунава, Л. Люстернік, Л. Бобісуд, О. Ладиженська, В. О. Митропольский, Б. Панайоті, Су Юйчен, Н. А. Павлюк, 3. Г. Шефтель, Р. С. Ефендієв, М. І. Фрейдлін, Я. А. Ройтберг, досліджували побудову асимптотичних наближень розв’язків диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Є. К. Ісакова у роботі [7] дослідила побудову розв’язків задачі Коші для $\boldsymbol{\varepsilon \to 0}$ для рівнянь які відносяться до параболічного типу II-го порядку $L_\varepsilon c(x,t) \equiv \varepsilon c_{xx} - c_t + b(x,t) u_x - c(x,t) c = 0$ з початковою умовою $c(x,0) = \psi(x), \ \ (x,t) \in D_\infty \ (-\infty < x < \infty, \ 0 \le t \le T)$.

Теорія сингулярних збурень побудована на основі рівнянь, які містять у своїх членах як коефіцієнти малий параметр біля старших похідних займає вагому складову в асимптотичних методах. Сам розвиток теорії сингулярних збурень був ще започаткований у роботах Тихонова А.Н. Там було розглянуто початкову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь із малим параметром (коефіцієнтом) $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ при певних похідних. Автор вивів умови, згідно яких розв'язок розглянутої задачі прямує у випадку $\boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{0}$ до одного з розв'язків виродженої системи диференціальних рівнянь. Ця система отримувалась з початкової, коли в ній просто покладали $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$. Паралельно в працях Ломова С.А. розробляється метод регуляризації. На основі праць А.М.Ільїна дістав свій розвиток так званий метод зрощування.

Граничні задачі лінійного рівняння параболічного типу ІІ-го порядку розглянуто у роботах Мельникова В. Л. Йому вдалося встановити залежність розв'язків ІІ-гої крайової задачі від параметрів та отримати відповідне розвинення за цими параметрами. Ним також було запропоновано розвинення розв'язків І-ої межової задачі у випадку розширення області. Асимптотичне наближення розвязків мішаних задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних 4-го порядку знайшли у вчені М. М. Кабацій та І. І. Маркуш.

Олійник О. у своїх наукових працях показала наявність розв'язку квазілінійного рівняння задачі Коші $v_t + \varphi_x(t,x,v) = 0$ із початковою умовою яка має вид $v(0,x) = v_0(x)$ [19]. Відзначимо, що розв'язки вона описує як границю при $\boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{0}$ відповідних розв'язків задач Коші, що стосуються рівняння параболічного типу $\varepsilon v_{xx} = v_t + \varphi_x(t,\, x,\, v)$, $\varepsilon > 0$ з тією ж початковою умовою. У роботі також розглянуто задачі, коли $v_0(x)$ є неперервною та диференційованою функцією з умовами $|v_0(x)| < M$ та $|v_0(x)| \le K$ при всіх *x,* і також*,* коли $v_0(x)$ – є довільною обмеженою вимірною функцією [20].

Побудову асимптотичних наближень розв'язків відносно цілих степенів $\boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{0}$ задач Коші для параболічних рівнянь виду $\varepsilon(u_\varepsilon)_{xx} - (\varphi(t,\, x,\, u_\varepsilon))_x - (u_\varepsilon)_t - \psi(t,\, x,\, u_\varepsilon) = 0$ для випадків, якщо розв'язок відповідної задачі яка є виродженою і кусково гладкою функцією із скінченою кількістю розривних ліній виконав Сушко В. Автор пропонує асимптотичне наближення будь-якого порядку, а також знаходить оцінку похибки асимптотики, здійснивши певні припущення стосовно початкової функції.

І. С. Бахвалов знайшов наближення рівнянь $v_t+(\varphi(v))_x=\varepsilon v_{xx}$ і $u_t+(\varphi(v))_x=0$ у випадку однакових початкових умов. А це відповідає за розрідження центрованої хвилі як розв'язку ІІ-го рівняння. Також він знайшов один головних, при маленьких $\boldsymbol{\varepsilon}$, член – складову відхилення рішень розглянутих рівнянь.

Асимптотичним методам наближення розвязків задач для рівнянь параболічного типу і такого типу задач для рівнянь інших типів з $\boldsymbol{\varepsilon \to 0}$ біля старшої похідної, присвячено чимало робіт і авторів усього світу. Так Аронсон Д. здійснив побудову нульевих асимптотик із звичайним пограничним шаром. Там автор розв'язує лінійні крайові задачі для рівнянь параболічного типу $L(u)\equiv\varepsilon\, u_{xx}+a(x,y)u_x-b(x,y)u_y+c(x,y)u=d(x,y)$, у випадках $u|_s=\varphi_i$ (i = 1, 2, 3), де $b(x,y) \geq m > 0$, $\boldsymbol{\varepsilon \to 0}$ є сталим , але малим параметром, межею області для даної задачі є S. Такий же висновок отримав Левінсон Н. стосовно рівнянь еліптичних типів з $\boldsymbol{\varepsilon \to 0}$ при старшій похідній. В працях вчених США (наприклад, Ван-Дайк, Коул.) було розвинуто методику побудови внутрішніх і зовнішніх розкладів, на базі яких отримано чимало визначних результатів що стосуються механіки суцільних середовищ.

Досить хорошим за ефективністю є асимптотичний метод розв'язання сингулярних збурених задач Вішика-Люстерника [14]. Покажемо суть цього методу на прикладі розв'язання такої задачі, що наведена нижче:

$$\varepsilon y''(x,\varepsilon)+a(x)y'(x,\varepsilon)+b(x)y(x,\varepsilon)=f(x); \tag{1.1}$$

$$y(0,\varepsilon)=D_{0,}\ y(1,\varepsilon)=D_1; \tag{1.2}$$

тут $a(x),b(x),f(x)\in c^{\infty}[0,1]$. Функція, яку називають функцією примежового шару може з'являтись в в лівому околі точки $x=1\,(\mathrm{Re}\,\alpha>0)$, або правому околі точки $x=0\,(\mathrm{Re}\,\alpha<0)$. У першому випадку отримане вироджене рівняння:

$$\grave{a}(x)u'(x)+b(x)u(x)=f(x), \quad (1.3)$$

ми розв'язуємо у випадку:

$$u(1)=D_1; \quad (1.4)$$

а в іншому випадку – при наступній умові нижче:

$$u(0)=D_0. \quad (1.5)$$

Припустимо, що $(\mathrm{Re}\,a(1)<0)$. Тоді розв'язок системи рівнянь (1.3)-(1.5) шукаємо у вигляді такого ряду:

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[y_r(x)+u_r(1-x)\varepsilon^{-1}\right]. \quad (1.6)$$

Здійснивши підстановку (1.6) в (1.1), отримаємо:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left\{\varepsilon y_r''(x)+a(x)y_r'(x)+b(x)y_r(x)+\varepsilon^{-1}u_r(1-x)/-\right.$$

$$\left.-\varepsilon^{-1}a(x)u_r'(1-x)/\varepsilon^{-1}+b(x)u_r(1-x)/\varepsilon^{-1}\right\}=f(x). \quad (1.7)$$

Підставимо $\tau=(1-x)/\varepsilon$ в (1.7), і зробимо певні перетворення, матимемо:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left\{\varepsilon y_r''(x)+a(x)y_r'(x)+b(x)y_r(x)+\frac{1}{\varepsilon}u_r(\tau)+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^q\left[-a^{(q)}(1)(-\tau)^q u_r'(\tau)q!^{-1}-b^{(q)}(1)(-\tau)^q u_r(\tau)q!^{-1}\right]\right\}=f(x).$$

Для знаходження розвязків $y_r(x),\omega_r(\tau)$ прирівнюємо коефіцієнти , що стоять біля однакових степенів малого параметру. В результаті отримали системи:

$$\begin{cases} a(x)y_0'(x)+b(x)y_0(x)=f(x)\equiv f_0(x), \\ a(x)y_1'(x)+b(x)y_1(x)=f_1(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a(x)y_r'(x)+b(x)y_r(x)=f_r(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \begin{cases} u_0'(\tau)-a(1)u_0(\tau)=0, \\ u_1'(\tau)-a(1)u_1(\tau)=\hat{O}_1(\tau), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_r'(\tau)-a(1)u_r(\tau)=\hat{O}_r(\tau), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad (1.8)$$

Першу систему з (1.8) розв'яжемо за умов: $y_r(1)=D_{1,r,}(D_{1,0}\equiv D_1,\ \ D_{1,r}\equiv 0)$ $(r=1,2...)$. Для виконання (1.2) систему (1.8) будемо розв'язувати у випадках:

$$u_r(0)=D_{0,r}-y_r(1), u_r(\tau)\big|_{\tau=\infty}=0,\ \ (D_{0,0}\equiv D_0, D_{0,r}\equiv 0, r=1,2...).$$

Введемо функцію, яка є гладкою $\psi_1(x)=\begin{cases}1, & 1-\delta/2\le x\le 1\\ 0, & 0\le x\le 1-\delta\end{cases}$, отримаємо вираз $y_n(x,\varepsilon)=\sum\limits_{r=0}^{n}\varepsilon^r\left[y_r(x)+\psi_1(x)u_r\left(1-x\right)/\varepsilon\right]$, який з досить високою точністю забезпечує виконання крайових умов (1.2), а відповідно (1.1) – з точністю $O(\varepsilon)$.

Простота та охоплення цим методом всіх важливих складових частин досліджуваного процесу є важливим його досягненням. Цей метод чутливий до реагування, успішно застосовний до великого кругу задач, що пов’язано з розв’язом різних рівнянь в частинних похідних.

У працях А. Б. Васильєвої та В. Ф. Бутузова широке застосування та подальший розвиток отримав метод примежових функцій та метод згладжування “негладкостей”. Зокрема, у роботі [13] розглядається наступна задача:

$$\varepsilon^2\Delta u-k^2(x,y)u=f(x,y), (x,y)\in(0,a)*(0,b)=\Omega, u\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{1.9}$$

Асимптотичне розвинення її розв’язку Бутузов В. отримав у виді:

$$u=\overline{u}+\ddot{I}+P,$$

тут $\overline{u}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overline{u}_k(x,y)$- частина асимптотики, яка є регулярною, $\ddot{I}$ – пограншарові функції, вплив яких досить суттєвий біля меж прямокутної області, P – кутові пограншарові функції. Вплив цих функцій суттєвий біля вершин прямокутної області. Відносно до кількості сторін прямокутника $\ddot{I}$ – функції мають чотири доданки:

$$\ddot{I}=\ddot{I}^{(1)}+\ddot{I}^{(2)}+\ddot{I}^{(3)}+\ddot{I}^{(4)}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(\ddot{I}_k^{(1)}(x,\eta)+$$

$$+\ddot{I}_k^{(2)}(\xi,y)+\ddot{I}_k^{(3)}(x,\eta_*)+\ddot{I}_k^{(4)}(\xi_*,y)),$$

тут $\eta=y/\varepsilon$, $\xi=x/\varepsilon$, $\eta_*=(b-y)/\varepsilon$, $\xi_*=(a-x)/\varepsilon$ – пограншарові змінні.

Відмітимо, що функції $\ddot{I}_k^{(1)}(x,\eta)$, що слугують для опису пограничного шару в околі сторони $y=0$, визначаються через пограншаровий оператор $\partial^2_{\eta\eta}-k^2(x,0),\eta>0$ і граничні умови $\ddot{I}^{(1)}_k(x,0)=-\overline{u}_k(x,0)$, $\ddot{I}^{(1)}_k(x,\infty)=0$. Таким чином $\overset{(1)}{\ddot{I}}$ – функції усунуть нев'язку, що внесена в пограничні умови на ребрі у=0 частиною асимптотики, яка є регулярною. Для $\ddot{I}^{(1)}_0(x,\eta)$ отримаємо наступне:

$$\ddot{I}^{(1)}_0(x,\eta)=-\overline{u}_0(x,0)\exp(-k(x,0)\eta).$$

Далі, виконуючи послідовні дії, знаходимо $\ddot{I}^{(1)}_k(x,\eta)$ у явному виді для $k=1,2,...$ Дані функції , очевидно, характеризуються експоненціальною оцінкою:

$$\left|\ddot{I}^{(1)}_k(x,\eta)\right|\le\tilde{n}\exp(-\chi\eta). \tag{1.10}$$

Так само, функції $\ddot{I}^{(2)}_k(\xi,y)$ визначаємо через пограншаровий оператор $\partial^2_{\xi\xi}-k^2(0,y),\xi>0$ та такі граничні умови $\ddot{I}^{(2)}_k(0,y)=-\overline{u}_k(0,y),\ddot{I}^{(2)}_k(\infty,y)=0$.

Для $\ddot{I}^{(2)}_0(\xi,y)$ отримаємо наступне:

$$\ddot{I}^{(2)}_0(\xi,y)=-\overline{u}_0(0,y)\exp(-k(0,y)\xi).$$

Функції $\ddot{I}^{(2)}_k(\xi,y)$ $(k=1,2,...)$ також знаходимо у явному вигляді і отримаємо оцінки типу (1.10): $\left|\ddot{I}^{(2)}_k(\xi,y)\right|\le\tilde{n}\exp(-\chi\xi)$. Так само визначимо пограншарові функції $\ddot{I}^{(3)}_k(x,\eta_*)\ i\ \ddot{I}^{(4)}_k(\xi_*,y)$.

Відмітимо, що пригpaничні функції $\ddot{I}^{(1)}_k(x,\eta)$, усуваючи неузгодженість в граничній умові на $y=0$, одразу внесуть ще кілька умов на сторонах $x=0$ і $x=a$. Такі неузгодженості суттєві в околах кутових точок $(\mathbf{0};\mathbf{0})$ і $(\mathrm{a};\mathbf{0})$, а далі, зі зростанням значень y, вони експоненціально затухнуть. Аналогічні неузгодженості внесуть функції $\ddot{I}^{(2)}_k(\xi,y)$ в околі сторін $y=0$ і $y=b$, а функції $\ddot{I}^{(3)}_k(x,\eta_*)$ – внесуть свої неузгодженості на сторони $x=0$ і $x=a$, відповідно $\ddot{I}^{(4)}_k(\xi_*,y)$ – на сторони $y=0$ і $y=b$.

Для усунення цих нев'язок і введемо кутові пригpaничні функції. Залежно від кількості вершин прямокутника ***P*** – функції вміщують чотири доданки:

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + P^{(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_k^{(1)}(\xi, \eta) +$$

$$+ P_k^{(2)}(\xi, \eta_*) + P_k^{(3)}(\xi_*, \eta_*) + P_k^{(4)}(\xi_*, \eta)).$$

Так, $P^{(1)}$ - функції слугують для усунення неузгодженостей, що внесені $Ï^{(1)}$ - функціями у умову, що відповідає за сторону $x=0$ і $Ï^{(1)}$ – внесені функціями в умову, що відповідає за сторону $y=0$. Самі ж рівняння функцій $P_k^{(1)}(\xi\ ,\eta)$ отримуємо із (1.9) (дане рівняння є однорідним і стосується (1.9)) відомим способом, а саме: переходимо до нових змінних $\eta = y/\varepsilon, \xi = x/\varepsilon,$ шляхом розкладу коефіцієнта $k^2(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta)$ у ряд відносно степенів ε і прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенях малого параметра в усіх його частинах. В результаті отримаємо такі задачі:

$$P_{k\xi\xi}^{(1)} + P_{k\eta\eta}^{(1)} - k^2(0,0) P_k^{(1)} = p_k(\xi, \eta), \xi > 0, \eta > 0,$$

$$P_k^{(1)}(0, \eta) = -Ï_k^{(1)}(0, \eta), P_k^{(1)}(\xi, 0) = -Ï_k^{(2)}(\xi, 0),$$

$$P_k^{(1)}(\xi, \eta) \to 0 \text{ ï ðè } (\xi + \eta) \to \infty, \qquad (1.11)$$

де $p_k(\xi, \eta)$ виражаються рекурентним типом через функції $P_i^{(1)}(\xi, \eta)$ при $i < k$. Відзначимо одразу, що $p_0(\xi, \eta) = 0$.

1.2. Загальна методика конструювання асимптотичних наближень розв’язків крайових задач конвективної дифузії із сингулярними збуреннями

Для розглянутої нище задачі зафіксуємо криволінійну чотирикутну область $G_z = ABCD$ $\left(z = x + \mathrm{i}\, y\right)$, яка обмежена такими гладкими кривими $AB = \left\{z: f_1\left(x, y\right) = 0\right\}$, $BC = \left\{z: f_2\left(x, y\right) = 0\right\}$, $CD = \left\{z: f_3\left(x, y\right) = 0\right\}$, $DA = \left\{z: f_4\left(x, y\right) = 0\right\}$. Ці криві в точках A, B, C, D перетинатимуться між собою попарно під прямим кутом. Будемо розглядати в даній області модельного типу крайову задачу процесу типу дифузія- конвекція при фільтрації у однорідному анізотропному пористому середовищі. Відповідна задача має вид [21]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)-v_x(x,y)\frac{\partial C}{\partial x}-v_y(x,y)\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{\partial C}{\partial t}, \qquad (1.12)$$

$$C\Big|_{AB}=C_*(M,t),\ C\big|_{CD}=C^*(M,t),\ C(M,0)=C_0^0(M),$$

$$C\Big|_{AD}=C_{**}(M,t),\ C\Big|_{BC}=C^{**}(M,t) \qquad (1.13)$$

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi=0,\ \varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,\ \frac{d\varphi}{dn}\bigg|_{BC}=\frac{d\varphi}{dn}\bigg|_{DA}=0, \qquad (1.14)$$

тут $C(x,y,t)$ – концентрація забруднюючої розчинної речовини у течії , що фільтрується, середовища у точці (x,y) в момент часу t, ε – малий параметр, характеризує переваги певних складових процесу над іншими, при чому $\varepsilon>0$,

$C_*(M,t)$, $C^*(M,t)$, $C_0^0(M)$, $C_{**}(M,t)$, $C^{**}(M,t)$ – достатньо гладкі функції, які узгоджені між собою на ребрах області G ($G=G_z\times(0,\infty)$),

n – зовнішня нормаль проведена до відповідної кривої,

M – біжуча точка відповідної кривої,

φ, v_x, v_y – потенціал та компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z, $\sqrt{v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)}>v_*>>\varepsilon$.

Введемо гармонійну функцію, яка є функцією течії $\psi=\psi(x,y)$, і яка є комплексно спряжена до $\varphi=\varphi(x,y)$. Здійснимо заміну останніх двох граничних умов (1.14) на такі: $\psi\big|_{BC}=Q$, $\psi\big|_{AD}=0$, тут Q – повна витрата, шуканий параметр .Дану задачу замінимо на більш загальну задачу на конформне відображення:

$$w=w(z)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\,\psi(x,y),$$

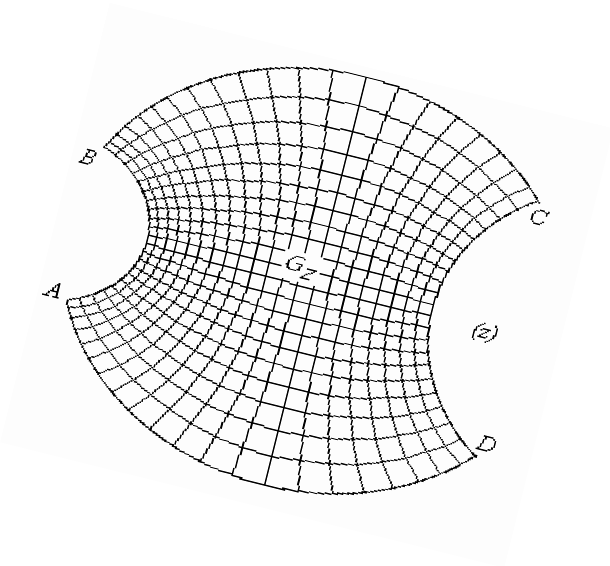
фізичної області G_z на область комплексного потенціалу , яка уже є канонічною і має форму прямокутника:

$$G_w = \{w : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}, \kappa = 1.$$

Тут κ – є коефіцієнтом фільтрації у випадку відповідності усіх чотирьох кутових точок (див. рис. 1.1).

Описана вище задача розв'язана Каштаном С.С. та Бомбою А.Я[6-9].

Припустимо, що задача (1.14) методом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) уже є розв'язаною певним методом[12]. Зробивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у (1.12) та (1.13), ми матимемо відповідно задачу дифузії для відповідної області комплексного потенціалу:



а)

Рис. 1. Фізична область G_z

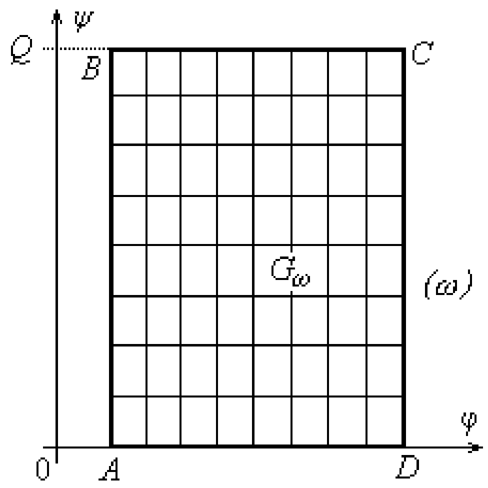


Рис. 2. Область комплексного потенціалу G_w

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left[C_{\varphi\varphi}+C_{\psi\psi}\right]-v^2(\varphi,\psi)C_\varphi=C_t, \tag{1.15}$$

$$C(\varphi_*,\psi,t)=C_*\left(\psi,t\right),\ C(\varphi^*,\psi,t)=C^*\left(\psi,t\right),\ C(\varphi,0,t)=C_{**}\left(\varphi,t\right),$$

$$C(\varphi,Q,t)=C^{**}\left(\varphi,t\right),\ C(\varphi,\psi,0)=C_0^0\left(\varphi,\psi\right).$$

Тут $Q=\int\limits_{AB}-v_y dx+v_x dy$ (потік через будь-який поперечний переріз G_z) , його знаходимо у процесі розв'язування фільтраційних задач. Розв'язок такої задачі з точністю $O(\varepsilon^2)$ знайдемо як розклад у асимптотичний ряд [3-9]:

$$C(\varphi,\psi,t)=C_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon\cdot C_1(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^2\Pi_i(\varphi,\psi,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i/2}P_i(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\overline{P}_i(\varphi,\mu,t)+R_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \tag{1.16}$$

Тут $C_i\left(\varphi,\psi,t\right)$, $(i=\overline{0,1})$ – регулярні члени асимптотики,

R_2 – залишковий член отриманий з певною точністю,

$\Pi_i\left(\xi,\psi,t\right)$, $(i=\overline{0,2})$ – функції погранмежового шару, які суттєві в околі $\varphi=\varphi^*$ (називаються поправками на виході із фільтраційної течії з даного пласта області G_z), а його члени називаються пограншаровими функціями,

$P_i\left(\varphi,\eta,t\right)$, $\overline{P}_i\left(\varphi,\mu,t\right)$, $(i=\overline{0,2})$ – пограншарові функції відповідно біля $\psi=0$, $\psi=Q$ (вносять підправки в околах ліній течії BC і AD),

$\xi = (\varphi^* - \varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$, $\eta = (Q - \psi)\varepsilon^{-1/2}$, $\mu = \psi\cdot\varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регулярні перетворення, які ще звуть змінними розтягів.

Підставивши (1.16) у (1.15) і прирівнявши коефіцієнти що стоять біля однакових степенях ε [22], отримаємо такі задачі з допомогою яких знайдемо головні частини $C_0(\varphi,\psi,t)$ розв'язку та поправки $C_1(\varphi,\psi,t)$:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)C_{0\varphi} + C_{0t} = 0, \\ C_0\big|_{t=0} = C_0^0(\varphi,\psi),\ C_0\big|_{\varphi=\varphi_*} = C_*(\psi,t), \end{cases}$$
$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)C_{1\varphi} + C_{1t} = g(\varphi,\psi,t), \\ g(\varphi,\psi,t) = v^2(\varphi,\psi)(C_{0\varphi\varphi} + C_{0\psi\psi}), \\ \mathrm{C}_1(\varphi,\psi,0) = C_1(\varphi_*,\psi,t) = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

Характеристичне рівняння і загальний розв'язок першої задачі (1.17) записуємо у виді:

$$\frac{d\varphi}{v^2(\varphi,\psi)} = \frac{dt}{1},\ f(\varphi,\psi) - t = \rho,\ C_0(\varphi,\psi,t) = \Phi(f(\varphi,\psi) - t),$$

Тут $f(\varphi,\psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi},\psi)d\tilde{\varphi}$, *Ф(x)* - певна неперервно-диференційована функція, $\rho -$фіксована стала. Розв'язок рівняння запишемо у вигляді (врахувавши початкову та граничну умови):

$$C_0(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} C_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi) - t,\psi),\psi),\ t < f(\varphi,\psi), \\ C_*(\varphi, t - f(\varphi,\psi)),\ t \ge f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

де f^{-1} – обернена функція до функції f відносно змінної φ. Застосувавши метод характеристик та використавши той факт, що змінна ψ у другій задачі (1.17) виконує функції параметра, знаходимо $C_1(\varphi,\psi,t)$:

$$C_1(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi},\psi) g(\tilde{\varphi},\psi, f(\tilde{\varphi},\psi) + t - f(\varphi,\psi))d\tilde{\varphi},\ t > f(\varphi,\psi), \\ \int_0^t g(f^{-1}(f(\varphi,\psi) - t + \tilde{t},\psi),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ \ t \le f(\varphi,\psi). \end{cases}$$

Якщо умова неперервності функцій $C_0^0(0,\psi) = C_*(0,t)$ виконується лише у випадку узгодженості функцій $C_0^0(\varphi,\psi)$ та $C_*(\varphi,t)$ то функція

$C_0(\varphi,\psi,t)$, а отже і $C_1(\varphi,\psi,t)$, не буде достатньо гладкою вздовж характеристик $t=f(\varphi,\psi)\ (\forall\varphi\in(-\varphi_*,\varphi^*))$. А отже функція (1.16) не задовольнятиме рівняння (1.15) в цій області $\{(\varphi,\psi,t):\varphi_*<\varphi<\varphi^*, 0<\psi<Q, t>0\}$.

Для усунення негладкостей в околі характеристики $t=f(\varphi,\psi)$ будемо замість негладкої функції $C_0(\varphi,\psi,t)$ розглядати відповідну згладжену:

$$\tilde{C}_0(\varphi,\psi,t)=2^{-1}(1-D(\theta))C_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi)+2^{-1}(1+D(\theta))C_*(\varphi,t-f(\varphi,\psi)),$$

де $D(\theta)=\int_0^\theta e^{-\tau^2}d\tau,\quad \theta=\sqrt{\varepsilon}^{-1}(t-f(\varphi,\psi))$.

Функція $C\approx\tilde{C}_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon C_1(\varphi,\psi,t)=\tilde{C}(\varphi,\psi,t)$ відповідає усім вимогам точності рівняння (1.15) , але вносить певні неточності початкової та граничних умов, які забезпечувались функцією $C_0(\varphi,\psi,t)$.

Для усунення неузгодженності у граничних та початкових умовах будуємо функцію: $S(\varphi,\psi,t)=S_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon S_1(\varphi,\psi,t)$ так, щоб отримана функція $C=\tilde{C}_0+S$ з точністю порядку $O(\varepsilon^2)$ підходила як розвязок рівняння (1.15) , задовольняючи початкову і граничні умови[15-17]:

$$\left[\begin{array}{l}\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left[(\tilde{C}_0+S)_{\varphi\varphi}+(\tilde{C}_0+S)_{\psi\psi}\right]-v^2(\varphi,\psi)(\tilde{C}_0+S)_{\varphi}=(\tilde{C}_0+S)_t+O(\varepsilon^2),\\ \tilde{C}_0+S\Big|_{t=0,\,\varphi>0}=C_0^0(\varphi,\psi)+O(\varepsilon^2),\ \tilde{C}_0+S\Big|_{\varphi=\varphi_*,t\geq 0}=C_*(\psi,t)+O(\varepsilon^2).\end{array}\right.$$

Перейшовши від змінних (φ,ψ,t) до змінних (ξ,ψ,t), при чому $\zeta=\sqrt{\varepsilon}^{-1}(t-f(\varphi,\psi))$, $\varphi=f^{-1}(t-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\psi)$ та розклавши $v^2(\varphi,\psi)=v^2(f^{-1}(t-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\psi),\psi)$ у ряд Тейлора біля $\zeta=0$, отримуємо для відшукання функцій S_0 *і* S_1 наступні задачі:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S_0}{\partial t}-a(\psi,t)\dfrac{\partial^2 C_0}{\partial\zeta^2}=0,\\ S_0\Big|_{t=0,\,\zeta\leq 0}=0,\quad S_0\Big|_{t=\sqrt{\varepsilon}\zeta,\,\zeta\leq 0}=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_1}{\partial t} = a(\psi,t)\left(\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial \zeta^2} + b(\psi)(1-\zeta^2)e^{-\zeta^2}\right), \\ S_1\big|_{t=0,\ \zeta\le 0} = \zeta \dfrac{b(\psi)}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\zeta} e^{-r^2}dr, \quad S_1\big|_{\substack{t=\sqrt{\varepsilon}\zeta \\ \xi\le 0}} = \zeta \dfrac{b(\psi)}{2}\displaystyle\int_{\zeta}^{\infty} e^{-r^2}dr, \end{cases} \tag{1.18}$$

де $\begin{cases} b(\psi) = 2\sqrt{\pi^{-1}}\left(v^2(0,\psi)C_0^0(\varphi_*,\psi)_{\psi\psi} + C_*(\varphi,0)_t\right), \\ a(\psi,t) = v^2(f^{-1}(t,\psi),\psi) + v^2(f^{-1}(t,\psi),\psi)(v'_\psi(f^{-1}(t-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\psi),\psi))^2. \end{cases}$

Бачимо, що $S_0(\varphi,\psi,t)=0$. Здійснивши заміну у другій із задач (1.18) крайової умови на промені $\left\{t=\sqrt{\varepsilon}\zeta, \zeta>0\right\}$ на крайову умову на $\{t=0,\zeta>0\}$ отриаємо з точністю $O(\varepsilon^2)$ $S_1(\zeta,\psi,t) = 2^{-1}b(\psi)\left(\zeta\int_{\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}}^{\zeta} e^{-s^2}ds - \sqrt{\tau}e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}}\right)$.

Для виконання другої з крайових умов, будуємо зовнішню примежову функцію $\Pi = \Pi_0 + \varepsilon\Pi_1 + \varepsilon^2\Pi_2$ біля $\varphi=\varphi_*$ так, щоб $C(\varphi,\psi,t)$ з достатньою точністю порядку $O(\varepsilon^2)$ задовольнила як дане рівняння, так і усі його крайові умови. Спочатку пропонується ввести заміну типу ‘розтяг’: $\xi = \varepsilon^{-1}(\varphi_* - \varphi), \quad \varphi = \varphi_* - \varepsilon\xi$.

Відповідно до правил диференціювання функцій матимемо, що $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial}{\partial\xi}(-\dfrac{1}{\varepsilon})$, $\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}$. Тоді запишемо наш оператор $L\Pi = \varepsilon v^2(\varphi,\psi)\Delta\Pi - v^2(\varphi,\psi)\Pi_\varphi - \Pi_t$ стосовно змінних (ξ,ψ,t): $L\Pi = v^2(\varphi_* - \xi\varepsilon,\psi)\left[\left[\varepsilon^{-1}\Pi_{\xi\xi} + \varepsilon\Pi_{\psi\psi}\right] + \varepsilon^{-1}\Pi_\xi\right] - \Pi_t$.

Здійснимо розклад $v^2(\varphi_* - \xi\varepsilon,\psi)$ у ряд Тейлора в околі точки $\varphi=\varphi_*$.

Матимемо:

$$v^2(\varphi_* - \varepsilon\xi,\psi) = = v^2(\varphi_*,\psi) + 2v(\varphi_*,\psi)v'(\varphi_*,\psi)(-\varepsilon\xi) + (v'^2(\varphi_*,\psi) + v(\varphi_*,\psi)v''(\varphi_*,\psi))(\varepsilon\xi)^2 + ...$$

Тоді рівняння матиме вигляд:

$$\varepsilon(v^2(\varphi_*,\psi,t) - \alpha\xi\varepsilon + ...)(\varepsilon^{-2}\Pi_{\xi\xi} + \Pi_{\psi\psi}) + \varepsilon^{-1}(v^2(\varphi_*,\psi,t) - \alpha\xi\varepsilon + ...)\Pi_\xi = \Pi_t,$$

тут $\alpha = -2v(\varphi_*,\psi)v'(\varphi_*,\psi)$.

Прирівняємо в $L(\Pi_0 + \varepsilon\Pi_1 + \varepsilon^2\Pi_2)$=0 відповідні коефіцієнти при одних і тих же степенях ε, і визначимо $П_i$. Отримаємо наступні рівняння і умови, що їм відповідають:

$$\begin{cases} П_{0\xi\xi} + П_{0\xi} = 0, \\ П_0(0,\psi,t) = C^*(\psi,t) - C_0(\varphi_*,\psi,t), П_0 \underset{\xi\to\infty}{\to} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} П_{1\xi\xi} + П_{1\xi} = v^{-2}(\varphi_*,\psi) f_1(\xi,\psi,t),\ f_1(\xi,\psi,t) = П_{0t}(\xi,\psi,t), \\ П_1(\varphi_*,\psi,t) = -C_1(\varphi_*,\psi,t),\ П_1(\xi,\psi,t) \underset{\xi\to\infty}{\to} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} П_{2\xi\xi} + П_{2\xi} = v^{-2}(\varphi_*,\psi) f_2(\xi,\psi,t), \\ f_2(\xi,\psi,t) = v^{-2}(\varphi_*,\psi)\alpha\xi П_{0t}(\xi,\psi,t) + П_{1t}(\xi,\psi,t) - v^2(\varphi_*,\psi) П_{0\psi\psi}(\xi,\psi,t), \\ П_2(\varphi_*,\psi,t) = 0, П_2(\xi,\psi,t) \underset{\xi\to\infty}{\to} 0. \end{cases}$$

Далі, аналогічно до попереднього, знайдем розвязки даних рівнянь. Одержимо:

$$П_0(\xi,\psi,t) = (C^*(\psi,t) - C_0(\varphi_*,\psi,t)e^{-\xi},$$

$$П_1(\xi,\psi,t) = -C_1(\varphi_*,\psi,t)e^{-\xi} - \ v^{-2}(\varphi_*,\psi)\xi П_{0t}(\xi,\psi,t),$$

$$П_2(\xi,\psi,t) = -((M_1 + M_2)\xi - M_2\xi^2/2)e^{-\xi},$$

де $M_1 = -(v^{-2}(\varphi_*,\psi)C_{1t}(\varphi_*,\psi,t) + (C^*_{\psi\psi}(\psi,t) - C_{0\psi\psi}(\varphi_*,\psi,t)))$,

$$M_2 = v^{-4}(\varphi_*,\psi)\alpha(C^*_t(\psi,t) - \ C_{0t}(\varphi_*,\psi,t)) - v^{-4}(\varphi_*,\psi)(C^*_{tt}(\psi,t) - C_{0tt}(\varphi_*,\psi,t)).$$

Щоб виконувалась умова $C(\varphi,0,t) = C_{**}(\varphi,t)$, побудуємо пограншарову поправку $P = P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1/2} + \varepsilon P_1$., яка є зовнішньою за своїм типом. Потрібно відзначити, що поправка $P(\varphi,\psi,t)$ із точністю порядку O(ε2) має задовольняти і дане рівняння, і всі крайові умови. Введемо розтяг таким чином: $\eta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}\psi$, $\psi = \eta\sqrt{\varepsilon}$. Якщо використати відомі з курсу комплексного аналізу вирази: $\frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$, можна переписати оператор $LP = \varepsilon v^2(\varphi,\psi)\Delta P - v^2(\varphi,\psi)P_\varphi - P_t$ стосовно нових змінних (φ,η,t):

$$LP = \varepsilon v^2(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\eta)\left[P_\varphi + \varepsilon^{-1}P_{\eta\eta}\right] - v^2(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\eta)P_\varphi - P_t.$$

Здійснимо розклад функції $v^2(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\eta)$ у ряд Тейлора біля $\psi = 0$ (за степенями $\sqrt{\varepsilon\eta}$) і після цього здійснимо підстановку у розглянуте вище рівняння. Прирівнявши в рівності $L(P_0+\sqrt{\varepsilon}P_{1/2}+\varepsilon P_1)=0$ коефіцієнти біля степенях параметра ε, одержимо:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,0)(P_{0\eta\eta}+P_{0\varphi})=P_{0t}, \\ P_0(\varphi,0,t)=C_{**}(\varphi,t)-W(\varphi,0,t),\; P_0(\varphi,0,t)\underset{\eta\to\infty}{\to}0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,0)(P_{1/2\eta\eta}+P_{1/2\varphi})=K(\varphi,\eta,t), \\ P_{1/2}(\varphi,0,t)=0,\; P_{1/2}(\varphi,0,t)\underset{\eta\to\infty}{\to}0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,0)(P_{1\eta\eta}+P_{1\varphi})=B(\varphi,\eta,t), \\ P_1(\varphi,0,t)=0,\; P_1(\varphi,0,t)\underset{\eta\to\infty}{\to}0, \end{cases}$$

де $W(\varphi,\psi,t)=C_0+\varepsilon C_1+\Pi_0+\varepsilon\Pi_1+\varepsilon^2\Pi_2$,

$K(\varphi,\eta,t)=P_{1t}-2\eta v'(\varphi,0,t)v^{-1}(\varphi,0,t)P_{0t}$,

$$B(\varphi,\eta,t)=P_{2t}-2\eta v'(\varphi,0)\vartheta(\varphi,0)(P_{1\eta\eta}+P_{1\varphi})-v^2(\varphi,0)P_{0\varphi\varphi}-\frac{v'^2(\varphi,0)+v(\varphi,0)v''(\varphi,0)}{v^2(\varphi,0)}\eta^2P_{0t}$$

Нам потрібне виконанняь наступної крайової умови $C(\varphi,Q,t)=C^{**}(\varphi,t)$, тому ми , аналогічно до функції P, будуємо зовнішню примежову поправку $\overline{P}=\overline{P}_0+\sqrt{\varepsilon}\overline{P}_{1/2}+\varepsilon\overline{P}_1$. Тоді, аналогічно, здійснимо наступну заміну:

$$\mu=\sqrt{\varepsilon}^{-1}(Q-\psi),\quad \psi=Q-\mu\sqrt{\varepsilon}\,).$$

А.П. Власюк побудував відповідні кутові та реброві функції для недостатньо узгоджених граничних умов вздовж кутових точок та ребер паралелепіпеда $\{(\varphi,\psi,t):\ \varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ 0<\psi<Q,\ 0<t<\infty\}$

Погранршарова функція $\Pi(\xi,\psi,t)$ задачі (1.15), забезпечує граничну умову на $\varphi=\varphi^*$, але сама вносить свої неузгодженості на границі $t=0$, $\psi=0$, $\psi=Q$. Погранршарові функції $P(\varphi,\eta,\tau)$ та $\overline{P}(\varphi,\mu,t)$, слугують для забезпечення граничних умов при $\psi=0$, $\psi=Q$, але вносять нев'язку в граничну умову на $\varphi=\varphi^*$. Щоб компенсувати такі неузгодженості, внесені пограншаровою функцією $\varPi(\xi,\psi,t)$ на границі $t=0$ вводиться так звана ‘кутова’ пограншарова функція $L^0(\xi,\psi,\tau)$, і суттєвий внесок її біля ребра $\left\{\varphi=\varphi^*,\, 0\le\psi\le Q\right\}$. Для $\varPi(\xi,\psi,t)$, $P(\varphi,\eta,\tau)$ і $\varPi(\xi,\psi,t)$, $\overline{P}(\varphi,\mu,t)$ біля ребер $\left\{\varphi=\varphi^*,\, \psi=0, t\ge 0\right\}$ та $\left\{\varphi=\varphi^*,\, \psi=Q, t\ge 0\right\}$відповідають ‘кутові’ пограншарові функції $L^1(\xi,\sigma_0,t)$, $L^2(\xi,\sigma_1,t)$, які суттєві в околах цих ребер. Нев’язки, що забезпечуються кутовими пограншаровими функціями $L^0(\xi,\psi,\tau)$ і $L^1(\xi,\sigma_0,t)$, $L^2(\xi,\sigma_1,t)$ біля кутових точок $C(\varphi^*,0,0)$ і $C(\varphi^*,Q,0)$, ліквідовують ‘кутові’ пограншарові функції $\varGamma^0(\xi,\sigma_0,\tau)$ і $\varGamma^1(\xi,\sigma_1,\tau)$, які, мають суттєву вагу в околах цих точок.

Отже, розв’язок задачі (1.15) має такий асимптотичний розклад:

$$C(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=(C_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon C_1(\varphi,\psi,t))+\varPi(\xi,\psi,t)+P(\varphi,\eta,t)+\overline{P}(\varphi,\mu,t)+$$
$$+L^0(\xi,\psi,\tau)+L^1(\xi,\sigma_0,t)+L^2(\xi,\sigma_1,t)+\varGamma^0(\xi,\sigma_0,\tau)+\varGamma^1(\xi,\sigma_1,\tau)+R_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon),$$

де $\xi=(\varphi^*-\varphi)\varepsilon^{-1}$, $\sigma_0=\sqrt{\varepsilon^{-1}}\eta=\varepsilon^{-1}\psi$, $\sigma_1=\sqrt{\varepsilon^{-1}}\mu=(Q-\psi)\varepsilon^{-1}$, $\tau=\varepsilon^{-1}t$ – пограншарові змінні.

Для ілюстраціїи наведених вище міркувань, покажемо алгоритм побудови кутової пограншарової функції

$$L^1(\xi,\sigma_0,t)=L_0^1(\xi,\sigma_0,t)+\varepsilon L_1^1(\xi,\sigma_0,t)+\varepsilon^2 L_2^1(\xi,\sigma_0,t).$$

Спочатку виконуємо заміну старих змінних: $\xi=\varepsilon^{-1}(\varphi^*-\varphi)$, $\sigma_0=\varepsilon^{-1}\psi$, потім розкладаємо функцію швидкості $v^2(\varphi,\psi)$ в ряд по степенях ε, так же само, як це ми робили вище:

$$v^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\varepsilon\sigma_0)=v^2(\varphi^*,0)+\varepsilon(-\xi v_\xi^2(\varphi^*,0)+\sigma_0 v_{\sigma_0}^2(\varphi^*,0))+\varepsilon^2(\xi^2 v_{\xi\xi}^2(\varphi^*,0)+\sigma_0{}^2 v_{\sigma_0\sigma_0}^2(\varphi^*,0))+\ldots$$

За аналогією з сказаним вище, підставляємо в рівняння (1.15) поправку $L^1(\xi,\sigma_0,t)$ та розкладення функції $v^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\varepsilon\sigma_0)$ в ряд за степенями ε. Здійснивши прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенях ε, дістанемо наступні задачі для знаходження поправок $L_i^1(\xi,\sigma_0,t), i=\overline{0,2}$:

$$\begin{cases} L_{i\xi\xi}^1+L_{i\sigma_0\sigma_0}^1+L_{i\xi}^1=p_i,\; L_i^1(\xi,\sigma_0,t)\to 0, \textit{при}\sqrt{\xi^2+\sigma_0{}^2}\to\infty, \\ L_i^1(\varphi^*,\sigma_0,t)=-P_i(\varphi^*,\sigma_0,t),\; L_i^1(\xi,0,t)=-\varPi_i(\xi,0,t), \end{cases}$$

тут $p_0 = 0$, $p_1 = v^{-2}(\varphi^*, 0)L_{0t}^1$, $p_2 = v^{-2}(\varphi^*, 0)(L_{1t}^1 - v^{-2}(\varphi^*, 0)L_{0t}^1$.

Для відшукання R_2 маємо задачу:

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi)\left[R_{2\varphi\varphi} + R_{2\psi\psi}\right] - v^2(\varphi, \psi)R_{2\varphi} = R_{2t} + \varepsilon^3 g_1(\varphi, \psi, t),$$

$$R_2(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_2(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_2(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = R_2(\varphi, \psi, Q, \varepsilon) = R_2(\varphi, 0, t, \varepsilon) = 0,$$

тут $g_1(\varphi, \psi, t)$ – функція, яка виражається через уже відомі члени ряду (1.16).

На наступному кроці переконуємось у тому, що $\left|R_2\right| = O(\varepsilon^2)$. Це здійснюємо на підставі принципу максимуму що стосується параболічних рівнянь.

Запропоновану вище методику побудови асимптотичних наближень розв'язків Н.О. Нікіфорович застосувала до випадків дослідження відповідних процесів переносу масових частинок з урахуванням їхнього масообміну. Такі самі підходи використано, розвинуто та модифіковано Барановським С. Він побудував асимптотичні розклади розв'язків нелінійних 'сингулярно збурених' задач типу дифузія-конвекція, зокрема, в областях з вільними межами. Такі задачі виникають при дослідженні та математичному моделюванні процесів розмиву дна русел.

Розділ II. АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ В ОДНОЗВ'ЯЗНИХ ТА ДВОХЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

2.1. Побудова асимптотичних наближень розв'язків нелінійних задач конвективної дифузії з урахуванням зворотного впливу

Розглядається сингулярно збурений процес конвективної дифузії у випадку коли забруднююча речовина фільтрується у однозв'язній чотирикутній криволінійній області [5]. Виберемо випадок, коли забруднююча речовина має концентрацію c в конкретній точці (x,y) здійснює зворотню дію на дифузійний коефіцієнт через певний проміжок часу τ. Відмітимо, що під процесом із сингулярними збуреннями ми будемо розуміти такий процес, у якому принаймні б одна із складових превалювала над найбільш наявною в просторі (на площині) або часі компонентою. Таким чином, для області $G=G_z\times(0,\infty)$, тут $G_z=ABCD$ – є однозв'язною чотирикутною криволінійною областю (пористим пластом), який обмежений чотирма гладкими та одночасно перпендикулярними між собою в точках перетину кривими $AB=\{z=x+iy: f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z: f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z: f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z: f_4(x,y)=0\}$ (рис.1.1, *а*), розглянемо таку модельну задачу конвективної дифузії із урахуванням запізнення [7]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+\varepsilon\cdot h(c(x,y,t-\tau))\right)\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+\varepsilon\cdot h(c(x,y,t-\tau))\right)\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)-v_x\frac{\partial c}{\partial x}-v_y\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t}, \qquad (2.1.1)$$

$$c\big|_{AB}=c_*(M,t),\; c\big|_{CD}=c^*(M,t),\; c\big|_{AD}=c_{**}(M,t),\; c\big|_{BC}=c^{**}(M,t),$$

$$c(M,\tilde t)=c_0^0(M,\tilde t)\;\left(-\tau\le\tilde t\le 0\right), \qquad (2.1.2)$$

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\; \Delta\varphi=0,\; \varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\; \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,$$

$$\left.\frac{d\varphi}{d\eta}\right|_{BC}=\left.\frac{d\varphi}{d\eta}\right|_{DA}=0\,,\ Q=\int\limits_{AB}-v_y dx+v_x dy\,. \qquad (2.1.3)$$

Тут $c(x,y,t)$ – концентрація речовини в точці (x,y) в фіксований момент часу t, яка є повністю розчиненою в середовищі, $\boldsymbol{\eta}, M$ – нормаль до даної кривої та біжуча точка, $\tau>0$ – стала, яка вказує час запізнення, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості фільтрації у пористому середовищі G_z, ε – стала, малий параметр, $h, c_*, c^*, c_{**}, c^{**}, c_0^0$ – досить гладкі функції, які узгоджені одна з одною попарно вздовж ребер (зокрема, вздовж кутових точок) області G. Також покладемо, що функція $c_0^0(\varphi,\psi,t)$ за умови $t=-\tau$ і $t=0$ відповідає умовам, які забезпечать потрібну нам гладкість розв'язку $c=c(x,y,t)$ для проведення подальших викладок при $t=\tau n\ (n=1,2,...)$.

Нехай задача (2.3), методом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (чи $G_w \mapsto G_z$), тут $G_w=\{w=\varphi+i\psi : \varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ \ 0<\psi<Q\}$ – відповідає G_z і є областю комплексного потенціалу, $\psi=\psi(x,y)$ – функція течії яка є комплексно спряженою до $\varphi=\varphi(x,y)$), є розв'язаною, також знайдено поле швидкостей $\left(v_x(x,y), v_y(x,y)\right)$. Після цього здійснюємо заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ в (2.1.1) та (2.1.2), приходимо до такої задачі типу "дифузія" для області G_w:

$$\varepsilon\Big(\big(1+\varepsilon h(c(\varphi,\psi,t-\tau))\big)v^2(\varphi,\psi)\cdot\left(c_{\varphi\varphi}+c_{\psi\psi}\right)+\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\times$$

$$\times\left(c_\varphi h_\varphi+c_\psi h_\psi\right)\Big)-v^2(\varphi,\psi)\cdot c_\varphi=c_t\,,$$

$$c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t)\,,\ c(\varphi^*,\psi,t)=c^*(\psi,t)\,,\ c(\varphi,0,t)=c_{**}(\varphi,t)\,,$$

$$c(\varphi,Q,t)=c^{**}(\varphi,t)\,, c(\varphi,\psi,\tilde t)=c_0^0(\varphi,\psi,\tilde t)\,,\ -\tau\le\tilde t\le 0\,. \qquad (2.1.4)$$

Задачу із зворотнім впливом (2.1.4) на кожному із проміжків часу $[(n-1)\tau, n\tau],\ n=1,2,...$ будемо зводити до таких задач без запізнення:

$$\varepsilon\Big(\left(1+\varepsilon h_{n\tau}\right)\cdot v^2(\varphi,\psi)\cdot\left({c^{[n]}}_{\varphi\varphi}+{c^{[n]}}_{\psi\psi}\right)+\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\times$$

$$\times\left({c^{[n]}}_{\varphi}h_{n\tau\varphi}+{c^{[n]}}_{\psi}h_{n\tau\psi}\right)\Big)-v^2(\varphi,\psi)\cdot {c^{[n]}}_{\varphi}={c^{[n]}}_{t}\,,$$

$$c^{[n]}(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\ c^{[n]}(\varphi^*,\psi,t)=c^*(\psi,t),$$

$$c^{[n]}(\varphi,0,t)=c_{**}(\varphi,t),\ c^{[n]}(\varphi,Q,t)=c^{**}(\varphi,t),$$

$$c^{[n]}(\varphi,\psi,(n-1)\tau)=w_n(\varphi,\psi,(n-1)\tau),\ h_{n\tau}(\varphi,\psi,t)=$$

$$=h\left(c^{[n]}(\varphi,\psi,t-\tau)\right)=h\left(c^{[n-1]}(\varphi,\psi,t-\tau)\right)=w_n(\varphi,\psi,t-\tau), \qquad (2.1.5)$$

тут $w_n(\varphi,\psi,t)=c^{[n-1]}(\varphi,\psi,t)$, $c^{[0]}(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi,0)$, $n=\overline{1,\infty}$, $t\in[n\tau,(n+1)\tau]$.

Рішення задач (2.1.5) із точністю порядку $O(\varepsilon^2)$ будемо шукати у виді асимптотичного наближення [21]:

$$c^{[n]}(\varphi,\psi,t)=\left(c_0^{[n]}(\varphi,\psi,t)+c_1^{[n]}(\varphi,\psi,t)\varepsilon\right)+\sum_{i=0}^{2}\pi_i^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\varepsilon^i+$$

$$+\sum_{i=0}^{2}\tilde{\pi}_i^{[n]}(\varphi,\tilde{\psi},t)\varepsilon^{i/2}+\sum_{i=0}^{2}\tilde{\tilde{\pi}}_i^{[n]}\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},t\right)\varepsilon^{i/2}+R^{[n]}(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \qquad (2.1.6)$$

тут $R^{[n]}(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ – залишковий член асимптотики, $\tilde{\pi}_i^{[n]}(\varphi,\tilde{\psi},t)$, $\tilde{\tilde{\pi}}_i^{[n]}\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},t\right)$ – поправки примежового шару відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q$, враховують вплив бокових джерел забруднення (c^*, c_{**}, c^{**}), $c_i^{[n]}(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{0,1}$) –регулярні члени асимптотики, так $c_0^{[n]}$ – розв’язок задачі, який за конвективний перенос; $c_1^{[n]}$ – поправка, яка враховує дію дифузійної складової процесу усюди в даній області (окрім певної її примежової ділянки); $\pi_i^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)$ – поправки типу пограншару біля $\varphi=\varphi^*$ (поправки біля виходу фільтраційного потоку), $\tilde{\varphi}=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi}=\dfrac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}}=\dfrac{Q-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ – заміна змінних, що здійснює регуляризуючі перетворення.

Здійснивши підстановку (2.1.6) в (2.1.5) та використавши аналогічно описану вище процедуру прирівнюваня, для відшукання функцій- основної частини асимптотики $c_0^{[n]}, c_1^{[n]}$ приходимо до наступних задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot {c_0^{[n]}}_{\varphi}+{c_0^{[n]}}_{t}=0,\ c_0^{[n]}(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t), \\ c_0^{[n]}(\varphi,\psi,(n-1)\tau)=w_n(\varphi,\psi,(n-1)\tau)=\overline{w}_n(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot {c_1^{[n]}}_{\varphi}+{c_1^{[n]}}_{t}=v^2(\varphi,\psi)\cdot({c_0^{[n]}}_{\varphi\varphi}+{c_0^{[n]}}_{\psi\psi}), \\ c_1^{[n]}(\varphi,\psi,0)=0,\ c_1^{[n]}(\varphi_*,\psi,t)=0. \end{cases}$$

Розвязавши їх розв’язання отримаємо:

$$c_0^{[n]}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} c_*\left(\psi,t-f(\varphi,\psi)\right), & t\geq f(\varphi,\psi),\\ \overline{w}_n\left(f^{-1}\left(f(\varphi,\psi)-t,\psi\right),\psi\right), & t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$c_1^{[n]}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g^{[n]}\left(s,\psi,t-f(\varphi,\psi)+f(s,\psi)\right)}{v^2(s,\psi)}ds, & t\geq f(\varphi,\psi),\\ \int\limits_{(n-1)\tau}^{t} g^{[n]}\left(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t+\tilde{t},\psi),\psi,\tilde{t}\right)d\tilde{t}, & t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

тут $f(\varphi,\tilde{\psi})=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\tilde{\psi})}$ – час проходження фіксованої частинки вздовж фіксованої лінії течії $\psi(x,y)=\tilde{\psi}$ з точки $(x(\varphi_*,\tilde{\psi}),y(\varphi_*,\tilde{\psi}))$ до точки $(x(\varphi,\tilde{\psi}),y(\varphi,\tilde{\psi}))$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ Відзначимо існування такої функції, бо підінтегральна функція v^{-2} – неперервна і диференційована, додатно визначена, обмежена), $g^{[n]}(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)\times$ $\times(\frac{\partial^2 c_0^{[n]}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c_0^{[n]}}{\partial\psi^2})$.

Поправки типу приграничного шару $\pi^{[n]}=\sum\limits_{i=0}^{2}\pi_i^{[n]}\varepsilon^i$ використовуємо для усунення неузгодженостей, які внесені побудовою регулярної частини $c^{[n]}=\sum_{i=0}^{1}c_i^{[n]}\varepsilon^i$ біля границі виходу із потоку $\varphi=\varphi^*$ (має бути справедливою умова: $\left(c^{[n]}+\pi^{[n]}\right)\Big|_{\varphi=\varphi^*}=c^*+O\left(\varepsilon^2\right)$). Знаходимо їх із задач:

$$\pi_{i\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]}+\pi_{i\tilde{\varphi}}^{[n]}=d_i(\tilde{\varphi},\psi,t);\ \pi_i^{[n]}\underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to}0,\ \pi_i^{[n]}(0,\psi,t)=p_i(\psi,t),\ i=\overline{0,2},$$

тут $d_0(\tilde{\varphi},\psi,t)=0$, $d_1(\tilde{\varphi},\psi,t)=v^{-2}(\varphi^*,\psi)\cdot\left(\pi_{0t}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)-v^2(\varphi^*,\psi)\times\right.$

$$\left.\times h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,t)\cdot\pi_{0\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\right),$$

$$d_2(\tilde{\varphi},\psi,t)=v^{-2}(\varphi^*,\psi)\cdot\left(\pi_{1t}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)+\ +(h_{n\tau\tilde{\varphi}}(\varphi^*,\psi,t)\cdot v^2(\varphi^*,\psi)+2v(\varphi^*,\psi)\cdot v_{\tilde{\varphi}}(\varphi^*,\psi)\cdot h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,t))\times\right.$$

$$\times\tilde{\varphi}\cdot\pi_{0\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)+v^2(\varphi^*,\psi)h_{n\tau\tilde{\varphi}}(\varphi^*,\psi,t)\pi_{0\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)-$$

$$\left.-v^2(\varphi^*,\psi)h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,t)\pi_{1\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)-v^2(\varphi^*,\psi)\,\pi_{0\psi\psi}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\right);$$

$$p_1(\psi,t)=0,\ p_2(\psi,t)=0,\ p_0(\psi,t)=c^*(\psi,t)-c^{[n]}(\varphi^*,\psi,t).$$

Розв’язавши отримані вище задачі отримуємо:

$$\pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)=\left(c^*(\psi,t)-c^{[n]}(\varphi^*,\psi,t)\right)\cdot e^{-\tilde{\varphi}},$$

$$\pi_1^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)=-\tilde{\varphi}\cdot v^{-2}(\varphi^*,\psi)\Big(\pi_{0t}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)-$$

$$-v^2(\varphi^*,\psi)\cdot h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,t)\pi_{0\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\Big),$$

$$\pi_2^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)=-\tilde{\varphi}\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\cdot\Big(h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,t)\times$$

$$\times\Big(\pi_{0t}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)-l(\varphi^*,\psi,t)\pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\Big)-\pi_{0\psi\psi}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)-$$

$$-v^2(\varphi^*,\psi)h_{n\tau\tilde{\varphi}}(\varphi^*,\psi,t)\cdot\pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\Big)-v^{-2}(\varphi^*,\psi)e^{-\tilde{\varphi}}(\tilde{\varphi}+\tilde{\varphi}^2/2)\times$$

$$\times\Big(\pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\cdot l'_{\tilde{\varphi}}(\varphi^*,\psi,t)-v^{-2}(\varphi^*,\psi)\cdot\Big(\pi_{0tt}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)-$$

$$-l(\varphi^*,\psi,t)\pi_{0t}^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\Big)-v^2(\varphi^*,\psi)h_{n\tau t}(\varphi^*,\psi,t)\pi_0^{[n]}(\tilde{\varphi},\psi,t)\Big);$$

$$l(\tilde{\varphi},\psi,t)=v^2(\tilde{\varphi},\psi)\cdot h_{n\tau}(\tilde{\varphi},\psi,t).$$

Поправки $\tilde{\pi}_i^n(\varphi,\tilde{\psi},t)=\sum_{i=0}^{2}\tilde{\pi}_{i/2}^{(n)}\varepsilon^{i/2}$, $\tilde{\tilde{\pi}}_i^n\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},t\right)=\sum_{i=0}^{2}\tilde{\tilde{\pi}}_{i/2}^{(n)}\varepsilon^{i/2}$ слугують для усунення похибок біля $\psi=0$, $\psi=Q$ відповідно. Також поправки $\tilde{\pi}_i^{(n)}$, $\tilde{\tilde{\pi}}_i^{(n)}$ мають бути функціями типу примежового шару відносно змінних $\tilde{\psi}$, $\tilde{\tilde{\psi}}$: $\tilde{\pi}_i^{(n)}\xrightarrow[\tilde{\psi}\to\infty]{}0$, $\tilde{\tilde{\pi}}_i^{(n)}\xrightarrow[\tilde{\tilde{\psi}}\to\infty]{}0$, точніше, отримані поправки мають бути близькими до нуля в частинах області, яка досить віддалена від околів $\psi=0$, $\psi=Q$. Для знаходження цих поправок отримуємо наступні задачі:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,0)\tilde{\pi}_{0\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)}+v^2(\varphi,0)\tilde{\pi}_{0\varphi}^{(n)}=\tilde{\pi}_{0t}^{(n)},\ \tilde{\pi}_0^{(n)}\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\to}0,\\ \tilde{\pi}_0^{(n)}(\varphi,0,t)=c_{**}(\varphi,t)-u^{(n)}(\varphi,0,t)-\pi^{(n)}(\varphi,0,t);\end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,0)\tilde{\pi}_{1/2\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)}+v^2(\varphi,0)\tilde{\pi}_{1/2\varphi}^{(n)}=\tilde{\pi}_{1/2t}^{(n)}-\tilde{\psi}\dfrac{2v'(\varphi,0)}{v(\varphi,0)}\tilde{\pi}_{0t}^{(n)},\\ \tilde{\pi}_{1/2}^{(n)}\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\to}0,\ \tilde{\pi}_{1/2}^{(n)}(\varphi,0,t)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,0)\tilde{\pi}_{1\tilde{\psi}\tilde{\psi}}^{(n)}+v^2(\varphi,0)\tilde{\pi}_{1\varphi}^{(n)}=\tilde{\pi}_{1t}^{(n)}-\tilde{q}^{(n)},\\ \tilde{\pi}_1^{(n)}\underset{\tilde{\psi}\to\infty}{\to}0,\ \tilde{\pi}_1^{(n)}(\varphi,0,t)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,Q)\tilde{\tilde{\pi}}_{0\tilde{\tilde{\psi}}\tilde{\tilde{\psi}}}^{(n)}+v^2(\varphi,Q)\tilde{\tilde{\pi}}_{0\varphi}^{(n)}=\tilde{\tilde{\pi}}_{0t}^{(n)},\ \tilde{\tilde{\pi}}_0^{(n)}\underset{\tilde{\tilde{\psi}}\to\infty}{\to}0,\\ \tilde{\tilde{\pi}}_0^{(n)}(\varphi,Q,t)=c^{**}(\varphi,t)-u^{(n)}(\varphi,Q,t)-\pi^{(n)}(\varphi,Q,t)-\tilde{\pi}^{(n)}(\varphi,Q,t);\end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,Q)\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1/2\tilde{\tilde{\psi}}\tilde{\tilde{\psi}}}+v^2(\varphi,Q)\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1/2\varphi}=\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1/2t}+\tilde{\tilde{\psi}}\dfrac{2v'(\varphi,Q)}{v(\varphi,Q)}\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{0t}, \\ \tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1/2}\underset{\tilde{\tilde{\psi}}\to\infty}{\longrightarrow}0,\ \tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1/2}\left(\varphi,Q,t\right)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,Q)\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1\tilde{\tilde{\psi}}\tilde{\tilde{\psi}}}+v^2(\varphi,Q)\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1\varphi}=\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1t}-\tilde{\tilde{q}}^{(n)}, \\ \tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1}\underset{\tilde{\tilde{\psi}}\to\infty}{\longrightarrow}0,\ \tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1}\left(\varphi,Q,t\right)=0; \end{cases}$$

$$\tilde{q}^{(n)}=-\tilde{\psi}^2\left(v'^2(\varphi,0)+v''(\varphi,0)v(\varphi,0)\right)\frac{\tilde{\pi}^{(n)}_{0t}}{v^2(\varphi,0)}-2\tilde{\psi}v'(\varphi,0)\times$$

$$\times\left(\frac{\tilde{\pi}^{(n)}_{1/2t}}{v(\varphi,0)}-\tilde{\psi}\left(2v(\varphi,0)v'(\varphi,0)\right)\frac{\tilde{\pi}^{(n)}_{0t}}{v^3(\varphi,0)}\right)-v^2(\varphi,0)\cdot\left(\tilde{\pi}^{(n)}_{0\varphi\varphi}-h_{n\tau}(\varphi,0,t)\tilde{\pi}^{(n)}_{0\tilde{\psi}\tilde{\psi}}\right),$$

$$\tilde{\tilde{q}}^{(n)}=-\tilde{\tilde{\psi}}^2\left(v'^2(\varphi,Q)+v''(\varphi,Q)v(\varphi,Q)\right)\frac{\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{0t}}{v^2(\varphi,Q)}-2\tilde{\psi}v'(\varphi,Q)\times$$

$$\times\left(\frac{\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{1/2t}}{v(\varphi,Q)}+\tilde{\tilde{\psi}}\left(2v(\varphi,Q)v'(\varphi,Q)\right)\frac{\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{0t}}{v^3(\varphi,Q)}\right)-$$

$$-v^2(\varphi,Q)\cdot\left(\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{0\varphi\varphi}-h_{n\tau}(\varphi,Q,t)\tilde{\tilde{\pi}}^{(n)}_{0\tilde{\tilde{\psi}}\tilde{\tilde{\psi}}}\right).$$

Відзначимо, що при знаходженні поправок $\tilde{\pi}^n_i\left(\varphi,\tilde{\psi},t\right)$ та $\tilde{\tilde{\pi}}^n_i\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},t\right)$, нам потрібно розв'язати типові крайові задачі для рівняння типу $\alpha(\varphi)\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2}-\delta(\varphi)\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=\sigma(t)\dfrac{\partial\Pi}{\partial t}+g(\varphi,\eta,t)$. Ці рівняння ми зводимо до відомих нам рівнянь із коефіцієнтами-константами виду $a(s)\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2}=\dfrac{\partial\Pi}{\partial t}+g_0(s,\eta,t),$ тут s – параметр, із використанням заміни $f(s)=f(\varphi)-t$.

2.2. Розв'язування дифузійно- конвективних задач, коли залежність коефіцієнта дифузії від концентрації представлена як многочлен.

Розглянемо сингулярно збурений процес масового перенесення розчинної у воді речовини коли остання фільтрується в криволінійній області, що має чотирикутний вигляд. Дослідимо випадок, коли сила проникнення речовин в рідину середовища залежить від невідомої концентрації. Опишемо її многочленною залежністю. Так в області $G=G_z\times(0,\infty)$, тут $G_z=ABCD$ – однозв'язна криволінійна область типу 'чотирикутник' (див. п.2.1), розглядатимемо наступну нелінійну задачу типу дифузія - конвекція:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial c}{\partial x}\left(\left(a_0+\sum_{s=1}^{\lambda}\varepsilon^s a_s c^s\right)\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial c}{\partial y}\left(\left(a_0+\sum_{s=1}^{\lambda}\varepsilon^s a_s c^s\right)\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)-\ -v_x\frac{\partial c}{\partial x}-v_y\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{2.7}$$

$$c\big|_{AB}=c_*\left(M,t\right),\ c\big|_{CD}=c^*\left(M,t\right),\ c\big|_{AD}=c_{**}\left(M,t\right);$$

$$c\big|_{BC}=c^{**}\left(M,t\right),\ c(M,\tilde{t})=c_0^0\left(M,\tilde{t}\right), \tag{2.8}$$

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi=0,\ \varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,$$

$$\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{BC}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{DA}=0,\ Q=\int_{AB}-v_y dx+v_x dy\,. \tag{2.9}$$

Де ε – малий параметр, n , M – нормаль та біжуча точка до певної кривої, λ – довільне фіксоване натуральне число, $c(x,y,t)$ – концентрація розчинної в пористому середовищі речовини в точці (x,y) в момент часу t, v_x,v_y,φ – відповідно компоненти та потенціал його швидкості фільтрації у пористому середовищі G_z, $c_*,c^*,c_{**},c^{**},c_0^0$ – досить гладкі функції, узгоджені на ребрах (зокрема, у кутових точках) фізичної області G. Також, вважаємо, що регулярна частина асимптотики $c_0^0(\varphi,\psi,t)$ у випадку $t=0$ задовольняє усі умови, що забезпечують потрібну нам для подальшого викладення теорії гладкість загального розв’язку $c=c(x,y,t)$ [7].

Вважаємо, що задача (2.9) є розв’язаною. Тоді здійснюємо заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ у (2.7) і (2.8), аналогічно до п.2.1, отримаємо таку дифузійну задачу для області G_w:

$$\varepsilon v^2\left(\varphi,\psi\right)\left(\left(a_0+\sum_{s=1}^{\lambda}\varepsilon^s a_s c^s\right)\cdot\left(c_{\varphi\varphi}+c_{\psi\psi}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\varepsilon a_1+\sum_{s=2}^{\lambda}s\varepsilon^s a_s c^{s-1}\right)\left(c_\varphi^2+c_\psi^2\right)\right)-v^2\left(\varphi,\psi\right)\cdot c_\varphi=c_t,$$

$$c\left(\varphi_*,\psi,t\right)=c_*\left(\psi,t\right),\ c\left(\varphi^*,\psi,t\right)=c^*\left(\psi,t\right),$$

$$c\left(\varphi,Q_*,t\right)=c_{**}\left(\varphi,t\right),\ c\left(\varphi,Q^*,t\right)=c^{**}\left(\varphi,t\right),\ c\left(\varphi,\psi,0\right)=c_0^0\left(\varphi,\psi\right). \tag{2.10}$$

Розв’язок задачі (2.10) з точністю порядку $O(\varepsilon^2)$ будемо знаходити у вигді такого асимптотичного ряду:

$$c(\varphi,\psi,t)=c_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon c_1(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\Pi_i(\xi,\psi,t)\varepsilon^i+$$

$$+\sum_{i=0}^{2}P_i(\varphi,\eta,t)\varepsilon^{i/2}+\sum_{i=0}^{2}\Gamma_i(\varphi,\mu,t)\varepsilon^{i/2}+R_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \quad (2.\ 11)$$

тут $c_i(\varphi,\psi,t)$ $(i=\overline{0,1})$ –регулярна частина асимптототичного наближення розвязку. Зауважимо, що c_0 –складова асимптотичного розвинення розвязку, яка відповідає за конвективну складову процесу, c_i – поправки, що враховують вплив дифузії скрізь в розглянутій області (винятком буде деяка її примежова ділянка), $R(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ – залишковий член асимптотики, $\Pi_i(\xi,\psi,t)(i=\overline{0,2})$ – поправки типу погранмежі біля $\varphi=\varphi^*$, $P_i(\varphi,\eta,t)$, $\Gamma_i(\varphi,\mu,t)$ – поправки типу погранмежі відповідно біля $\psi=Q_*$, $\psi=Q^*$. Ці поправки враховують збурення “бокових джерел забруднення” (c^*, c_{**}, c^{**}), $\xi=\frac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\eta=\frac{\psi-Q_*}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mu=\frac{Q^*-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, – відповідні заміни, що здійснюють регулярні перетворення.

Підставивши (2.11) в (2.10) і виконавши прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях $\boldsymbol{\varepsilon}$, для знаходження складових c_i прийдемо до наступних задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{0\varphi}+c_{0t}=0, \\ c_0(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi),\, c_0(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{1\varphi}+c_{1t}=g(\varphi,\psi,t), \\ c_1(\varphi,\psi,0)=0,\, c_1(\varphi_*,\psi,t)=0, \end{cases}$$

де $g(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)a_0\left(\frac{\partial^2 c_0}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c_0}{\partial\psi^2}\right)$.

В результаті їх розв’язування маємо:

$$c_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} c_*\left(\psi,t-f(\varphi,\psi)\right), & t\ge f(\varphi,\psi), \\ c_0^0\left(f^{-1}\left(f(\varphi,\psi)-t,\psi\right),\psi\right), & t<f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$c_1(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g\left(s,\psi,t-f(\varphi,\psi)+f(s,\psi)\right)}{v^2(s,\psi)}ds, & t\geq f(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g\left(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t+\tilde{t},\psi),\psi,\tilde{t}\right)d\tilde{t}, & t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

тут $f(\varphi,\tilde{\psi})=\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\tilde{\psi})}$ – час, за який проходить виділена частинка вздовж впевної лінії течії $\psi(x,y)=\tilde{\psi}$ із точки $(x(\varphi_*,\tilde{\psi}),y(\varphi_*,\tilde{\psi}))$ до точки $(x(\varphi,\tilde{\psi}),y(\varphi,\tilde{\psi}))$, а f^{-1} – це функція, яка є оберненою до функції f відносно змінної φ.

Функції типу погранмежа $\Pi=\sum_{i=0}^{2}\Pi_i\varepsilon^i$ використовуємо для виправлення похибок-нев'язок, внесених побудованою регулярною частиною асимптотики $\bar{c}=\sum_{i=0}^{1}c_i\varepsilon^i$ в околі границі виходу фільтраційного потоку $\varphi=\varphi^*$. Для їхнього знаходження отримуємо задачі:

$$\begin{cases}a_0\Pi_{0\xi\xi}+\Pi_{0\xi}=0,\ \Pi_0\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\\ \Pi_0(0,\psi,t)=c^*(\psi,t)-c_0(\varphi_*,\psi,t),\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_0\Pi_{1\xi\xi}+\Pi_{1\xi}=v^{-2}(\varphi_*,\psi)d_1(\xi,\psi,t),\\ \Pi_1(0,\psi,t)=-c_1(\varphi_*,\psi,t),\ \Pi_1(\xi,\psi,t)\underset{\xi\to 0}{\to}0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_0\Pi_{2\xi\xi}+\Pi_{2\xi}=v^{-2}(\varphi_*,\psi)d_2(\xi,\psi,t),\\ \Pi_2(0,\psi,t)=0,\ \Pi_2(\xi,\psi,t)\underset{\xi\to 0}{\to}0,\end{cases}$$

де

$$d_1(\xi,\psi,t)=\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}-v^2(\varphi^*,\psi)a_1\Pi_0\Pi_{0\xi\xi}-v^2(\varphi^*,\psi)a_1\Pi_{0\xi}^2,$$

$$d_2(\xi,\psi,t)=\Pi_{1t}+\frac{2v'\xi d_1(\xi,\psi,t)}{v(\varphi_*,\psi)}-v^2(\varphi_*,\psi)a_1\Pi_0\Pi_{1\xi\xi}+$$

$$+2vv'\xi a_1(\Pi_0\Pi_{0\xi\xi}+\Pi_{0\xi}^2)-v^2(\varphi_*,\psi)(a_2\Pi_{0\xi\xi}(\Pi_0^2+2\Pi_0c_0)+\ +a_1\Pi_{0\xi\xi}\Pi_1+\Pi_{0\psi\psi}+2a_1\Pi_{1\xi}^2+2a_2\Pi_{0\xi}^2\Pi_0).$$

Ці задачі розв'яжемо аналогічно до [7], зокрема:

$$\Pi_0(\xi,\psi,t)=\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{a_0}},$$

$$\Pi_1(\xi,\psi,t)=-c_1(\varphi^*,\psi,t)\cdot e^{\frac{-\xi}{a_0}}-a_0f_1e^{\frac{-\xi}{a_0}}-\frac{a_0^2}{2}f_2(e^{\frac{-\xi}{a_0}}-e^{\frac{-2\xi}{a_0}}),$$

де $f_1 = \dfrac{(c_t^* - c_{0t})}{v^2(\varphi^*, \psi)}$, $f_2 = -\dfrac{a_1}{a_0^2}(c_t^* - c_{0t})^2$.

Функцію $P(\varphi,\eta,t) = \sum_{i=0}^{2} P_i\, \varepsilon^{i/2}$ використовуємо для прибирання нев'язок в околах граничних ліній течії $\psi = Q_*$. Для знаходження цієї функції в результаті проведення процедури прирівнювання членів при однакових степенях малого параметра приходимо до наступних задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*)(a_0 P_{0\eta\eta} + P_{0\varphi}) = P_{0t},\ P_0(\varphi,\eta,t) \underset{\eta\to\infty}{\to} 0, \\ P_0(\varphi, Q_*, t) = c^{**}(\varphi,t) - c_0(\varphi, Q_*, t) - \Pi_0(\varphi, Q_*, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*)(a_0 P_{1\eta\eta} + P_{1\varphi}) = P_{1t} + U_1(\varphi,\eta,t), \\ P_1(\varphi, Q_*, t) = 0,\ P_1(\varphi,\eta,t) \underset{\eta\to\infty}{\to} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*)(a_0 P_{2\eta\eta} + P_{2\varphi}) = P_{2t} + U_2(\varphi,\eta,t), \\ P_2(\varphi, Q_*, t) = -c_1 - \Pi_1,\ P_2(\varphi,\eta,t) \underset{\eta\to\infty}{\to} 0, \end{cases}$$

$$U_1(\varphi,\eta,t) = -v^{-2}(\varphi, Q_*) P_{0t},$$

$$U_2(\varphi,\eta,t) = -2v'v^{-1}\eta(P_{1t} + U_1) - (vv'' + v'^2)v^{-2}P_{0t} - v^2(\varphi, Q_*)\times$$

$$\times(a_0 P_{0\varphi\varphi} + a_1 P_0 P_{0\eta\eta} + a_1(P_{0\eta}^2 + 2(P_{0\eta}\Pi_0(\xi, Q_*, t) + P_0 c_0(\varphi, Q_*, t)))\,.$$

Задачі для приграничних функцій $\Gamma(\varphi,\mu,t) = \sum_{i=0}^{2} \Gamma_i\, \varepsilon^{i/2}$ записуються аналогічно.

2.3. Асимптотичний метод розв'язування задачі типу 'дифузія-конвекція' у двохзв'язній області

Практика показує, що в більшості випадків область, у якій розглядаємо конкретну модельну задачу, не є однозв'язною. Згодом асимптотичні методи успішно були використані і при розв'язуванні таких задач у двохзв'язних областях [9].

Розглянемо двозв'язну область $G = G_z \times (0, \infty)$, тут G_z $(z = x + iy)$ – двохзв'язна криволінійна область, яка є пористим пластом. Дослідимо випадок його обмеженості двома замкненими та достатньо гладкими межами $L_*=\{z: f_*\,(x,y)=0\}$ – внутрішня межа, $L^*=\{z: f^*(x,y)=0\}$ – зовнішня (рис. 3, а).

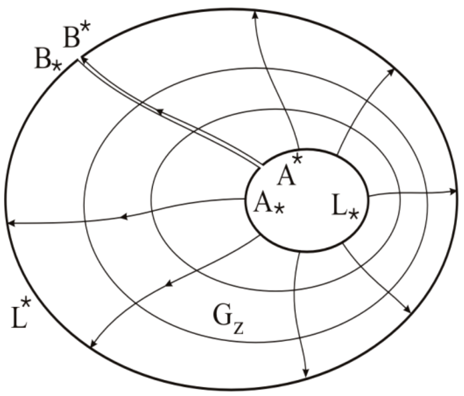
Для області G розглянемо таку задачу конвективної дифузії із запізненням, що забезпечується коефіцієнтом дифузії [21]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(h(c(x,y,t-\tau))\right)\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(h(c(x,y,t-\tau))\right)\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)-v_x\frac{\partial c}{\partial x}-v_y\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{2.12}$$

$$c\Big|_{L_*}=c_*\left(M,t\right),\ c\Big|_{L^*}=c^*\left(M,t\right),\ c(M,\tilde{t})=c_0^0\left(M,\tilde{t}\right)\ (-\tau\le\tilde{t}\le 0), \tag{2.13}$$

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi=0,\ \varphi\Big|_{L_*}=\varphi_*,\ \varphi\Big|_{L^*}=\varphi^*,\ Q=\int\limits_{L^*}-v_y dx+v_x dy, \tag{2.14}$$

де ε – малий параметр, n , M – нормаль та біжуча точка до відповідної кривої; $c(x,y,t)$ – концентрація розчиненої речовини в точці (x,y) в момент часу t; $\tau>0$ – стала-запізнення, v_x, v_y, φ – відповідно компоненти та потенціал його швидкості фільтрації у пористому середовищі G_z, $h(c(x,y,t)$, $c_*\left(M,t\right)$, $c^*\left(M,t\right)$, $c_0^0\left(M,t\right)$ – досить гладкі функції, які узгоджені між собою на сторонах області G.



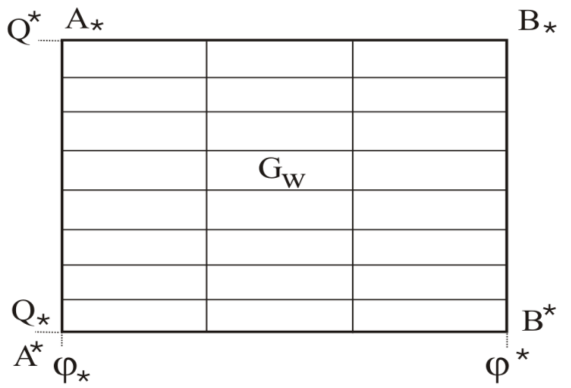


Рис. 3. Фізична двохзв'язна область G_z (а) та відповідна область комплексного потенціалу G_w (б).

Нехай функція $c_0^0(x,y,t)$ за умови $t=-\tau$ та $t=0$ задовільняє умови, що забезпечать потрібну нам для проведення наступних викладок теорії гладкість функції $c=c(x,y,t)$ при $t=\tau k\,(k=1,2,...)$.

Здійснимо побудову асимптотичного наближення розв'язку даної задачі. Для цього будуємо конформне відображення: $G_z \backslash \tilde{A} \to G_w$, тут $\Gamma = A_* A^* B^* B_*$ – розріз двохзв'язної області G_z вздовж певної лінії розділу потоку, який визначається у процесі розв'язання [9], а $G_w = \{ w = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q \}$ – відповідна фізичній області G_z область комплексного потенціалу див. рис. 2.1, б), $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії , яка є комплексно-спряженою до функції $\varphi = \varphi(x, y)$). Вважаємо також, що ми знайшли поле швидкостей $(v_x(x, y), v_y(x, y))$. Перейшовши до нових змінних $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ в (2.11) та (2.12), отримаємо таку дифузійну задачу для області G_w:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi) \cdot \Big(h(c(\varphi,\psi,t-\tau)) \cdot \big(c_{\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t) + c_{\psi\psi}(\varphi,\psi,t) \big) + c_{\varphi}(\varphi,\psi,t) \times$$

$$\times h_{\varphi}(\varphi,\psi,t-\tau) + c_{\psi}(\varphi,\psi,t) h_{\psi}(\varphi,\psi,t-\tau) \Big) - v^2(\varphi,\psi) \cdot c_{\varphi}(\varphi,\psi,t) = c_t(\varphi,\psi,t), \quad (2.15)$$

$$c(\varphi_*,\psi,t) = c_*(\psi,t),\ c(\varphi^*,\psi,t) = c^*(\psi,t),\ c(\varphi,\psi,\tilde{t}) = c_0^0(\varphi,\psi,\tilde{t}),\ -\tau \le \tilde{t} \le 0. \quad (2.16)$$

Розв'язок кожної із задач із запізненням τ (2.15), (2.16) шукатимемо як сукупність розв'язків відповідних задач без запізнення на кожному із проміжків часу $[(k-1)\tau, k\tau], k = 1, 2, \ldots$:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi) \cdot \Big(h_{k\tau}(\varphi,\psi,t) \cdot \big(c^{[k]}{}_{\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t) + c^{[k]}{}_{\psi\psi}(\varphi,\psi,t) \big) + \big(c^{[k]}{}_{\varphi}(\varphi,\psi,t) \times$$

$$\times h_{k\tau\varphi}(\varphi,\psi,t) + c^{[k]}{}_{\psi}(\varphi,\psi,t) h_{k\tau\psi}(\varphi,\psi,t) \big) \Big) - v^2(\varphi,\psi) \cdot c^{[k]}{}_{\varphi}(\varphi,\psi,t) = c^{[k]}{}_{t}(\varphi,\psi,t),$$

$$c^{[k]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau) = \gamma_k(\varphi,\psi,(k-1)\tau),$$

$$c^{[k]}(\varphi_*,\psi,t) = c_*(\psi,t),\ c^{[k]}(\varphi^*,\psi,t) = c^*(\psi,t), \quad (2.17)$$

де $h_{k\tau}(\varphi,\psi,t) = h\big(c^{[k]}(\varphi,\psi,t-\tau)\big) = h\big(\gamma_k(\varphi,\psi,t-\tau)\big)$,

$$\gamma_k(\varphi,\psi,t) = \left[\begin{array}{l} c^{[k-1]}(\varphi,\psi,t),\ k = 2, 3, \ldots, \\ c_0^0(\varphi,\psi,t),\ k = 1. \end{array} \right.$$

Розв'язок кожної із періодичних стосовно змінної ψ задач (2.17) з точністю порядку $O(\varepsilon^{N+1})$ шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду:

$$c^{[k]}(\varphi,\psi,t)=\left(c_0^{[k]}(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)\right)+\sum_{i=0}^{N+1}\ddot{I}_i^{[k]}(\xi,\psi,t)\varepsilon^i+R^{[k]}(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \qquad (2.18)$$

де $R^{[k]}(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ – залишковий член, $c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{0,N}$) –регулярні члени асимптотичного наближення, так: $c_0^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ – складова розвязку відповідної виродженої задачі , що відповідає за конвективне перенесення; $c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{1,N}$) – поправки, які враховують дифузійний вплив скрізь в даній області (за виключенням деякої її пригранichної ділянки); $\ddot{I}_i^{[k]}(\xi,\psi,t)$ – функції типу пограничного шару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $\xi=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$ – змінна розтягу,.

Для знаходження функцій $c_0^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ та $c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{1,N}$) здійснимо підстановку (2.18) в (2.17) та після застосування стандартної процедури прирівнювання членів при однакових степенях ε приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot c^{[k]}_{0\,\varphi}(\varphi,\psi,t)+c^{[k]}_{0\,t}(\varphi,\psi,t)=0, \\ c_0^{[k]}(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t), \\ c_0^{[k]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau)=\overline{\gamma}^{[k]}(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot c^{[k]}_{i\,\varphi}(\varphi,\psi,t)+c^{[k]}_{i\,t}(\varphi,\psi,t)=g_i^{[k]}(\varphi,\psi,t), \\ c_i^{[k]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau)=\overline{\overline{\gamma}}_i^{[k]}(\varphi,\psi), \\ c_i^{[k]}(\varphi_*,\psi,t)=0. \end{cases}$$

Тут $g_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)\Big(h_{k\tau}(\varphi,\psi,t)\cdot\big(c^{[k]}_{i-1\,\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+c^{[k]}_{i-1\,\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\big)+$

$$+c^{[k]}_{i-1\,\varphi}(\varphi,\psi,t)h_{k\tau\varphi}(\varphi,\psi,t)+c^{[k]}_{i-1\,\psi}(\varphi,\psi,t)h_{k\tau\psi}(\varphi,\psi,t)\Big),$$

$$\overline{\gamma}^{[k]}(\varphi,\psi)=\begin{cases} c_0^{[k-1]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau),\ k=2,3,\dots, \\ c_0^0(\varphi,\psi,0),\ k=1, \end{cases}$$

$$\overline{\overline{\gamma}}_i^{[k]}(\varphi,\psi)=\begin{cases} c_i^{[k-1]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau),\ k=2,3,\dots, \\ 0,\ k=1. \end{cases}$$

В результаті їхнього розв'язування маємо:

$$c_0^{[k]}(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} c_*\left(\psi,t-f(\varphi,\psi)\right), \quad t\geq f(\varphi,\psi), \\ \overline{\gamma}^{[k]}\left(f^{-1}\left(f(\varphi,\psi)-t\right),\psi\right), \quad t<f(\varphi,\psi), \end{array}\right.$$

$$c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_i^{[k]}\left(s,\psi,t-f(\varphi,\psi)+f(s,\psi)\right)}{v^2(s,\psi)}ds, \\ \quad t\geq f(\varphi,\psi), \\ \displaystyle\int_{(k-1)\tau}^{t} g_i^{[k]}\left(f(\varphi,\psi)-t+\tilde{t},\psi,\tilde{t}\right)d\tilde{t}+\overline{\overline{\gamma}}_i^{[k]}(\varphi,\psi), \\ \quad t<f(\varphi,\psi), \end{array}\right.$$

тут $f(\varphi,\tilde{\psi})=\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\tilde{\psi})}$ – час проходження фіксованої частинки по відповідній лінії течії $\psi(x,y)=\tilde{\psi}$ із точки $(x(\varphi_*,\tilde{\psi}),y(\varphi_*,\tilde{\psi}))$ до точки $(x(\varphi,\tilde{\psi}),y(\varphi,\tilde{\psi}))$, f^{-1} – є функцією, оберненою до функції f відносно змінної φ.

Функція типу пограничного шару $\ddot{I}^{[k]}=\sum_{i=0}^{N+1}\ddot{I}_i^{[k]}(\xi,\psi,t)\varepsilon^i$ знищує неузгодженості, що внесені регулярною складовою асимптотики $\overline{c}^{[k]}=\sum_{i=0}^{N}c_i^{[k]}\varepsilon^i$ біля границі виходу із потоку $\varphi=\varphi^*$ (обов'язково має виконуватись умова: $\left.\overline{c}^{[k]}+\ddot{I}^{[k]}\right|_{\varphi=\varphi^*}=c^*+O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$). Тоді для відшукання поправок $\ddot{I}_i^{[k]}(\xi,\psi,t)$ $i=\overline{0,N+1}$ отримаємо задачі:

$$\begin{cases} h_{k\tau}\ddot{I}_{0\xi\xi}^{[k]}+\ddot{I}_{0\xi}^{[k]}=0, \\ \ddot{I}_0^{[k]}(0,\varphi,t)=\tilde{n}^*(\psi,t)-\tilde{n}_0^{[k]}(\varphi_*,\psi,t),\ \ddot{I}_0^{[k]}\underset{\xi\to\infty}{\to}0, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\left(h_{k\tau}\ddot{I}_{1\xi\xi}^{[k]}+\ddot{I}_{1\xi}^{[k]}\right)=\ddot{I}_{0t}^{[k]}+v^2(\varphi^*,\psi)\cdot\xi\times \\ \times h_{k\tau\xi}(\varphi^*,\psi,t)\cdot\ddot{I}_{0\xi\xi}^{[k]}+v^2(\varphi^*,\psi)\cdot h_{k\tau\varphi}(\varphi^*,\psi,t)\cdot\ddot{I}_{0\xi}^{[k]}, \\ \ddot{I}_1^{[k]}(0,\varphi,t)=-\tilde{n}_1^{[k]}(\varphi_*,\psi,t),\ \ddot{I}_1^{[k]}\underset{\xi\to\infty}{\to}0, \end{cases} \tag{2.20}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\left(h_{k\tau}\ddot{I}_{i\xi\xi}^{[k]}+\ddot{I}_{i\xi}^{[k]}\right)=d_i^{[k]}, \\ \ddot{I}_i^{[k]}(0,\varphi,t)=\zeta_i^{[k]},\ \ddot{I}_i^{[k]}\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ i=\overline{2,N+1}, \end{cases} \tag{2.21}$$

де

$$\zeta_i^{[k]}=\begin{bmatrix} -c_i^{[k]}(\varphi_*,\psi,t),\ \text{якщо}\ i=\overline{2,N}\ , \\ 0,\ \text{якщо}\ i=N+1, \end{bmatrix}$$

$$d_i^{[k]}(\xi,\psi,t)=\frac{\partial\ddot{I}_{i-1}^{[k]}}{\partial t}-\sum_{l+j=1}^{i}\left(V_l\cdot H_{k\tau j}\frac{\partial^2\ddot{I}_{i-(j+l)}^{[k]}}{\partial\xi^2}\right)-\sum_{l+j=0}^{i-2}\left(V_l\cdot H_{k\tau j}\frac{\partial^2\ddot{I}_{i-2-(j+l)}^{[k]}}{\partial\psi^2}\right)+$$

$$+\sum_{l+j=0}^{i-1}\left(V_l\cdot\left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial\varphi}\right)_j\frac{\partial\ddot{I}_{i-1-(j+l)}^{[k]}}{\partial\xi}\right)-\sum_{l+j=0}^{i-2}\left(V_l\cdot\left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial\psi}\right)_j\frac{\partial\ddot{I}_{i-2-(j+l)}^{[k]}}{\partial\psi}\right)-\sum_{l=1}^{i}\left(V_l\cdot\frac{\partial\ddot{I}_{i-l}^{[k]}}{\partial\xi}\right),$$

$H_{k\tau j}$, $\left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial\varphi}\right)_j$, $\left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial\psi}\right)_j$ – коефіцієнти, які стоять при j-тих степенях ε в розкладах $h_{k\tau}(\varphi^*-\xi\varepsilon,\psi,t)$, $h_{k\tau\varphi}(\varphi^*-\xi\varepsilon,\psi,t)$, $h_{k\tau\psi}(\varphi^*-\xi\varepsilon,\psi,t)$ відповідно в Тейлорів ряд біля $\varphi=\varphi^*$, V_l – коефіцієнт при l-тому степені ε в розкладі $v^2(\varphi^*-\xi\varepsilon,\psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi^*$.

Розв'язок задач (2.19) – (2.21) шукаємо так само, як і вище. Зокрема:

$$\ddot{I}_0^{[k]}(\xi,\psi,t)=\left(c^*(\psi,t)-c_0^{[k]}(\varphi^*,\psi,t)\right)\cdot e^{-\xi h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*,\psi,t)},$$

$$\ddot{I}_1^{[k]}(\xi,\psi,t)=-\xi\cdot\left(K_1^{[k]}(\psi,t)+K_2^{[k]}(\psi,t)\cdot\left(h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*,\psi,t)+\xi/2\right)\right)\cdot e^{-\xi h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*,\psi,t)},$$

тут $K_1^{[k]}(\psi,t)=v^{-2}(\varphi^*,\psi)\cdot\left(\frac{\partial c^*(\psi,t)}{\partial t}-\frac{\partial c_0(\varphi^*,\psi,t)}{\partial t}-\frac{\partial h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*,\psi,t)}{\partial t}\times\right.$

$$\left.\times\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\right)-\frac{h_{k\tau\varphi}(\varphi^*,\psi,t)}{h_{k\tau}(\varphi^*,\psi,t)}\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right),$$

$$K_2^{[k]}(\psi,t)=\xi\frac{\partial h_{k\tau}(\varphi^*,\psi,t)}{\partial\xi}\cdot h_{k\tau}^{-2}(\varphi^*,\psi,t)\cdot\left(c^*(\psi,t)-c_0(\varphi^*,\psi,t)\right).$$

На основі проведених вище викладок, можна зробити висновок, що розв'язок розглянутих задач має суттєві відмінності від таких же задач у однозв'язних чотирикутних криволінійних областях, які полягають у наявності «періодичності» замість бокових поправок.

2.4. Застосування асимптотичних розвинень розв'язків конвективно дифузійних задач у випадку залежності дифузійного коефіцієнта від координат двохзв'язної області

Розглянемо в області $G = G_z \times (0,\infty)$ (z=x+i y) G_z– двохзв'язна криволінійна область, яка обмежена двома гладкими замкненими границями-контурами $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній, $L_* = \{z : f_* (x, y) = 0\}$ – внутрішній, (див.рис.4 а), наступну обернену задачу, що відповідає процесу типу 'дифузія-конвекція' при фільтруванні водних розчинів в однорідному пористому середовищі [21]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,y)\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)-v_x(x,y)\frac{\partial c}{\partial x}-v_y(x,y)\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{2.22}$$

$$c\Big|_{L_*} = c_*(M,t), \qquad c\Big|_{L^*} = c^*(M,t), \qquad c(x,y,0) = c_0^0(x,y,0), \tag{2.23}$$

$$b(x,y)\frac{\partial c(x,y,0)}{\partial t} = c_*^*(x,y),\ (x,y)\in G_z, \tag{2.24}$$

$$(v_x, v_y) = grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi = 0,\ \varphi\Big|_{L_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{L^*} = \varphi^*,\ Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy, \tag{2.25}$$

тут M – біжуча точка відповідної кривої, n – зовнішня нормаль до певної кривої, $c(x, y, t)$ – відповідає за концентрацію розчинної речовини в течії у точці (x, y) в момент часу t, $b(x, y)$ - досить гладка обмежена функція, ε – малий параметр, $\varepsilon > 0$, v_x, v_y, φ– відповідно компоненти та потенціал його швидкості в пористому середовищі G_z.

Нехай задача (2.25), методом конформного відображення області $G_z \setminus \Gamma \to G_w$, тут $\Gamma = A_* A^* B^* B_*$ – розріз двозхв'язної області G_z по одній із ліній течії, $G_w = \{w = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*\}$ – відповідна G_z

область комплексного потенціалу (рис.4 б), $\psi=\psi(x,y)$ – функція течії, комплексно спряжена до $\varphi=\varphi(x,y)$, є розв'язаною. Також нехай одним із відомих методів знайдено поле швидкості $\left(v_x(x,y),v_y(x,y)\right)$.

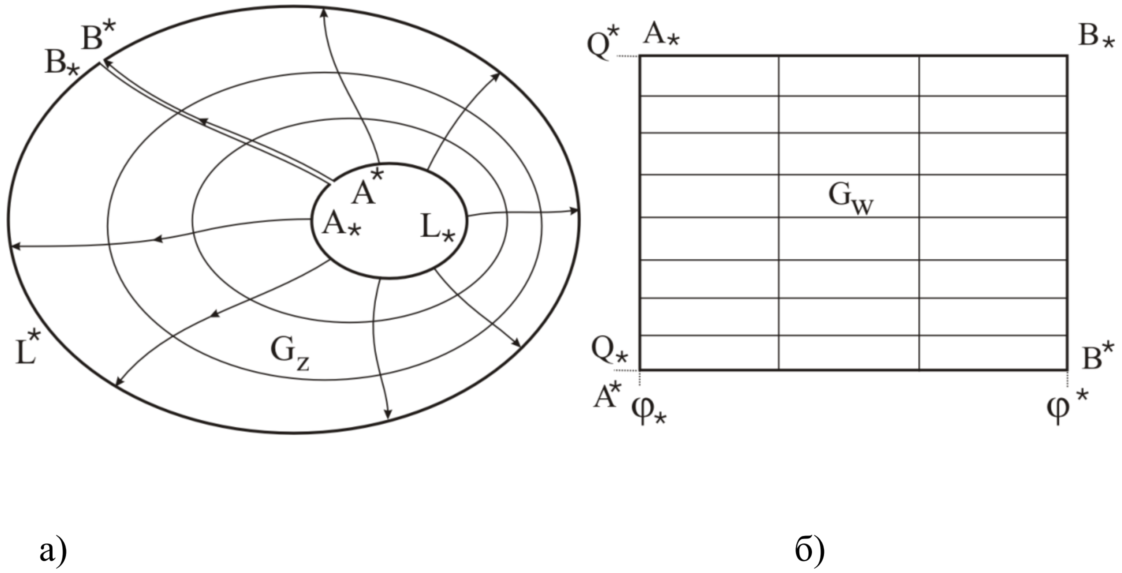


Рис. 4. Двозв'язна область G_z (а) та відповідна область комплексного потенціалу G_w (б).

Здійснивши заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ в (2.22) та (2.23), (2.24), прийдемо до задачі типу "дифузія" для області G_w:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left[a(\varphi,\psi)\left(u_{\varphi\varphi}+u_{\psi\psi}\right)+a_\varphi(\varphi,\psi)u_\varphi(\varphi,\psi)+a_\psi(\varphi,\psi)u_\psi(\varphi,\psi)\right]- \\ -v^2(\varphi,\psi)u_\varphi=u_t, \tag{2.26}$$

$$u(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi),u(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t)\ ,\ u(\varphi^*,\psi,t)=u^*(\psi,t), \tag{2.27}$$

$$a(\varphi,\psi)u_t(\varphi,\psi,0)=u_*^*(\varphi,\psi), \tag{2.28}$$

тут $u(\varphi,\psi,t)=c(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $a(\varphi,\psi)=b(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi))$ і т.д.

Для відшукання невідомих $u(\varphi,\psi,t)$ та $a(\varphi,\psi)$ з точністю порядку $O(\varepsilon^{N+1})$, розв'яжемо кожну із періодичних по змінній ψ задачу (2.26)-(2.28). Розвязок шукатимемо у виді асимптотичних рядів:

$$u(\varphi,\psi,t)=\left(u_0(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i u_i(\varphi,\psi,t)\right)+\sum_{i=0}^{n+1}\pi_i\ (\xi,\psi,t)\varepsilon^i+r(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \qquad (2.29)$$

$$a(\varphi,\psi)=a_0(\varphi,\psi)+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i a_i(\varphi,\psi)+r_a(\varphi,\psi,\varepsilon), \qquad (2.30)$$

де $r(\varphi,\psi,t,\varepsilon), r_a(\varphi,\psi,\varepsilon)$ – залишкові члени асимптотики, $u_i(\varphi,\psi,t)$, $a_i(\varphi,\psi)$ $(i=\overline{0,n})$ – члени регулярної частини асимптотики. Так $u_0(\varphi,\psi,t)$ – розв'язок відповідної виродженої конвективної задачі, $u_i(\varphi,\psi,t)$ $(i=\overline{1,n})$ – дифузійні поправки, які враховують вплив дифузії в даній області за винятком деякої її приграничної ділянки, $\pi_i(\xi,\psi,t)$ – поправки типу примежового шару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки біля виходу фільтраційної течії), $\xi=(\varphi^*-\varphi)\varepsilon^{-1}$ – розтягнена змінна, відповідне регуляризуюче перетворення.

Підставивши рівняння (2.29) і (2.30) в (2.26)-(2.28), а також здійснивши стандартну процедуру прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях малого параметра ε, отримаємо такі задачі для знаходження регулярних членів асимптотичного наближення:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot u_{0\varphi}(\varphi,\psi,t)+u_{0t}(\varphi,\psi,t)=0,\\ u_0(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t), u_0(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$a_0(\varphi,\psi)(u_{0_t}(\varphi,\psi,0)+\pi_{0_t}(\xi,\psi,0))=u_*^*(\varphi,\psi),$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot u_{k\varphi}+u_{kt}=g_k(\varphi,\psi,t),\\ u_k(\varphi,\psi,0)=0, u_k(\varphi_*,\psi,t)=0,\end{cases}$$

$$a_k(\varphi,\psi)(u_{0_t}(\varphi,\psi,0)+\pi_{0_t}(\xi,\psi,0))=-\sum_{i=0}^{k-1}a_i(\varphi,\psi)(u_{k-i_t}(\varphi,\psi,0)+\pi_{k-i_t}(\xi,\psi,0)),$$

$$g_k(\varphi,\psi,t)=\sum_{i=0}^{k-1}v^2(\varphi,\psi)\Big[a_i(\varphi,\psi)(u_{k-i_{\varphi\varphi}}(\varphi,\psi,t)+u_{k-i_{\psi\psi}}(\varphi,\psi,t))+$$

$$a_{i_\varphi}(\varphi,\psi)u_{k-i_\varphi}(\varphi,\psi,t)+a_{i_\psi}(\varphi,\psi)u_{k-i_\psi}(\varphi,\psi,t)\Big],\ k=\overline{1,n}.$$

В результаті їхнього розв’язання отримаємо:

$$u_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}u_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)), & t\ge f(\varphi,\psi),\\ u_0^0\left(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi\right), & t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$a_0(\varphi,\psi)=\frac{u_*^*(\varphi,\psi)}{u_{0_t}(\varphi,\psi,0)+\pi_{0_t}(\xi,\psi,0)},$$

$$u_k(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_k(\tilde\varphi,\psi,t-f(\varphi,\psi)+f(\tilde\varphi,\psi))}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}d\tilde\varphi, & t\ge f(\tilde\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g_k\left(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t+\tilde t,\psi),\psi,\tilde t\right)d\tilde t, & t<f(\tilde\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$a_k(\varphi,\psi)=-\frac{\sum_{i=0}^{k-1}a_i(\varphi,\psi)(u_{k-i_t}(\varphi,\psi,0)+\pi_{k-i_t}(\xi,\psi,0))}{u_{0_t}(\varphi,\psi,0)+\pi_{0_t}(\xi,\psi,0)},\ k=\overline{1,n},$$

де $f(\varphi,\psi)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{d\tilde\varphi}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}$, f^{-1} – обернена до f функція відносно змінної φ,

$$\xi=\frac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}.$$

Щоб задовольнити другу з крайових умов будуєтмо зовнішню примежову функцію $\pi=\sum\limits_{i=0}^{n+1}\pi_i\varepsilon^i$ біля $\varphi=\varphi^*$ таким чином, щоб конвективна складова $u\ \ (\varphi,\psi,t)$ задовольняла і дане рівняння і всі задані крайові умови. Тому для виконання цієї вимоги вводимо заміну (розтяг): $\xi=\frac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$.

Врахувавши наступнірівності: $\frac{\partial}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\xi}(-\frac{1}{\varepsilon})$, $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$ наш оператор представимо у вигляді:

$$L\pi = \varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left[a(\varphi,\psi)\Delta\pi + a_\varphi(\varphi,\psi)\pi_\varphi + a_\psi(\varphi,\psi)\pi_\psi\right] - v^2(\varphi,\psi)\pi_\varphi - \pi_t$$

у вигляді (ξ,ψ,t):

$$L\pi = v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)\left[a(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)\left(\frac{\pi_{\xi\xi}}{\varepsilon} + \varepsilon\pi_{\psi\psi}\right) + \frac{1}{\varepsilon}a_\xi(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)\pi_\xi + \right.$$

$$\left. + \varepsilon a_\psi(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)\pi_\psi\right] + v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)\frac{\pi_\xi}{\varepsilon} - \pi_t$$

Здійснимо розклад $v^2(\varphi_* - \xi\varepsilon,\psi)$ і $a(\varphi_* - \xi\varepsilon,\psi)$ в ряд Тейлора біля лінії $\varphi = \varphi^*$:

$$v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi) = v^2(\varphi^*,\psi) - 2v(\varphi^*,\psi)v'(\varphi^*,\psi)\varepsilon\xi + (v'^2(\varphi^*,\psi) +$$

$$+ v(\varphi^*,\psi)v''(\varphi^*,\psi))\varepsilon^2\xi^2 + \ldots,$$

$$a(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi) = (a_0(\varphi^*,\psi) + \varepsilon a_1(\varphi^*,\psi)) - (a_{0_\varphi}(\varphi^*,\psi) + \varepsilon a_{1_\varphi}(\varphi^*,\psi))\varepsilon\xi +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_{0_{\varphi\varphi}}(\varphi^*,\psi) + \varepsilon a_{1_{\varphi\varphi}}(\varphi^*,\psi))\varepsilon^2\xi^2 + \ldots$$

Похідні $a_\xi(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)$ і $a_\psi(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)$ вздовж лінії $\varphi = \varphi^*$ запишемо так:

$$a_\xi(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi) = -(\varepsilon a_{0_\varphi}(\varphi^*,\psi) + \varepsilon^2 a_{1_\varphi}(\varphi^*,\psi)) + (\varepsilon^2 a_{0_{\varphi\varphi}}(\varphi^*,\psi) + \varepsilon^3 a_{1_{\varphi\varphi}}(\varphi^*,\psi))\xi -$$

$$- \frac{1}{2}(\varepsilon^3 a_{0_{\varphi\varphi\varphi}}(\varphi^*,\psi) + \varepsilon^4 a_{1_{\varphi\varphi\varphi}}(\varphi^*,\psi))\xi^2 + \ldots$$

$$a_\psi(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi) = (a_{0_\psi}(\varphi^*,\psi) + \varepsilon a_{1_\psi}(\varphi^*,\psi)) - (a_{0_{\varphi\psi}}(\varphi^*,\psi) + \varepsilon a_{1_{\varphi\psi}}(\varphi^*,\psi))\varepsilon\xi +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_{0_{\varphi\varphi\psi}}(\varphi^*,\psi) + \varepsilon a_{1_{\varphi\varphi\psi}}(\varphi^*,\psi))\varepsilon^2\xi^2 + \ldots$$

Здійснивши процедуру прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях малого параметра ε, одержимо, для визначення поправок π_i, наступні рівняння із умовами:

$$\begin{cases} a_0(\varphi^*,\psi)\pi_{0\xi\xi}(\xi,\psi,t)+\pi_{0\xi}(\xi,\psi,t)=0, \\ \pi_0(0,\psi,t)=u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t), \\ \pi_0 \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0. \end{cases}$$

В результаті $\pi_0\left(\xi,\psi,t\right)=(u^*\left(\psi,t\right)-u_0(\varphi^*,\psi,t))e^{-\frac{u_t^*(\psi,0)}{u_*(\varphi^*,\psi)}\xi}$.

$$\begin{cases} a_0(\varphi^*,\psi)\pi_{1\xi\xi}(\xi,\psi,t)+\pi_{1\xi}(\xi,\psi,t)=\dfrac{\pi_{0_t}(\xi,\psi,t)}{v^2(\varphi^*,\psi)}+a_{0_\varphi}(\varphi^*,\psi)\pi_{0_\xi}(\xi,\psi,t)- \\ -(a_1(\varphi^*,\psi)-a_{0_\varphi}(\varphi^*,\psi)\xi)\pi_{0_{\xi\xi}}(\xi,\psi,t), \\ \pi_1(0,\psi,t)=-u_1(\varphi^*,\psi,t), \\ \pi_1 \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0. \end{cases}$$

Тоді розв'язки отриманої вище системи , отримаємо у виді:

$$\pi_1(\xi,\psi,t)=\left[\left((u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t))\frac{u^*_{*_\varphi}(\varphi^*,\psi)}{u_t^*(\psi,0)}-\frac{u_t^*(\psi,t)-u_{0_t}(\varphi^*,\psi,t)}{v^2(\varphi^*,\psi)}\right)\xi-\right.$$

$$-u_1(\varphi^*,\psi,t)-\left[(u_0(\varphi^*,\psi,t)-u^*(\psi,t))\frac{u_t^*(\psi,0)}{u_*^{*2}(\varphi^*,\psi)}\left(u_*^*(\varphi^*,\psi)\frac{u_{tt}^*(\psi,0)}{u_t^*(\psi,0)v^2(\varphi^*,\psi)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-u^*_{*\varphi}(\varphi^*,\psi)\right)\right]\left(\frac{\xi^2}{2}+\frac{u_*^*(\varphi^*,\psi)}{u_t^*(\psi,0)}\xi\right)\right]e^{-\frac{u_t^*(\psi,0)}{u_*^*(\varphi^*,\psi)}\xi}.$$

Бачимо, що $\pi_k(\xi,\psi,t)=\sum_{j=0}^{k+1}\alpha_{kj}(\varphi,\psi,t)\xi^j e^{-\frac{u_t^*(\psi,0)}{u_*^*(\varphi^*,\psi)}\xi}$, $k=\overline{1,n+1},$ тут усі α_{kj} визначаємо через $\alpha_{ij}\,(i<k)$ і граничні умови.

Для визначення оцінок r і r_a запишемо наступні співвідношення:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i(\varphi,\psi)\varepsilon^i+r_a(\varphi,\psi,\varepsilon)\right)\left(r_{\varphi\varphi}+r_{\psi\psi}\right)+\left(\sum_{i=1}^n a_{i\varphi}(\varphi,\psi)\varepsilon^i+r_{a_\varphi}(\varphi,\psi,\varepsilon)\right)r_\varphi(\varphi,\psi)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=1}^n a_{i\psi}(\varphi,\psi)\varepsilon^i+r_{a_\psi}(\varphi,\psi,\varepsilon)\right)r_\psi(\varphi,\psi)\right]-v^2(\varphi,\psi)r_\varphi=r_t+\varepsilon^{n+1}g_n(\varphi,\psi,t),$$

$r(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=r(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=r(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0;\ r_a(\varphi,\psi,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}p_n(\varphi,\psi,\varepsilon),$

тут $g_n(\varphi,\psi,t)$ та $p_n(\varphi,\psi,\varepsilon)$ виражаємо через уже відомі нам члени асимптотичних рядів (2.29) та (2.30).

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ У ТРИЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

3.1. Процеси конвективної дифузії у випадках переважання їх конвективних складових над дифузійними

Будемо досліджувати сингулярно збурений процес конвективної дифузії у випадку фільтрації в тризв'язній області G_z, за умови її обмеженості гладкими та замкнутими контурами L_*, L_0, L^* (рис.5, а)[21]:

$$\varepsilon\left(c_{xx}+c_{yy}\right)-\nu_x\cdot c_x-\nu_y\cdot c_y=c_t\ ,\ z=x+iy\in G_z\ ,\ 0<t<\infty\ ; \tag{3.1}$$

$$c\big|_{L_*}=c_*\left(P,t\right),\ c\big|_{L_0}=c^0\left(P,t\right),\ c\big|_{L^*}=c^*\left(P,t\right),\ c\big|_{t=0}=c_0^0\left(x,y\right); \tag{3.2}$$

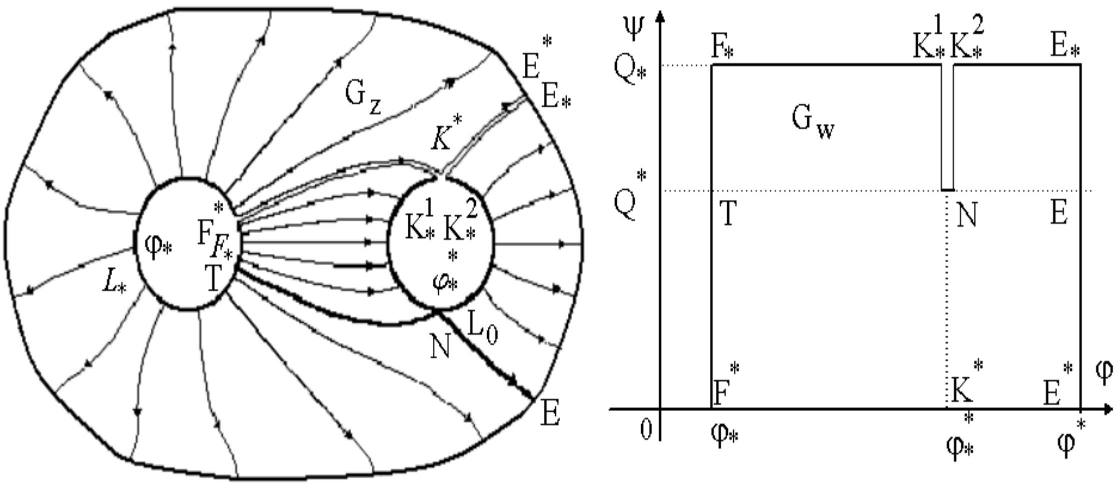
$$(\nu_x,\nu_y)=grad\ \varphi\ ,\Delta\varphi=0\ ,\ \varphi\big|_{L_*}=\varphi_*\ ,\ \varphi\big|_{L_0}=\varphi_*^*\ ,$$

$$\varphi\big|_{L^*}=\varphi^*\ ,\ \oint_{L_0}-\nu_y dx+\nu_x dy=0\ , \tag{3.3}$$

тут ε- коефіцієнт конвективної дифузії, який є малим параметром, $P-$ біжуча точка межі розглянутої області ($P\in\partial G_z=L_*\cup L_0\cup L^*$), $0<\varphi_*<\varphi_*^*<\varphi^*<\infty$, c_*, c^*, c^0, c_0^0 – задані досить гладкі функції, які є узгодженими попарно між собою вздовж ребер паралелепіпеда $G_z\times(0,\infty)$, $c^0(x,y,t)=c_+^0(x,y,t)$, у випадку $\varphi_n(x,y)<0$, то $c^0(x,y,t)=c_-^0(x,y,t)$, у випадку $\varphi_n(x,y)\geq 0$, $n=n(P)$ – зовнішня нормаль до контуру L_0. Відповідна область комплексного потенціалу G_w зображена на рис.5, б) де $w=\varphi+i\psi$, $\psi=\psi(x,y)$ є функцією течії яка комплексно спряжена з функцією $\varphi(x,y)$). Вважаємо, що також має місце певна узгодженість умов на контурах L_* та L_0, зокрема, регулярна функція c_0 має бути такою, щоб розв'язки задач (3.1), (3.2) були достатньо гладким по лініях розділення течій. А це можливо у випадку дуже швидкого природного (обумовленого значеннями $\psi\in[Q^*,Q_*]$) проходження частинок через частину області,яка є обмеженою останнім контуром.

Розв'язавши задачу фільтрації методом конформного відображення

$G_z \setminus \Gamma \to G_w$ (тут $\Gamma = F^* K^* \cup K^* E^*$ – розріз трьохзв'язної області G_z по одній із ліній розділення течії, а це знаходиться під час розв'язування, знайдемо поле швидкостей ($v_x(x,y), v_y(x,y)$), а також шукані параметри Q_*, Q^* (величина перетоку між контурами L_* та L^* повна витрата). Після проведених дій в області G_w при заміні змінних (x,y) на змінні (φ,ψ)



а) б)

Рис. 5. Фізична область (а) і відповідна область комплексного потенціалу (б)

задача (3.1), (3.3) прийме вид:

$$\begin{cases} \varepsilon v^2(\varphi,\psi)(c_{\varphi\varphi}+c_{\psi\psi}\} - v^2(\varphi,\psi)c_\varphi = c_{t,} \\ (\varphi,\psi,t)\in G_w{*}(0,\infty)=\Omega,\ v^2(\varphi,\psi)=(z'_w \overline{z}'_w)^{-1}, \\ c(\varphi^*_*,\psi,t)=c^0(\psi,t)=\begin{bmatrix} c^0_+(\psi,t), \varphi=\varphi^{*+}_* = \varphi^*_* + 0, \\ c^0_-(\psi,t), \varphi=\varphi^{*-}_* = \varphi^*_* - 0, \end{bmatrix} \\ c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t), t\in(0,\infty), \psi\in(0,Q_*), \\ c(\varphi,0,t)=c(\varphi,Q_*,t), c(\varphi,\psi,0)=c^0_0(\varphi,\psi), \\ c(\varphi^*,\psi,t)=c^*(\psi,t). \end{cases}$$

Розв'язок отриманої уже періодичної відносно змінної ψ задачі шукатимемо у виді:

$$c=(c_0+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i c_i)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i \Pi_i+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i P_i + R_n, \qquad (3.4)$$

тут Π_i, P_i – межові поправки відповідно біля ділянок $\left\{ w{:}\varphi=\varphi_*^{*-}, Q^* < \psi < Q_* \right\}$, $\varphi=\varphi^*$ границі G_w. $R_n = O(\varepsilon^{n+1})$ – залишковий член. Здійснивши підстановку (3.4) в (3.1) та стандартну процедуру зрівнювання коефіцієнтів, отримаємо наступні задачі для знаходження конвективної складової $c_0(\varphi,\psi,t)$ розв'язку і дифузійнихскладових $c_i(\varphi,\psi,t)$, $i=\overline{1,n}$:

$$v^2(\varphi,\psi)\,c_{0\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{0t}(\varphi,\psi,t)=0,$$

$$c_0(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t), t\in(0,\infty), \psi\in(0,Q_*),$$

$$c_0(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi), \varphi\in(\varphi_*,\infty), \psi\in(0,Q_*),$$

$$c_0(\varphi_*^*,\psi,t)=c_+^*(\psi,t), t\in(0,\infty), \psi\in(Q^*,Q_*);$$

$$v^2(\varphi,\psi)\,c_{i\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{it}(\varphi,\psi,t)=g_i(\varphi,\psi,t),$$

$$c_i(\varphi_*,\psi,t)=0, t\in(0,\infty), \psi\in(0,Q_*),$$

$$c_i(\varphi,\psi,0)=0, \varphi\in(\varphi_*,\infty), \psi\in(0,Q_*),$$

$$c_i(\varphi_*^*,\psi,t)=0, t\in(0,\infty), \psi\in(Q^*,Q_*),$$

$$g_i(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} g_{*i}(\varphi,\psi,t)= \\ g_i^*(\varphi,\psi,t)= \end{array}\right.\left[\begin{array}{l} v^2(\varphi,\psi)\left(\dfrac{\partial^2 c_{i-1(1)}}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 c_{i-1(1)}}{\partial\psi^2}\right), (\varphi,\psi)\in G_{w(1)}, \\ v^2(\varphi,\psi)\left(\dfrac{\partial^2 c_{i-1(2)}}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 c_{i-1(2)}}{\partial\psi^2}\right), (\varphi,\psi)\in G_{w(2)}, \end{array}\right.$$

$$G_{\omega(2)}=\left\{(\varphi,\psi){:}\ \varphi_*^*<\varphi<\infty, Q^*<\psi<Q_*\right\}, G_{\omega(1)}=G'_{\omega(1)}\cup G''_{\omega(1)}=$$

$$=\left\{(\varphi,\psi){:}\ \varphi_*<\varphi<\varphi_0, Q^*<\psi<Q_*\right\}\cup\left\{(\varphi,\psi){:}\ \varphi_*<\varphi<\infty,\ 0<\psi\le Q^*\right\}.$$

Застосувавши метод характеристик, отримаємо:

$$c_0(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} c_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi), \quad t\le f_1(\varphi,\psi)=\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{d\tilde\varphi}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}, \\ c_*(\psi,t-f_1(\varphi,\psi)), \quad t>f_1(\varphi,\psi), (\varphi,\psi)\in G_{w(1)}, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} c_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi), \quad t\le f_2(\varphi,\psi)=\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\tilde\varphi}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}, \\ c_+^*(\psi,t-f_2(\varphi,\psi)), \quad t>f_2(\varphi,\psi), (\varphi,\psi)\in G_{w(2)}; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$c_i(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_{*i}(\tilde{\varphi},\psi,f_1(\varphi,\psi)+t-f_1(\varphi,\psi))}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}d\tilde{\varphi},\ t>f_1(\varphi,\psi),\\ \int\limits_0^t g_{*i}(f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi)-t+\tilde{t},\psi),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ t\le f_1(\varphi,\psi),\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{g_i^*(\tilde{\varphi},\psi,f_2(\tilde{\varphi},\psi)+t-f_2(\varphi,\psi))}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}d\tilde{\varphi},\ t>f_2(\varphi,\psi),\\ \int\limits_0^t g_i^*(f_2^{-1}(f_2(\varphi,\psi)-t+\tilde{t},\psi),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ t\le f_2(\varphi,\psi).\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Поправки Π_i, P_i, враховують складові процесів, зумовлених умовами на границях області та вздовж ліній течії потоку $\varphi=\varphi_*^{*-}$, $\varphi=\varphi^*$ на границі області G_w (вихід фільтраційної течії), знаходимо аналогічно до [7].

Розділу зони дії початкової та граничної умов, тобто лінію фронту у конкретний момент часу t можна легко знайти розв'язавши рівняння $t=f(\varphi,\psi)$, де $f(\varphi,\psi)=\left[\begin{array}{l}f_1(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in G_{\omega(1)},\\ f_2(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in G_{\omega(2)}\end{array}\right.$.

3.2. Прогнозування фільтраційного процесу типу конвекція із урахуванням умов усереднення

Дослідимо процес типу 'дифузія-конвекція', у випадку, коли поведінка граничної умови на контурі L_0 залежна від зміни концентрацій у певному басейні внаслідок взаємного впливу характеристики розглянутих процесів всередині L_0 та пористого середовища. З метою спрощення викладення матеріалу будемо розглядати лише взаємодію на конвективному рівні. Розглянутий процес змоделюємо у трьохзв'язній криволінійній області G_z (див.рис.6,а) наступною нелінійною задачею [21]:

$$v=\mathrm{grad}\ \varphi,\ \mathrm{div}\,v=0,\ \varphi\big|_{L_*}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{L^*}=\varphi^*,\ \varphi\big|_{L_0}=\varphi_0,$$

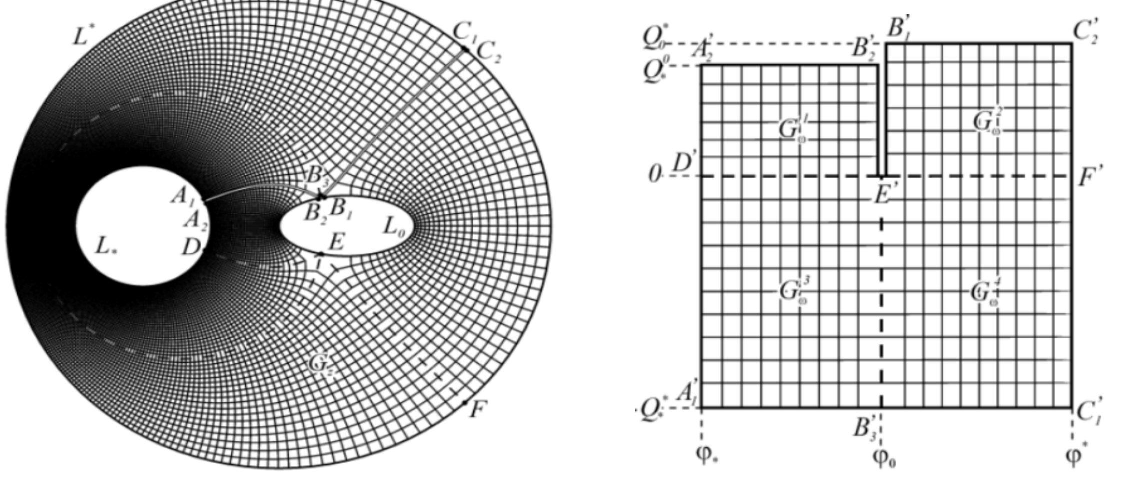
$$v_x\cdot c_x+v_y\cdot c_y-c_t=0,\ (x,y,t)\in G=G_z\times(0,\infty), \tag{3.5}$$

$$c\big|_{t=0,(x,y)\in G_z}=c_0^0(x,y),$$

$$c\big|_{L_*\times(0,\infty)}=c_*(x,y,t),\ c\big|_{L_0^*\times(0,\infty)}=\lambda\cdot\ell^{-1}\oint_{L_0^0}c(x,y,t)\,ds\,, \tag{3.6}$$

тут ℓ – довжина ділянки L_0^*, $c_*(x,y,t)$, $c_0^0(x,y)$ – фіксовані достатньо гладкі та узгоджені на межі $(\partial G_z,0)$ функції, $\varphi=\varphi(x,y)$ – потенціал швидкості фільтрації $\vec{v}=(v_x(x,y),v_y(x,y))$, $-\infty<\varphi_*<\varphi_0<\varphi^*<+\infty$, $L_0=L_0^0\cup L_0^*$, $L_0^*=\{z=x+iy\in L_0:\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial n}>0\}$, $L_0^0=\{z=x+iy\in L_0:\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial n}\le 0\}$, n – вектор внутрішньої нормалі до ∂G_z. Величина потенціалу φ_0 на контурному поповнювачі L_0 теке, що $\oint_{L_0}-v_y dx+v_x dy>0$. Умова усереднення (3.6) означає, що частина області, обмежена контуром L_0, відносно дуже швидко розчиняє та усереднює речовину, яка поступає до нього через межу L_0^0. Тому отримуємо процес її рівномірного розподілу по L_0^*. Область комплексного потенціалу G_ω відображена на рис.6,б, тут $w=w(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)-$ комплексний потенціал течії, $\psi=\psi(x,y)-$ функція течії. Щодо шуканих параметрів величин перетоків: від L_0 до L^*; від L_* до L_0, від L_* до L^*, (відповідно Q_0^*,Q_*^0,Q_*^*) , тут $Q_0^*-Q_*^0=\oint_{L_0}-v_y dx+v_x dy$, $Q_*^*+Q_0^*=\oint_{L_0^*}-v_y dx+v_x dy$, $-Q_*^*-Q_*^0=$ $=\oint_{L_*}-v_y dx+v_x dy$), знаємо лиш те, що $Q_0^*>Q_*^0$. Розріз $\Gamma=AB\cup BC$ ($A\in L_*$, $B\in L_0$, $C\in L^*$) тризв'язної області G_z умовно вибираємо по одній із ліній розділення течії і знаходимо в процесі розв'язування задачі. Коефіцієнт λ визначає ступінь вбирання басейном забруднюючих речовин (Збільшення при $\lambda>1$).

Тоді, згідно до формул обчислення вектора швидкості даного поля $\vec{v}=\frac{dw}{dz}=\left(\frac{dz}{dw}\right)^{-1}$, у вузлах , які знаходяться всередині динамічної сітки отримаємо: $v_{x\,i,j}=v_x(x_{i,j},y_{i,j})=J_{i,j}^{-1}(x_{i+1,j}-x_{i,j})\Delta\psi$, $v_{y\ i,j}=v_y(x_{i,j},y_{i,j})=J_{i,j}^{-1}(y_{i+1,j}-y_{i,j})\Delta\psi$, тут $J_{i,j}=(x_{i+1,j}-x_{i,j})\times(y_{i,j+1}-y_{i,j})-(x_{i,j+1}-x_{i,j})(y_{i+1,j}-y_{i,j})$, $v_{i,j}=\sqrt{v_{x\,i,j}^2+v_{y\,i,j}^2}$.



а) б)

Рис.6. Фізична область G_z та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w

Виконавши зміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ в (3.5) і (3.6), прийдемо до такої періодичної задачі типу ‘конвекція масоперенос’ області G_w:

$$v^2(\varphi,\psi)\cdot\frac{\partial c}{\partial\varphi}+\frac{\partial c}{\partial t}=0\,,\ (\varphi,\psi,t)\in\Omega=G_\omega\times(0,\infty)\,;$$

$$c(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi),(\varphi,\psi)\in G_\omega\,;c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\ t\geq 0\,,-Q_*^*\leq\psi\leq Q_*^0\,;$$

$$c(\varphi_0^+,\psi,t)=\frac{\lambda\int\limits_0^{Q_*^0}c(\varphi_0^-,\psi,t)d\psi}{Q_0^*},\ 0<\psi\leq Q_0^*,\ \varphi_0^+=\varphi_0+0,\ \varphi_0^-=\varphi_0-0\,.$$

Використавши метод характеристик, розв’язок задачі запишемо у виді:

$$c(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}c_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi),\quad t\leq f_1(\varphi,\psi)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}\,,\\ c_*(\psi,t-f_1(\varphi,\psi)),\quad t>f_1(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in G_\omega^1\cup G_\omega^3\cup G_\omega^4\,;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}c_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi),\quad t\leq f_2(\varphi,\psi)=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\dfrac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}\,,\\ \dfrac{\lambda\int\limits_0^{Q_*^0}c(\varphi_0^-,\psi,t-f_2(\varphi,\psi))d\psi}{Q_0^*},\quad t>f_2(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in G_\omega^2\,,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

де f_1^{-1}, f_2^{-1}– обернені функції до функцій f_1, f_2 відносно змінної φ (зауважимо, що такі функції існуватимуть, бо f_1, f_2 є монотонно зростаючими та неперервними і диференційовними функціями відносно певної змінної). Відмітимо, що ψ тут виступає як параметр.

Лінію фронту, яка є лінією розділу зони впливу початкової та граничної умов у певний момент часу t будемо знаходити у результаті розв'язування рівняння $t = f(\varphi, \psi)$, де

$$f(\varphi,\psi)=\begin{cases} f_1(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4, \\ f_2(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in G_\omega^2. \end{cases}$$

Щоб обчислити вирази $f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi)-t,\psi)$, $f_2^{-1}(f_2(\varphi,\psi)-t,\psi)$ (для зворотнього обчислення визначених інтегралів із змінною верхньою межею) використаємо принцип, запропонований у працях А.Я.Бомби. Тобто, проведемо дискретизацію по часу t, за формулою $t_k = \Delta t \cdot k,\ k = 0,1,2,...,\ 0 < \Delta t < \infty$. Далі використовуємо метод трапецій визначення визначених інтегралів та метод розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь який називають методом хорд. В результаті одержимо (з метою спрощення записів результатів розглядатимемо випадок $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$):

$$c(\varphi_i,\psi_j,t_k)=\begin{cases} \begin{cases} (\varphi_r + (\varphi_{r+1}-\varphi_r)(t_r^0 - t_r)(t_{r+1}-t)^{-1},\psi_j),\ t_k \le f(\varphi_i,\psi_j), \\ c_*(\psi_j, t_k - t_j),\quad t_k > f(\varphi_i,\psi_j), \end{cases} \\ (\varphi_i,\psi_j)\in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4, \\ \begin{cases} c_0^0(\varphi_r + (\varphi_{r+1}-\varphi_r)(t_r^* - t_r)(t_{r+1}-t_r)^{-1},\psi_j), \\ t_k \le f(\varphi_i,\psi_j), \\ Q_0^{*-1}\cdot\lambda\sum\limits_{q=m_1+1}^{m_1+m_2}(c(\varphi_0^-,\psi_q,t_k - f(\varphi_i,\psi_j))\cdot(\psi_q-\psi_{q-1}), \\ t_k > f(\varphi_i,\psi_j), \end{cases} \\ (\varphi_i,\psi_j)\in G_\omega^2, \end{cases}$$

тут $\psi_q = \begin{cases} -Q_*^* + Q_*^*\cdot q/m_1,\ \text{при}\ 0 \le q \le m_1, \\ Q_*^0 \cdot q/m_2,\ \text{при}\ m_1 < q \le m_2, \end{cases}$ $m_1, m_2 \in N$, $\varphi_r = f_1^{-1}(t_r)$, $\varphi_{r+1} = f_1^{-1}(t_{r+1})$,

$t_r < t_r^0 = f_1(\varphi_i,\psi_j) - t_k < t_{r+1}$, у випадку $(\varphi,\psi)\in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4$, $\varphi_r = f_2^{-1}(t_r)$, $t_r < t_r^* = f_2(\varphi_i,\psi_j) - t_k < t_{r+1}$, $\varphi_{r+1} = f_2^{-1}(t_{r+1})$ якщо $(\varphi,\psi)\in G_\omega^2$.

3.3. Асимптотичний метод наближення розв’язків фільтраційних задач типу “ дифузія-конвекція ” у три зв’язних областях

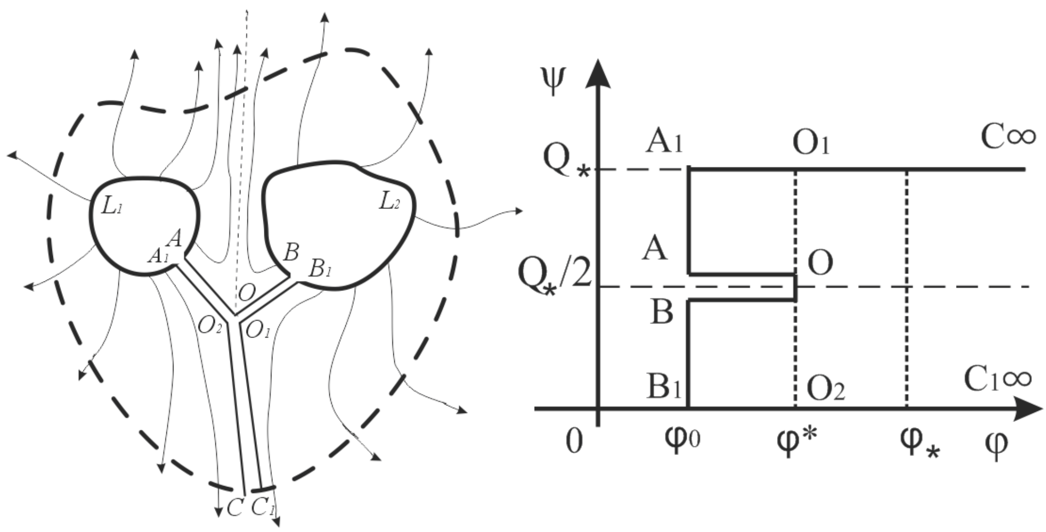
Дослідимо задачу типу дифузія- конвекція у випадку фільтрації в нескінченній області , яка по суті є пористим пластом G_z скінченої комплексної площини (z). Ці площина є обмеженою двома замкнутими контурами L_1, L_2 які є гладкими. Дослідимо випадок, коли конвективна скалдова масопереносу превалює над дифузійним[21]:

$$\varepsilon(c_{xx}+c_{yy})-v_x c_x-v_y c_y=c_t\,, \tag{3.7}$$

$$c\big|_{L_i}=c_i^*\left(P,t\right),\ c(x,y)\to 0\quad \text{при}\quad z\to\infty\,,\ c\big|_{t=0}=c_0^0\left(x,y\right), \tag{3.8}$$

$$(v_x,v_y)=grad\varphi,\ \Delta\varphi=0\,,\varphi\big|_{L_i}=\varphi_i\,,\oint_{L_i}-v_y dx+v_x dy=Q_i\,, \tag{3.9}$$

де $i=\overline{1,2}$, $0<Q_i<\infty, \varphi\to\infty$ при $z\to\infty$, $c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_0^0$ – задані достатньо гладкі та узгоджені функції , φ_i – задані значення потенціалу $\varphi(x,y)$ на граничних еквіпотенціальних лініях ($-\infty<\varphi_i<\infty$, $i=\overline{1,2}$), P– біжуча точка відповідної частини межі розглянутої області $(P\in(L_1\cup L_2))$, $z=x+iy\in G_z$, $0<t<\infty$, $(x,y,t)\in G_z\times(0,\infty)$ ε – малий параметр, коефіцієнт конвективної дифузії.



а) *б)*

Рис. 7. Фізична троьхзв’язна область G_z та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w

Дослідимо більш грунтовно випадок $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \overset{df}{=} \varphi_0$ (тоді $Q_{AA'} = Q_{BB'} =$ Q*/2). На рис. 7, *а)* зображено фізичну область фільтрації G_z, на якій і відбувається дифузійно конвективне перенесення забруднень. Відповідна їй область комплексного потенціалу G_w, тут $w = \varphi + i\psi$, $\psi = \psi(x, y)$ – комплексно спряжена функція течії до функції $\varphi = \varphi(x, y)$ зображена на рис.7,*б).* Нехай задача (3.9), є розв'язаною (для цього використаємо метод конформного відображення, розроблений А.Я. Бомбою) $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$). Також вважаємо, що знайдено поле швидкостей $\vec{v} = \left(v_x(x, y), v_y(x, y)\right)$. Тоді, використавши перехід від змінних (x, y) до змінних (φ, ψ) області G_w, задачу (3.7)-(3.8) зведемо до нової спеціальної періодичної задачі:

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi)(c_{\varphi\varphi} + c_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi)c_{\varphi} = c_t,\ (\varphi, \psi, t) \in G_w \times (0, \infty) \overset{df}{=} \Omega,$$

$$c(\varphi_i, \psi, t) = \begin{cases} c_1^*(\psi, t), \dfrac{Q}{2} < \psi \le Q, t \in (0, \infty); \\ c_2^*(\psi, t), 0 < \psi \le \dfrac{Q}{2}, t \in (0, \infty); \end{cases}$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), c(\varphi^*, 0, t) = c(\varphi^*, \frac{Q}{2}, t) = c(\varphi^*, Q, t),$$

$$c\big|_{AO} = c\big|_{A_1O_1}, c\big|_{BO} = c\big|_{BO_2}, c\big|_{CO_1} = c\big|_{C_1O_2}, \tag{3.10}$$

тут $v^2(\varphi, \psi) = \vec{v}\,\vec{\bar{v}} = v_x^2 + v_y^2$.

У випадку достатньої узгодженості граничної та початкової умов, у випадку виконання умов $c\big|_A = c\big|_{C'}$, $c\big|_{A'} = c\big|_B$, $c\big|_{B'} = c\big|_C$, асимптотичне наближення задачі (3.9) шукатимемо у виді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \left(c_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i c_i\right) + r_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \tag{3.11}$$

тут $c_i(\varphi,\psi,t)$ $(i=\overline{0,n})$ – члени регулярної частини асимптотики, $r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ – залишковий член асимптотики, $c_1,...,c_n$ – дифузійні поправки, що враховують вплив дифузійної складової процесу, c_0– розв'язок відповідної виродженої конвективної задачі.

Аналогічно до наведеного вище, виконаємо підстановку (3.11) в (3.10) та застосуємо відому процедуру прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів малого параметра ε. Тоді знаходимо функції $c_i(\varphi,\psi,t)$ із таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)c_{0\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{0t}(\varphi,\psi,t)=0, \\ c_0(\varphi_1,\psi,t)=c^*(\psi,t), \\ c_0(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi), \varphi\in(\varphi_1,\infty), \psi\in(0,Q_*), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)c_{i\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{it}(\varphi,\psi,t)=g_i(\varphi,\psi,t), \\ g_i(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)(\dfrac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial\psi^2}), (\varphi,\psi)\in G_w, \\ c_i(\varphi_1,\psi,t)=0, t\in(0,\infty), \psi\in(0,Q_*), \\ c_i(\varphi,\psi,0)=0, \varphi\in(\varphi_*,\infty), \psi\in(0,Q_*). \end{cases}$$

Розв'язавши дані задачі отримаємо:

$$c_0(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} c_0^1(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi), t\le f(\varphi,\psi), \\ c_1^*(\psi,t-f(\varphi,\psi)), t> f(\varphi,\psi), \end{array}\right. ,(\varphi,\psi)\in G_{w(1)}, \\ c_0^2(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} c_0^2(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi), t\le f(\varphi,\psi), \\ c_2^*(\psi,t-f(\varphi,\psi)), t> f(\varphi,\psi), \end{array}\right. ,(\varphi,\psi)\in G_{w(2)}, \end{array}\right.$$

$$c_i(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{g_{1i}(\overline{\varphi},\psi,f_1^{-1}(f_1(\overline{\varphi},\psi)+t-f_1(\varphi,\psi))}{v^2(\overline{\varphi},\psi)}d\overline{\varphi},t\ge f_1(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g_{1i}(f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi)-t+\overline{t}),\psi,t)d\overline{t},t<f_1(\varphi,\psi),\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{g_{2i}(\overline{\varphi},\psi,f^{-1}(f_2(\overline{\varphi},\psi)+t-f_2(\varphi,\psi))}{v^2(\overline{\varphi},\psi)}d\overline{\varphi},t\ge f_2(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g_{2i}(f_2^{-1}(f_2(\varphi,\psi)-t+\overline{t}),\psi,t)d\overline{t},t<f_2(\varphi,\psi),\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Тут $f\left(\varphi,\tilde{\psi}\right)=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{ds}{v^2\left(s,\tilde{\psi}\right)}$ – час переходу виділеної частинки по лінії течії $\psi=\tilde{\psi}$, з точки $(\varphi_0,\tilde{\psi})$ в точку $(\varphi,\tilde{\psi})$, f^{-1} –обернена до функції f функція відносно змінної φ (а така функція справді існує, бо підінтегральна функція $\frac{1}{v^2}$ – є неперервною диференційованою, обмеженою, додатньо визначеною),

$$g_{ki}(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)(\frac{\partial^2 c_{i-1(k)}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c_{i-1(k)}}{\partial\psi^2}),\ (\varphi,\psi)\in G_{w(k)},\ k=\overline{1,2},$$

$$G_w=G_{w(1)}\cup G_{w(2)},\ G_{w(1)}=\left\{(\varphi,\psi):\varphi_1<\varphi<\infty,\frac{Q_*}{2}<\psi\le Q_*\right\},$$

$$G_{w(2)}=\left\{(\varphi,\psi):\varphi_1<\varphi<\infty,0\le\psi\le\frac{Q_*}{2}{}_*\right\}.$$

У випадку обменості фізичної області G_z зовнішнім контуром L_*, тут $\varphi\big|_{L_*}=\varphi_*$, задаємо додаткову умову $c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t)$ на ньому. Тоді розв'язок задачі (2.20) знайдемо у виді:

$$c(\varphi,\psi,t)=\left(c_0(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i c_i\right)+\pi(\varphi,\psi,t)+r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \qquad (3.12)$$

тут $\pi(\varphi,\psi,t)$ – пограншарова функція вздовж $\varphi=\varphi_*$, яка використовується для того, щоб врахувати дифузійні процеси по межі виходу фільтраційного потоку та визначається аналогічно роботі [12].

Залишковий член асимптотики в області $\Omega^*=\Omega\backslash(\Omega_0\times(0,t^*))$ (тут t^* довільне більше нуля дійсне число), де Ω_0 – об'єднання усіх околів точок O, O1, O2 – образів точки $O\in G_z$ в яких швидкість стає рівною нулю, має наступний вигляд:

$$\left|r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\right|=O(\varepsilon^{n+1}). \tag{3.13}$$

Дійсно, здійснивши процедуру прирівнювання коефіцієнтів,описану в попередніх розділах, для оцінювання залишкового члена R_n маємо:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\cdot\left(r_{n\varphi\varphi}+r_{n\psi\psi}\right)-v^2(\varphi,\psi)\cdot r_{n\varphi}=r_{nt}+\varepsilon^{n+1}\cdot r_n^*(\varphi,\psi,t)+r_n^{**}(\varphi,\psi,t,\varepsilon);$$

$$r_n(\varphi_0,\psi,t,\varepsilon)=0\,,\; r_n(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})\,,\; R_n(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})\,,$$

тут, R_n^*- є рівномірно обмеженою та неперервною в G функцією, в силу гладкості та певної узгодженості граничних та початкової умов $r_n^{**}=O(\varepsilon^{n+1})$. Отож, згідно принципу максимуму для рівнянь параболічного типу, прийдемо до оцінки (3.13).

Якщо функції $c_1^*(\varphi,\psi,t)$, $c_2^*(\varphi,\psi,t)$, не достатньо узгоджені, то проведимо процедуру згладжування негладкостей по лініях течії. $\psi_0=0(\psi_2=Q_*),\psi_1=\dfrac{Q_*}{2}$. Розв'язок такої задачі шукаємо у виді:

$$c(\varphi,\psi,t)=\tilde{c}_0(\varphi,\psi,t)+s_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon\tilde{c}_1(\varphi,\psi,t)+s_1(\varphi,\psi,t)+$$
$$+\pi(\varphi,\psi,t)+r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\,,$$

тут $\left|r_n(\varphi,\psi,t)\right|=O(\varepsilon^{n+1})$,

$$\tilde{c}_0(\varphi,\psi,t)=\frac{1}{2}(\overline{c_0}(\varphi^*,\psi_0,t)+\overline{c_0}(\varphi^*,\psi_1,t))(1-\Phi(K(\varphi,\psi)))+$$
$$+\overline{c_0}(\varphi,\psi,t)\Phi(K(\varphi,\psi));$$

$$K(\varphi,\psi)=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(\varphi-\varphi_*)^2+(\psi-\psi_0)^2(\psi-\psi_1)^2(\psi-\psi_2)^2},$$

$$K_0(\varphi,\psi)=\frac{1}{\varepsilon}(\sqrt{(\varphi-\varphi^*)^2+(\psi-\psi_1)^2}+\sqrt{(\varphi-\varphi_*)^2+(\psi-\psi_1)^2}-(\varphi_*-\varphi^*)),$$

$$K_1(\varphi,\psi)=\frac{\sqrt{(\varphi-\varphi^*)^2+(\psi-\psi_0)^2}+\sqrt{(\varphi-\varphi_*)^2+(\psi-\psi_0)^2}-(\varphi_*-\varphi^*)}{\varepsilon}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{(\varphi-\varphi^*)^2+(\psi-\psi_2)^2}+\sqrt{(\varphi-\varphi_*)^2+(\psi-\psi_2)^2}-(\varphi_*-\varphi^*)}{\varepsilon},$$

$$\Phi(\delta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\delta}e^{\frac{-s^2}{2}}ds;\qquad D(\theta)=\begin{cases}1,\theta>0,\\-1,\theta\le 0\end{cases},$$

$$\overline{c_0}(\varphi,\psi,t)=c_0^1(\varphi,\psi,t)\frac{(1-D((\psi-\psi_0)(\psi-\psi_1)))\Phi(K_0(\varphi,\psi))\Phi(K_1(\varphi,\psi))}{2}+$$
$$+c_0^2(\varphi,\psi,t)\frac{(1-D((\psi-\psi_0)(\psi-\psi_1)))\Phi(K_1(\varphi,\psi))\Phi(K_0(\varphi,\psi))}{2}.$$

Для відшукання поправки $s_0(\varphi,\psi,t)=s_{00}(\varphi,\psi,t)+\sqrt{\varepsilon}\cdot s_{01}(\varphi,\psi,t)$ отримаємо задачу:

$$\begin{cases}\varepsilon\cdot v^2(\varphi,\psi)((\tilde{c}_0+s_0)_{\varphi\varphi}+(\tilde{c}_0+s_0)_{\psi\psi})-v^2(\varphi,\psi)(\tilde{c}_0+s_0)_{\varphi}=(\tilde{c}_0+s_0)_t,\\ \tilde{c}_0+s_0\big|_{t>0,\varphi=0}=\left[\begin{array}{l}c_1(\psi,t),\frac{Q}{2}<\psi\le Q,t\in(0,\infty);\\ c_2(\psi,t),0\le\psi\le\frac{Q}{2},t\in(0,\infty);\end{array}\right.\\ \tilde{c}_0+s_0\big|_{t=0,\varphi>0}=c_0^0(\varphi,\psi).\end{cases}$$

Згладжування регулярної поправки c_1 асимптотичного ряду і побудова функції $s_1(\varphi,\psi,t)$ проводимо аналогічно.

У випадку інших співвідношень обраних значень граничних потенціалів φ_i на межах L_i (а, отже, й витрат Q_1, Q_2), будемо спостерігати різноманітні форми формування течій у області G_z та у відповідних областях комплексного потенціалу G_ω. У випадках, коли $Q_{AA`}<Q_{BB`}$, $Q_{AA`}>Q_{BB`}$ використовуватимемо розроблений вище підхід побудови асимптотичного наближення розв'язку поставленої задачі.

3.4. Результати числових експериментів

Для задачі з п. 3.2. розглянемо плоске ідеальне поле на площині $z=x+iy$, яке породжене двома особливими точками – витоками $z=z_1, z_2$, інтенсивності $Q=Q_*/2$. Комплексний потенціал цього поля запишемо у вигляді:

$$w=\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln(z-z_1)+\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln(z-z_2)=\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln((z-z_1)(z-z_2)). \qquad (3.14)$$

Поле швидкостей обчислимо за формулою :

$$\bar{v}(z)=\frac{dw}{dz}=\frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{(z-z_1)+(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Розв'яжемо рівняння $\vec{v}(z)=0$ та знайдемо координати точки M розділу потоків:

$$z_M=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+i\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (3.15)$$

Лінії течії та еквіпотенціальні лінії будемо знаходити розділивши дійсну та уявну частини в (3.18):

$$\varphi+i\psi=\frac{Q}{2\pi}(\ln\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+i\cdot arctg\frac{y-y_1}{x-x_1}+iS(x-x_1,y-y_1)+$$

$$+\ln\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2})+i\cdot arctg\frac{y-y_1}{x-x_1}+iS(x-x_1,y-y_1)),$$

де $S(x,y)=\begin{cases}0 & при\ x\geq 0, y\geq 0\\ \pi & при\ x<0,\\ 2\pi & при\ x>0, y<0.\end{cases}$

Звідси

$$\varphi(x,y)=\frac{Q}{4\pi}\ln(((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)((x-x_2)^2+(y-y_2)^2)),$$

$$\psi(x,y)=\frac{Q}{2\pi}(arctg\frac{y-y_1}{x-x_1}+arctg\frac{y-y_2}{x-x_2}+S(x,y,x_1,y_1,x_2,y_2)),$$

де $S=S(x,y,x_1,y_1,x_2,y_2)=S(x-x_1,y-y_1)+S(x-x_2,y-y_2)$.

Відповідну динамічну сітку $\varphi(x,y)=\overline{\varphi}_l$, $\psi(x,y)=\overline{\psi}_j$, при $z_1=0, z_2=2$, $\varphi_0=-0.08, \varphi_*=0.35, \varphi^*=0, Q=13$ зображено на рис 8. Припустимо, що існує конформне відображення $G_z\mapsto G_w$ (рис. 9.). Розподіл величини швидкостей зображено на рис. 10.

Ілюстрації розподілу концентрації розчинної речовини при

$$c_0^0=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(\varphi+2.7)^3+(\frac{1}{3}\psi)^3}, 0.5\le\psi<6.78;\\ \dfrac{1}{1+(\varphi+2.7)^3+(\frac{1}{8}\psi)^3}, 6.78\le\psi\le 13.06.\end{cases}$$

$$c_1(\psi,t)=\frac{1}{1+t^2+(\frac{1}{3}\psi)^3};$$

$$c_2(\psi,t)=\frac{1}{1+t^2+(\frac{1}{8}\psi)^3};$$

подано на рис. 11.-14.

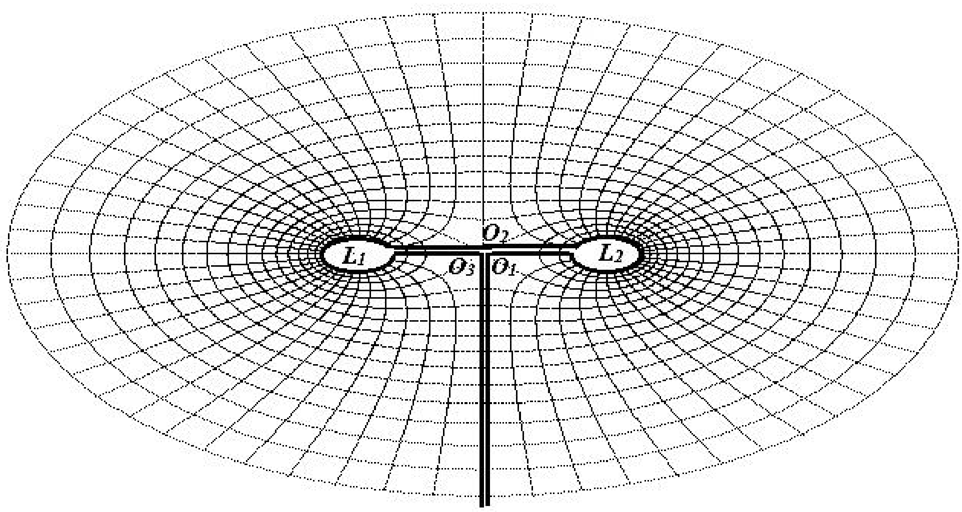


Рис. 8. Динамічна сітка фізичної області G_z

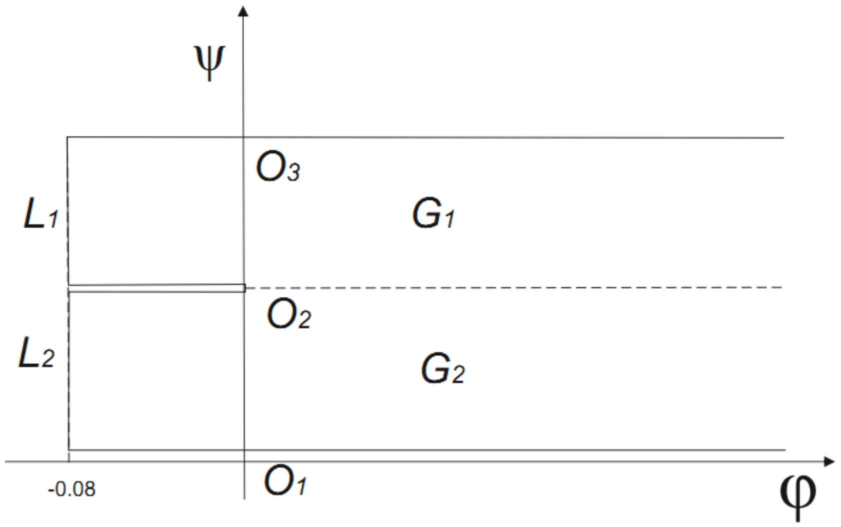


Рис. 9. Область комплексного потенціалу G_w

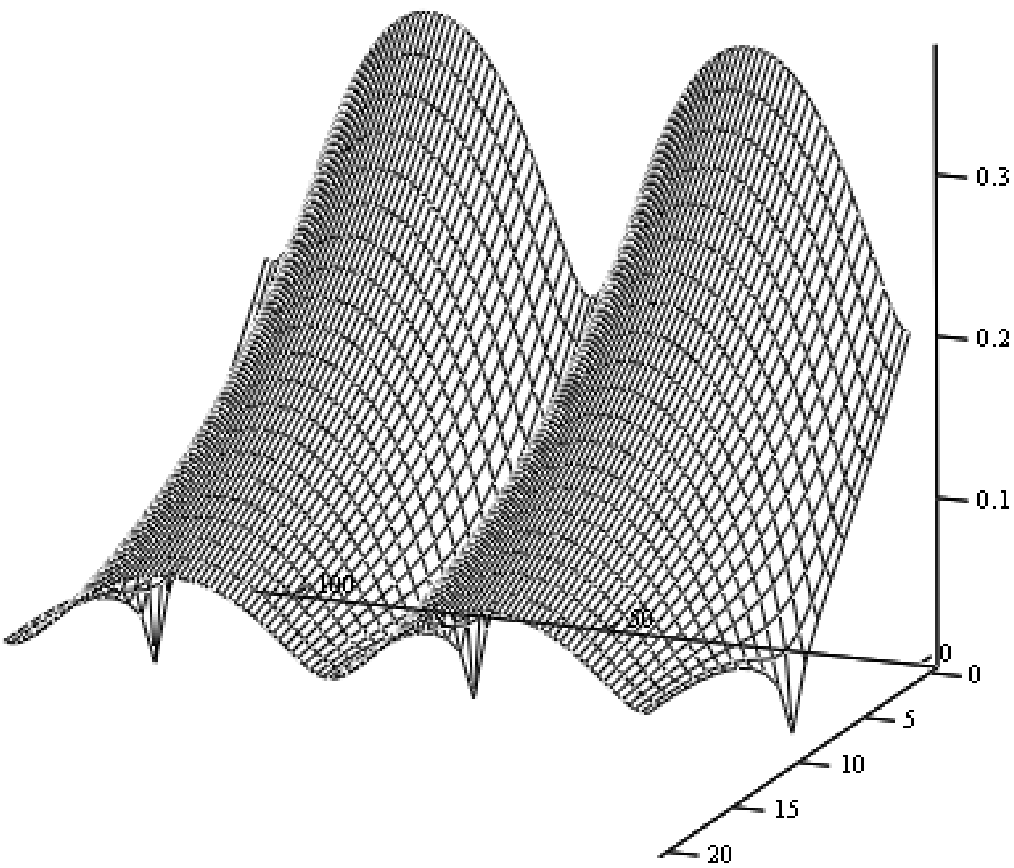
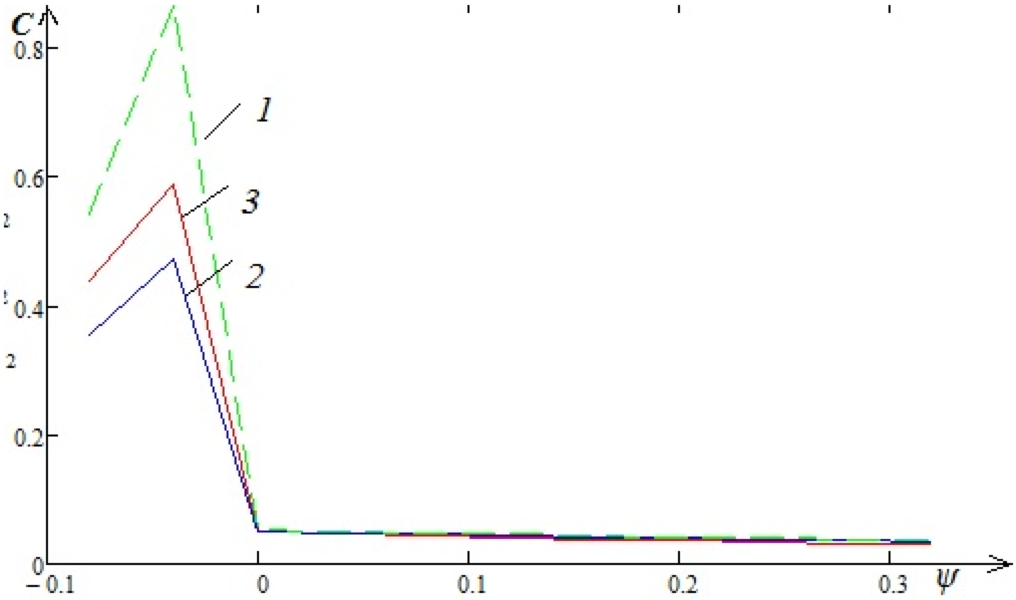
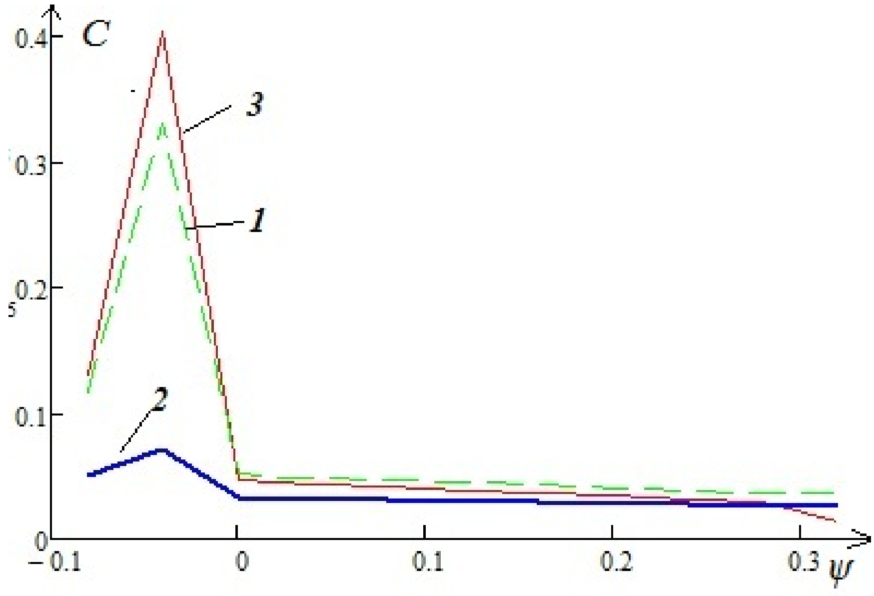


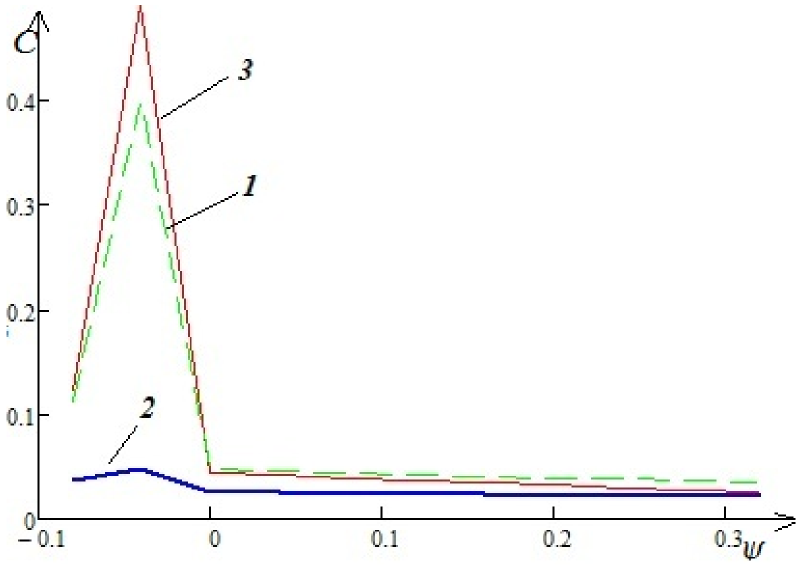
Рис. 10. Швидкість фільтрації в області G_z



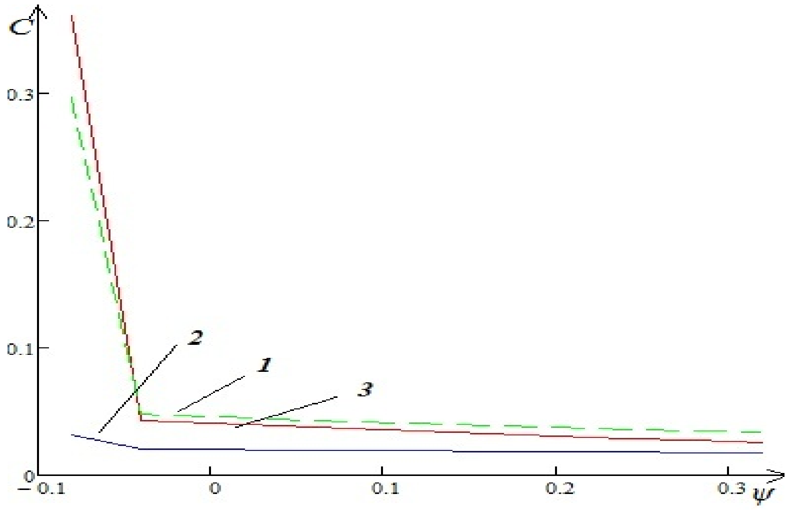
а) φ=0;



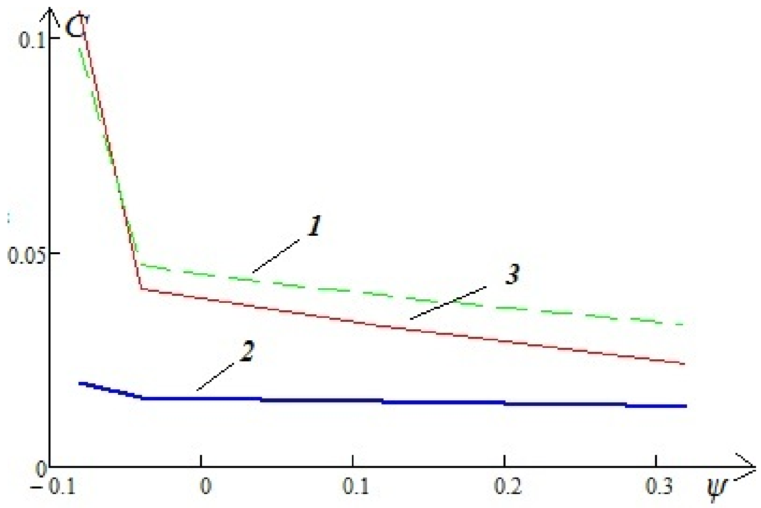
б) φ=0.12;



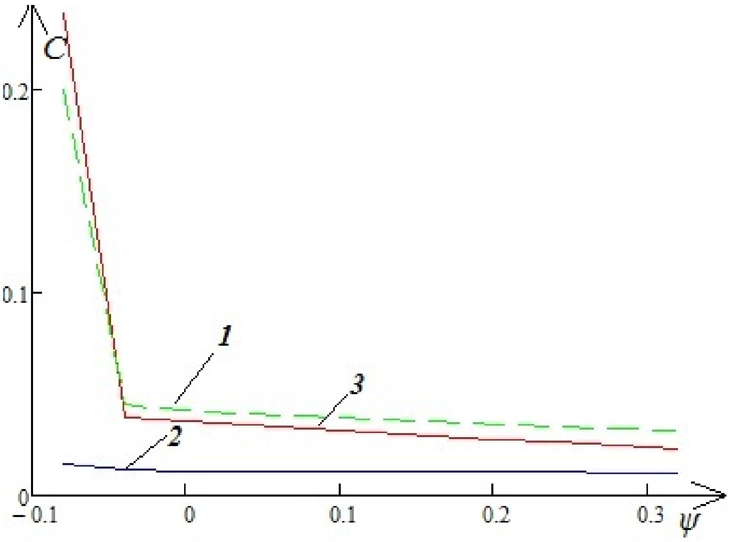
в) φ=0.16;



г) φ=0.2;

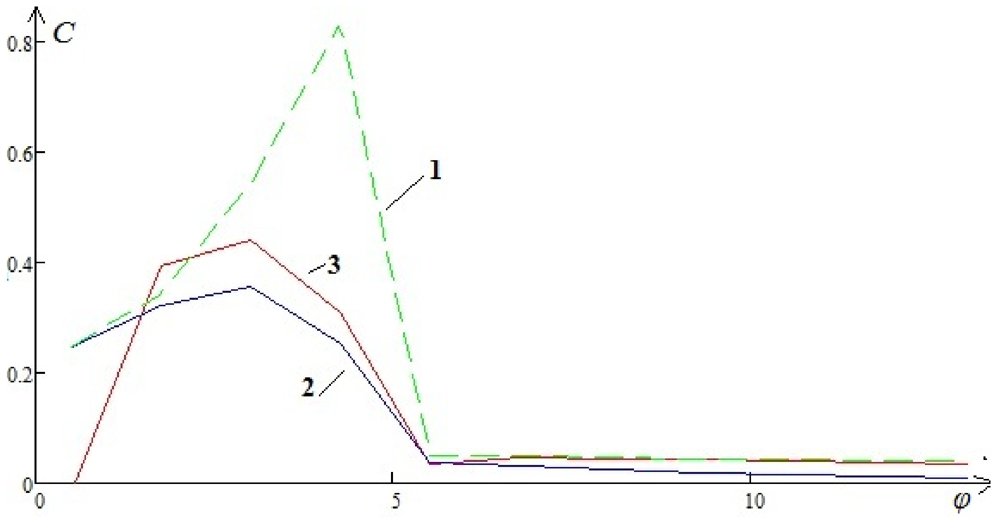


д) φ=0.24;

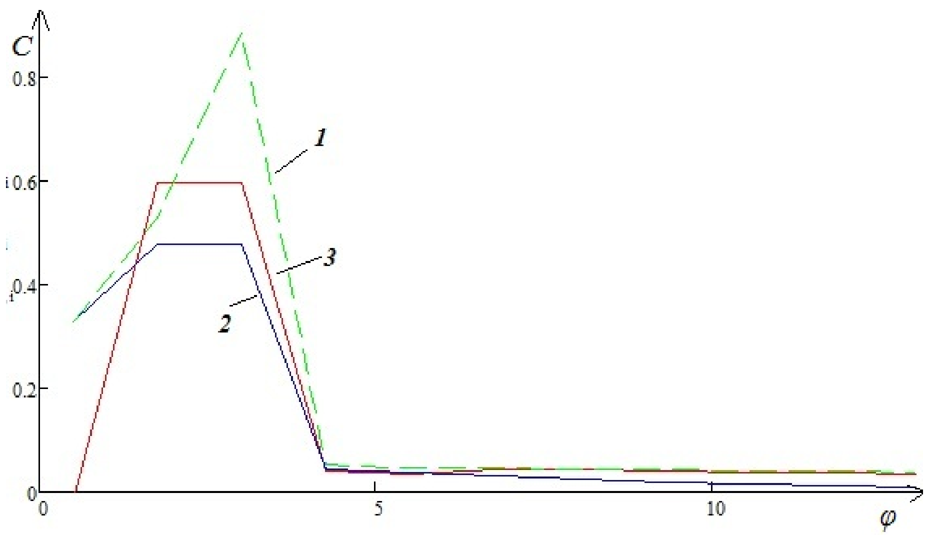


е) φ=0.28;

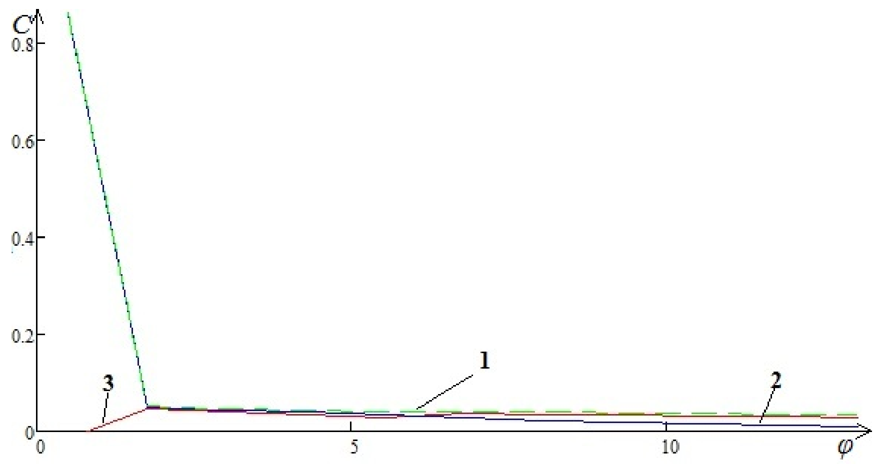
Рис. 11. Розподіл концентрації забруднюючої речовини вздовж ліній течії.



а) t=0.89с;



б) t=1.2 с;



в) t=2.24 с.

Рис. 12. Розподіл концентрації речовини вздовж еквіпотенціальних ліній.

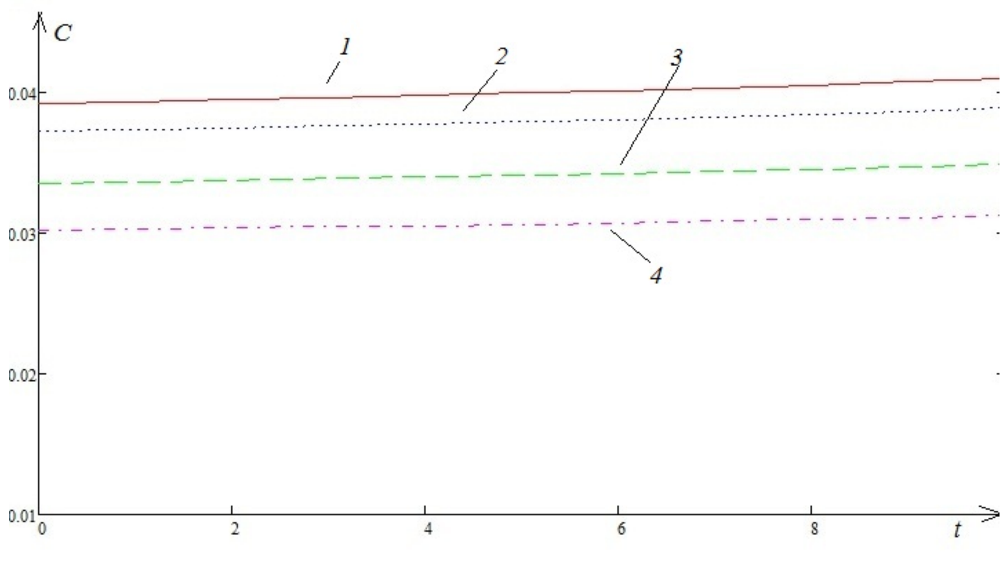
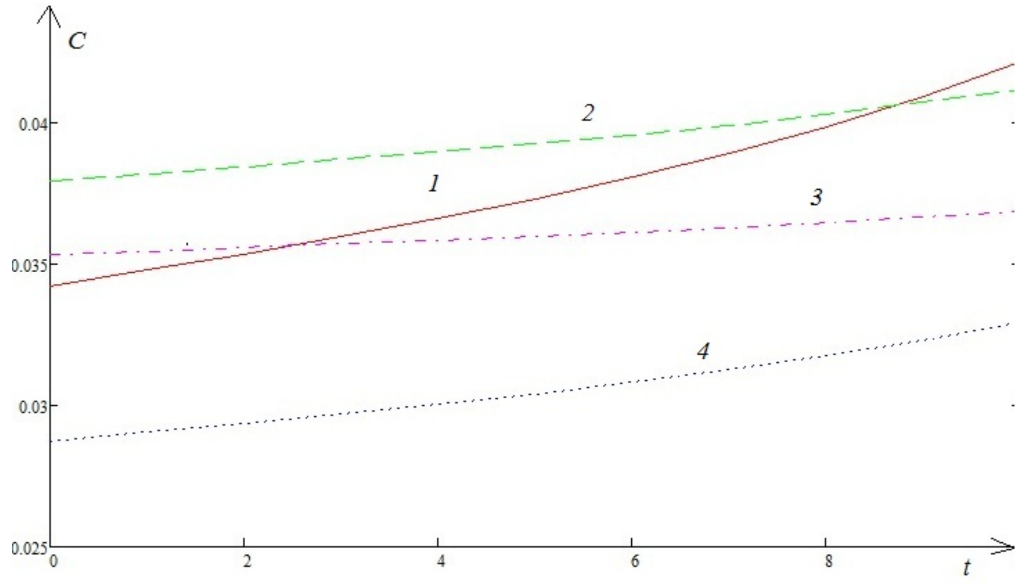
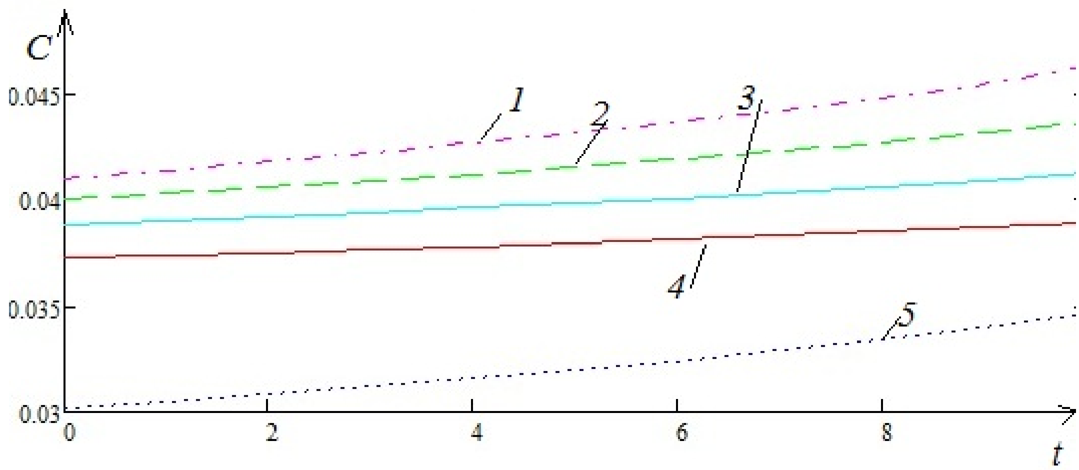


Рис.13. Зміна концентрації речовини з часом у різних точках на одній еквіпотенціальній лінії ($\psi=10$; 1 – $\varphi=0,04$; 2 – $\varphi=0,08$; 3 – $\varphi=0,16$; 4 – $\varphi=0,24$).



а) φ=0,124 (1- ψ=4,2; 2 – ψ=5,5; 3 – ψ=8; 4 – ψ=10,5);



б) φ=0,16 (1- ψ=6,7; 2 – ψ=8; 3 – ψ=9,2; 4 – ψ=10,5; 5 – ψ=5,5);.

Рис. 14. Зміна концентрації речовини з часом у різних точках на однiй лiнiї течії.

Висновки

При написанні магістерської роботи мною було досягнуто такі поставлені завдання: опрацьовано ряд літературних джерел за тематикою дослідження, вдосконалено і систематизовано алгоритми розрахунків концентрації забруднюючих речовин у випадках одно- та багатозв'язних областей, асимптотичного розвинення розв'язків сингулярно збурених задач для рівнянь конвективної дифузії у одно та багатозв'язних областях; проведено числові розрахунки за отриманими алгоритмами.

Результати роботи:

— Систематизовано теоретичні положення історії розвитку асимптотичних методів у теорії сингулярних збурень. Опрацьовано алгоритм розв'язання задач типу дифузія-конвектція при фільтрації в областях типу криволінійний чотирикутник, обмежений двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями, за умов превалювання конвективної складової процесу над дифузійною.

— Розглянуто моделі процесу конвективної дифузії для однозвязних і двохзв'язних областей та методику побудови асимптотичних наближень сингулярно-збурених задач типу " дифузія - конвекція ".

— Досліджено сингулярно-збурені процеси та процеси з післядією конвективної дифузії у тризв'язних областях. Знайдено розв'язки поставлених задач. Зокрема, побудовано асимптотичні розв'язки відповідних сингулярно-збурених задач типу "конвекція-дифузія" для тризв'язних областей, знайдено функції згладження вздовж ліній розділу течії.

— Розроблена програма (у середовищі Mathcad), з допомогою якої проведено комп'ютерні розрахунки.

Результати роботи дають змогу проаналізувати та спрогнозувати закономірності поширення забруднень розчинних у водному середовищі по пористих пластах. А це є досить важливим за умови необхідності отримання точних та достовірних результатів коли експеримент є складним і тривалим. Використання теоретичних методів прогнозування поширення забруднюючих речовин із врахуванням їхнього масообміну дає можливість розробити методи захисту від забруднень та їх знешкоджень. Результати роботи також будуть корисними вчителям при роботі з обдарованими дітьми в рамках МАН України.

Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде // Укр. матем. журн. / А. Я. Бомба - 1982. - Т.4, №4. - С. 493-496.

2. Бомба А.Я. Асимптотический метод решения одного класса сингулярно возмущенных пространственных задач конвективной диффузии при фильтрации со свободной поверхностью // В кн.: Теория гидродинамических моделей. / А. Я. Бомба - Свердловск, 1988. - С. 76-79.

3. Бомба А.Я. Асимптотичні методи в задачах екології: Методичний посібник. / А. Я. Бомба, І.І. Маркуш- Ужгород - Рівне, 1994.- 47 с.

4. Бомба А.Я. Крайові задачі конвективної дифузії розчинних речовин при взаємодії підземних вод з поверхневими // В кн.: "Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки". Тези доповідей Українського математичного конгресу (21-23 серпня 2001р., Київ). / А. Я. Бомба, В.І. Лаврик, А.П. Власюк - Київ: Ін-т математики НАНУ.- 2001.- Т.3.- С.26-27.

5. Бомба А.Я. Крайові задачі на конформні відображення для тризв'язних областей з потенціалом керування // Доповіді НАН України. / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький – 2004. – №4. – С. 57-63.

6. Бомба А.Я. Наближення розв'язків одного класу обернених крайових задач на конформні відображення в багатозв'язних областях з потенціалом керування // Математичні методи та фізико-механічні поля. / А. Я.Бомба, Д.О. Пригорницький – 2003. – 46, № 4. – С. 155-162.

7. Бомба А.Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу "конвекція-дифузія". Монографія / А.Я. Бомба, С.В. Барановський, І.М. Присяжнюк – Рівне: НУВГП, 2008. – 252 с.

8. Бомба А.Я. Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика. / А. Я. Бомба, Д.А. Пригорницкий, И.М. Присяжнюк - 2004. - №1. - С. 152-159.

9. Бомба А.Я. Численно-асимптотическое приближение решений

одного класса модельных нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач конвективной диффузии с последействием// Компьютерная математика. / А. Я. Бомба А.Я., И.М. Присяжнюк, Ю.Е. Климюк. - 2005. - №3. - С. 3-12

10. Бутузов В.Ф. Асимптотические решения в сингулярно возмущенных задачах типа “реакция-диффузия-перенос” // В кн..: Методы теории сингулярних возмущений в прикладних задачах. / В.Ф. Бутузов - Рига: Intelstrv, 1990.- С. 18-26.

11. Васильева А. Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры при производных / А.Б. Васильева— Мат. сб. Н. С., 1952, 31, №3, с. 587— 644.

12. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотика решения иитегро-диффе- ренциального уравнения с малым параметром при производной.— // Журн. вычисл. математики и мат, физики, 4, № 4. Дополнение: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов - с. 183—191.

13. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов — М. : Наука, 1973.— 272 с,

14. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник— Успехи мат. наук., 1957, 12, вып. 15, с. 3—122,

15. Градштейи И. С. Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малым параметром при части производных // Мат. сб. Н. С / И.С. Градштейн — 1950 – с, 47—68.

16. Гурский Д., Турбина О. Вичисления в MATHCAD 12 / Д. Гурский – Санкт-Петербург: Питер, 2006, - с. 544.

17. Еругии Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами /

Н.П, Еругин — Минск : Изд-во АН БССР, 1963,— 269 с.

18. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 11 / Д. Кирьянов - Санкт-Петербург: БХВ- Петербург, 2003 – с. 560.

19. Олейник О. А., Жижина А. И. О краевой задаче для уравнения $\varepsilon y'' = F(x, y, y')$ при малых // Мат. сб. Н. С. / О.А. Олейник, А.И. Жижина - 1952 - №3, с. 707—717.

20. Павлюк I. А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку / І.А. Павлюк — К. : Вид-во Київ. ун-ту, 1970,— 208 с.

21. Присяжнюк І.М. Асимптотичний метод розв’язування сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія» у многозв’язних областях// Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. / Присяжнюк І.М. - 2003.- Вип. 1.- С. 118-128.

22. Пугачев В. С. Об асимптотических представлениях интегралов системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр / В.С. Пугачев — Мат. сб. Н. С., 1944, 15, № 1, с. 13—46.

23. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений / И.М. Рапопорт — К Изд-во АН УССР, 1954.— 286 с.

24. Тихонов А. И. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. Н. С./ А.И. Тихонов - 1948 - №2 - с. 193—204.

25. Фещенко С. Ф. Питання теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з повільнозмінними коефіцієнтами // Наук, зап. КДП1. Фіз.-мат. сер. / С.Ф. Фещенко – 1948 - № 3 - с. 74—112.

26. Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К. Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной дробного ранга //Докл. АН УССР / Н.И. Шкиль – 1979 – № 3 – с. 264-266.