Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему
Ймовірнісні методи теорії ігор та прийняття рішень в задачах із невизначеними даними

Виконала: студентка IV курсу, групи МІ-41
Спеціальності 014 Середня освіта(Математика)
Ажнюк Іванна Володимирівна
Керівник: докт. техн. наук, проф. Бичков О. С.

Рецензент: канд. техн. наук, доц. кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій НУВГП Присяжнюк О.В.

Рівне-2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Сьогодення все частіше кидає людству нові виклики. Особливо гостро проблема ризику постала перед країнами, що перейшли від планової економіки, обов'язкового виконання рішень вищих органів, до ринкових методів господарювання із супутніми їм численними ризиками.

Сфера в якій застосовується теорія ігор, є доволі широкою і особливо розвинена у вирішенні питань економічного ризику.

У законодавствах провідних країн світу підприємництво визначене як діяльність, яка здійснюється в умовах ризику. Це означає, що ризику повною мірою у всіх ситуаціях не можна уникнути, його тільки можна зменшити до певних меж або відмовитися від нього. Але як, до яких і в яких випадках — це проблема, над якою ламають голови дослідники в усьому світі. Усе це переконує в тому, що ризик потрібно вивчати. Причому ця проблема невичерпна, адже постійно поповнюється перелік ризикових ситуацій.

З огляду на це вивченню проблем ризику наприкінці XX ст. почали приділяти величезну увагу. Організовано науково-дослідні інститути, що вивчають ризик у всіх його проявах. В останні десятиліття ці проблеми у дедалі більших масштабах почали висвітлюватися й у вітчизняній періодичній пресі, підручниках і монографіях.

Актуальність теми дослідження визначається кількома групами взаємопов’язаних чинників:

1) зростаючою роллю математичних наук у сучасному світі;
2) застосуванням теорії ігор в різних областях сучасного природознавства, математичної фізики, економіки та іншиих;
3) практичною значимістю для вирішення конфліктів і суперечностей, які направлені на вироблення максимально оптимізованої і ефективної концепції виробництва чи підприємництва.

Метою роботи є вивчення, аналіз та застосування основних понять та властивостей теорії ігор до розв’язання прикладних задач.

Об’єктом роботи є прикладні задачі при розв’язуванні яких застосовується теорія ігор.

Предметом роботи є демонстрація застосування терії ігор безпосередньо на прикладних задачах.

Структура роботи зумовлена її метою та завданнями. Дипломна робота складається з вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Матеріали бакалаврської роботи були публіковані в Збірнику наукових матеріалів XC Міжнародної інтернет конференції: «РОЗВИТОК НАУКИ В УМОВАХ ВОЄННОГО СТАНУ», 20 травня 2022 р., М. КИЇВ

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІГОР

1.1. Предмет теорії ігор

Предметом вивчення теорії ігор є математичний аналіз конфліктних ситуацій, формалізований опис яких представлено у вигляді математичної моделі, що визначає деяку гру.

Конфліктна ситуація – це ситуація, в якій зустрічаються інтереси двох протидіючих сторін, що мають різні цілі. Ці конфліктуючі сторони прагнуть виконати такі дії, при яких будуть досягнуті як найвищі шанси на успіх. Таким чином, якщо цілі сторін протилежні, то максимізація шансів виграшу однієї із сторін означатиме максимізацію програшу іншої сторони. А у випадку, якщо сторін кілька (більше двох) то це приведе до зменшення їх можливих виграшів. Тому конфліктуючі сторони будуть виконувати пошук найбільш прийнятних рішень. [2]

Якщо кожна зі сторін, в результаті власної оцінки поточної ситуації, прийме якесь певне рішення, то наступна реалізація прийнятих рішень приведе до конкретного результату – розподілу виграшів сторін. Рішення, що приймають сторони, можуть бути обрані незалежно та не повідомленими заздалегідь іншим сторонам конфлікту.

Таким чином, кожній зі сторін конфлікту доводиться обирати рішення в умовах невизначеності варіанту поведінки протидіючої сторони, тобто перемога чи програш перебувають у прямій залежності від того, який варіант поведінки вибере інша сторона конфліктної ситуації. Яким чином оптимізувати вибір правильного рішення? Які вимоги є необхідними для цих правильних рішень? Як знайти правильне рішення? Теорія ігор займається дослідженням математичних моделей конфліктних ситуацій (ігор) та їх формальним рішенням, що дає змогу:

- змоделювати процес гри та її можливі результати ще до її фактичного початку;
- відповідно до результатів аналізу змодельованої гри прийняти рішення доцільності участі і оптимальної поведінки в реальній конфліктній ситуації.

Таким чином, теорія ігор дає математичний прогноз конфлікту, з урахуванням степені адекватності використовуваної моделі конфліктної ситуації.

Теорія ігор – це теорія математичних моделей прийняття рішень в умовах невизначеності, коли приймаючий рішення суб'єкт має інформацію лише про множину можливих ситуацій, в одній з яких він дійсно знаходиться, про множину рішень, що він може обрати та цифровому еквіваленті того виграшу, що він міг би отримати, обравши в даній ситуації дану стратегію. [20]

Зміст теорії ігор полягає у встановленні принципів оптимальної поведінки в умовах невизначеності, доведення існування таких рішень, що задовольняють ці принципи, вибір оптимальних алгоритмів знаходження рішень, та їх реалізація.

1.2. Невизначеність ігрових ситуацій

Невизначеність з якою ми зустрічаємось при вивченні теорії ігор може бути різною, як і за своєю природою, так і за своїм змістом.

1. Невизначеність є наслідком свідомих дій іншої особи (гравця), що захищає свої інтереси.

На обрані гравцями рішення може суттєво впливати інформація що доступна їм, про наміри інших гравців (які вони оберуть стратегії), їх можливості (чи мають вони змогу домовлятися, діяти разом проти інших гравців).

2. Невизначеність внаслідок виникнення випадковості в ігровій ситуації: свідомі дії гравців (суб’єктів ігрової ситуації) виконуючих вибір своїх стратегій на основі випадковості множини допустимих альтернатив (частотного, або ж імовірнісного розподілу початкових, або чистих стратегій). Моделювання механізмів такого вибору (симуляції випадкового процесу) виконується в формі фізичного експерименту, або комп’ютерним способом (на основі отримання псевдовипадкових чисел). [3]

Такий спосіб дозволяє розширити множину стратегій, які гравець може обрати (в порівнянні з множиною початкових стратегій), і має сенс при багаторазовому повторенні ігрової ситуації. Тоді результати гри для гравця визначаються, як середній виграш (за одну гру), обрахований по формулі математичного сподівання перемоги, що розглядається, як випадкова величина.

3. Випадковість в ігровій ситуації, що виникає в наслідок дій так званої «природи», що характеризується обставинами не залежними від суб’єктів (гравців) конфліктної ситуації. До таких обставин можна віднести умови зовнішнього середовища (в яких приймається те чи інше рішення): зміна погодних умов, зміна котирування акцій, вихід із ладу техніки, та інші. Для таких ігрових ситуацій в якості протилежної сторони (другого гравця) виступає «природа». При цьому розуміється, що поведінка природи суб’єкту ігрової ситуації (першому гравцю) невідома, проте вона йому свідомо не протидіє. На основі деякої, наприклад статистичної інформації, можна зробити n припущень про можливі стани природи, котрі трактуються, як стратегії другого гравця.

Необхідно знайти таку оптимальну стратегію яка в порівнянні з іншими є найбільш вигідною. Вибір найкращого рішення в умовах невизначених обставин залежить від того яка межа невизначеності, яку використовує критерій оцінки результату дій першого гравця.

1.3. Застосування теорії ігор

Моделями теорії ігор можна в принципі змістовно описувати дуже різноманітні явища: економічні, правові та класові конфлікти, взаємодія людини з природою, біологічну боротьбу за існування і т. д. Наприклад, в економіці конфліктні ситуації зустрічаються часто і мають різноманітний характер (взаємини між постачальником і споживачем, покупцем і продавцем, банком та клієнтом). У цих прикладах конфліктна ситуація породжується різницею інтересів партнерів і прагненням кожного з них приймати рішення, які реалізують поставлені цілі найбільшою мірою. При цьому кожному доводиться рахуватися не лише зі своїми цілями, а й з цілями партнера, і враховувати невідомі заздалегідь рішення, які ці партнери прийматимуть.

Добре відомі в економічній науці класичні приклади застосування ігрових підходів до дослідження проблем виробництва та ціноутворення в олігополії (олігополія - ситуація на ринку, коли діє невелика кількість продавців однорідної продукції, причому кожна з конкуруючих сторін здатна впливати на ціну продукції, пропонованої рештою продавців, а отже, і на їх рівень витрат): моделі Курно (1838), Бертрана (1883), Еджворта (1897).

Перші математичні аспекти та застосування теорії ігор були викладені в класичній книзі Джона фон Неймана та Оскара Моргенштерна «Теорія ігор та економічна поведінка» в 1944 р. Нейман і Моргенштерн займалися іграми з нульовою сумою, в яких виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої. Математичне визначення рівноважної ситуації запропоновано американським математиком та економістом Джоном Нешем у 1951 р., за якого обидві сторони використовують відповідні (оптимальні) стратегії, що призводять до створення сталої рівноваги. Гравцям вигідно зберігати цю рівновагу, тому що будь-яке відхилення від такої рівноважної стратегії однієї зі сторін призведе до погіршення її становища .[23]

1.4. Класифікація ігор

Формалізація ігрових ситуацій та пошук методів вибору прийнятних (або оптимальних у певному сенсі) стратегій призводить до виділення окремих типів ігор, групування їх у класи, визначення загальних засобів дослідження для виділених класів. У сучасній теорії ігор існує безліч класів ігор з внутрішнім розподілом на підкласи (окремі групи), для яких отримані теоретичні основи, що визначають існування оптимальних стратегій (оптимальних знову ж таки у певному сенсі), розроблено алгоритми пошуку цих стратегій.

Різні види ігор можна класифікувати, спираючись на ту чи іншу ознаку, що характеризує гру: за кількістю гравців (ігри з двома учасниками — парні ігри, ігри n гравців, де $n > 2$); за кількістю стратегій (кінцеве чи нескінченне число); за ступенем поінформованості гравців про стратегії, зроблені ходи та переваги противника (ігри з повною/неповною інформацією); за властивостями функцій виграшу (залежно від виду функції - матричні, біматричні, безперервні, опуклі та ін.; залежно від характеру виграшів - ігри з нульовою сумою (антагоністичні ігри), ігри з ненульовою сумою, у яких цільові критерії для гравців різні) ; по можливості попередніх переговорів та взаємодій між гравцями під час гри (коаліційні, кооперативні, безкоаліційні ігри).

Найширший поділ ігор виконується з урахуванням поняття координації гравців, що у грі. Це безкоаліційні та коаліційні (кооперативні) ігри. Безкоаліційні ігри — це клас ігор, у яких кожен гравець приймає рішення незалежно від інших гравців (ізольовано), не беручи участі у жодних переговорах та угодах з іншими гравцями. До безкоаліційних ігор відносяться статистичні ігри (ігри з «природою»), антагоністичні ігри (ігри з протилежними інтересами сторін), ігри з непротилежними інтересами (у тому числі біматричні ігри) та ін. [19]

У коаліційних (кооперативних) іграх, навпаки, гравці можуть приймати рішення за погодженням один з одним (їм вирішується обговорювати перед грою свої стратегії та домовлятися про спільні дії), вони мають право вступати до коаліції. Утворивши коаліцію, гравці ухвалюють взаємозобов'язуючі угоди про свої стратегії. При цьому вони повинні вирішити питання про поділ загального виграшу між членами коаліції.

1.5. Нормальна форма гри. Ситуація рівноваги по Нешу

Розглянемо формалізоване уявлення безкоаліційної гри (у нормальній формі), у якій метою кожного гравця є оптимізація індивідуального виграшу (причому гравці не можуть координувати спільно свої стратегії).

Визначення. Безкоаліційною грою в нормальній (або стратегічній) формі називається трійка Γ = {I, S, H}, де I = {1, 2, …, n} – безліч усіх гравців, яких розрізняємо за номерами; S_i - безліч стратегій, доступних гравцю $i \in I$; окрему стратегію гравця і позначимо $s_i \in S_i$. Іноді для більшої визначеності будемо вводити додаткові індекси:

$$S_i = \left\{s_i^{(1)}, s_i^{(2)}, \dots, s_i^{(k)}\right\}.$$

де $s_i^{(k)}$ — k-та стратегія i-го гравця.

Процес гри полягає у виборі кожним з гравців однієї своєї стратегії $s_i \in S_i$. Таким чином, у результаті кожної партії гри складається набір стратегій $s = (s_1, s_2, , \dots, s_n)$, що називається ситуацією. Багато ситуацій $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ є декартовою множиною безлічі стратегій усіх гравців.

Позначимо $H_i(s)$і - виграш гравця і в ситуації s. Функція $H_i : S \to R$, визначена на багатьох ситуаціях *S*, називається функцією виграшу гравця *i.*

Функція виграшів гравців *H(S)* визначена на безлічі ситуацій *S*:

$$H(s) = \big(H_1(s), H_2(s), \dots, H_n(s)\big); \quad S \to R^n$$

Метою кожного гравця є отримання найбільшого можливого виграшу. Але вибір кращої стратегії одним із гравців (тобто збільшує його можливий виграш) може вести до зменшення виграшів інших гравців. Тому кожен із цих гравців також буде застосовувати стратегію, яка збільшує вже його виграш, але при цьому виграші інших гравців можуть зменшитися і т. д. При цьому може не бути такої ситуації $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$де стратегія s_i^0 доставляє максимум гравцю i, тобто

$$H_i(s^0) =_{s\in S}^{max} H_i(s).$$

Тому потрібне визначення такої ситуації *s*, яка б задовольняла всіх гравців.

Нехай $s = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n)$— довільна ситуація у грі, де $s_i \in S_i$ — деяка стратегія гравця *i*. Розглянемо нову ситуацію, що вийшла із ситуації *s* заміною стратегії s_i гравця *i* на стратегію $s_i' \in S_i$, використовуючи наступне значення:

$$s|_{s_i'} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Вочевидь, що $s|_{s_i'} = s$, якщо $s_i = s_i'$.

Визначення. Ситуація s у грі називається прийнятною для гравця i, якщо $H_i(s|_{s_i'}) > H_i$ для будь-яких $s_i' \in S_i$.

Таким чином, якщо в деякій ситуації s для гравця i знайдеться така стратегія $s_i' \in S_i$, що $H_i(s|_{s_i'}) > H_i$, то гравець i у разі ситуації $s|_{s_i'}$ у може отримати більший виграш. У цьому сенсі ситуація s для гравця i буде неприйнятною. [5]

Визначення. Ситуація s називається ситуацією рівноваги по Нешу (або рівноважною по Нешу ситуацією), якщо вона прийнятна для всіх гравців, тобто для кожного i ϵ I виконується

$$H_i(s|_{s_i'}) \leq H_i(s) \text{ для будь-яких } s_i' \in S_i$$

Очевидно, що жоден із гравців не зацікавлений у відхиленні від своєї стратегії, що призводить до ситуації рівноваги, наодинці.

Визначення. Рівноважною стратегією гравця у безкоаліційній грі називається така його стратегія, яка входить хоча б до однієї із рівноважних ситуацій гри.

Знаходження ситуацій рівноваги у безкоаліційній грі визначає вирішення гри та відповідні виграші гравців. [1]

Важливим у теорії ігор є таке припущення про раціональність гравців: всі гравці діють раціонально, тобто кожен гравець розглядає доступні йому альтернативи, формує уявлення щодо невідомих параметрів (можливих дій інших гравців, їх ресурсів), має чітко визначені переваги і вибирає свої дії внаслідок деякого процесу оптимізації (максимізації своєї цільової функції). Більш того, суттєвим є факт загальновідомості (загального знання) раціональності гравців, тобто всі гравці не лише раціональні, але й знають, що інші гравці раціональні, що всі гравці знають про те, що вони раціональні.

1.6. Оптимальні ситуації за Парето

Визначення. У безкоаліційній грі Г = {I, S, H} ситуація $s^0 = (s_1{}^0, s_2{}^0, \ldots, s_n{}^0)$ називається оптимальною за Парето, якщо не існує ситуації $s = (s_1, s_{2,} \ldots, s_n) \in S$, для якої має місце нерівність наступного вигляду:

$$H_i(s) \geq H_i(s^0) \text{ для } \forall\, i \in I,$$

причому хоча б для одного гравця нерівність сувора.

Множина всіх ситуацій, оптимальних за Парето, будемо позначати через S^p.

Змістовно ситуація $s^0=(s_1^0,s_2^0,\ldots,s_n^0)\in S^p$ означає, що не існує іншої ситуації $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in S$, яка була б кращою за ситуацію $s^0=(s_1^0,s_2^0,\ldots,s_n^0)$ для всіх гравців.

Визначимо поняття переваги ситуацій. Нехай ситуації $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in S$, $s'=(s_1',s_2',\ldots,s_n')\in S$. Ситуація s краще s' , якщо $H_i(s)\geq H_i(s')$ і у всіх $i\in I$ Про , причому хоча б для одного гравця нерівність суворе, тобто маємо $H(s')\neq H(s)$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію переваги ситуацій при I = {1, 2}. Тоді функція виграшів $H(s)=(H_1(s),\ H_2(s))$ гравців . Ситуації s',s'' кращі за ситуацію s, якщо точки $H(s'),\ H(s'')$, що не збігаються з точкою $H(s)$, потрапляють у область, утворену сторонами прямого кута з виколотою вершиною $H(s)$ (рис. 1.1).

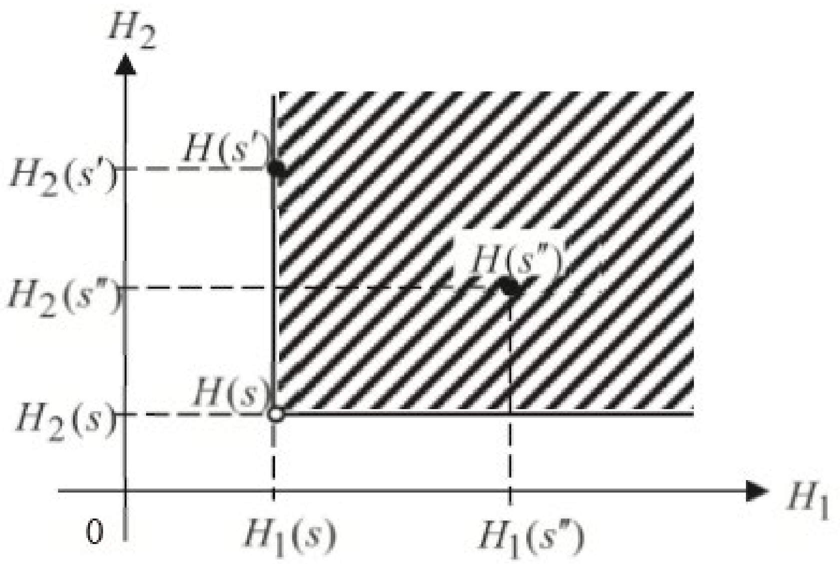

Рис. 1.1. Геометрична інтерпретація переваг ситуацій

Зауваження. 1. Важлива особливість ситуації рівноваги по Нешу полягає в тому, що відхилення від неї двох гравців і більше може призвести до збільшення виграшу одного з гравців, що відхилилися. [17]

2. Якщо угода між гравцями про вибір фіксованої ситуації рівноваги, то це утримує кожного індивідуального гравця від відхилення від неї. В оптимальній за Парето ситуації гравець, який відхилився, може в деяких випадках отримати істотно більший виграш.

Властивість оптимальних за Парето ситуацій. У безкоаліційній грі Г = {I, S, H} для $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \ldots, s_n^0) \in S^p$ ситуації існує вектор $\lambda^T = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) > 0,$, такий, що

$$\lambda^T H(s^0) = \max_{s \in S} \lambda^T H(s) = \max_{s \in S} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i(s),$$

де нерівність $\lambda^T = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) > 0,$ означає $\lambda_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$ - транспонований вектор l.

Ця властивість цілком узгоджується з інтерпретацією оптимальності по Парето через область прямого кута.

Однак для різних ситуацій, оптимальних за Парето, але не порівнюваних по області прямого кута, використовують додаткові умови ефективності стратегій (як розв'язків). Наприклад, умова «зваженої ефективності» для оптимальних за Парето ситуацій:

$$\bar{\lambda}^T H(s) \to \max_{s \in S^p}$$

При $\bar{\lambda} = (1,\ \ldots,\ 1)$ маємо умову «зваженої ефективності» в наступному вигляді: як виважена оптимальна за Парето вибирають ситуацію, що задовольняє умові:

$$\max_{s \in S^p} \sum_{i=1}^{n} H_i(s) = \sum_{i=1}^{n} H_i(s^0).$$

1.7. Матричні ігри.

Антагоністичні ігри, в яких кожен гравець має кінцеву множину стратегій, називаються матричними іграми. Отже, матрична гра — це кінцева гра двох осіб з нульовою сумою (тобто сума виграшів гравців у кожній ситуації дорівнює нулю). Така гра повністю визначається матрицею

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

у якому рядки відповідають чистим стратегіям гравця 1, стовпці — чистим стратегіям гравця 2, на їхньому перетині стоїть виграш гравця 1 у відповідній ситуації, тобто ситуації $s = (i, j)$ відповідає виграш . Тоді $H_1(s) \equiv H(i,j) = h_{ij}$ виграш гравця 2 дорівнює $H_2(s) = -H_1(s)$для всіх $s \in S$.

Тут гравець 1 має m стратегії, гравець 2 має n стратегії. Така гра називається m×n -грою. Матриця H називається матрицею гри або матрицею виграшів (платіжною матрицею).

Мета гравця 1 - максимізувати свій можливий виграш, при цьому збільшення його виграшу веде до зменшення виграшу гравця 2 (оскільки гра антагоністична). Аналогічне можна відзначити і для гравця 2: збільшення його виграшу веде до зменшення виграшу гравця 1. Тому при виборі стратегії гравець 1 (розумний гравець, що діє раціонально) керуватиметься такими міркуваннями. При стратегії і гравця 1 гравець 2 вибере стратегію j*, що максимізує його (гравця 2) виграш (тим самим мінімізує виграш гравця 1):

$$h_{i j_*} = \min_j h_{ij}.$$

Тоді оптимальна стратегія гравця 1, яка забезпечить йому найбільший із можливих виграшів $h_{ij}*$, $i = 1, 2, ..., m$, (тобто за будь-якої стратегії гравця 2), буде перебувати у виборі стратегії $i*$, для якої виконується:

$$h_{i_* j_*} = \max_i h_{i j_*} = \max_i \min_j h_{ij}.$$

Аналогічними міркуваннями керуватиметься гравець 2 при виборі стратегії: забезпечити найбільший можливий виграш за будь-якого вибору стратегії гравця 1, тобто вибрати стратегію, яка забезпечить йому max з можливих виграшів

$$-h_{i^* j}, j = 1, 2,.., n, \text{ здесь } h_{i^* j} = \max_i h_{ij},$$

причому для другого гравця виграш дорівнює –h, де h — виграш гравця 1. [6]

Таким чином, оптимальна стратегія гравця 2 складатиметься у виборі стратегії $j*$, для якої виконується:

$$-h_{i^* j^*} = \max_j(-h_{i^* j}) = \max_j(-\max_i h_{ij}) = -\min_j \max_i h_{ij},$$

звідси отримаємо:

$$h_{i^* j^*} = \min_j \max_i h_{ij}.$$

Теорема. Для будь-якої матриці H справедлива нерівність

$$\max_i \min_j h_{ij} \leqslant \min_j \max_i h_{ij}.$$

Доведення. Зафіксуємо якийсь j-й стовпець, наприклад, j = 1. Тоді маємо:

$$h_{i1} \le \max_i h_{i1} \text{ при любом } i = 1, 2,.., m.$$

Ця нерівність справедлива і за інших *j = 2, ..., n,* і тому

$$h_{ij} \le \max_i h_{ij}$$

при всіх *i* і для будь-якого *j*.

Взяття мінімуму j від обох частин не порушує нерівності, отже,

$$\min_j h_{ij} \le \min_j \max_i h_{ij}$$

при всіх *i*.

Так як з правого боку стоїть константа і при всіх і ліве вираз обмежено цією константою, то маємо:

$$\max_i \min_j h_{ij} \leqslant \min_j \max_i h_{ij}.$$

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ІГОР

2.1. Приклади класичних ігор двох осіб

Приклад 2.1. "Дилема ув'язненого".

У скоєнні злочину підозрюються двоє: А і Б. Є підстави вважати, що вони діяли за змовою, і поліція, ізолювавши їх один від одного, пропонує їм одну й ту саму угоду: якщо один свідчить проти іншого, а той зберігає мовчання, то перший звільняється за допомогу слідству, а другий отримує максимальний термін позбавлення волі (10 років). Проте інших доказів їхньої провини у слідства немає. Якщо обидва мовчать, їхнє діяння кваліфікується як ненадання допомоги слідству, і вони засуджуються до 6 місяців. Якщо обидва свідчать один проти одного, вони одержують мінімальний термін (по 3 роки). Кожен підозрюваний вибирає, мовчати йому або свідчити проти іншого. Проте жоден із них не знає точно, що зробить інший. Гра можна представити у вигляді наступної таблиці. [23]

	Б зберігає мовчання	Б дає показання
А зберігає мовчання	Обидва отримують по півроку в'язниці	А отримує 10 років, Б звільняється
А дає показання	А звільняється, Б отримує 10 років	Обидва отримують по 3 роки в'язниці

Будемо розглядати підозрюваних як гравців у даній грі: гравець А та гравець Б. Сформуємо таблицю виграшів гравців, обравши як їх виграші величини, протилежні за знаком їх можливих термінів укладання. Мета кожного з гравців — мінімізація власного терміну ув'язнення (тобто максимізація виграшу).

Стратегії гравців		Гравець Б	
		Зберігати мовчання	Давати показання
Гравець А	Зберігати мовчання	–0,5; –0,5	–10; 0
	Давати показання	0; –10	–3; –3

Спробуємо визначити найкращі стратегії гравців із позицій деяких критеріїв оцінки результатів гри. Введемо такі поняття.

1. Ситуація рівноваги гри (рівноваги по Нешу) — пара стратегій гравців, відхилення від яких самотужки невигідно жодному з гравців. Пошук стратегій, що утворюють ситуацію рівноваги, виконується на основі індивідуального раціонального вибору.

2. Ситуація (пара стратегій гравців) є оптимальною за Парето, якщо не існує іншої ситуації, яка була б кращою за цю ситуацію для всіх гравців (тобто збільшення виграшу одного з гравців можливе лише за рахунок зменшення виграшу іншого).

Зазначимо змістовну відмінність понять ситуації рівноваги та ситуації, оптимальної за Парето. У ситуації рівноваги жоден гравець, діючи наодинці, не може збільшити свого виграшу; в оптимальній за Парето ситуації всі гравці, діючи спільно, не можуть (навіть не суворо) збільшити виграш кожного.

Уявімо міркування кожного з гравців. Якщо партнер мовчить, то краще свідчити проти нього (стратегія «давати свідчення») і вийти на свободу (інакше півроку в'язниці). Якщо партнер дає свідчення (свідчить проти нього), то краще теж свідчити проти партнера (знову стратегія «давати свідчення»), щоб отримати 3 роки (інакше — 10 років).

Отже, стратегія «свідчити» суворо домінує над стратегією «зберігати мовчання», кожен гравець (підозрюваний) дійшов цього висновку. Таким чином, в умовах, коли кожен гравець оптимізує свій власний виграш, не дбаючи про вигоду іншого гравця, єдина можлива рівновага у грі – взаємне свідчення обох учасників один проти одного – пара стратегій («давати свідчення», «давати свідчення») .

У той же час оптимальною за Парето ситуацією в даній грі є пара стратегій (зберігати мовчання, зберігати мовчання), для якої виграші гравців рівні –0,5 (півроку ув'язнення кожному). З точки зору групи (цих двох підозрюваних) це найкраще рішення, при якому подальше збільшення виграшу одного з гравців (тобто зменшення його терміну ув'язнення) можливе тільки за рахунок зменшення виграшу іншого (збільшення його терміну ув'язнення). . Будь-яке інше рішення буде менш вигідним (для групи).

Суть дилеми проявляється саме в тому, що підозрювані (як гравці), поводячись окремо раціонально (з позиції індивідуальної раціональності), разом (як група) приходять до нераціонального рішення — до вибору стратегій, що утворюють ситуацію з найгіршим результатом.

Цей приклад є безкоаліційною грою, причому гра парна — два гравці, біматрична, з ненульовою сумою (сума виграшів гравців у кожній ситуації відрізняється від нуля). Виграші кожного гравця задаються відповідними матрицями:

матриця для гравця А

$$\mathrm{H}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -10 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

матриця для гравця Б

$$H_Б = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$$

Приклад 1.2. «Сімейна суперечка».

Розглядається гра, до якої чоловік (гравець 1) та дружина (гравець 2) можуть вибрати одну з двох вечірніх розваг: футбольний матч або театр. Якщо вони мають різні бажання, залишаються вдома. Чоловік віддає перевагу футбольному матчу, а дружина — театр. Проте обом набагато важливіше провести вечір разом, ніж брати участь у розвазі (хоч і бажаному) одному. Виграш кожного гравця визначається корисністю проведеного вечора і оцінюється за шкалою від 0 до 4. Відповідні виграші гравців вказані в таблиці (спочатку вказано виграш гравця 1, потім гравця 2).

Стратегії гравців		Дружина	
		Футбол	Театр
Чоловік	Футбол	4; 1	0; 0
	Театр	0; 0	1; 4

Отже, кожен з гравців має дві стратегії: «футбол» (Ф) і «театр» (Т). Мета кожного з гравців — максимізація власного виграшу. Проте їхні інтереси не протилежні.

У цьому биматричной грі є дві ситуації рівноваги по Нешу: (Ф, Ф) і (Т, Т). Однак виграші гравців у цих ситуаціях різні, при цьому перша ситуація вигідна гравцеві 1, а друга — гравцеві 2. Таким чином, залишається невирішеним питання: яку із ситуацій рівноваги можна прийняти як принцип оптимальності, що влаштовує всіх гравців?

У грі «сімейна суперечка» обидві рівноважні ситуації не лише рівноважні, а й оптимальні за Парето.

Припустимо, що гравці не спілкуються до початку гри, а вибирають одночасно і незалежно один від одного (як передбачено правилами безкоаліційної гри). Проведемо міркування за гравця 1. Йому вигідно, щоб реалізувалася ситуація (Ф, Ф). Але гравцеві 2 вигідна ситуація (Т, Т). Тому якщо гравець 1 вибере стратегію «Ф», то гравець 2 може вибрати стратегію «Т», і вони обоє програють: у ситуації (Ф, Т) виграші становитимуть (0, 0). Тоді гравцеві 1 є сенс вибрати стратегію «Т», оскільки в ситуації (Т, Т) він отримує виграш 1 (тобто більше 0). Але гравець 2 може міркувати аналогічно і вибрати стратегію "Ф", тоді в ситуації (Т, Ф) вони знову програють. Тому гравцям вигідно спілкуватися перед початком гри та домовлятися про спільний план дій. Таким чином, приходимо до умов кооперативної гри, коли гравці можуть приймати рішення щодо узгодження один з одним.

Основне завдання в кооперативній грі полягає у поділі загального виграшу. Загальний виграш у цій грі в ситуаціях, коли здійснюється одна з двох вечірніх розваг (футбол або театр), дорівнює 5. Природним було б розділити цей виграш порівну між гравцями, тобто кожному по 2,5. При цьому гравці домовляються половину вечорів проводити разом на футболі, а другу половину — у театрі, тобто з ймовірністю 1/2 спільно вибирати кожну розвагу.

Слід зазначити, що у разі безкоаліційної гри (за незалежного вибору гравцями своїх стратегій) набір виграшів (2,5; 2,5) недосяжний.

Дійсно, позначимо через x та y ймовірності вибору стратегії «Ф» гравцями 1 і 2 відповідно, причому $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, тоді ймовірності вибору стратегії «Т» гравцями 1 і 2 відповідно дорівнюють $1 - x$ і $1 - y$.

Якщо позначити λ_1, λ_2 як випадкові величини, що визначають значення виграшів відповідно гравців 1 і 2 в одній партії (для одного вечора), то середні очікувані виграші гравців 1 і 2 рівні відповідно до математичних очікувань $M\lambda_1$ і $M\lambda_2$:

$$M\lambda_1=x*(4y + 0*(1-y))+(1-x)(0*y+1*(1-y))= 5xy-x-y+1,$$

$$M\lambda_2=x*(1*y+0*(1-y))+(1-x)(0*y+4*(1-y))=5xy-4x-4y+4$$

Тоді рівність $M\lambda_1 = M\lambda_2$ виконується за

$$5xy-x-y+1=5xy-4x-4y \longrightarrow x+y=1$$

Обрахуємо

$$M\lambda_1\,|_{x+y=1} = 5x(1-x) \to^{max}_{0\le x\le 1}$$

Максимум досягається при x =1/2, y = 1/2 і дорівнює 5/4 (рис. 1.1).

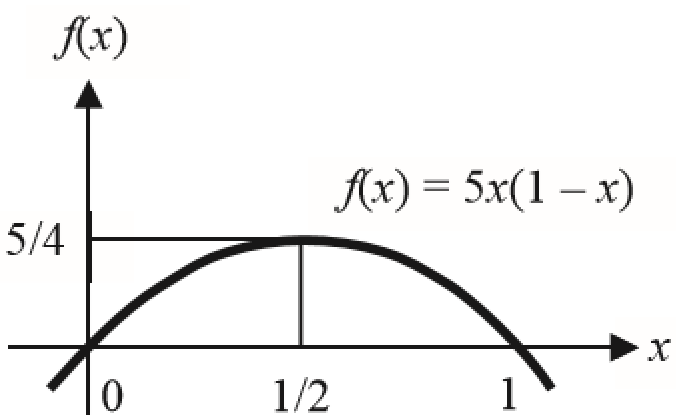

Рис. 2.1. Графік функції f (x) = 5x (1 — x)

Таким чином, у разі безкоаліційної гри (при незалежному виборі гравцями своїх стратегій) набір виграшів (5/4; 5/4) визначає оптимальний за Парето результат гри у змішаних стратегіях, тобто коли гравці обирають свої чисті (вихідні) стратегії з деякими можливостями. У даному випадку з ймовірностями x = 1/2, y = 1/2.

Приклад 1.3.

Розглянемо гру «Монетка», в якій беруть участь два гравці. Гравець 1 вибирає бік монети («орел» або «решка»), а гравець 2 намагається вгадати, яку сторону вибрано. Якщо він не вгадує, то платить гравцеві 1 одну грошову одиницю, якщо вгадує - гравець 1 платить йому одну грошову одиницю. Складемо таблицю виграшів гравців (спочатку вказано виграш гравця 1, потім — гравця 2).

Стратегії гравців		Гравець 2	
		Орел	Решка
Гравець1	Орел	–1, 1	1, —1
	Решка	1, —1	–1, 1

Розглянута гра є антагоністичною (виграш одного гравця дорівнює програшу іншого) і може бути зведена до матричної гри, яка повністю задається матрицею виграшів одного з гравців, наприклад, гравця 1. У даному прикладі маємо гру з матрицею

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

У кожного з гравців по дві стратегії: «орел» та «решка». Мета кожного з гравців — максимізація власного виграшу. Легко перевірити, що у грі «Монетка» ситуацій рівноваги у чистих (вихідних) стратегіях немає.

Якщо гра повторюється багаторазово, то гравці можуть вибирати свої вихідні стратегії з деякими ймовірностями, такими, щоб середні очікувані виграші гравців (тобто їх виграші в середньому на одну партію гри) були максимально можливими. Нехай x і y — ймовірність вибору стратегії «орел» гравцями 1 і 2 відповідно, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Тоді маємо для випадкових величин ξ_1, ξ_2, що визначають значення виграшів відповідно гравців 1 і 2 в одній партії, такі середні очікувані виграші гравців:

$$M\xi_1 = xy + x(1-y) + (1-x)y - (1-x)(1-y) =$$

$$= -1 + 2(x+y) - 4xy = (2x-1)(1-2y),$$

$$M\xi_2 = -M\xi_1$$

Розглянемо наступне запитання для гравця 1: серед $0 \le x \le 1$ знайти значення x^* та величину v_1^*, щоб виконувалася умова:

$$M\xi_1 \,|_{x^*, y \geq v_1^*} \text{ для } \forall 0 \leq y \leq 1,$$

тобто при виборі стратегії «орел» гравцем 1 із ймовірністю x^* гарантується виграш гравцю 1 не менше v_1^*.

Вказану умову можна записати у такому вигляді:

$$\min_{0 \le y \le 1} M\xi_1 \Big|_{x,y} \to \max_{0 \le x \le 1} = v_1^*.$$

У нашому прикладі маємо

$$\min_{0 \le y \le 1} M\xi_1 \Big|_{x,y} = \min_{0 \le y \le 1} (2x-1)(1-2y) =$$

$$= \begin{cases} 2x-1, \text{при } 0 \le x \le 1/2 \\ 1-2x, \text{при } 1/2 \le x \le 1 \\ \quad 0, \text{при } x = 1/2. \end{cases}$$

Вигляд функції

$$f(x) = \min_{0 \le y \le 1} M\xi_1 \big|_{x,y}$$

наведено на рис. 2.2.

Тоді отримаємо:

$$v_1^* = \max_{0 \le x \le 1} f(x) = 0, \text{при } x = 1/2.$$

Отже, якщо гравець 1 вибирає свою стратегію «орел» з імовірністю x* = 1/2 (а також з ймовірністю 1 — x* = 1/2 стратегію «решка»), то його гарантований середній виграш дорівнює v_1* =.

Аналогічний результат гри отримаємо і для гравця 2 за ймовірності y* = 1/2 вибору ним стратегії «орел» (або стратегії «решка»).

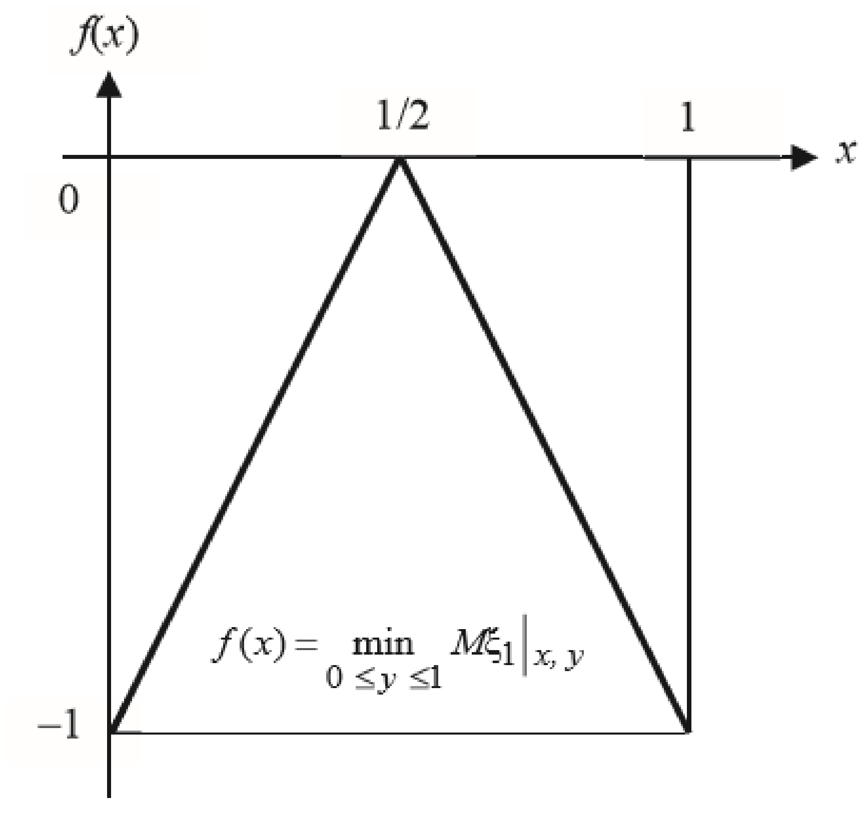

Рис. 2.2. Графік функції $f(x) = \min_{0 \le y \le 1} M\xi_1 \big|_{x,y}$

2.2. Приклад на знаходження рівноваги по Нешу

Знайти у наступній грі ситуації рівноваги (тут проти кожного рядка (кожного стовпця) вказано відповідну стратегію гравця 1 (гравця 2)):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} \end{array} \\ H = & \begin{pmatrix} (4,\ 3) & (5,\ 1) & (6,\ 2) \\ (2,\ 1) & (8,\ 4) & (3,\ 6) \\ (3,\ 0) & (9,\ 6) & (2,\ 8) \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array}. \end{array}$$

Рішення. Позначимо через

$$s_{ij} = (s_1^{(i)}, s_2^{(j)})$$

ситуацію при стратегіях гравців $s_1^{(i)}$ і $s_2^{(j)}$ відповідно. Функція виграшів гравців

$$H(s_{ij}) = H\left(s_1^{(i)}, s_2^{(j)}\right) = \left(H\left(s_1^{(i)}\right), H\left(s_2^{(j)}\right)\right).$$

Ситуація

$$s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$$

прийнятна для гравця 1, тому що маємо

$$H(s_{11}) = H\left(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}\right) = (4\ ,\ 3),$$

$$H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{21}) = 2,$$

$$H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{31}) = 3.$$

Ситуація s_{11} також є прийнятною для гравця 2, оскільки

$$H_2(s_{11}) = 3 > H_2(s_{12}) = 1,$$

$$H_2(s_{11}) = 3 > H_2(s_{13}) = 2.$$

Таким чином, ситуація

$$s_{ij} = (s_1^{(i)}, s_2^{(j)})$$

прийнятна для обох гравців, тобто це ситуація рівноваги по Нешу.

Ситуації s_{21}, s_{31} є неприйнятними для обох гравців.

Також можна перевірити, що ситуації s_{12}, s_{22} неприйнятні для обох гравців, а ситуація s_{32} прийнятна тільки для гравця 1. Далі ситуація s_{31} прийнятна тільки для гравця 1, а ситуації s_{23}, s_{33} прийнятні тільки для гравця 2.

Таким чином, інших рівноважних ситуацій (у чистих стратегіях) у цій грі немає.

2.3. Приклад на знаходження рівноваги по Нешу із застосуванням геометричної інтерпретації

Застосуємо геометричну інтерпретацію до попереднього прикладу.

Користуючись геометричною інтерпретацією переваги ситуацій, отримаємо (рис. 2.3), що ситуація

$$s_{32} = \left(s_1^{(3)}, s_2^{(2)}\right)$$

є оптимальною за Парето, причому

$$H(s_{32}) = H\left(s_1^{(3)}, s_2^{(2)}\right) = (9\,, 6).$$

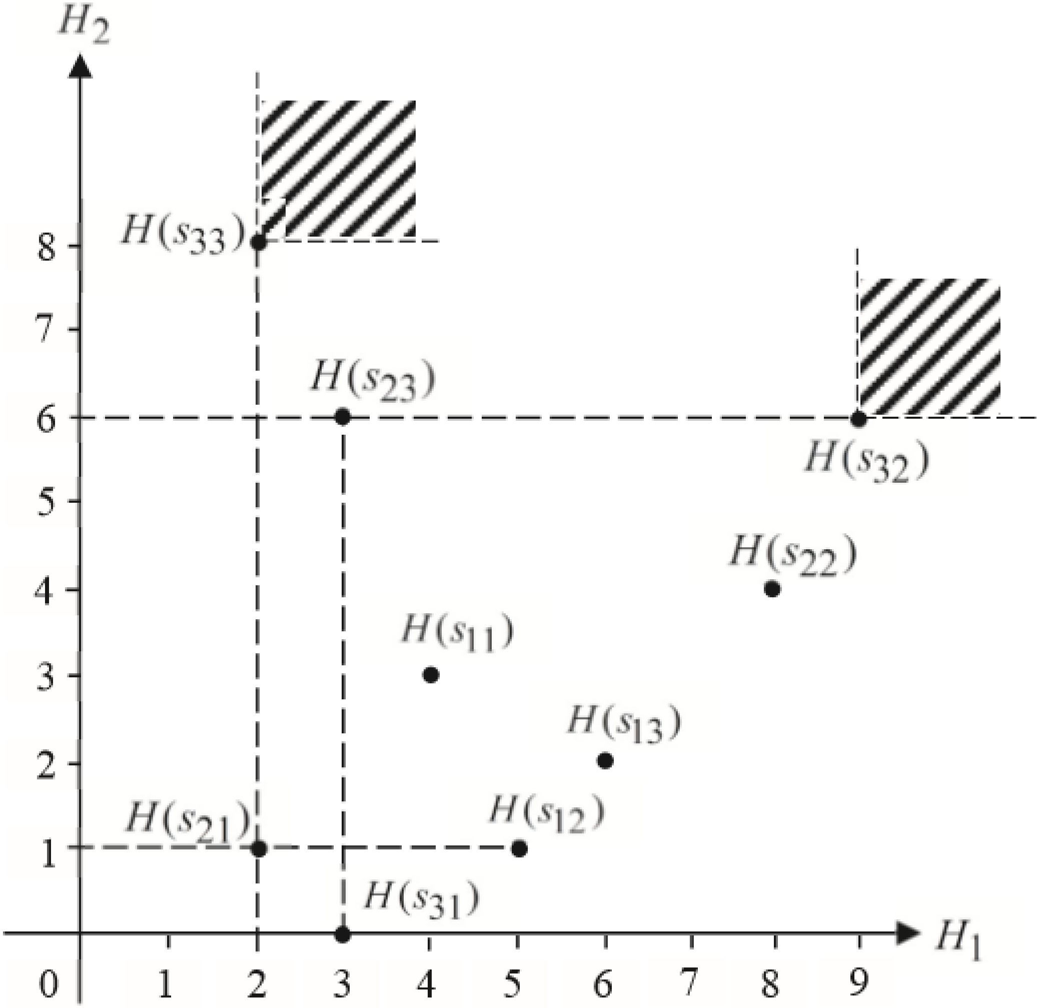

Рис. 2.3. Графічна ілюстрація оптимальних за Парето ситуацій

Також оптимальною за Парето є ситуація

$$s_{33} = \left(s_1^{(3)}, s_2^{(3)}\right),$$

причому

$$H(s_{33}) = (2\,, 8),$$

проте (на відміну від ситуації s_{32}) не є кращою порівняно з рівноважною ситуацією

$$s_{11} = \left(s_1^{(3)}, s_2^{(3)}\right),\ .$$

Перевіримо умову «зваженої ефективності» при $\overline{\lambda} = (1, \dots, 1)$ для отриманих оптимальних ситуацій з Парето s_{32}, s_{33}. Для ситуації

$$s_{11} = \left(s_1^{(3)}, s_2^{(3)}\right),$$

$$H_1(s_{32}) + H_2(s_{32}) = 9 + 6 = 15;$$

для ситуації

$$s_{33} = \left(s_1^{(3)}, s_2^{(3)}\right):$$

$$H_1(s_{33}) + H_2(s_{33}) = 2 + 8 = 10;$$

тобто максимальне значення $\overline{\lambda}^T H(s)$ досягається для ситуації

$$s^0 = s_{32} = \left(s_1^{(3)}, s_2^{(2)}\right),$$

яка є виваженою оптимальною за Парето ситуацією (ефективнішою за цією умовою).

2.4. Застосування методів теорії ігор для прийняття рішень в задачах із невизначеними даними

Філія великої харчової корпорації, що знаходиться в США, займається виробництвом та реалізацією морозива. Собівартість однієї порції морозива – 50 центів, а ціна реалізації складає 80 центів. Базуючись на потужності наявного устаткування філія має виробляти 0, 300, 500, 700, 900 або 1100 порцій морозива на день. Можливості для реалізації морозива в туристичний сезон змінні, та оцінюються залежності від погодних умов наступним чином:

- у спеку буде куплено 1000 порцій морозива;

- сонячну погоду буде куплено 800 порцій морозива;

- у похмурну погоду – 500 порцій;

- у дощову, вітряну погоду – 100 порцій;

- у дощову погоду реалізатор має право знизити ціну порції на 5 копійок, тоді обсяг реалізації зросте в 1,5 рази.

Витрати на доставку морозива на місце реалізації складають 10 доларів, а з 80 центів вартості однієї реалізованої порції 10 центів у разі продажу йде реалізатору.

Якщо реалізація морозива неповна, фірма змушена нести додаткові витрати на транспортування залишків у морозильник, вони становлять 10 доларів. Крім того, фірма платить за орендований морозильник 3 долари за кожну сотню порцій за одну ніч зберігання. [22]

Фірмі потрібно у призначений день прийняти рішення про підготовку до реалізації певної кількості морозива. Знаючи, що прибуток від реалізації морозива великою мірою залежить від погодних умов, фірма звернулася в службу прогнозу погоди, яка надала такі оцінки ймовірностей погодних умов на день реалізації:

P_1(спека)=0,3,

P_2(сонячна погода)=0,4,

P_3(похмура тепла погода)=0,2,

P_4(дощова, вітряна погода)=0,1,

Передбачається, що будь-які погодні умови можна співвіднести з одним із перелічених видів.

Потрібно знайти оптимальну разову стратегію фірми.

Розв'язання

Знайдемо величину доходів і збитків фірми у відповідності до різних обсягів виробництва морозива і усіх варіантах погодних умов. Податки й інші відрахування враховувати не будемо.

1) у спеку буде придбано 1000 порцій морозива:

$300 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 50$ прибуток,

$500 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 90$ прибуток,

$700 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 130$ прибуток,

$900 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 170$ прибуток,

$1000 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 3{,}00 = 177$ прибуток.

2) у сонячну погоду буде придбано 800 порцій морозива:

$300 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 50$ прибуток,

$500 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 90$ прибуток,

$700 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 130$ прибуток,

$800 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 3{,}00 = 137$ прибуток,

$800 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 3 \cdot 3{,}00 = 131$ прибуток.

3)у похмуру теплу погоду – 500 порцій:

$300 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 50$ прибуток,

$500 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 = 90$ прибуток,

$500 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 2 \cdot 3{,}00 = 74$ прибуток,

$500 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 4 \cdot 3{,}00 = 68$ прибуток,

$500 \cdot (0{,}80 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 6 \cdot 3{,}00 = 62$ прибуток.

4) у дощову,вітряну погоду – 100 порцій:

а) при ціні 80 центів:

$100 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 2 \cdot 3{,}00 = -6$ збиток,

$100 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 4 \cdot 3{,}00 = -12$ збиток,

$100 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 6 \cdot 3{,}00 = -18$ збиток,

$100 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 8 \cdot 3{,}00 = -24$ збиток,

$100 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 10 \cdot 3{,}00 = -30$ збиток.

б) при ціні 75 центів:

$$100 \cdot 1{,}5 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 2 \cdot 3{,}00 = -3{,}5 \quad \text{збиток},$$
$$100 \cdot 1{,}5 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 4 \cdot 3{,}00 = -9{,}5 \quad \text{збиток},$$
$$100 \cdot 1{,}5 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 6 \cdot 3{,}00 = -15{,}5 \quad \text{збиток},$$
$$100 \cdot 1{,}5 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 8 \cdot 3{,}00 = -21{,}5 \quad \text{збиток},$$
$$100 \cdot 1{,}5 \cdot (0{,}75 - 0{,}50 - 0{,}10) - 10{,}00 - 10{,}00 - 10 \cdot 3{,}00 = -27{,}5 \quad \text{збиток}.$$

Використовуючи дані подані вище кладемо таблицю виграшів підприємця при різному попиті на товар (табл. 1). Обсяг товару, що вивозиться, позначимо через V, а попит через П. стратегії фірми позначимо V_i,i=0, 1, 2, 3, 4, 5. Стани об'єктивної реальності – погодні умови, що визначаються попит на продукцію. Для зручності відразу ж додаємо до платіжної матриці рядок з максимальним прибутком (для розрахунку матриці ризиків рядок максимальних значень у кожному стовпці).

Таблиця 1

П / V	Обсяг	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_{4(а)}$	$П_{4(б)}$
V_0	0	0	0	0	0	0
V_1	300	50	50	50	-6	-3,5
V_2	500	90	90	90	-12	-9,5
V_3	700	130	130	74	-18	-15,5
V_4	900	170	137	68	-24	-21,5
V_5	1100	177	131	62	-30	-27,5
Max прибуток		177	137	90	0	0

Проведемо аналіз платіжної матриці на предмет відкидання явно не вигідних стратегій. Однак таких стратегій у цій матриці знайти не вдається. Складемо матрицю ринків (табл.2).

Таблиця 2

П \ V	Обсяг	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_{4(а)}$	$П_{4(б)}$
V_0	0	177	137	90	0	0
V_1	300	127	87	40	6	3,5
V_2	500	87	47	0	12	9,5
V_3	700	47	7	16	18	15,5
V_4	900	7	0	22	24	21,5
V_5	1100	0	6	28	30	27,5

Обидві матриці показують, що варіант $П_{4(б)}$ у всіх випадках вигідніший, ніж $П_{4(а)}$, тому далі передбачається використання тільки його.

Оцінимо стратегії фірми за допомогою розглянутих критерій.

1) Критерій Байєса-Лапласа

Відповідно до цього критерію потрібно оцінити середній виграш фірми при кожній стратегії:

$$a0 = 0 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 = 0,$$

$$a1 = 50 \cdot 0{,}3 + 50 \cdot 0{,}4 + 50 \cdot 0{,}2 + (-3{,}5) \cdot 0{,}1 = 44{,}65,$$

$$a2 = 90 \cdot 0{,}3 + 90 \cdot 0{,}4 + 90 \cdot 0{,}2 + (-9{,}5) \cdot 0{,}1 = 80{,}05,$$

$$a3 = 130 \cdot 0{,}3 + 130 \cdot 0{,}4 + 74 \cdot 0{,}2 + (-15{,}5) \cdot 0{,}1 = 104{,}25,$$

$$a4 = 170 \cdot 0{,}3 + 137 \cdot 0{,}4 + 68 \cdot 0{,}2 + (-21{,}5) \cdot 0{,}1 = 117{,}25,$$

$$a5 = 177 \cdot 0{,}3 + 131 \cdot 0{,}4 + 62 \cdot 0{,}2 + (-27{,}5) \cdot 0{,}1 = 115{,}15.$$

Звідси випливає, що відповідно до критерію Байєса-Лапласа V_4 – оптимальна стратегія, тому що для неї середній виграш фірми максимальний.

2) Максимальний критерій Вальда

Оцінимо

$$W=\max_i \min_j a_{ij} = \max(0;-3,5;-9,5;-15,5;-21,5;-27,5) = 0,$$

Тобто V_0 – оптимальна стратегія, що означає припинення виробництва і реалізації. Якщо ж фірма не бажає йти на такий крок, то оптимальною є перша.

3) Мінімаксний критерій Севіджа.

Оцінимо

$$S=\min_i \max_j r_{ij} = \min(177;127;87;47;24;30) = 24.$$

Значення 24 відповідає V_5, отже, з погляду цього критерію оптимальною є стратегія V_5.

4) Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца

Оцінимо

$$H=\max_i \cdot (\chi \cdot \min_j a_{ij} + (1-\chi) \cdot \max_j a_{ij}),$$

для кількох значень сталої Гурвіца,які відповідно до власних переваг,

1) $\chi = 0,$

$$H = \text{мах}\,(1 \cdot 0; 1 \cdot 50; 1 \cdot 90; 1 \cdot 130; 1 \cdot 170; 1 \cdot 177)$$
$$= max\,(0; 50; 90; 130; 170; 177) = 177$$

2) $\chi = 0{,}2,$

$$H = max\,(0{,}2 \cdot 0 + 0{,}8 \cdot 0;\ 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}8 \cdot 50;\ 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}8 \cdot 90;\ 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}8 \cdot 130;\ 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}8 \cdot 170;\ 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}8 \cdot 177) = max\,(0;\ 40;\ 72;\ 104;\ 136;\ 141{,}6) = 141{,}6$$

3) $\chi = 0{,}4,$

$$H = max(0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 0;\ 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 50;\ 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 90;\ 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 130;\ 0{,}4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 170;\ 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 177) = max\,(0;\ 30;\ 54;\ 78;\ 102;\ 106{,}2) = 106{,}2$$

4) $\chi = 0{,}5,$

$$H = max\,(0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0;\ 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 50;\ 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 90;\ 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 130;\ 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 170;\ 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 177) = max\,(0;\ 25;\ 45;\ 65;\ 85;\ 88{,}5) = 88{,}5$$

5) $\chi = 0{,}6,$

$$H = max\,(0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 4;\ 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 50;\ 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 90;\ 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 130;\ 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 170;\ 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 177) = max(0;\ 20;\ 36;\ 52;\ 68;\ 70{,}8) = 70{,}8$$

6) $\chi = 0{,}8,$

$$H = max\,(0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 0;\ 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 50;\ 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 90;\ 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 130;\ 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 170;\ 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 177) = max(0;\ 10;\ 18;\ 26;\ 34;\ 35{,}4) = 35{,}4$$

При всіх шести значеннях оптимальною стратегією є шоста, тобто V_5. Значення χ=1 брати не має змісту, тому в цьому випадку маємо критерій Вальда.

Для зручності розрахунки за всіма критеріями зведемо в таблицю. У ній оптимальні стратегії виділено жирним шрифтом.

Таблиця 3

	Критерій Байєса-Лапласа	Критерій Вальда	Критерій Севіджа	Критерій Гульвіца					
				χ=0	χ=0,2	χ=0,4	χ=0,5	Х=0,6	χ=0,8
V_0	0	0	177	0	0	0	0	0	0
V_1	44,65	-3,5	127	50	40	30	25	20	10
V_2	80,05	-9,5	87	90	72	54	48	36	18
V_3	104,25	-15,5	47	130	104	78	65	52	26
V_4	**117,25**	-21,5	24	170	136	102	85	68	34
V_5	115,15	-27,5	30	177	141,6	106,9	88,5	70,8	35,6

Оцінка стратегій за допомогою цих чотирьох критеріїв не дала однозначної відповіді на запитання, яка зі стратегій є оптимальною. Однак таблиця дає змогу краще орієнтуватися в наданих можливостях і провести первинний аналіз ситуації. Можна припустити, що керівництво філії зупиниться на стратегії V_4 або V_5. Котру саме стратегію обере філія – вирішувати їй, виходячи з додаткових знань про становище філії на даному сегменті ринку.

2.5. Приклади розв'язування матричних ігор двох осіб

Розглянемо наступний приклад застосування теорії ігор для вибору оптимальної стратегії роботи підприємства.

Задача 1. Завод з виробництва автомобільних патрубків виготовляє запчастини на потреби автомобільної промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три варіанти нового типу патрубка: *А*-1, *А*-2, *А*-3. Для спрощення припустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та типу гуми, що використовується, кожен тип може мати три модифікації: *М*-1, *М*-2, *М*-3 залежно від технології виробництва. Собівартість виготовлення автомобільних патрубків наведена в табл. 4:

Собівартість виготовлення партії патрубків, тис. ум. од.

Таблиця 4

Тип патрубка	Модифікація		
	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає в зв’язку з необхідністю вибрати той тип автомобільного патрубка та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип автомобільного патрубка, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього якості.

Розв’язання

Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення автомобільного патрубка типу А-1, то економічний відділ настоюватиме на виборі технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на патрубку виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 — також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно наполягати на варіанті впровадження у виробництво патрубку типу А-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов — 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min \{10;6;5\} = 5,$$

$$\min_{i=2} a_{ij} = \min \{8;7;9\} = 7,$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min \{7;5;8\} = 5,$$

$$\alpha = \max_{j} \min_{i} a_{ij} = \max \{5;7;5\} = 7 \text{ — нижня ціна гри.}$$

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво патрубку, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск патрубку типу А-1. Для технології виготовлення патрубку з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. — для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 — також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати — 7 тис. ум. од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10,$$

$$\max_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7,$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9,$$

$$\beta = \min_{i} \max_{j} a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7$$ — верхня ціна гри.

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

ВИСНОВКИ

Сучасна економічна теорія характеризується високим рівнем формалізації, що визначає суттєве використання математичних методів та моделей. Адекватна математична модель соціально-економічного явища повинна відображати властиві йому особливості. Одна з характерних рис будь-якого соціально-економічного явища полягає у відмінності інтересів сторін, що беруть участь у ньому (наявності різних точок зору на саме явище і його можливі результати), у різноманітності дій, які ці сторони можуть здійснювати для досягнення своїх цілей. . Такі ситуації, зумовлені множинністю (незбігом) інтересів учасників, прагненням якнайбільше виграти у конкурентів (отримати найкращий індивідуальний результат), називають конфліктними ситуаціями (конфліктами).

Прийняття управлінських рішень за умов конфлікту вимагає спеціального дослідження, заснованого на використанні методів теорії ігор. Для таких ситуацій якість і кількість наявної інформації про цю ситуацію (об'єкт управління та зовнішнє середовище) визначають, яким чином може бути формалізовано і вирішено завдання прийняття рішення.

Формалізація конфліктної ситуації у формі гри полягає в описі її основних елементів, до яких належать суб'єкти гри (гравці), безліч їх стратегій (допустимі альтернативи), способи вибору стратегій, інформація, якою володіє кожен гравець при здійсненні такого ви - бору, виграш кожного гравця за кожного набору вибраних стратегій. Доступна гравцям інформація про наміри інших гравців, їхні можливості (чи можуть вони домовлятися, діяти спільно проти інших гравців) може істотно вплинути на рішення, яке приймається.

На основі аналізу літературних джерел мною було вивчено та відібрано матеріал по темі бакалаврської роботи. У роботі розглянуто прикладні задачі на теорії ігор.

Сформулювати реальну конфліктну ситуацію в ігровій формі — це означає схематизувати її так, щоб ясно були видні можливі способи поведінки учасників (названі стратегіями) та чисельний результат (кількісна оцінка — платіж), до якого приводить кожна комбінація стратегій сторін, що беруть участь. Формалізована схема конфліктної ситуації в математичній формі представляє її математичну модель. Метою теорії ігор є вироблення рекомендацій для розумної поведінки гравців у конфліктних ситуаціях, тобто визначення оптимальної стратегії кожного гравця.

Матеріали бакалаврської роботи можуть бути використані студентами при поглибленому вивченні теорії ігор та при написанні кваліфікаційних робіт.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Наконечний С. І., Савіна С. С. - Математичне програмування: Навчальний посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 452 с.

2. Машина Н.І. - Економічний ризик та методи його вимірювання: Навчальний посібник. – К.:Центр навчальної літератури, 2003. – 188с.

3. Верченко П.І. Сігал А.В., Наконечний Я.С., - Економічний ризик: ігрові моделі. – К.: КНЕУ, 2002. – 364 с.

4. Ивченко И.Ю. - Економічні ризики. – К.: Наука, 2004- 304 с.

5. Нейман Дж. фон Моргенгенштейн О., - Теория игр и экономическое поведение. – М:Наука,1970 – 425с.

6. Овчинников П. П. Вища математика: Підручник для студ. вищ. техн. навч. закладів у 2 ч. Ч.2. / Овчинников П. П – К.: Техніка, 2004. – 790с.

7. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц./ В. В. Вітлінський, Г. І. Великоіваненко. – К.: КНЕУ, 2005. – 306 с.

8. Вовк В.М. Оптимізаційні моделі економіки : навч. посібник / В.М. Вовк, Л.М. Зомчак. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 318 с.

9. Дацко М. В. Дослідження операцій в економіці: навч. посіб. / М. В. Дацко, М. М. Карбовник. – Л. : ПАІС, 2009. – 288 с.

10. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ “Економічна думка”, 2008. – 704 с.

11. Шиян А.А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті /А.А. Шиян // Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 164 с.

12. Шевченко О.О. Історія економіки та економічної думки: сучасні економічні теорії. Навчальний посібник – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 280 с.

13. В.М. Лісовицький Мікроекономіка. Навчальний посібник. Видання 3-є. доповнене і дороблене. – К.:Кондор. – 164 с.

14. Мельникова В.І., Яременко В.Г., Мельникова О.П, Корнівська В.О. Мікроекономіка: навчальний посібник. - К.: ВД «Професіонал» 2005. – 400 с.

15. Башнянин Г.І, Щедра О.В. Мікроекономічна теорія. - Львів: Новий світ, 2009. - 640 с.

16. Вища математика : у 2 кн. Т.2. Спеціальні розділи : підручник для вищ. навч.закл. / Г.Л. Кулініч, Є.Ю. Таран, В.М. Бурим та ін.; за ред. Г.Л. Кулініча. - 2-ге вид, перероб. і доп . - К. : Либідь , 2003. - 367 с.

17. Клепко В.Ю. Вища математика в прикладах і задачах : навч.посібник для вищ.навч.закл. / В.Ю.Клепко, В.Л. Голець. - 2-ге вид., перероб.і доп . - К. : Центр навч.літ. , 2006. - 592 с.

18. Ляшенко В.П. Вища математика : навчальний посібник / В.П.Ляшенко, Т.А.Набок - Кременчук , 2008. - 222 с.

19. Свердан П.Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей : підручник для вищ. навч. закл. - К : Знання , 2008. - 450 с.

20. Соколенко О.І. Вища математика : Підручник - К. : Академія , 2002. - 432 с.

21. Костюк В.С. Економічна теорія : навч.посібник для вищ. навч. закл. / В.С.Костюк, А.М.Андрющенко, І.П.Борейко. - К. : Центр учбов.літ. , 2009. - 280 с.

22. Кучеренко В.Р. Основи економічної кон`юнктури : навч. посібник для внз / В.Р.Кучеренко,В.А,Карпов - К. : Центр навчальної літератури , 2004. - 222 с

23. Мороз О.В., Матвійчук А.В. Оптимальне управління економічними системами в умовах невизначенності та ризику : монографія - Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця , 2003. - 178 с.

24. Бабак В.П. Теорія ймовірності, випадкові процеси та математична статистика : підручник для вищ.навч.закл. / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. - К. : Техніка , 2004. - 287 с.