Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ ТА ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ У ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ.

Виконала: студентка II курсу магістратури
Групи М-М – 61
Спеціальності: 014
Середня освіта (Математика)
Власик Вікторія Павлівна
Керівник: канд. техн. наук, доцент
Присяжнюк Ігор Михайлович
Рецензенти:
д.т.н., проф. Сафоник А.П.

Рівне – 2021

Зміст

Вступ 3
РОЗДІЛ 1. ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ. 6
1.1. Основні поняття векторного простору. 6
1.2. Поняття підпростору, лінійний многовид, ізоморфізм скінченно вимірних векторних просторів. 14
1.3. Евклідовий векторний простір. 14
РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ. 31
2.1. Поняття лінійних відображень та операторів у векторних просторах. 31
2.2. Власні значення, власні вектори оператора, поняття операторів із простим спектром. 41
2.3. Канонічна λ-матриця, матричні многочлени. 51
2.4. Жорданова клітина, жорданова матриця, теорема Гамільтона-Келі. 58
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРІВ ТА ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ 71
3.1. Розв’язування задач з використанням теорії векторів. 71
3.2. Розв’язування задач з використанням теорії лінійних операторів. 78
Висновки 88
Список використаних джерел 89

Вступ

Актуальність. Питання знаходження розв'язків лінійних рівнянь стало історично першим важливим питанням лінійної алгебри [1-4]. Для побудови теорії яка б слугувала для систем таких рівнянь потрібні стали такі інструменти, як теорія матриць, теорія визначників [5-8]. Це все і привело людство до виникнення теорії векторних просторів [9].

Вважається, що Джузеппе Пеано (1888) став першим вченим, який дав сучасне означення векторного простору та лінійного відображення. Побудова Анрі Леон Лебегом (французьким математиком) функціональних просторів стало досить важливим фактором у розвитку векторних просторів. Україно-польський математик Стефан Банах і німецький математик Давид Гільберт приблизно у 1920 формалізували це поняття.

Конкретні приклади векторних просторів зустрічаються у математичному апараті фактично усіх розділах фізики. Скінченно вимірними векторними просторами є тривимірний фізичний простір R^3 (без урахування кривизни), конфігураційний простір R^{3n} і фазовий простір R^{6n}системи n класичних точкових частинок. Гільбертові простори становлять конкретну й абстрактну складову основу математичного апарату квантової фізики і належать до числа нескінченно вимірних комплексних векторних просторів. Найпростішим прикладом Гільбертового простору є простір $L_2(R^1)$.

Зазначимо, що простори векторів станів різних систем мікрочастинок, які досліджуються у квантовій механіці, квантовій статистичній фізиці і квантовій теорії поля є основними фізичними

прикладами. Мають широко застосування і такі векторні поля, у яких поле скалярів не збігається з множинами дійсних чи комплексних чисел. Дійсно, простір Гільберта над полем кватерніонів використовується в одному із формулювань квантової механіки, а Гільбертовий простір над полем октоніонов - в одному із формулювань квантової хромодинаміки. Градуйовані векторні поля, тобто лінійні простори разом з їхнім фіксованим розкладом у пряму нескінченну суму підпросторів інтенсивно застосовуються у сучасних теоріях суперсиметрії.

Розв'язуючи ті чи інші задачі, пов'язані із лінійними моделями досить часто нам приходиться розглядати функції, які елементам певного простору ставлять у відповідність елементи того самого простору. Лінійні оператори є найпростішими серед функцій такого типу, і відіграють фундаментальну роль в алгебрі матриць.

Враховуючи вище описане, тема даної роботи є досить актуальною.

Метою роботи провести комплексний теоретичний та практичний аналіз теорії векторних просторів та лінійних операторів, та їх застосування в при розв'язуванні задач математики.

Об'єкт дослідження – теорія векторних просторів та лінійних операторів.

Предмет дослідження **–** задачі теорії векторних просторів та лінійних операторів.

Методи дослідження – методи векторної алгебри, теорія лінійних операторів, методи теорії функції дійсної змінної.

Згідно мети, було визначено наступні **завдання дослідження**:

- провести згідно тематики роботи систематизацію практичного та теоретичного матеріалу;
- отримати спеціальні фундаментальні знання і уміння із розв'язування задач теорії векторних просторів та лінійних операторів;

- дослідити застосування теорії векторних просторів та лінійних операторів при розв’язуванні задач математики.

Структура роботи. Робота містить список використаних джерел, висновки, вступ, три розділи основної частини.

Обґрунтованість та вірогідність результатів роботи забезпечено використанням обґрунтованих і надійних літературних джерел, несуперечністю одержаних результатів, узгодженістю із відомими аналогічними результатами у науковій літературі.

Апробація результатів. Результати роботи (основні положення) були оприлюднені та обговорювалися на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2021 рік.

РОЗДІЛ 1. ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ.

1.1. Основні поняття векторного простору.

Означення, найпростіші властивості векторних просторів.

Припустимо, що у нас P – певне поле, елементи цього поля будемо називати скалярами, V – є непорожньою множиною, $P \times V$ – є прямим добутком множин P і V. Нехай маємо відображення $\omega : P \times V \to V$, і це відображення кожній парі (упорядкованій) (λ, a) із $P \times V$ ставить у відповідність цілком певний єдиний елемент із V і його будемо позначати λa та називати «добутком скаляра λ» на елемент a. Відзначимо, що ω (відображення) у строгому розумінні слова не є алгебраїчною операцією на даній множині V. Проте, зафіксувавши елемент λ, відображення ω звузиться до відображення $\omega_\lambda : \{\lambda\} \times V \to V$, і це відображення уже можна буде розглянути як певну одномісну унарну алгебраїчну операцію $\omega_\lambda : V \to V$ на множині V, яка ставить у відповідність кожному елементу $a \in V$ цілком єдиний елемент λa з V. Отже, саму операцію множення елементів множини V на певні елементи поля P потрібно розглядати як подання на множині V певних унарних операцій $\omega_\lambda : V \to V$, при цьому кількість їх повністю збігається відповідно з кількістю елементів поля P .

Означ.1. Алгебра $\langle V;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in P\};0\rangle$ (множина V), яка містить елемент 0, і на якій задано бінарну алгебраїчну операцію додавання, причому для кожного $\lambda \in P$ визначена операція $\omega_\lambda : V \to V$, яка ставить у відповідність елементу $a \in V$ елемент $\lambda a \in V$, називається векторним простором над полем P, якщо виконуються такі властивості (аксіоми векторного простору)[10]:

v_1: $\forall a \in V \forall b \in V \forall c \in V\ (a + (b + c) = (a + b) + c)$ – операція додавання є асоціативною;

v_2: $\forall a \in V \forall b \in V$ (a+b=b+a) – операція додавання елементів простору є комутативна;

v_3: $\exists 0 \in V \forall a \in V$ (a + 0 = a) – існування нульового елемента відносно додавання;

v_4: $\forall a \in V \exists -a \in V$ (a + (–a) = 0) – існування протилежного елемента для кожного елемента множини V;

v_5: $\forall \alpha \in P \forall \beta \in P \forall a \in V((\alpha\beta)a = \alpha(\beta a))$ – операція множення на скаляри асоціативна;

v_6: $\forall \alpha \in P \forall a \in V \forall b \in V(\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b)$ – дистрибутивний закон відносно операцій додавання елементів множини V;

v_7: $\forall \alpha \in P \forall \beta \in P \forall a \in V\ ((\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a)$ – дистрибутивний закон відносно операції додавання скалярів;

v_8: $\forall a \in V\ (1 \cdot a = a)$ – існування одиничного елемента відносно операції множення на скаляри.

Задані вище аксіоми [11-14] v_1–v_4 показують, що алгебра $\langle V;+;0\rangle$ є абелевою групою. Таку групу ще називають адитивною групою векторного простору. $\forall$ a і b з простору V існує вектор $a + (-b) = a - b$, і цей вектор називається різницею векторів a і b. Відзначимо, що елементи множини V називають векторами, зокрема, елемент 0 називаєть нуль-вектором, вектор $-a$ називають протилежним векторові a.

Згідно аксіомам v_1–v_8 векторного простору можна вивести наступні властивості:

1. $\forall a \in V\ (0 \cdot a = 0)$, де 0 зліва означає нулевий елемент поля P, а справа

— нулевий вектор з V.

Дійсно, $a = 1 \cdot a = (1+0)a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = a + 0 \cdot a$. Тому 0·a=0.

2. $\forall \alpha \in P\,(\alpha \cdot 0 = 0)$, де 0 в обох частинах рівності означає нулевий вектор простору V.

Дійсно, якщо a – $\forall$ вектор із простору V, то $a + 0 = a$, отже, $\alpha a = \alpha(a+0) = \alpha a + \alpha \cdot 0$. Відомо, що в адитивній групі нулевий елемент є єдиним. Тоді отримуємо, що $\alpha \cdot 0 = 0$.

3. $\forall \alpha \in P\, \forall a \in V\, (\alpha(-a) = -\alpha a)$.

Дійсно, $\alpha a + \alpha(-a) = \alpha(a + (-a)) = \alpha \cdot 0 = 0$, тоді вектор $\alpha(-a)$ є протилежним векторові αa.

4. $\forall \alpha \in P\, \forall a \in V\, (\alpha \cdot a = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee a = 0)$.

Дійсно, у випадку, якщо α≠0, то в полі P буде обернений до α елемент α^{-1}. Тоді $a = 1 \cdot a = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$.

5. $\forall \alpha \in P\, \forall a \in V\, ((-\alpha)a = -\alpha a)$.

Дійсно, αa+(–α)a=(α+(–α))a=0·a=0, тоді вектор (–α)a є протилежним векторові αa.

6. $\forall \alpha \in P\, \forall \beta \in P\, \forall a \in V\, ((\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a)$.

Дійсно, $(\alpha - \beta)a = (\alpha + (-\beta))a = \alpha a + (-\beta)a = \alpha a - \beta a$.

7. $\forall \alpha \in P\, \forall a \in V\, \forall b \in V\, (\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b)$.

Справді, $\alpha(a - b) = \alpha(a + (-b)) = \alpha a + \alpha(-b) = \alpha a - \alpha b$.

В алгебрі, та й інших галузях математики досить часто розглядають векторні простори над полями R і C відповідно дійсних та комплексних чисел. Їх звуть, відповідно, дійсні і комплексні векторні простори.

Приклади векторних просторів [15-18]:

1. Простір W_3 Множина всіх геометричних векторів простору буде векторним простором над полем дійсних чисел R. Тут виконуються операції

додавання двох векторів і множення вектора на скаляр. Якщо розглядаємо геометричні вектори площини чи прямої то теж маємо дійсні векторні простори. Позначають їх відповідно символами W_2 і W_1.

2. Якщо розглянемо операції додавання комплексних чисел і множення комплексних чисел на дійсні числа то матимемо поле комплексних чисел $\mathbf{C}$, яке є векторним простором над полем R дійсних чисел.

3. Якщо розглянемо операції додавання і множення комплексних чисел,то $\mathbf{C}$ буде векторним простором над полем $\mathbf{C}$. Так само, поле R буде векторним простором над полем дійсних чисел відносно операції додавання і операції множення дійсних чисел.

4. Якщо розглянемо операції додавання многочленів і їх множення на дійсні числа векторний простір над полем R, множиною R[x] якого будуть усі многочлени $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ із однією зміною з дійсними коефіцієнтами є. Так само визначається комплексний векторний простір, це множина $\mathbf{C}[x]$ всіх многочленів однієї змінної із комплексними коефіцієнтами.

5. Якщо розглянемо операції додавання функцій і множення функцій на дійсні числа, то множина $C_{[a,b]}$ усіх неперервних на $[a,b]$ функцій одної дійсної змінної є дійсним векторним простором.

6. Припустимо, що V_n – множина усіх впорядкованих n-ок $(a1,\ldots,an)$ елементів поля $\mathbf{P}$ (арифметичні n-вимірні вектори). На V_n розглянемо операції додавання векторів і їх множення на скаляри із поля $\mathbf{P}$ так:

$$(a1,a2,\ldots,an) + (b1,b2,\ldots,bn) = (a1+b1,a2+b2,\ldots,an+bn);$$

$$\lambda\,(a1,a2,\ldots,an) = (\lambda a1,\lambda a2,\ldots,\lambda an).$$

Очевидно, що тут виконуються аксіоми із означення векторного простору. Сам же простір V_n називають арифметичним n-вимірним векторним простором над полем P.

7. Розглянемо операції додавання послідовностей і їхнє множення на числа з поля P. Тоді V_∞ множина всіх нескінченних послідовностей

$(a_1,a_2,...a_n,...)$, елементи яких належать полю P. Тут:

$(a1,a2,\dots,an,\dots) + (b1,b2,\dots,bn,\dots) = (a1+b1,a2+b2,\dots,an+bn,\dots)$,

$\lambda(a_1,a_2,...,a_n,...)=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n,...)$.

На основі аксіом векторного простору неважко переконатись, що V_∞ є векторним простором над полем P. Його називають нескінченновимірним арифметичним векторним простором.

Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів.

Розглянемо довільну скінченну множину векторів з векторного простору над полем P – $a_1,a_2,...,a_m$.

Означ. 2. Будь-яка сума $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_m a_m$, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m \in P$ називається лінійною комбінацією векторів $a_1,a_2,...,a_m$. Лінійною оболонкою цих векторів називається множина усіх лінійних комбінацій векторів $a_1,a_2,...,a_m$, позначається $L(a_1,a_2,...,a_m)$.

Справедливою в цьому випадку є рівність $L(a_1,a_2,...,a_m)=\{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_m a_m \mid \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m \in P\}$.

Означ. 3. Система векторів векторного простору V $a_1,a_2,...,a_m$ називається лінійно залежною тоді, коли існують скаляри $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m \in P$, причому не всі вони одночасно рівні нулю, що $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_m a_m= 0$. Навпаки, якщо із рівності $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_m a_m=0$ слідує рівність $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_m=0$, то система векторів $a_1,a_2,...,a_m$ називається лінійно незалежною системою векторів.

У векторному просторі C над полем дійсних чисел R елементи $(1 \dots i)$ утворюють лінійно незалежну систему векторів [19-21], і $\forall$ три комплексні числа є лінійно залежними. У R[x] всіх многочленів одної змінної з дійсними коефіцієнтами $\forall$ скінченна підмножина множини $\{1, x, x^2,..., x^n,\dots\}$ утворює лінійно незалежну систему. У векторному просторі W_2 $\forall$ два неколінеарні вектори утворять лінійно незалежну систему, а $\forall$система

векторів, яка має більше двох елементів, буде лінійно залежною. Розглянемо простір W_3, тут $\forall$ три некомпланарні вектори утворять лінійно незалежну систему векторів, а $\forall$множина, яка має більше трьох векторів є лінійно залежною.

Розглянемо n-вимірний арифметичний векторний простір V_n . Тут вектори $e1 = (1,0,\ldots,0)$, e_2=(0,1,0,...,0), ... , $en = (0,0,\ldots,1)$ є одиничними векторами. Відзначимо, що система одиничних векторів завжди є лінійно незалежною. Врахувавши, що $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_n e_n=0$ отримаємо $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=(0,0,\ldots,0)$. Тоді $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Також $\forall$ скінченна підмножина одиничних векторів $e_1= (1,0,\ldots,0,\ldots)$, $e_2= (0,1,0,\ldots,0,\ldots)$,..., $e_n= (0,0,\ldots,1,0,\ldots)$, в нескінченновимірному арифметичному векторному просторі V_∞... буде лінійно незалежною.

Властивості:

1. Будь-яка система векторів, яка містить нулевий вектор є лінійно залежною.

Нехай, не зменшуючи загальності, один з векторів $a_к$ є нульовим вектором, то л. к. цих векторів системи, всі коефіцієнти якої рівні нулю, окрім коєфіцієнта $a_к$, рівна нуль- вектору: $0a_1+\ldots+0a_{к-1}+1\cdot 0+0a_{к+1}+\ldots+0a_m= 0$. Згідно означення ця система векторів є лінійно залежною.

2. Вся система векторів є лінійно залежна, якщо деяка її підсистема є лінійно залежна.

Припустимо, що $a_1,a_2,\ldots,a_к$ – деяка лінійно залежна підсистема системи векторів $a1, a2, \ldots, aк, \ldots, am$, тоді $\lambda a_1+\ldots+\lambda_к a_к= 0$. Тоді, хоча б один із коефіцієнтів $\lambda_1,\ldots,\lambda_к$ не рівний нулеві. Тоді $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_к a_к+0a_к+\ldots+0a_m=0$. Згідно означення ця система векторів $a_1,a_2,\ldots,a_к,\ldots,a_m$ є лінійно залежною.

Як наслідок – лінійно незалежною буде $\forall$ підсистема лінійно незалежної системи векторів.

3. Будь-яка система векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли хоча б один із векторів цієї системи буде лінійно виражатися через інші

вектори цієї системи.

Нехай $\lambda_1 a_1+...+\lambda_к a_к+...+\lambda_m a_m=0$, причому хоча б один з коефіцієнтів, наприклад, $\lambda_к$ відмінний від нуля. Маємо $\lambda_к a_к= -\lambda_1 a_1-\ldots-\lambda_{к-1}a_{к-1}-\lambda_{к+1}a_{к+1}-$ $-...-\lambda_m a_m$. $\lambda_к$ – відмінний від нуля елемент поля P, в полі P існує обернений елемент $\lambda_к^{-1}$. Тоді матимемо:

$$a_к=(-\lambda_к^{-1}\lambda_1)a_1+...+(-\lambda_к^{-1}\lambda_{к-1})a_{к-1}+(-\lambda_к^{-1}\lambda_{к+1})a_{к+1}+\ldots+(-\lambda_к^{-1}\lambda_m)a_m.$$

Нехай один з векторів, не зменшуючи загальності – $a_к$ лінійно виражається через решту векторів системи : $a_к= \lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_{к-1}a_{к-1}+ +\lambda_{к+1}a_{к+1}+\ldots+\lambda_m a_m$. Матимемо $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_{к-1}a_{к-1}+(-1)a_к+\lambda_{к+1}a_{к+1}+\ldots+\lambda_m a_m=0$, система векторів простору V є лінійно залежною.

4. Вектор b лінійно виразиться через вектори $a_1,\ldots,a_m$, причому єдиним способом, якщо система векторів $a_1,\ldots,a_m$ є лінійно незалежною, а система векторів $a_1,\ldots,a_m$,b буде лінійно залежною [22-24].

Дійсно, у випадку, коли $a_1,...,a_m$,b лінійно залежна система, то існуватимуть такі коефіцієнти $\lambda_1\lambda_2,...,\lambda_m,\lambda$, не всі одночасно рівні нулю, коли $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_к a_к+\ldots+\lambda_m a_m+\lambda b=0$. Нехай $\lambda=0$, тоді $\lambda_1 a_1+...+\lambda_m a_m= 0$, прицьому не усі коефіцієнти $\lambda_1\lambda_2,...,\lambda_m$ дорівнюють нулю, що суперечить незалежності системи $a_1,\ldots,am$. Тоді, $\lambda\neq 0$ і $b = (-\lambda^{-1}\lambda_1)a_1+ +\ldots+(-\lambda^{-1}\lambda_m)a_m$. Якщо вектор b можна виразити через $a1,\ldots,am$ неоднозначно, а саме $b = \lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_m a_m=\beta_1 a_1+\ldots+\beta_m a_m$, то $(\lambda_1-\beta_1)a_1+ +\ldots+(\lambda_m-\beta_m)a_m= 0$, а звідси слідує, через незалежність системи $a1,\ldots,am$, що $\lambda_1-\beta_1=\ldots=\lambda_m-\beta_m=0$, тобто $\lambda_1=\beta_1,..., \lambda_m= \beta_m$.

5. Якщо $c\in L(a_1,...,a_m)$ і $a1,\ldots,am\in L(b_1,...,b_n)$, то $c\in L(b1,\ldots,bn)$.

Дійсно, якщо справедливо, що $c\in L(a1,\ldots,am)$ і $a_1,...,a_m \in L(b_1,...,b_n)$ тоді знайдуться коефіцієнти α_i, λ_{ij} $(i= 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n)$, що $c = \alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_m a_m$ і $a_i=\lambda_{i1}b_1+\ldots+\lambda_{in}b_n$ (i=1,...,m). Тоді: $c=\alpha_1(\lambda_{11}b_1+\ldots+\lambda_{1n}b_n)+\ldots+\alpha_m(\lambda_{m1}b_1+\ldots+\lambda_{mn}b_n)=(\alpha_1\lambda_{11}+\ldots+\alpha_m\lambda_{m1})b_1+\ldots+$

$+(\alpha_1\lambda_{1n}+\ldots+\alpha_m\lambda_{mn})b_n$, тобто $c\in L(b_1,\ldots,b_n)$.

Теорема1. Система векторів $a_1,\ldots,a_m,a_{m+1}$ лінійно залежна, якщо $a_1,\ldots,a_m,a_{m+1}\in L(b_1,\ldots,b_m)$.

Доведення. Нехай $a_1,\ldots,a_m,a_{m+1}$ не нуль-вектори, інакше теорема очевидна. Доводити теорему будемо методом математичної індукції. Нехай $m=1$ і $a_1,a_2\in L(b_1)$, то тоді $a_1=\alpha b_1$, $a_2=\beta b_1$, $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$, бо серед векторів a_1,a_2 нема нуль-векторів. Тоді вектори a_1,a_2 лінійно залежні, бо $\alpha^{-1}a_1+(-\beta^{-1})a_2=b_1-b_1=0$.

Нехай теорема справджується при $m=n-1$. Доведемо її для m=n. Нехай $a_1,\ldots,a_n\in L(b_1,\ldots,b_n)$, тобто

$$a_1=\lambda_{11}b_1+\ldots+\lambda_{1n}b_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n=\lambda_{n1}b_1+\ldots+\lambda_{nn}b_n$$

$$a_{n+1}=\lambda_{n+11}b_1+\ldots+\lambda_{n+1n}b_n.$$

Якщо справа усі коефіцієнти λ_{in} біля b_n дорівнюють нулю, то $a_1,\ldots,a_n\in L(b_1,\ldots,b_{n-1})$ і, система векторів $a_1,\ldots,a_n$ є лінійно залежною. А, отже, система $a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}$ є лінійно залежною. Виключаючи вектор b_n із перших n рівностей, матимемо:

$$a_1-\beta_1a_{n+1}=\lambda'_{11}b_1+\ldots+\lambda'_{1n-1}b_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n-\beta_na_{n+1}=\lambda'_{n1}b_1+\ldots+\lambda'_{nn-1}b_{n-1}.$$

Тоді, згідно методу мат. Індукції, система векторів $a_1-\beta_1a_{n+1},\ldots,a_n-\beta_na_{n+1}$ є лінійно залежноюЦе означає, що існуватимуть коефіцієнти $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, не всі одночасно нулеві, що $\lambda_1(a_1-\beta_1a_{n+1})+\ldots+\lambda_n(a_n-\beta_na_{n+1})=0$, або $\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_na_n+\lambda_{n+1}a_{n+1}=0$, де $\lambda_{n+1}=-(\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_nb_n)$. Тоді $a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}$ лінійно залежна система. Отже, теорема справджується і при $m=n$. За методом мат. індукції, теорема справедлива $\forall$ натурального m.

Звідси, система векторів $a_1,\ldots,a_m$ лінійно залежна, якщо $a_1,\ldots,a_m \in L(b_1,\ldots,b_n)$ і m>n; якщо $a_1,\ldots,a_m \in L(b_1,\ldots,b_n)$ і система векторів $a_1,\ldots,a_m$ лінійно незалежна, то $m \leq n$; у n-вимірному просторі V_n ∀ система векторів, яка має більше n елементів є лінійно залежною.

Ранг та базис скінченної системи векторів.

Означ.4. Якщо лінійні оболонки двох скінченних систем векторів $a_1,\ldots,a_m$ і $b_1,\ldots,b_n$ збігаються, тобто $L(a_1,\ldots,a_m)= L(b_1,\ldots,b_n)$ то вони називаються еквівалентними.

Теорема2. Дві скінченні системи векторів $a_1,\ldots,a_m$ і $b_1,\ldots,b_n$ складаються з однакової кількості векторів, тобто m=n , якщо вони еквівалентні і кожна з них лінійно незалежна.

Елементарні перетворення скінченної системи векторів: додавання до одного з векторів іншого вектора, який помножений деякий елемент поля P;множення ∀ вектора системи на відмінний від 0 елемент поля P; вилучення чи введення у систему нуль-вектора.

Теорема 3. Дві системи векторів еквівалентні, якщо одну скінченну систему векторів отримано із іншої такої ж системи в наслідок ланцюжка елементарних перетворень.

Означ.6. Будь-яка лінійно незалежна підсистема скінченної системи векторів, яка еквівалентна всій системі, називається **базисом** цієї системи.

Тобто, базисом системи векторів є лінійно незалежна її підсистема, кожний вектор якої виражається через вектори даної системи.

Теорема 4. ∀ скінченна система векторів має базис, ∀ два базиси цієї системи містять однакову кількість векторів.

Означ.7. Кількість векторів, які входять до якого-небудь базису скінченної системи векторів називається рангом цієї системи.

Теорема 5. Ранг системи векторів $a_1,\ldots,a_m$ не перевищує рангу системи векторів $b_1,\ldots,b_n$, якщо $a_1,\ldots,a_m \in L(b_1,\ldots,b_n)$.

Доведення. Розглянуті системи мають базиси. Якщо $a'_1,\ldots,a'_r$ – базис першої системи і $b'_1,\ldots,b'_s$ –базис іншої системи, то $L(b_1,\ldots,b_n)$= =$L(b'_1,\ldots,b'_s)$ і $a'_1,\ldots,a'_r \in L(b'_1,\ldots,b'_s)$. Система векторів $a'_1,\ldots,a'_r$ лінійно незалежна, тоді згідно насл. 2 теореми 1, $r \leq s$. Звідси маємо, що ранг системи $a_1,\ldots,a_m$ не перевищує рангу системи $b_1,\ldots,b_n$.

Наслідки: Ранг $\forall$ скінченної системи векторів n –вимірного векторного простору V_n не перевищує числа n.

Наслідок 2. Рівні ранги мають еквівалентні скінченні системи векторів.

Наслідок 3. Ранг $\forall$ підсистеми системи векторів не перевищуватиме ранг усієї скінченної системи векторів.

Базис і розмірність векторного простору.

Припустимо, що V є векторним простором над полем P. Якщо існуватиме скінченна множина векторів $a_1,\ldots,a_n$ така, що $V = L(a_1,\ldots,a_n)$, то кажуть, що простір V утворюється векторами $a_1,\ldots,a_n$. Множину цих векторів звуть системою твірних простору V.

Векторний простір V є скінченновимірним, якщо він утворюється скінченною множиною векторів, базисом якого називається довільна скінченна л. н. с. векторів, яка утворює весь простір.

Згідно означ.6, довільний базис $\forall$ системи скінченно-вимірного векторного простору твірних векторів є базисом .

Теорема 6. Довільний скінченновимірний векторний простір має базис, прицьому $\forall$ два базиси простору містять однакову кількість елементів.

Доведення. Припустимо, що V породжий скінченною множиною векторів $a_1,\ldots,a_m$, тобто $V = L(a_1,\ldots,a_m)$. За т. 4, система векторів $a_1,\ldots,a_m$ має базис, зокрема, $b_1,\ldots,b_n$. Звідси V=L$(a_1,\ldots,a_m)$=L$(b_1,\ldots,b_n)$. Оскільки $b_1,\ldots,b_n$ лінійно незалежна система , то вона є базисом простору V. $\forall$інший базис простору V також буде базисом системи $a_1,\ldots,a_m$ і, згідно з т. 4, матиме таку ж кількість елементів.

Будь-яка скінченна система векторів простору V, яка має більше, ніж n елементів, буде лінійно залежною, якщо базис векторного простору V складатиметься з n елементів, і $\forall$ система з n векторів, яка породжує увесь простір V, є базисом цього векторного простору, якщо базис цього простору V складається з n елементів.

Доведення. Припустимо, що $a_1,\ldots,a_n$ – базис V і $b_1,\ldots,b_n$– система векторів, що породжує цей простір, V=L($a_1,\ldots,a_n$)=L($b_1,\ldots,b_n$). Тоді, системи $a_1,\ldots,a_n$ і $b_1,\ldots,b_n$ еквівалентні. Згідно наслідку 2 т.5, ранг $b_1,\ldots,b_n$ дорівнює n. Звідси система цих векторів єлінійно незалежною, а отже, є базисом V.

Теорема 7. $\forall$ л. н. систему векторів скінченновимірного векторного простору V, яка не є базисом простору, завжди можна доповнити до базису простору V.

Означення 9. Кількість векторів довільного базису ненульового скінченновимірного векторного простору називається розмірністю. Якщо V={0}, то розмірність нульового векторного простору вважається рівною нулю. Розмірність позначають символом $dim\,V$.

Тоді: $dimW_2 = 2$, $dimW_3 = 3$, $dimW_n = n$, $dimC = 2$, якщо поле C є векторним простором над полем R.

Нехай $dimV = n$, тоді при $k > n$ $\forall$система, що складається з k векторів простору V, є лінійно залежною.

Нехай $dimV = n$ і система векторів $a_1,\ldots,a_n$ є лінійно незалежною, тоді $m \leq n$.

Нехай $dimV = n$ і система $a_1,\ldots,a_n$породжує весь простір V, то ця система буде базисом простору V.

1.2. Поняття підпростору, лінійний многовид, ізоморфізм

скінченно вимірних векторних просторів.

Означ.1. Якщо підмножина L є векторним простором відносно операцій, введених у просторі V, то непорожню підмножину L векторного простору V називають підпростором простору V.

Теорема 1. Непорожня підмножина L векторного простору V над полем P є підпростором векторного простору тоді і тільки тоді, коли підмножина L замкнена відносно операцій додавання векторів і множення векторів на елементи поля P, тобто, якщо виконуються умови:

$\forall a \in L\ \forall b \in L\ (a + b \in L)$ і $\forall \alpha \in P\ \forall a \in L\ (\alpha a \in L)$.

Доведення. Нехай підмножина L є підпростором простору V, тоді, L буде замкнутою відносно операції додавання векторів і операції множення векторів на елементи поля P. Навпаки, якщо непорожня підмножина L простору V буде замкнена стосовно операцій додавання і множення векторів на елементи поля P. У цьому випадку підмножина L сама буде векторним простором над полем P. Доведемо, що для підмножини L виконуватимуться аксіоми векторного простору. Дійсно, операція додавання задана на підмножині L, додавання на множині L володіє властивостями асоціативності і комутативності. Множина L містить нуль вектор, бо для довільного елемента $a \in L$ і нуль елемента з P $0 \cdot a = 0 \in L$. Для $a \in L$ протилежний елемент $-a = (-1)a \in L$. В множині L виконуються перші чотири аксіоми із означення векторного простору. Аксіоми ж множення векторів на елементи поля P, теж справедливі в множині L, бо вони справджуються в ширшій множині V. Отже, підмножина L теж є векторним простором над полем P, і є підпростором простору V.

Якщо множина складається лиш з нуль вектора,то вона є підпростором $\forall$ векторного простору V. Такий підпростір звуть нульовим підпростором. Простір V є підпростором самого себе.

Властивості підпросторів :

1. L є підпростором простору W, якщо L – підпростір V над полем P, а V – підпростір W над тим самим полем P.

2. Переріз $\forall$ множини підпросторів векторного простору V буде підпростором простору V.

3. Лінійна оболонка $L(\mathrm{M})$ $\forall$ підмножини M векторного простору V буде підпростором V. Тоді L(M), називається підпростором, який породжений множиною M.

Властивість вище випливає із теореми 8, бо L(M) $\forall$підмножини M векторного простору V, буде замкненою відносно операцій множення векторів на елементи поля P та додавання векторів.

4. $\forall$ підпростір U скінченновимірного простору V є скінченновимірним простором, причому dimU≤dimV.

5. Якщо dimU=dimV і U є підпростором скінченновимірного векторного простору V, то $U = V$.

Означ2. Припустимо, що $U_1, U_2, \ldots, U_m$ є підпросторами деякого простору V. умою підпросторів $U_1,U_2,...,U_m$ називається множина U всіх векторів виду $u_1, u_2, \ldots, u_m$, де $u_i \in U_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, і позначається: $U = U_1, U_2, \ldots, U_m$. Прямою сумою підпросторів називається сума $U_1, U_2, \ldots, U_m$, якщо кожен вектор $u \in U$ єдиним чином подається у виді $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$, де $u_i \in U_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$і записується: $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$,.

6. Сума скінченної кількості підпросторів $U_1, U_2, \ldots, U_m$ векторного простору V є підпростором простору V.

Так, якщо $u, u' \in U = U_1, U_2, \ldots, U_m$, то $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$, $u' = u'_1 + \ldots + u'_m$, де $u_i, u'_i \in U_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$. Але тоді $u + u' = (u1 + u1') + \ldots + (um + u'm) \in U$, бо $u_i + u'_i \in U_i$. Це випливає з того, що кожна підмножина U_i є підпростором V. Так само, для довільного $\lambda \in P$ $\lambda u = \lambda(u_1 + \ldots + u_m) = \lambda u_1 + \ldots + \lambda u_m \in U$, бо $\lambda u_i \in U_i$.

Отже, підмножина U є замкненою стосовно операцій множення векторів на елементи поля P і додавання векторів, а отже є підпростором векторного простору V.

Теорема 2. Якщо підпростір U є сумою підпросторів $U_1,U_2,...,U_m$, то для U такі твердження рівносильні:

(1) $U=U_1\oplus...\oplus U_m$;

(2) $U_i\bigcap(U_1+...+U_{i-1}+U_{i+1}+...+U_m)=\{0\}$ (i=1,2,...,m);

(3) $a_1+...+a_m=0\wedge a_i\in U_i$ (i=1,2,...,m)$\Rightarrow a_1=...=a_m=0$.

Доведення. (1)$\Rightarrow$(2). Якщо $U=U_1\oplus...\oplus U_m$ і для деякого i $U_i\bigcap(U_1+...+U_{i-1}+U_{i+1}+...+U_m)\neq\{0\}$, тоді існує такий не нуль вектор $a_i\in U_i$, що $a_i=a_1+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_m$ ($a_i\in U_i$, i=1,2,...,m). Звідси слідує, що елемент $a_i\in U$ має два різні представлення $a_i=0+...+0+a_i+0+...+0=a_1+...+a_{i-1}+0+a_{i+1}+...+a_m$, а це суперечить тому, що підпростір U є прямою сумою $U_1,...,U_m$.

(2)$\Rightarrow$(3). Нехай $U_i\bigcap(U_1+...+U_{i-1}+U_{i+1}+...+U_m)=\{0\}$ $\forall$ i=1,2,...,m. Якщо для деякого i $a_i\neq0$ і $a_1+...+a_{i-1}+a_i+a_{i+1}+...+a_m=0$, то $a_i=(-a_1)+...+(-a_{i-1})+(-a_{i+1})+...+(-a_m)\in U_i\bigcap(U_1+...+U_{i-1}+U_{i+1}+...+U_m)$, що суперечить припущенню того, що лише з нульового вектора складається вказаний переріз.

(3)$\Rightarrow$(1). Припустимо нуль вектор має єдине представлення у виді суми елементів $a_i\in U_i$ ($i=1,2,\ldots,m$): $0=0+\ldots+0$. Тоді, коли для певного елемента $a\in U$ можливі два подання у вигляді $a=a_1+...+a_m=a'_1+...+a'_m$, де $a_i,a_i'\in U_i$ (i=1,2,...,m), то легко отримаємо: $0=(a_1-a_1')+...+(a_m-a_m')$, $a_i-a_i'\in U_i$ (i=1,2,...,m). Згідно єдиності представлення нульового елемента у виді суми випливає, що $a_1-a_1'=0,...,a_m-a_m'=0$, тобто $a_1=a_1',...,a_m=a_m'$. Отже сума $U_1,U_2,...,U_m$ є прямою.

Сума підпросторів U_1 і U_2 векторного простору V є прямою сумою т. і т. тоді, коли $U_1\bigcap U_2=\{0\}$.

Теорема 3. Якщо U – підпростір скінченновимірного векторного простору V, то існує такий підпростір W простору V, що $V=U\oplus W$.

Доведення. Твердження теореми виконується, якщо U – тривіальний підпростір простору V, (U={0} або U=V , в цьому випадку W=V або $W = \{0\}$). Припустимо, що U – не тривіальний підпростір і $a_1,\ldots,a_m$ – його базис. Тоді за т. 7, лінійно незалежну систему векторів $a_1,\ldots,a_m$ ми легко доповнюємо до базису $a_1,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots,a_n$ простору V. Тоді $V = U + W$, де $W=L(a_{m+1},\ldots,a_n)$. Доведемо, що $U \cap W = \{0\}$. Дійсно, якщо $c \in U \cap W$, то $c=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_m a_m \in U$, $c=\alpha_{m+1}a_{m+1}+\ldots+\alpha_n a_n \in W$, тому $\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_m a_m+(-\alpha_{m+1})a_{m+1}+\ldots+(-\alpha_n)a_n=0$. Оскільки $a_1,\ldots,a_n$ лінійно незалежна, то $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$, тобто c=0 і $U \cap W=\{0\}$. Згідно з наслідком т. 9, маємо $V=U \oplus W$.

Наслідок. Якщо $a_1,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots,a_n$ – базис векторного простору V, то $V = L(a_1,\ldots,a_m) \oplus L(a_{m+1},\ldots,a_n)$.

Теорема 4. Якщо U і W – підпростори скінченно-вимірного векторного простору V, то $dim(U + V) + dim(U \cap W) = dimU + dimV$.

Доведення. Якщо U або V нулевий, то теоремиа очевидна. Нехай обидва підпростори ненулеві, $a_1,\ldots,a_s$ – базис підпростору $U \cap W$ (якщо $U \cap W = \{0\}$, то множина $\{a_1,\ldots,a_s\}$ є порожньою). За т. 7, систему $a_1,\ldots,a_s$ можна доповнити до базису $a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k$ підпростору U і до базису $a_1,\ldots,a_s,c_1,\ldots,c_m$ підпростору W. Тоді $dim(U \cap W) = s$, $dimU = s + k$, $dimW = s + m$, $U \cap W = L(a_1,\ldots,a_s)$, $U=L(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k)$, $W=L(a_1,\ldots,a_s,c_1,\ldots,c_m)$. Тоді маємо: $U+W=L(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_m)$. Доведем, що система векторів $a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_m$ буде базисом $U + W$. Покажемо її лінійно незалежність, припустимо, що $\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_s a_s+\beta_1 b_1+\ldots+\beta_k b_k+\gamma_1 c_1+\ldots+\gamma_m c_m=0$, звідки $\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_s a_s+\beta_1 b_1+\ldots+\beta_k b_k=(-\gamma_1)c_1+\ldots+(-\gamma_m)c_m \in U \cap W$, $(-\gamma_1)c_1+\ldots+(-\gamma_m)\cdot c_m \in \in L(a_1,\ldots,a_s)$. Раз система векторів $a_1,\ldots,a_s,c_1,\ldots,c_m$ лінійно незалежна, то $\gamma_1=\ldots=\gamma_m=0$. Тоді $\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_s a_s+\beta_1 b_1+\ldots+\beta_k b_k=0$, звідси $\gamma_1=.\gamma_s=\beta_1=\ldots=\beta_k=0$, бо $a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k$ також лінійно незалежна. Отже, система векторів $a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_k,c_1,\ldots,c_m$

лінійно незалежна, а, отже, є базисом $U+W$. Отже, $dim(U+V)=s+k+m$ і dim(U+V)+$dim(U\bigcap W)$=s+k+m+s= $dimU+dimW$.

Наслідок. dim(U⊕W)= =dimU+dimW.

dim(U_1⊕...⊕U_m)= =dimU_1+...+dimU_m.

Означ 3. Якщо U – підпростір векторного простору V і a – деякий вектор з V. Тоді множина $a+U=\{a+u/u\in U\}$ називається лінійним многовидом V із напрямком U. Підпростір U зветься напрямним підпростором многовиду $a+U$.

Якщо a∉U, то лінійний многовид a+U не буде підпростором простору V, бо тоді 0∉a+U (якщо $0=a+u$, то $a=-u\in U$).

Властивості лінійних многовидів:

1. Лінійні многовиди векторного простору V із напрямком U збігаються з класами еквівалентності множини V за бінарним відношенням $a\sim b\Leftrightarrow a-b\in U$.

2. Два вектори будуть належати одному і тому лінійному многвиду векторного простору V із напрямком U тоді і тільки тоді, коли їхня різниця належить U.

3. Довільні два лінійні многовиди векторного простору V з напрямком U або мають порожній переріз, або збігаються. Обєднання усіх л. многовидів V з напрямком U збігається з V.

4. Якщо a і b – елементи одного і того л. многовиду V з напрямком U, то $a+U=b+U$.

Поняття ізоморфізму.

Теорема 5. Для ∀ a∈V ∃! n-ка ($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$) елементів поля P така, що $a=\alpha_1b_1+\ldots+\alpha_nb_n$, якщо $b_1,\ldots,b_n$ – базис простору V над полем P.

Означ.4. Якщо $b_1,\ldots,b_n$ – фіксований базис векторного простору V над полем P і $a=\alpha_1b_1+\ldots+\alpha_nb_n$ ($\alpha_i\in$P), то коефіцієнти $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ називаються

координатами вектора a відносно базису $b_1,...,b_n$. Арифметичний n-вимірний вектор $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ називається координатним рядком вектора a.

У векторних просторах W_3 і W_2введене вище означення координат вектора співпадає із означ. координат геометричного вектора в певній афінній системі координат в просторі чи на площині. В просторі C над полем R координатами довільного комплексного числа $a+bi$ відносно базису 1, i є дійсні числа a, b. В n-вимірному арифметичному векторному просторі V_n над полем P координатами арифметичного вектора $(a_1,\ldots,a_n)$ відносно базису, який утворюють одиничні вектори $e_1,\ldots,e_n$, є компоненти цього вектора $a_1,\ldots,a_n$.

Означ 5. Ізоморфізмом простору V на простір W називається заємно однозначне відображення $f: V \to W$ векторного простору V на векторний простір W, які задані над одним і тим самим полем P, якщо для f виконуються умови:

1. $\forall a \in V\ \forall b \in V (f(a+b) = f(a) + f(b))$;

2. $\forall \lambda \in P\ \forall a \in V\ (f(\lambda a) = \lambda f(a))$.

Якщо існує ізоморфізм V на W то простір V називається ізоморфним простору W.

Властивості ізоморфізму векторних просторів.

1. Відношення ізоморфізму векторних просторів є симетричним.

Дійсно, при f: $V \to W$ – ізоморфізм V на W, то відображення f взаємно однозначне. Для нього існуватиме обернене відображення f^{-1}: $W \to V$, яке взаємно-однозначне. Доведем, що f^{-1} – ізоморфізм W на простір V. Для цього перевіримо властивості:

$\forall a \in W\ \forall b \in W (f^{-1}(a+b) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$; $\forall \lambda \in P\ \forall a \in W\ (f^{-1}(\lambda a) = \lambda f^{-1}(a))$.

Маємо, що f – ізоморфізм, то

$f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(a)) + f(f^{-1}(b)) = a + b$, $f(\lambda f^{-1}(a)) = \lambda f(f^{-1}(a)) = \lambda a$,

звідси $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$, $f^{-1}(\lambda a)=\lambda f^{-1}(a)$. Тоді, f^{-1} –ізоморфізм п W на простір V.

2. Якщо U ізоморфний V, а V ізоморфний W, то U ізоморфний простору W, а саме, ізоморфізм векторних просторів транзитивне.

$(g\circ f)(a+b)=g(f(a+b))=g(f(a)+f(b))=g(f(a))+g(f(b))=(g\circ f)(a)+(g\circ f)(b)$, $(g\circ f)(\lambda a)=g(f(\lambda a))=g(\lambda f(a))=\lambda g(f(a))=\lambda(g\circ f)(a)$. Звідси, відображення $g\circ f$ буде ізоморфізмом U на простір W.

3. Якщо $f: V\to W$ – ізоморфізм в простору V на W, то $f(0)=0$.

Для $\forall$ вектора $a\in V$ $f(a)=f(a+0)=f(a)+f(0)$, звідки $f(0)=0$.

4. Якщо $f: V\to W$ – ізоморфізм V на п W і $a_1,\dots,a_m$ – лінійно незалежна система V, то $f(a_1),\dots,f(a_m)$ – лінійно незалежна система W.

5. Якщо $f: V\to W$ – ізоморфізм V на W і $b_1,\dots,b_n$– базис векторного простору V, тоды $f(b_1),\dots,f(b_n)$ – базис простору W.

Наслідок. Скінченновимірні векторні простори V *і* W ізоморфні, якщо, то вони мають однакові розмірності.

Теорема 6. Довільний ненулевий векторний простір розмірності n над полем P ізоморфний n-вимірному арифметичному векторному простору V_n над полем P.

Теорема 7. Два скінченно вимірні векторні простори V *і* W є ізоморфними тоді і тільки тоді, якщо вони мають однакові розмірності.

1.3. Евклідовий векторний простір.

Припустимо, що над полем P маємо довільний векторний простір V.

Означ 1. Відображення $V\times V\to P$, яке ставить у відповідність кожній парі (a,b) векторів з V елемент поля P називається скалярним множенням у просторі V. Відображення називається скалярним добутком векторів a,b і позначається (a,b), якщо виконуються такі властивості:

1. $\forall_V a\ \forall_V b\ ((a,b)=(b,a))$ – комутативність операції скалярного множення;

2. $\forall \underset{P}{\alpha} \forall \underset{V}{a} \forall \underset{V}{b} ((\alpha a, b) = \alpha(a, b))$ – асоціативність операції скалярного множення відносно множення на скаляри;

3. $\forall \underset{V}{a} \forall \underset{V}{b} \forall \underset{V}{c} ((a + b, c) = (a, c) + (b, c))$ – дистрибутивність операції скалярного множення відносно додавання векторів.

Якщо $(a, a) \neq 0$ для $\forall$ ненульового вектора a з V, то скалярне множення у просторі V називається невиродженим.

Найпростіші наслідки:

1. $\forall \underset{P}{\alpha} \forall \underset{V}{a} \forall \underset{V}{b} ((a, \alpha b) = \alpha(a, b))$.

Дійсно, $(a, \alpha b) = (\alpha b, a) = \alpha(b, a) = \alpha(a, b)$.

2. $\forall \underset{V}{a} \forall \underset{V}{b} \forall \underset{V}{c} ((a, b + c) = (a, b) + (a, c))$.

Дійсно, $(a, b + c) = (b + c, a) = (b,a)+(c,a) = (a, b) + (a, c)$.

3. $\forall \underset{V}{a} ((0, a) = 0)$.

Дійсно, $(b, a) = (b + 0, a) = (b, a) + (0, a)$. Звідси (0,a)=0.

Скалярний добуток геометричних векторів у просторах W_2 і W_3, задовольняє всім вимогам означення 1 (визначається як добуток довжин векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток векторів $a=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ і $b=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ у n-вимірному векторному просторі V_n над полем P визначається за формулою $(a, b) = \alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n$,. Усі вимоги означ. 1 виконуються. У просторі $C_{[a,b]}$ (неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій) скалярний добуток знайдемо із формули: $(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt$. Очевидно, що справедливість вимог 1–3 означення випливають з властивостей визначеного інтеграла випливає.

Теорема. У $\forall$ ненульовому скінченновимірному векторному просторі означається скалярне множення.

Доведення. Дійсно, $e_1,e_2,...,e_n$ – деякий базис простору V. Для $\forall$ $a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n$ і $b=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\ldots+\beta_ne_n$ візьмемо, що $(a,b)=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n$. Тоді $(a,b)=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n=\beta_1\alpha_1+\ldots+\beta_n\alpha_n=(b,a)$. Далі,

∀елемента $\alpha \in F$ $(\alpha a, b) = (\alpha a_1)\beta_1 + (\alpha\alpha_2)\beta_2 + \ldots + (\alpha a_n)\beta_n =$ $=\alpha(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n)=\alpha(a,b)$. Якщо $c = \gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2+\ldots+\gamma_n e_n$, то $(a+b,c)=(\alpha_1+\beta_1)\gamma_1+(\alpha_2+\beta_2)\gamma_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)\gamma_n=(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\ldots+\alpha_n\gamma_n)+(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2$ $+\ldots+ \ +\beta_n\gamma_n)=(a,c)+(b,c)$.

Процес ортогоналізації.

Означ2. Два вектори a і b простору V називаються ортогональними ($a \perp b$), якщо їхній скалярний добуток рівний 0. Система ненулевих векторів $a_1, \ldots, a_m$ простору V зветься ортогональною, якщо ∀ два різні вектори цієї системи є ортогональними. Система, яка складається із одного ненуль вектора є ортогональною. Ортогональним базисом простору V називається ортогональна система векторів, яка є базисом простору V.

Теорема. Якщо векторний простір V із невиродженим скалярним множенням, то ∀ ортогональна система векторів із V є лінійно-незалежною.

Наслідок. У випадку, коли V є n-вимірним векторним простором із невиродженим скалярним множенням, то ∀ортогональна система векторів простору V, що містить n елементів, буде ортогональним базисом цього простору V.

Теорем. Якщо V – ненулевий скінченно-вимірний векторний простір із не виродженим ск. добутком, то ∀ ортогональну систему векторів, яка не є базисом простору, можливо доповнити до ортогонального базису цього векторного простору.

Доведення. Припустимо, що $dimV = n > 1$ і $b_1, \ldots, b_m$ – деяка ортогональна система векторів, яка не є базисом простору V, $m < n$. Тоді цю систему легко можемо доповнити до базису $b_1, \ldots, b_m, c_{m+1}, \ldots, c_n$ простору V. Зайдемо значення коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$, при яких вектор b_{m+1} ортогональний до кожного із векторів $b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}=c_{m+1}+\lambda_1 b_1+\ldots+\lambda_m b_m$ $(b_{m+1}, b_i) = 0 \ (i = 1, \ldots, m)$. Взявши замість b_{m+1} його вираз з попередньої рівності і врахувавши ортогональність $b_1, \ldots, b_m$, матимемо –

$(c_{m+1},b_i)+\lambda_i(b_i,b_i)=0$, звідки $\lambda_i=-\frac{(c_{m+1},b_i)}{(b_i,b_i)}$. Якщо так вибирати коефіцієнти λ_i $(i=1,\ldots,m)$ вектор $b_{m+1}=c_{m+1}+\lambda_1 b_1+\ldots+\lambda_m b_m$ буде ортогональним кожному із векторів $b_1,\ldots,b_m$, $b_{m+1}\neq 0$, бо система векторів $b_1,\ldots,b_m,c_{m+1}$ лінійно незалежна. Маємо, що система векторів $b_1,\ldots,b_m,b_{m+1}$ є ортогональною. При $m+1<n$, знаходимо ненулевий вектор $b_{m+2}=c_{m+2}+\mu_1 b_1+\ldots+\mu_{m+1}b_{m+1}$, який є ортогональним до кожного з векторів $b_1,\ldots,b_m,b_{m+1}$. Продовжуючи аналогічно, одержимо ортогональну систему векторів $b_1,\ldots,b_m,b_{m+1},\ldots,b_n$, яка і буде ортогональним базисом простору V.

Кожний ненулевий скінченновимірний векторний простір із невиродженим скалярним множенням має ортогональний базис.

Якщо M – довільна підмножина з V , а V є векторним простором із скалярним множенням, то $\bar{a}$ звуть ортогональним вектором до множини M ($a\perp M$), у випадку, коли вектор $\bar{a}$ ортогональний кожному вектору із множини M. Множина усіх векторів з V, які ортогональні M позначається $M^{\perp}$, тобто $M^{\perp}=\{a|\ a\perp M\}$. Множина $M^{\perp}$ є непорожньою і замкненою відносно операцій множення векторів на елементи поля P і додавання векторів і є підпростором простору V. Якщо $a,b\in M^{\perp}$, $\lambda\in P$, то для $\forall$ $c\in M$ $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)=0+0=0$ і $(\lambda a,c)=\lambda(a,c)=\lambda\cdot 0=0$, тобто $a+b\in M^{\perp}$ і $\lambda a\in M^{\perp}$.

Означ. 3. Підпростір $L^{\perp}$ називається ортогональним доповненням до підпростору L, якщо L є підпростором векторного простору V із скалярним множенням.

Множина усіх векторів які паралельні осі OX у векторному просторі W_2 геометричних векторів площини, на якій вибрана певна прямокутна декартова система координат OXY, є підпростором, ортогональним доповненням до якого буде підпростір, що складається із всіх векторів, які паралельні осі OY. Ортогональним доповненням у просторі W_3 геометричних векторів простору із прямокутною декартовою системою

координат OXYZ до підпростору, який складається із всіх векторів, які паралельних площині XOY буде підпростір паралельних осі OZ векторів. Підпростір, породжений векторами $e_{m+1}=(\underbrace{0,\dots,0}_{m},1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)$ у n –вимірному арифметичному просторі V_n буде ортогональним доповненням до підпростору, породженого векторами $e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_m=(\underbrace{0,\dots,0,1}_{m},0,\dots,0)$.

Основні властивості ортогональних доповнень:

1. $L \subseteq U \Rightarrow U^{\perp} \subseteq L^{\perp}$.

Дійсно, при $a \in U^{\perp}$, $b \in U$ $(a,b)=0$. Тоді $(a,c)=0$ для $\forall$ $c \in L$, бо $L \subseteq U$. Тоді, $U^{\perp} \subseteq L^{\perp}$.

2. $L \cap L^{\perp} = \{0\}$.

Дійсно, при $a \in L \cap L^{\perp}$, $(a,a)=0$, бо $a \in L$ і $a \in L^{\perp}$. Оскільки скалярне множення у V невироджене, то $a=0$, тобто $L \cap L^{\perp}=\{0\}$.

3. $V = L \oplus L^{\perp}$.

Врахувавши вл. 2, покажемо, що $V= L + L^{\perp}$. Нехай $b_1,\dots,b_m$ – ортогональний базис підпростору L. Доведемо, що для $\forall$ вектора $a \in V$ існує такий вектор $c \in L^{\perp}$ і такі коефіцієнти $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ з поля P, що $a=\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_m b_m+c$. Домноживши рівність скалярно на b_i, матимемо: $(a,b_i)=\lambda_i(b_i,b_i)$, тоді $\lambda_i=\frac{(a,b_i)}{(b_i,b_i)}$ $(i=1,\dots,m)$, ($(b_i,b_i)\neq 0$, бо скалярний добуток у просторі V невироджений). З таким підходом вектор $c=a-\lambda_1 b_1-\dots-\lambda_m b_m$ ортогональний до всіх векторів $b_1,\dots,b_m$, бо $(c, b_i)=(a, b_i)-\lambda_i(b_i,b_i)=0$ $(i=1,\dots,m)$. Звідси, вектор c ортогональний до $\forall$ лінійної комбінації векторів $b_1,\dots,b_m$ а, отже, ортогональний до підпростору L, $c \in L^{\perp}$. Тоді, довільний $a \in V$ можна задати у виді $a=b+c$, $b \in L$, $c \in L^{\perp}$. $V=L \oplus L^{\perp}$, бо $L \cap L^{\perp}=\{0\}$.

4. $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Дійсно, якщо $a \in L$, то для $\forall$ елемента $b \in L^{\perp}$ $(a,b)=0$, тобто $a \in (L^{\perp})^{\perp}$.

Тоді, $L \subseteq (L^{\perp})^{\perp}$. У випадку $(L^{\perp})^{\perp} \neq L$, то існує елемент $c \in (L^{\perp})^{\perp}$, що $c \notin L$. Врахувавши, що $V = L \oplus L^{\perp}$, то $c = a + b$, де $a \in L$, $b \in L^{\perp}$. Оскільки c належить до ортогонального доповнення до підпростору $L^{\perp}$, матимемо: $0 = (c, b) = (a + b, b) = (a, b) + (b, b) = 0 + (b, b) = (b, b)$. Врахувавши, що скалярнй добуток у векторному просторі V невироджений, то b=0, тобто $c = a \in L$. Отримали суперечність , яка і показує, що $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

5. $(L+U)^{\perp} = L^{\perp} \cap U^{\perp}$.

Дійсно, припустивши, що $c \in (L+U)^{\perp}$, то $(c, a) = 0$ і $(c, b) = 0$ для $\forall$ елементів $a \in L$, $b \in U$, бо $L \subseteq L+U$, $U \subseteq L+U$. Звідси, $c \in L^{\perp}$ і $c \in U^{\perp}$, тобто $c \in L^{\perp} \cap U^{\perp}$. Якщо c є довільним елементом множини $L^{\perp} \cap U^{\perp}$, то для $\forall$ елемента $a + b \in L + U$, де $a \in L$, $b \in U$, $(c, a + b) = (c, a) + (c, b) = 0+0=0$, тобто $c \in (L+U)^{\perp}$. Тоді, $(L+U)^{\perp} = L^{\perp} \cap U^{\perp}$.

6. $(L \cap U)^{\perp} = L^{\perp} + U^{\perp}$.

Дійсно, взявши до уваги властивості 4та5, $(L^{\perp}+U^{\perp})^{\perp} = (L^{\perp})^{\perp} \cap (U^{\perp})^{\perp} = L \cap U$. Матимемо: $(L \cap U)^{\perp} = ((L^{\perp}+U^{\perp})^{\perp})^{\perp} = L^{\perp}+U^{\perp}$.

Евклідові векторні простори. Норма вектора та кут між векторами.

Означ. 4. Евклідовим векторним простором називається векторний простір над полем R із додатньо визначеним скалярним добутком. Тут додатково виконується також властивість:

4. $\forall_{a \in V \setminus \{0\}} ((a, a) > 0)$ – скалярний квадрат довільного ненулевого вектора додатній.

Означ 5. Нормою вектора $\vec{a}$ (позначається $||a||$) у евклідовому векторному просторі зветься невід'ємне значення квадратного кореня з скалярного квадрату вектора $\vec{a}$ ($||a|| = \sqrt{(a, a)}$)ю Вектор $\vec{a}$ зветься нормованим при $||a||=1$.

Якщо розглянути евклідові простори W_2 та W_3 геометричних векторів

поняття норми вектора буде збігатися із поняттям довжини вектора.

Властивості норми вектора:

1. $\forall \underset{V}{a}(\|a\| \geq 0)$, причому $//a// = 0 \Leftrightarrow$ a=0.

Дійсно, скалярний добуток у евклідовому просторі V додатньо визначений, тому $\forall$ ненулевого вектора $\vec{a}$ $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$, $||a||=\sqrt{(a,a)}>0$. Якщо ж $\vec{a}$– нулевий вектор, то, тоді норма цього вектора дорівнює нулю.

2. $\forall \underset{R}{\lambda} \forall \underset{V}{a} (\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|)$.

Дійсно, згідно з означенням норми, $//\lambda a// = \sqrt{(\lambda a, \lambda a)} =$ $= \sqrt{\lambda^2 (a,a)} = |\lambda| \sqrt{(a,a)} = |\lambda| \cdot ||a||$.

3. $\forall \underset{V}{a} \forall \underset{V}{b} (|(a,b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|)$ – нерівність Коші-Буняков-ського.

Дійсно, якщо λ – певне дійсне число, то $(a - \lambda b, a - \lambda b) \geq 0$, бо скалярний добуток в евклідовому просторі V додатньо визначений. Використавши основні властивості скалярного добутку, маємо: $\lambda^2 (b,b) - 2\lambda(a,b) + (a,a) \geq 0$. Вираз зліва є квадратним тричленом від λ. Цей вираз приймає невід'ємні значення при $\forall$ дійсних значеннях λ. Звідси – дискримінант тричлена недодатній, $(a,b)^2-(a,a)(b,b)\leq 0$, тодіa,b)$^2 \leq (a,a)(b,b)$. Взявши квадратні корені із обох частин і взявши їх невід'ємні значення маємо рівносильну нерівність: $/(a,b)/ \leq /a// \cdot //b//$. При цьому, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, a=λb для деякого дійсного числа λ. Дійсно, якщо $a = \lambda b$, то $|(a,b)|=|(\lambda b,b)|=|\lambda| \cdot |(b,b)|==|\lambda| \sqrt{(b,b)} \sqrt{(b,b)} = \sqrt{(\lambda b, \lambda b)} \sqrt{(b,b)} = \sqrt{(a,a)} \sqrt{(b,b)} =$ $=||a|| \cdot ||b||$. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то a–λb≠0 для $\forall$ λ∈R, тому $(a - \lambda b, a - \lambda b) > 0$. Проте тоді усі нерівності, що отримуються із цієї, також будуть строгими, остання дасть: |(a,b)|< ||a||·||b||.

$|\alpha_1\beta_1+...+\alpha_n\beta_n| \leq \sqrt{\alpha_1^2+...+\alpha_n^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2+...+\beta_n^2}$ – частковий випадок нерівності для n-вимірного евклідового арифметичного простору E_n , тут $\alpha_1,\beta_1,...,\alpha_n,\beta_n$ – довільні дійсні числа, $(\alpha_1\beta_1+...+\alpha_n\beta_n)^2 \leq (\alpha_1^2+...+\alpha_n^2) \cdot (\beta_1^2+...+\beta_n^2)$.

4. $\forall_{\underset{V}{a}} \forall_{\underset{V}{b}}$ ($||a+b||\le||a||+||b||$) – нерівність трикутника.

Дісно, $||a+b||^2=(a+b,a+b)=(a,a)+(b,b)+2(a,b)=||a||^2+||b||^2+2||a||\cdot||b||+2((a,b)-$ $-||a||\cdot||b||)=(||a||+||b||)^2+2((a,b)-||a||\cdot||b||)$. Тоді $(a,b)-||a||\cdot||b||\le 0$, звідси $(||a||+||b||)^2\ge||a+b||^2$. Тоді отримуємо нерівність: $//a+b//\le//a//+//b//$.

ДляW_2 і W_3 властивість показує, що довжина сторони $\forall$ трикутника не більша, за суму довжин двох його інших сторін.

5. $\forall_{\underset{V}{a}} \forall_{\underset{V}{b}}$ ($a\perp b\Rightarrow||a||^2+||b||^2=||a+b||^2$) – теорема Піфагора.

Діфсно , якщо $a\perp b$, то $||a+b||^2=(a+b,a+b)=(a,a)+2(a,b)+(b,b)=||a||^2+||b||^2$.

Для W_2 і W_3 $\forall$ два ненулеві ортогональні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відкладених від однієї точки, будуть катетами певного прямокутного трикутника, і довжина гіпотенузи цього трикутника дорівнює довжині вектора $\vec{a}+\vec{b}$. Тоді твердження, отримане у властивості 5, буде теоремою Піфагора.

Із властивості 3 легко отримуємо, що $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{(a,b)}{||a||\cdot||b||}$. Це співвідношення і використаємо для визначення кута між векторами в певному евклідовому просторі.

Означ. 6. Кутом між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового векторного простору V будемо називати дійсне число $\varphi\,(0\le\varphi\le\pi)$, що $\cos\varphi=\frac{(a,b)}{||a||\cdot||b||}$.

Означ. 7. Ортонормованою системою векторів називається система векторів $a_1,\ldots,a_m$ евклідового векторного простору, якщо вона є ортогональною і кожен її вектор є нормованим. Ортонормованим базисом системи векторів називається ортонормована система векторів, яка є базисом простору.

Система векторів $a_1,\ldots,a_m$ буде ортонормованою тоді і тільки тоді, коли $(a_i,a_j)=0$, $i\ne j$, і $(a_i,a_i)=1$ для $\forall$ $i,j=1,\ldots,m$.

Теорема 4. Довільний ненулевий скінченновимірний евклідовий простір матиме ортонормованій базис.

Доведення. Нехай маємо V і $dimV = n > 0$. Тоді простір V має ортогональний базис $b1, b2, \ldots, bn$. Застосуємо процедуру нормування так, щоб система $b_1,...,b_n$ замінилася системою $e_1=\|b_1\|^{-1}\cdot b_1,\ldots,e_n=\|b_n\|^{-1}\cdot b_n$, яка, буде лінійно незалежною, і буде деяким базисом простору V. Покажемо ортонормованість такого базизу. Дійсно, якщо $i\neq j$, то $(e_i,e_j)=(\|b_i\|^{-1}\cdot b_i,\|b_j\|^{-1}\cdot b_j)=\|b_i\|^{-1}\cdot\|b_j\|^{-1}\cdot(b_i,b_j)=$ $=\|b_i\|^{-1}\cdot\|b_j\|^{-1}\cdot 0=0$, $(e_i,e_i)=(\|b_i\|^{-1}\cdot b_i,\|b_i\|^{-1}\cdot b_i)=(\|b_i\|^{-1})^2\cdot(b_i,b_i)=(\|b_i\|^{-1})^2\cdot\|b_i\|^2 = =1$. Звідси слідує, що $e_1,...,e_n$ є ортонормований базис простору V. Ортонормовану систему векторів скінченновимірного евклідового векторного простору V яка не є базисом можна доповнити до ортонормованого базису простору V

Будь-яка ортонормована система векторів простору V, яка містить n елементів, буде ортонормованим базисом.

Нехай $e_1, e_2,...,e_n$ є ортонормованим базисом евклідового векторного простору V і $(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $(\beta_1,\ldots\beta_n)$ – координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відносно цього базису, тоді $(a,b)=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n$, $\|a\|=\sqrt{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2}$.

Доведення. Дійсно, $a=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n$, $b=\beta_1e_1+...+\beta_ne_n$, звідси, використавши властивості скалярного добутку, матимемо: $(a,b) = = (\alpha_1e_1+...+\alpha_ne_n,\beta_1e_1+\ldots+\beta_ne_n)=\alpha_1\beta_1(e_1,e_1)+\alpha_1\beta_2(e_1,e_2)+\ldots\ldots\ldots+\alpha_n\beta_n(e_n,e_n)= =\alpha_1\beta_1\cdot 1+\alpha_1\beta_2\cdot 0+...+\alpha_n\beta_n\cdot 1=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n$;

$$\|a\|=\sqrt{(a,a)} = =\sqrt{(\alpha_1e_1+...+\alpha_ne_n,\alpha_1e_1+...+\alpha_ne_n)}=\sqrt{\alpha_1^2+...+\alpha_n^2}\ .$$

Нехай $e_1, e_2,...,e_n$ – деякий ортонормований базис евклідового простору V і $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ – координати вектора $\vec{a}$ в тому базисі, тоді $\alpha_i=(a,e_i)$ для $\forall i = 1,\ldots,n$.

Якщо L – підпростір V, то $V = L\oplus L^{\perp}$.

Розділ II. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

2.1. Поняття лінійних відображень та операторів у векторних просторах.

Лінійні відображення.

Означення 1. Нехай маємо U і V векторні простори над полем P і A: $U \to V$ є відображенням, яке $\forall$ вектору $u \in U$ ставить у відповідність вектор $u \in V$. Відображення A звуть лінійним відображенням або гомоморфізмом простору U в простір V, за умови, коли воно задовольняє умови лінійності:

1) $\forall u_1 \underset{V}{} \forall u_2 \underset{V}{} (A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2)$,

2) $\forall \alpha \underset{P}{} \forall u \underset{V}{} (A(\alpha u) = \alpha Au)$.

Ліійним оператором простору U звуть лінійне відображення векторного простору U в себ.

Із умови 1) та умови 2) слідує, що для $\forall$ $u_1,...,u_n \in U$ і $\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n \in P$ $A(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) = \alpha_1 Au_1 + ... + \alpha_n Au_n$. Легко також виводяться рівності $A0 = 0$ і $A(-u) = -Au$. Дійсно, $A0 = A(0 \cdot u) = 0 \cdot Au = 0$, $A(-u) = A((-1)u) = (-1)Au = -Au$.

Приклади лінійних відображень і лінійних операторів :

1. Припустимо, що V_n і V_m –n-вимірний і m-вимірний арифметичні простори над полем P, прицьому $n \geq m$. Відображення $A: V_n \to V_m$, яке кожному n-вимірному арифметичному вектору $(a_1,...,a_m,...,a_n)$ ставить у відповідність m-вимірний арифметичний вектор $(a_1,...,a_m)$, буде лінійним відображенням п V_n у простір V_m.

2. Припустимо, що P_n – векторний простір усіх многочленів одної змінної із коефіцієнтами із поля P, таких, що їх степінь не перевищує n, і V_{n+1}– $(n+1)$ –вимірний арифметичний простір над полем P. Відображення $A: P_n \to V_{n+1}$, яке кожному многочлену $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ставить у

відповідність вектор $(a_n,...,a_1,a_0)$, буде лінійним відображенням простору P_n у простір V_{n+1} (якщо деякі степені змінних відсутні у $f(x)$, тоді відповідні компоненти $(n+1)$ –вимірного арифметичного вектора беремо рівними 0).

3. У випадку, якщо маємо векторний простір над полем P V, тоді відображення $E: V \to V$, яке всякому вектору із V ставить у відповідність той же вектор, буде лінійним оператором простору V. Такий оператор звуть тотожнім оператором простору V. Відображення $O: V \to V$, при якому кожен вектор із V переводиться у нулевий вектор, також буде лінійним оператором простору V, і звуть його нулевим оператором. Відображення $\lambda E: V \to V$, що кожному вектору u з V ставить у відповідність вектор λu (λ– певний зафіксований елемент поля P), також буде л. о. простору V. Такий оператор називається оператором подібності із коефіцієнтом λ. При $\lambda = 1$ отримуємо тотожній оператор, якщо $\lambda = 0$ отримуємо нульовий оператор.

4. Поворот навколо деякої точки O площини на кут φ є лінійним оператором простору W_2 геометричних векторів площини.

5. Паралельне проектування на певну площину буде лінійним оператором простору W_3 геом. векторів тривимірного простору.

6. Припустимо, що векторний прострір V над полем P подано у виді прямої суми підпросторів L та $U: V = L \oplus U$. Тоді $\forall$ вектор $v \in V$ однозначно представляється у виді $v = l + u$, де $l \in L$, $u \in U$. Відображення $A: V \to V$, яке вектору v ставить у відповідність його компоненту l, буде лінійним оператором простору V. Цей оператор називаєть оператором «проектування» простору V на підпростір L. Так само вводитмо оператор проектування простору V на підпростір U.

7. Нехай P є векторним простором усіх многочленів із дійсними коефіцієнтами над полем R. Відображення $D: P \to P$, що $\forall$многочлену $f(x)$ із P ставить в відповідність похідну $f'(x)$, буде лінійним оператором простору P. Його звуть оператором диференціювання.

Теорема1. Нехай U – n-вимірний, і V – m –вимірний векторні простори над полем P. Тоді ∀лінійне відображення $A: U \to V$ однозначно визначається заданням образів $Ae_1,...,Ae_n$ векторів довільного фіксованого базису $e_1,...,e_n$ простору U. Якщо ж $c_1,...,c_n$ – довільна система з n векторів V, тоді існуватиме, єдине лінійне відображення $A: U \to V$ причому таке, що $Ae_1 = c_1, ..., Ae_n = c_n$.

Доведення. Нехай при A: U→V для $e_1,...,e_n$ деякого базису простору U матимемо: $Ae_1 = b_1, ..., Ae_n = b_n$. Тоді ∀ вектор $u \in U$ однозначно подамо в вигляді лінійної комбінації наших базисних векторів: $u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$. Тоді $Au = A(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 Ae_1 + ... + \lambda_n Ae_n = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Образ довільного вектора $u \in U$ однозначно визначається заданням образів $b_1,...,b_n$ базисних векторів $e_1,...,e_n$.

Якщо $e_1,...,e_n$ –базис простору U, а $c_1,...,c_n$ – довільна множина векторів простору V, тоді задамо відображення $A: U \to V$ так. Базисним векторам покладемо: $Ae_1 = c_1, ..., Ae_n = c_n$. Якщо u – будь-який вектор простору U, то u однозначно подамо у виді лінійної комбінації б. в.: $u = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, покладемо $Au = \alpha_1 c_1 + ... + \alpha_n c_n$. Доведемо, що A – є лінійним відображенням простору U в простір V. Перевіримо умови 1 та 2 із означення лінійного відображення. Якщо $v = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$, то $u + v = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)e_n$. $A(u+v) = (\alpha_1 + \beta_1)c_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)c_n = (\alpha_1 c_1 + ... + \alpha_n c_n) + (\beta_1 c_1 + ... + \beta_n c_n) = Au + Av$. Якщо $\lambda u = \lambda\alpha_1 e_1 + ... + \lambda\alpha_n e_n$, то $A(\lambda u) = \lambda\alpha_1 c_1 + ... + \lambda\alpha_n c_n = \lambda(\alpha_1 c_1 + ... + \alpha_n c_n) = \lambda Au$. Тоді, A – лінійне відображення векторного простору U в простір V. Із показаного вище, воно однозначно визначається елементами $c_1,...,c_n$, які є образами базисних векторів.

Лінійне відображення $A: U \to V$ визначається заданням образів $Ae_1, ..., Ae_n$ векторів базису $e = \{e_1,...,e_n\}$ простору U. Якщо $f = \{f_1,...,f_n\}$ – базис простору V, то вектори $Ae_1, ..., Ae_n$ однозначно подамо у виді лінійних комбінацій базисних векторів $f_1,...,f_n : Ae_1 = a_{11}f_1 + ... + a_{1m}f_m, ..., Ae_n = a_{n1}f_1 + ... + a_{nm}f_m$. Матриця

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ розміром $n\times m$, утворюється із координатних рядків векторів $Ae_1,\ldots,Ae_n$ в базисі f простору V, зветься матрицею лінійного відображення A відносно базисів e і f. При $u=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$ – довільний вектор простору U, тоді

$Au=x_1Ae_1+\ldots+x_nAe_n=x_1(a_{11}f_1+\ldots+a_{1m}f_m)+\ldots+x_n(a_{n1}f_1+\ldots+a_{nm}f_m)=$
$=(x_1a_{11}+\ldots+x_na_{n1})f_1+\ldots+(x_1a_{1m}+\ldots+x_na_{nm})f_m$. Позначимо через $[u]$ та $[Au]$ координатні рядки векторів u і Au у базисах e і f , то отримаємо зв'язок між координатами векторів u і Au запишеться у вигляді матричної рівності: $[Au]=[u]\cdot A$.

Якщо ж A –матриця розміром $n\times m$ над полем P, то за фіксованих базисах e і f в просторах U і V відповідно матриця A однозначно задає лінійне відображення $A: U\to V$, матрицею якого стосовно базисів e і f є дана матриця A. Дійсно, за теоремою1, відображення A визначається через задання образів $Ae_1,\ldots,Ae_n$ базисних векторів простору U однозначно. Взявши за Ae_i вектор простору V, що у базисі f має координатний рядок, який збігається із i –рядком матриці $A(i=1,\ldots,n)$, матимемо лінійне відображення A. Отож, за фіксованих базисах e і f у векторних просторах U і V існує відповідність (взаємно однозначна) між множиною усіх лінійних відображень n –вимірного простору U в m-вимірний векторний простір V і множиною всіх $n\times m$-матриць над полем P і.

Якщо ж $A: U\to U$ є лінійним оператором n –вимірного векторного простору U, то за базис f можна взяти той же базис e, себто матриця A оператора A відносно базису e буде квадратною матрицею n –го порядку. Будь-якій квадратній матриці A n-го порядку за фіксованого базису e n –вимірного простору U відповідатиме єдиний лінійний оператор A простору U, дана матриця А буде його матрицею відносно базису e.

У випадку w_3 за базис простору можна взяти одиничні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ координатних осей. Для оператора A проектування на площину $XOY \parallel$ осі OZ матимемо: $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1, A\vec{e}_2 = \vec{e}_2, A\vec{e}_3 = \vec{0}$, а тому матрицею оператора A відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ буде матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Для $\forall$вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ w_3 матимемо: $A\vec{a} = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, 0)$.

Операції із лінійними відображеннями.

Нехай маємо $U - n$ –вимірний, і $V - m$ –вимірний векторні простори над полем P, A і B – лінійні відображення U у V, λ – певний елемент поля P. Означимо відображення $A + B$ і λA простору U в простір V так: $(A+B)u = Au + Bu$, $(\lambda A)u = \lambda(Au)$. Відображення $A+B$ звуть сумою відображень A і B, а відображення λA звуть добутком відображення A на елемент λ.

Теорема 2. Нехай A, та B – лінійні відображення n –вимірного векторного простору U в m –вимірний векторний простір V, A і B – їх матриці стосовно базисів e в U і f в V, λ – певний елемент поля P, над яким задано ці векторні простори. Відображення $A+B$ і λA також будуть лінійними відображеннями простору U в V і при цьому їх матрицями стосовно базисів e і f будуть матриці A + B і λA відповідно.

Доведення. Доведемо, що для $A+B$ і λA виконуються умови 1та 2 із означення лінійного відображення. Дійсно,

$$(A+B)(u_1 + u_2) = A(u_1 + u_2) + B(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 + Bu_1 + Bu_2 = \\ = (A+B)u_1 + (A+B)u_2,$$

$$(A+B)(\alpha u) = A(\alpha u) + B(\alpha u) = \alpha Au + \alpha Bu = \alpha(Au + Bu) = \alpha(A+B)u;$$

$$(\lambda A)(u_1 + u_2) = \lambda(A(u_1 + u_2)) = \lambda(Au_1 + Au_2) = \lambda(Au_1) + \lambda(Au_2) = (\lambda A)u_1 + (\lambda A)u_2,$$

$(\lambda A)(\mu u) = \lambda(A(\mu u)) = \lambda(\mu Au) = \mu(\lambda Au) = \mu(\lambda A)u$. Таким чином, $A+B$ і λA будуть лінійними відображеннями простору U в простір V.

Якщо $A=(a_{ij})$ та $B=(b_{ij})$ – деякі матриці лінійних відображень A і B стосовно базисів $e=\{e_1,...,e_n\}$ простору U і $f=\{f_1,...,f_m\}$ простору V, $Ae_i=a_{i1}f_1+...+a_{im}f_m$, $Be_i=b_{i1}f_1+...+b_{im}f_m$, $(i=1,...,n)$, тоді

$$(A+B)e_i=Ae_i+Be_i=(a_{i1}f_1+...+a_{im}f_m)+$$

$$(b_{i1}f_1+...+b_{im}f_m)=(a_{i1}+b_{i1})f_1+...+(a_{im}+b_{im})f_m,$$

$$(\lambda A)e_i=\lambda(Ae_i)=\lambda(a_{i1}f_1+...+a_{im}f_m)=\lambda a_{i1}f_1+...+\lambda a_{im}f_m,\quad (i=1,...,n).$$

Отже матрицею відображення $A+B$ стосовно базисів e і f буде матриця $A+B$, а матрицею відображення λA буде матриця λA.

Властивості операцій із лінійними відображеннями:

1) $A+B=B+A$;

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) $A+O=O+A$, де O – нулеве відображення, кожному вектору $u\in U$ зіставляється нулевий вектор із V;

4) $A+(-1)A=(-1)A+A=O$, тобто $(-1)A=-A$;

5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

7) $\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)=(\lambda\mu)A$;

8) $1\cdot A=A$.

Із записаних вище властивостей бачимо, що множина усіх лінійних відображень простору U в простір V є векторним простором над полем P стосовно операцій множення відображень на елементи поля P та додавання відображень.

Якщо A і B – лінійні оператори векторного простору V, тоді їхній добуток визначається умовою: $(A\cdot B)u=B(Au)$. Зауважимо, що добуток операторів відмінний від їхньої композиції порядком співмножників: $A\cdot B=B\circ A$. При застосуванні до вектора u оператора $A\cdot B$ природньо вимагати, щоб перш за все застосовувався оператор A, що є першим співмножником у цьому добутку.

Теорема 3. Якщо A, B – лінійні оператори n-вимірного векторного простору і A, B – їхні матриці відносно деякого базису e, то добуток AB теж є лінійним оператором цього простору, причому його матрицею відносно вказаного базису e є матриця A·B.

Доведення. Припустимо, що A і B – деякі лінійні оператори n –вимірного векторного простору V. Перевіримо для $A\cdot B: \mathrm{V}\to\mathrm{V}$ виконання умов 1 та 2 із визначення лінійного відображення: $(A\cdot B)(\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2)=B(A(\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2))=B(A\mathrm{u}_1+A\mathrm{u}_2)=B(A\mathrm{u}_1)+ \quad +\mathrm{B}(\mathrm{A}u_2)=(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})u_1+(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})u_2$; $(A\cdot B)\lambda\mathrm{u}=B(A(\lambda\mathrm{u}))=B(\lambda A\mathrm{u})=\lambda(B(A\mathrm{u}))=\lambda(A\cdot B)\mathrm{u}$. Тоді, $A\cdot B$ буде лінійним оператором простору V. Якщо $\mathrm{A}=(\mathrm{a}_{ij})$ і $\mathrm{B}=(\mathrm{b}_{ij})$ є матрицями операторів A і B відносно деякого базису $\mathrm{e}=\{\mathrm{e}_1,...,\mathrm{e}_n\}$ простору V, тобто $A\mathrm{e}_i=\mathrm{a}_{i1}\mathrm{e}_1+...+\mathrm{a}_{in}\mathrm{e}_n$, $\mathrm{B}e_i=b_{i1}e_1+...+b_{in}e_n$, $(\mathrm{i}=1,...,\mathrm{n})$, тоді

$$(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})e_i=\mathrm{B}(\mathrm{A}e_i)=B(\mathrm{a}_{i1}\mathrm{e}_1+...+\mathrm{a}_{in}\mathrm{e}_n)=\mathrm{a}_{i1}B\mathrm{e}_1+...+\mathrm{a}_{in}B\mathrm{e}_n=$$
$$=a_{i1}(b_{11}e_1+...+b_{1n}e_n)+...+a_{in}(b_{n1}e_1+...+b_{nn}e_n)=$$
$$=(a_{i1}b_{11}+...+a_{in}b_{n1})e_1+...+(a_{i1}b_{1n}+...+a_{in}b_{nn})e_n,\quad (i=1,...,n).$$

Отже матрицею оператора $A\cdot B$ відносно базису e буде матриця AB.

Враховуючи зв’язок між операцією добутку операторів і їхньою композицією, а також асоціативність операції композиції відображень, маємо, що операція добутку лінійних операторів також асоціативна.

9) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

10) $A\cdot E=E\cdot A=A$, де E – тотожній оператор простору V;

11) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ і $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$;

12) $(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)=\lambda(A\cdot B)$.

Нехай A – деякий лінійний оператор n –вимірного векторного простору V над полем P і $\mathrm{A}=(\mathrm{a}_{ij})$ його матриця в деякому базисі $\mathrm{e}=\{\mathrm{e}_1,...,\mathrm{e}_n\}$ простору V. Тоді для $\forall$ вектора $u\in V$, справедливою буде формула $[\mathrm{A}u]=[\mathrm{u}]\cdot\mathrm{A}$, через $[\mathrm{u}]$ і $[\mathrm{A}u]$ тут позначено координатні рядки векторів u і Au в базисі e. Розглянемо деякий інший базис $\mathrm{e}'=\{\mathrm{e}'_1,...,\mathrm{e}'_n\}$ із простору V, який

одержується із базису e за допомогою матриці переходу $C=(c_{ij})$ Через $[u]'$ та $[Au]'$ позначимо координатні рядки векторів u і Au в базисі e'. Якщо ж A' є матрицею оператора A відносно базису e', тоді $[Au]'=[u]'\cdot A'$. Визначимо зв'язок між A і A'. Доведемо допоміжне твердження.

Лема. Нехай $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ є квадратними матрицями $n-$го порядку над полем P. Якщо для $X=(x_1,...,x_n)$ справджується рівність $XA=XB$, то $A=B$.

Доведення. Взявши арифметичні вектори X із компонентами $x_i=1$, $x_j=0$, $(i\neq j)$ при фіксованому i, з рівності $XA=XB$ оматимемо: $a_{ik}=b_{ik}$, $(k=1,...,n)$. Тоді і відповідні елементи матриць A і B рівні, тому $A=B$.

Теорема. Якщо лінійний оператор A n-вимірного векторного простору V відносно базисів e і e' має матриці A і A' відповідно, то $A'=C\cdot A\cdot C^{-1}$, де C є матрицею переходу від базису e до базису e'.

Доведення. Маємо: $[Au]=[u]\cdot A$, $[Au]'=[u]'\cdot A'$. Також, $[u]=[u]'\cdot C$, $A[u]=[Au]'\cdot C$. Підставляючи вирази для $[Au]$ і $[Au]'$ у останню рівність, а потім вираз для $[u]$, одержимо: $[u]'\cdot C\cdot A=[u]'\cdot A'\cdot C$. Оскільки u — деякий вектор простору V, то, $C\cdot A=A'\cdot C$. Домноживши обидві частини рівності справа на C^{-1}, одержимо: $A'=C\cdot A\cdot C^{-1}$, що і потрібно було довести.

Матрицю C можна розглядати як матрицю стосовно базису e лінійного оператора C простору V, і який перетворить базис e в базис e', тобто $Ce_i=e_i'$ $(i=1,...,n)$. Оскільки $C\cdot C\cdot C^{-1}=C$, то матриця C буде матрицею оператора C також відносно базису e'.

Матриця B називається подібною матриці A, якщо для квадратних матриць $n-$го порядку A і B існує невироджена матриця Q така, що $B=Q^{-1}\cdot A\cdot Q$. Також кажуть, що матриця B утворена трансформацією матриці A матрицею Q.

Зауважимо, що відношення подібності матриць буде відношенням еквівалентності на множині усіх квадратних матриць n –го порядку над полем P. Дійсно, $A = E^{-1} \cdot A \cdot E$, себто відношення подібності матриць є рефлексивним. Якщо $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$, то $A = Q \cdot B \cdot Q^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^{-1} \cdot B \cdot Q^{-1}$, себто відношення подібності є симетричним. Якщо $C = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$ і $B = R^{-1} \cdot A \cdot R$, то $C = Q^{-1} \cdot R^{-1} \cdot A \cdot R \cdot Q = (R \cdot Q)^{-1} \cdot A \cdot (R \cdot Q)$, тобто відношення подібності є транзитивним.

Всі матриці, що задають даний лінійний оператор A відносно різних базисів V, є подібними між собою. Якщо матриця A є матрицею оператора A стосовно базису e, то довільна матриця $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$, подібна матриці A, теж є матрицею оператора A відносно певного базису, відносно базису e', який отримано із базису e за допомогою матриці переходу $C = Q^{-1}$.

Ядро та образ лінійного оператора.

Означ 2. Нехай A –є лінійним оператором векторного простору V над полем P. Ядром оператора A називається множина усіх векторів u з простору V, які оператор A відображає в нулевий вектор і позначається Ker$A$, $\mathrm{Ker}A = \{u | u \in V \wedge Au = 0\}$. Образом оператора A називається множина всіх векторів V, які є образами хоча б одного вектора під час дії оператора A, називається і позначається ImA, тобто $\mathrm{Im}A = \{u | u \in V \wedge \exists v \in V(Av = u)\}$.

Образ і ядро лінійного оператора A є підпросторами V. Дійсно, $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}A \Rightarrow A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u_1 + u_2 \in \mathrm{Ker}A$,

$u \in KerA \wedge \lambda \in P \Rightarrow A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda u \in KerA.$ Тоді,

$u_1, u_2 \in \mathrm{Im}A \Rightarrow \exists v_1(Av_1 = u_1) \wedge \exists v_2(Av_2 = u_2) \Rightarrow A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in \mathrm{Im}A$, $u \in \mathrm{Im}A \wedge \lambda \in P \Rightarrow \exists_V (Av = u) \Rightarrow A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda u \Rightarrow \lambda u \in \mathrm{Im}A$.

Рангом оператора A називається розмірність підпростору ImA, розмірність підпростору $KerA$ зветься дефектом оператора A.

Якщо маємо тотожній оператор E, то очевидно, $ImE = V, Ker\,E = \{0\}$.

Для нулевого оператора O $ImO = \{0\}, KerO = V$.

Теорема. Ранг лінійного оператора A скінченновимірного векторного простору V дорівнює рангу матриці цього оператора відносно довільного базису простору V.

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})$ є матрицею оператора A стосовно певного базису $e = \{e_1, ..., e_n\}$ простору V. Тоді $Ae_1 = a_{11}e_1 + ... + a_{1n}e_n, ..., Ae_n = a_{n1}e_1 + ... + a_{nn}e_n$, тобто рядки матриці A збігаються з координатними рядками векторів $Ae_1, ..., Ae_n$ у базисі e. Підпростір ImA складається із образів всіх векторів простору V при дії A, себто із всіх векторів, що мають вигляд $A(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) = \alpha_1 Ae_1 + ... + \alpha_n Ae_n$, де $\alpha_1, ..., \alpha_n$ є довільними елементами поля P. Ранг оператора A збігається із рангом системи векторів $Ae_1, ..., Ae_n$, яка породжує підпростір ImA, і дорівнює максимальному числу лінійно незалежних векторів цієї системи. Отже ранг оператора A рівний рангу його матриці A.

Оскільки подібні матриці задають у відповідних базисах один і той же лінійний оператор векторного простору, то з теореми 5 безпосередньо отримується наслідок.

Якщо матриці подібні то вони мають однакові ранги.

Теорема6. Сума дефекту та рангу $\forall$ лінійного оператора A n-вимірного векторного простору V рівна n.

Теорема 7. Нехай V є n-вимірним векторним простором над полем P. Для будь-яких підпросторів L і U простору V, сума розмірностей яких рівна n, існуватиме такий лінійний оператор A простору V, що $KerA = L, ImA = U$.

Доведення. Нехай d розмірність підпростору L , а підпростір U має розмірність $r = n - d$. В підпросторі U виберемо базис $f_1, ..., f_r$, а в підпросторі L – базис $e_1, ..., e_d$ і останній доповнимо до базису $e_1, ..., e_d, ..., e_n$ простору V. Візьмемо оператор A простору V, який визначається: $Ae_i = 0$,

якщо $i = 1,...,d$; $Ae_{i+d} = f_i$, при $i = 1,...,r$, і покажемо, що цей оператор відповідає умовам теореми. Підпростір ImA породжується векторами $Ae_1,...,Ae_n$, себто векторами $f_1,...,f_r$, а тому $ImA = U$. Також очевидно, $L \subseteq KerA$. Встановимо, що $KerA \subseteq L$. Тоді, для деякого вектора $u = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ $Au=0$, звідси $Au = A(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) = \alpha_1 Ae_1 + ... + \alpha_n Ae_n = \alpha_{d+1} f_1 + ... + \alpha_{d+r} f_r = 0$. Вектори $f_1,...,f_r$ лінійно незалежні, тоді $\alpha_{d+1} = ... = \alpha_{d+r} = 0$, себто $u = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_d e_d \in L$, тоді, $KerA \subseteq L$, і $KerA = L$, адже раніше уже було встановлено, що $L \subseteq KerA$.

Невироджені оператори

Означ.3. Якщо його ранг оператора дорівнює n , то лінійний оператор n –вимірного векторного простору V називається невиродженим. Оператор зветься виродженим, якщо ранг оператора менший розмірності n векторного простору V, у якому його задано.

Теорема 8. Для лінійного оператора A n-вимірного векторного простору V наступні умови є рівносильними:

1. Оператор A невироджений;
2. Мматриця оператора A у довільному базисі простору V є оборотною;
3. Оператор A є оборотним;
4. Оператор A здійснює взаємнооднозначне відображення V на себе;
5. Ядро оператора A складається тільки із нулевого вектора;
6. Дефект оператора A рівний нулю;
7. Оператор A $\forall$ лінійно незалежну систему векторів простору V переводить в лінійно незалежну систему.

Множина усіх оборотних операторів векторного простору V, яка збігається із множиною усіх невироджених операторів простору V, утворює групу стосовно операції добутку операторів. Зафіксуємо в просторі V певний базис e і кожному невиродженому оператору A із V поставимо у відповідність матрицю A цього оператора у базисі e. З теорем 3 та 8 слідує,

що ця відповідність буде ізоморфізмом мультиплікативної групи усіх не вироджених операторів n –вимірного векторного простору над полем P на повну лінійну групу $GL(n, P)$ усіх оборотних матриць n-го порядку над полем P.

2.2. Власні значення, власні вектори оператора, поняття операторів із простим спектром.

Інваріантні під простори, власні вектори та власні значення лінійного оператора

Підпростори, що відображаються оператором самі в себе мають важливе значення при вивченні лінійних операторів, які задані в векторному просторі.

Означ 4. Підпростір U векторного простору V називається інваріантним стосовно лінійного оператора A, який задано у просторі V, якщо $A(U) \subseteq U$, тобто якщо для ∀ вектора $u \in U$ $Au \in U$.

Простір V і нулевий підпростір $\{0\}$ інваріантний відносно ∀лінійного оператора A, який заданий у просторі V. Довільний підпростір V, який є інваріантним стосовно тотожного оператора E *та* нулевого оператора 0. Якщо заданий оператор подібності A з коефіцієнтом $\lambda \neq 0$ у векторному просторі V, тобто $Au = \lambda u$ для ∀вектора $u \in V$, то ∀ одновимірний підпростір V, себто підпростір, який породжено одним певним своїм елементом, буде інваріантним стосовно оператора подібності A. У W_2 геометричних векторів площини на кут $\varphi \neq k\pi (k \in Z)$, єдиними інварінатними відносно цього оператора підпросторами буде сам простір V та нулевий простір $\{0\}$. Легко побачити, що образ ImA та ядро $KerA$ є інваріантними підпросторми відносно оператора A.

Дослідимо одновимірні інваріантні підпростори, що грають особливо велику роль під час вивчення лінійних операторів. Якщо $U = \{\lambda u | \lambda \in P\}$ є одновимірним підпростором простору V, інваріантним відносно оператора

A, *то* $Au = \lambda u$ для певного $\lambda \in P$. Тоді для $\forall$ елемента $\alpha u \in U$ одержимо: $A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$.

Означення 5. Власним вектором лінійного оператора A звуть ненульовий вектор u простору V, якщо $Au = \lambda u$ для певного елемента $\lambda \in P$. Сам λ при цьому називають власним значенням оператора A, який відповідає власному вектору u. Власний вектор u належить власному значенню λ.

Існує єдиний елемент $\lambda \in P$ такий, що $Au = \lambda u$, при умові, що u є власним вектором лінійного оператора A. Дійсно, при $u \neq 0$, $Au = \lambda_1 u \Rightarrow \lambda u = \lambda_1 u \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)u = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1$. Тоді, якщо u – власний вектор оператора A, який належить власному значенню λ, то для $\forall$ ненулевого елемента α з поля P вектора αu також буде власним вектором оператора A, що належить тому ж власному значенню λ. Дійсно, $A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$. Тоді, кожен власний вектор оператора A породжує у V одномірний інваріантний підпростір. Його ненульові вектори будуть власними векторами оператора A, які належать одному і тому самому власному значенню. Отже, процес відшукання інваріантних відносно оператора A одновимірних підпросторів V рівносильний процесу знаходження власних векторів оператора A. Оператор повороту у W_2 геометричних векторів площини на кут $\varphi \neq k\pi (k \in Z)$ навколо довільної точки O площини є саме таким випадком. Також, існують оператори, у яких кожний ненулевий вектор простору буде власним. Прикладом буде оператор подібності із коефіцієнтом λ.

Теорема 9. Власні вектори $a1, a2, \dots, am$ лінійного оператора A, щоналежать різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ попарно, створюють лінійно незалежну систему.

Доведення. Використаємо метод математичної індукції за m власних векторів. Якщо m=1, то теорема справедлива, бо вектор a_1 ненульовий. Припустимо істинність теореми при довільних $m - 1$ власних векторів оператора A, які належать попарно різним власним значенням. Покажемо,

що тоді довільні m власні вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$, які належать різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, також будуть лінійно незалежними.

Дійсно, якщо для певних $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m = 0$,

$0 = A0 = A(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m) = \alpha_1 A a_1 + \alpha_2 A a_2 + \cdots + \alpha_m A a_m =$
$= \alpha_1 \lambda_1 a_1 + \alpha_2 \lambda_2 a_2 + \cdots + \alpha_m \lambda_m a_m$

, тобто $\alpha_1 \lambda_1 a_1 + \alpha_2 \lambda_2 a_2 + \cdots + + \alpha_m \lambda_m a_m = 0$.

Віднявши почленно останню рівність $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + +\alpha_m a_m = 0$, помножену на λ_k, матимемо: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)a_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)a_2 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)a_{m-1} = 0$. В силу того, що власні вектори $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ належать попарно різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, тоді згідно із припущення індукції, всі вектори будуть лінійно незалежні. Це означає, що $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m) = \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$. Звідси випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$, бо усі власні значення будуть попарно різні. Тоді із $\alpha_m a_m = 0$ маємо $\alpha_m = 0$, бо вектор a_m, ненульовий, як власний вектор. Тоді, власні вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно незалежні. За методом математичної індукції, теормеа істинна для ∀ натурального m.

Якщо лінійний оператор A n-вимірного векторного простору V має n попарно різних власних значень, тоді власні вектори оператора A, які належать цим власним значенням, узяті один раз для кожного значення, утворять базис V. В базисі, який складається із власних векторів оператора A має досить простий вигляд. Матриця є діагональною, і її діагональними елементами будуть власні значення, яким відповідають базисні вектори. Дійсно, якщо базисні вектори $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є власними векторами оператора A, що належать власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ відповідно, то $Ae_1 = \lambda_1 e_1, Ae_2 = \lambda_2 e_2, \ldots, Ae_n = \lambda_n e_n$. Матриця оператора A в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є діагональною матрицею:

$A = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$

У випадку, коли діагональна матриця A вказаного вище виду є матрицею A в певному базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ V, тоді

$Ae_1 = \lfloor e_1 \rfloor A = (1,0,\dots,0)A = (\lambda_1,0,\dots,0) = \lambda_1 e_1$,

$Ae_2 = \lfloor e_2 \rfloor A = (0,1,\dots,0)A = (0,\lambda_2,\dots,0) = \lambda_2 e_2$,

…

$Ae_n = \lfloor e_n \rfloor A = (0,0,\dots,1)A = (0,0,\dots,\lambda_n) = \lambda_n e_n$

Базисні вектори будуть власними векторами оператора A, який належить власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тоді, справедлива така теорема.

Теорема. ***М***атриця $A = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$, яка є діагональною, буде матрицею лінійного оператора A у деякому базисі векторного простору V тоді і тільки тоді, коли базисні вектори будуть власними векторами оператора A, які належать власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, λ_n.

Розглянемо задачу відшукання власних векторів та власних значень лінійного оператора. Припустимо, що A є лінійним оператором векторного простору V і $A = (a_{ij})$ є його матрицею у певному базисі $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ простору V. Якщо u – власний вектор оператора A, що належить власному значенню λ, і $(x_1, \dots, x_n)$ є його координатним рядком у базисі e, себто $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то $Au = \lfloor u \rfloor A == (x_1, \dots, x_n) = \lambda u = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Покомпонентно розпишемо матричну рівність та отримаємо наступну систему лінійних рівнянь стосовно змінних $x_1, \dots, x_n$:

$\{$ [illegible]

Отримана система є рівносильною однорідній системі із n лінійних рівнянь із n змінними:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = \lambda x_1 \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{n2}x_n = \lambda x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Координатний рядок $(x_{1,\dots,}x_n)$ вектора в базисі $\mathbf{e}$ простору V буде ненульовим розв'язком системи, у випадку коли $\mathbf{u}$ буде власним вектором лінійного репера A, який належить власному значенню λ. Довільний ненулевий розв'язок системи буде власним вектором оператора A, який належить власному значенню λ. Ця истема матиме ненульові розвозки тоді і

тільки тоді, коли визначник матриці цієї системи рівний 0, а отже, дорівнює 0 ще й визначник матриці, яка є транспонованою до неї. Останній же має вид $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$. Якщо λ вважати змінною, то $|A-\lambda E|$ буде многочленом степеня n відносно λ із коефіцієнтами із поля P. Многочлен $|A-\lambda E|$ називають характеристичним многочленом оператора A у базисі e, або характеристичним многочленом матриці A. Характеристичною матрицею називається матриця $A-\lambda E$.

Теорема. Для того, щоб елемент λ_0 був коренем характеристичного многочлена оператора A у певному базисі e простору V, необхідно і достатньо, щоб елемент $\lambda_0 \epsilon$ P був власним значенням лінійного оператора A векторного простору V над полем P.

Теорема. Характеристичний многочлен лінійного оператора A простору V не залежить від вибору базисі в просторі V.

Теорема. Елемент $\lambda_0 \epsilon P$ буде власним значенням матриці A тоді і тільки тоді, коли він буде коренем відповідного характеристичного рівняння $|A-\lambda E| = 0$ матриці A.

Задача знаходження власних векторв лінійного оператора A векторного простору V над полем P зводиться до відшукання у P коренів характеристичного многочлена відповідногооператора A. У полі C комплексних чисел $\forall$ многочлен ненулевого ступеня із комплексними коефіцієнтами мае комплексні корені. Отже $\forall$ лінійний оператор векторного простору V над полем C матиме власні вектори. А це означає, що у просторі V є хоча б один одновимірний підпростір який буде інваріантним стосовно оператора V.

Якщо розглядати дійсний векторний простір, то характеристичне рівняння $|A-\lambda E = 0|$ оператора A може і не мати жодного кореня у R.

Тоді А не має власних векторів. Характеристичне рівняння для А повороту на кут φ проти годинникової стрілки у W_2 мас вигляд:

$$|A-\lambda E=\begin{vmatrix}\cos\varphi-\lambda & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\cos\varphi\lambda+1=0$$

У випадку $\varphi\neq k\pi$, $k\in Z$, дане рівняння не матиме дійсних коренів, бо дискримінант D відповідного тричлена від'ємний:$D=4(\cos\varphi^2-1)<0$.

Теорема. Для $\forall$ лінійного оператора дійсного векторного "простору існує одно- чи двовимірній інваріантний підпростір.

Доведення. Припустимо, що характеристичний многочлен оператора А дійсного простору V має принаймні один дійсний корінь, то тоді А має власний вектор, який відповідає певному дійсному власному значенню. Одновимірній підпростір який породжений даним власним вектором, буде відносно А інваріантнім. Нехай усі корені характеристичного многочлена А є комплексними числами. Також припустимо, що $\lambda=\alpha+i\beta$ є одним з таких коренів. Розв'язуючи систему для цього значення λ,ми знаходимо певний її ненулевий розв'язок $z_1=x_1+iy_1$,$z_2=x_2+iy_2,..,z_n=x_n+iy_n$, справедливі рівності:

$$a_{11}(x_1+\imath y_1)+a_{21}(x_2+\imath y_2)+\cdots+a_{n1}(x_n+\imath y_n)=(\alpha+\imath\beta)(x_1+\imath y_1)$$
$$a_{12}(x_1+\imath y_1)+a_{22}(x_2+\imath y_2)+\cdots+a_{n2}(x_n+\imath y_n)=(\alpha+\imath\beta)(x_2+\imath y_2)\,.$$

Прирівнявши уявні і дійсні частини систем, матимемо:

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n1}x_n=\alpha x_1-\beta y_1$$
$$a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{n2}x_n=\alpha x_2-\beta y_2\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{nm}x_n=\alpha x_n-\beta y_v$$
$$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{n1}y_n=\alpha y_1+\beta x_1$$
$$a_{12}y_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n1}x_n=\alpha x_1-\beta y_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{n2}y_n=\alpha y_n+\beta x_n$$

Розглянемо вектори $u=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ і $v=(y_1,y_2,\dots,y_n)$. Рівності

вказують, що $Au = (x_1, x_2, \dots, x_n)\mathrm{A} = \alpha v + \beta u$, тоді $A(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = \lambda_1 Au + \lambda_2 Av = \lambda_1(\alpha u - \beta v) + \lambda_2(\alpha v + \beta u) = (\lambda_1 \alpha + \lambda_1 \beta)u + (\lambda_2 \alpha - \lambda_1 \beta)v.$

Маємо, що підпростір, який породжений векторами u і v: $v = \gamma u$ – дає співвідношення $Au = \lambda u - \beta v = (\alpha - \beta\gamma)u$, себто вектор u буде власним вектором оператора A. Він відниться до дійсного власного значення $\alpha - \beta\gamma$, що суперечить припущенню того, що характеристичний многочлен $|A\text{-}\lambda E|$ не мав дійсних коренів.

Кажуть, що матриця A зведеться до діагонального вигляду тоді, коли вона подібна певній діагональній матриці. Розглянемо умови, за яких квадратна матриця зведеться до діагонального вигляду.

Оператором з простим спектром зветься лінійний оператор A n-вимірного векторного простору V над полем P, у випадку, коли він має право різних власних значень. Тобто коли його характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$– має рівно n різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ у полі P. Спектром оператора A зветься множина усіх власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Із теорем наведених вище, безпосередньо отримуємо достатню умову зведеності квадратної матриці діагональному вигляду.

Теорема. Матриця оператора зводиться до діагонального вигляду, якщо A з простим спектром.

Теорема. Квадратна матриця A зведеться до діагонального вигляду тоді і лише тоді коли матриця A буде матрицею лінійного оператора A векторного простору V, з базисом, який утворений із власних векторів A.

Критерій, з теореми вище, не зручний у практичному застосуванні. Є необхідні та достатні умови зведеності квадратної матриці A діагональному виду, які відносяться лише самій матриці A та її характеристичних коренів рівняння $|A - \lambda E| = 0$. Елемент λ_0 звуть коренем кратності k від $f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0 = 0$, якщо рівняння ділиться націло на вираз $(\lambda - \lambda_0)^k$ та не ділиться націло на $(\lambda - \lambda_0)^{k+1}$. Простим коренем

називається корінь кратності $k = 1$. В теорії многочленів стверджують, що якщо всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ $f(\lambda)$ знаходяться у полі P, і мають кратності $k_1, k_2, \dots k_m$, то виконується $f(\lambda = a_n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$ і $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

Теорема. До діагонального вигляду квадратна матриця A n-го порядку над полем P зведеться тоді і лише тоді, якщо усі її корені характеристичного рівняння будуть із поля P і для усіх коренів A кратності k_i ранг r_i матриці $A - \lambda_i E$ рівний $n - k_i$.

Доведення.

Необхідність. Нехай A є квадратною матрицею n-го порядку і зводиться до діагонального вигляду над полем P. Тоді існує така діагональна матриця D та невироджена квадратна матриця C, що справедливим буде:

$A = C^{-1} \cdot D \cdot C.$ Звідси

$A - \lambda_i E = C^{-1} \cdot D \cdot C - \lambda_i C^{-1} \cdot E \cdot C = C^{-1}(D - \lambda_i E)C.$ Тоді матриці $A - \lambda_i E$ і $D - \lambda_i E$ теж подібні. З наведених вище теорем слідує, що усі корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, характеристичного рівняння матриці A належать полю P та будуть діагональними елементами матриці D. Зауважимо, що елемент у матриці D зустрічається k_i разів. Матриця $D - \lambda E_i$ матиме рівно k_i нулевих рядочків, а тому ранг її r_i рівний $n - k_i$. Матриці C^{-1} і C є невиродженими, тоді, згідно з лемою вище, матриці $A - \lambda_i E$ і $D - \lambda_i E$ матимуть однаковий ранг. Тоді ранг матриці $A - \lambda_i E$ рівний $n - k_i$.

Достатність. Припустимо, що всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, отримані в результаті розв'язання характеристичного рівняння A $n-$го порядку належать полю P, та для $\forall$ кореня λ_i, що має кратність k_i, ранг r_i матриці $A - \lambda_i, E$ рівний $n - k_i$, $(i = 1, \dots, m)$. Тоді в базисі $e = \{e_1 \dots e_n\}$ n –вимірного простору V над P матриця A однозначно визначить лінійний

оператор A, що матиме ті ж самі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ як і матриця A. Власні вектори оператора A , які належать кожному власному значенню λ_i, можна знайти розв'язавши однорідну систему, зафіксувавши у ній $\lambda = \lambda_i$. Раз ранг r_i матриці $A - \lambda_i E$. Рівний $n - k_i$ то і ранг матриці системи у випадку $\lambda = \lambda_i$, що транспонована до матриці $A - \lambda_i E$, також рівна $n - k_i$. Це означає, що однорідна система матиме $n - (n - k_i) = k_i$ фундаментальних розв'язків, які будуть власними векторами A, і які відповідають власному значенню λ_i. Тоді, для $\forall$ $\mathrm{i} = 1, \dots, m$ т існуватиме k_i лінійно незалежних власних векторів A. Ці власні вектори відповідають власному значенню λ_i. Тоді отримаємо $k_1 + k_2 + \dots + km = n$ власних векторів $u_1, u_2 \dots, u_n$, A, при цьому перші k із яких відповідають власному значенню λ_i ,наступніk_2 - відповідають власному значенню λ_2 і т.д. І на завершення, k_m – відповідають власному значенню λ_m. Доведемо, що вектори $u_1, u_2 \dots, u_n$ є базисом простору V. Тут досить показати їхню лінійну залежність. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що $a_1 u_1, a_2 u_2 \dots, a_n u_n = 0$ і не усі коефіцієнти рівні 0. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $a_n \neq 0$.

Згідно властивостей операцій із операторами маємо, що $\Gamma_1 = (A - \lambda_2 E) - (A - \lambda_3 E) \dots (A - \lambda_m E)$ також буде лінійним оператором векторного простору V. Знайдемо образ власного вектора u оператора A при операторі $\widetilde{\mathrm{A}_1}$, що належить власному значенню λ. Послідовно будемо мати:

$$(A - \lambda_2 E)u = Au - (\lambda_2 E)u = \lambda u - \lambda_2 u = (\lambda - \lambda_2)\, u$$

$$((A - \lambda_2 E)\,(A - \lambda_3 E))\, u = (A - \lambda_3 E)(\,(A - \lambda_2 E)\, u) =$$

$$= A\big((\lambda - \lambda_2)\big) - (\lambda_3 E)\big((\lambda - \lambda_2)u\big) = (\lambda - \lambda_2,)Au - \lambda_3\ (\lambda - \lambda_2)u =$$

$$(\lambda - \lambda_2)\lambda u - (\lambda - \lambda_2)\lambda_3 u = (\lambda - \lambda_2) \cdot (\lambda - \lambda_3)u, \dots,$$

$$\Gamma_1 u = (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)u$$

Тоді, якщо $n -$ власний вектор A, відповідає одному із власних значень

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, тоді $\Gamma_1 u = 0$. Якщо u відповідає власному значенню λ_1, то ді $\Gamma_1 u = (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m) u$., Застосувавши оператор A, до вектора $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0$ одержимо:

$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdot \dots \cdot (\lambda_1 - \lambda_m) \times\times (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k_1} u_{k_1}) = 0$

Тоді $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k_1} u_{k_1} = 0$, бо власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ різні попарно. Це ж суперечить незалежності власних векторів $u_1, u_2 \dots, u_{k_1}$ оператора A, які відповідають власному значенню λ_1 (враховуючи, що $\lambda_{1 \neq} 0$) . Отже, система $u_1, u_2 \dots, u_n$, утворює базис простору V і тому незалежна.

2.3. Канонічна λ -матриця, матричні многочлени.

Відомо, що характеристична матриця A-λE відігравала важливу роль під час встановлення умови звідності квадратної матриці A до діагонального вигду. Зауважимо, що елементами такої матриці можуть бути не тільки елементи поля P(а й многочлени відносно λ , елементами головної діагоналі є многочлени 1-го степеня $a_{ii} - \lambda$). Отже, розглянемо квадратні матриці, елементами яких будуть многочлени різних степенів змінної λ із коефіцієнтами поля P. Такі матриці називають ‘многочленними матрицями’ чи, λ-матрицями. Множину усіх многочленів одної змінної λ із коефіцієнтами поля P позначають P[λ] . Вона буде асоціативним і комутативним кільцем із 1-ею стосовно операції додавання і операції множення многочленів. Якщо $f(\lambda) \neq 0$ і $g(\lambda) \neq 0$B , то у кільці P[λ] не буде дільників нуля.

Нехай задано λ-матрицю $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$. Перетворення

таких чотирьох типів будемо називати елементарними перетвореннями:

1) множення довільного рядка матриці $A(\lambda)$ на будь-який ненульовий елемент α з P;
2) множення довільного стовпця матриці $A(\lambda)$ на довільний ненульовий елемент α з поля P;
3) додавання до довільного i-го рядочка матриці $A(\lambda)$ будь-якого її j-го рядочка $(i \neq j)$, помноженого на будь-який многочлен $\varphi(\lambda)$ із кільця $P[\lambda]$;
4) додавання до довільного i-го стовпця матриці $A(\lambda)$ будь-якого її j-го стовпця $(i \neq j)$, який попередньо домножено на будь-який многочлен $\varphi(\lambda)$ з кільця $P[\lambda]$.

Для будь-якого елементарного перетворення λ-матриці є обернене перетворення. Воно також буде елементарним.

У матриці $A(\lambda)$ з допомогою кількох елементерик перетворень можна переставити довільні два рядки чи стовпці. Для цього можна використати схему:

$$\binom{i}{j} \sim \binom{i+j}{j} \sim \binom{i+j}{-i} \sim \binom{j}{-i} \sim \binom{j}{i}.$$

Вважається, що 2-матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є еквівалентними $A(\lambda) \sim B(\lambda)$, якщо від матриці $A(\lambda)$ можливо перейти до $B(\lambda)$ здійснивши скінченне число елементарних перетворень.

Поставимо питання відшукання між усім λ-матрицями, матриць еквівалентних даній $A(\lambda)$, тобто матриць простого вигляду.

Означ.1. Канонічною λ-матрицею будемо називати A-матрицю

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e_n(\lambda) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Яка володіє такими властивостями:

1) вона є діагональна

2) довільний многочлен $e_2(\lambda)$ (i=2, …, n) націло ділиться на $e_{i-1}(\lambda)$;

3) старший коефіцієнт усякого многочлена $e_1(\lambda)$ $(i = 1, \dots, n)$ рівний 1, у випадку коли многочлен не нульовий.

Якщо серед многочленів $e_1(\lambda)$ є нулеві, то вони на головній діагоналі знаходяться на останніх місцях. У випадку, коли певні з многочленів $e_1(\lambda)$ мають нулевий степінь, то вони однакові і знаходяться на головній діагоналі на перших місцях. Одинична і нульова матриці є канонічними λ-матрицями, а також діагональні матриці, з елементами 1 і 0 на головній діагоналі, всі нулі стоять опісля всіх 1-иць.

Теорема 1. Довільна λ-матриця зводиться з допомогою елементарних перетворень до канонічного вигляду.

Доведення. Використаємо метод математичної індукції за порядком λ-матриці A(λ). При n=1, $A(\lambda) = \left(a_{11}(\lambda)\right)$, і при $a_{11}(\lambda) = 0$, матриця A(λ) є канонічною. За умови, коли $a_{11}(\lambda) \neq 0$, нам досить поділити многочлен $a_{11}(\lambda)$ на старший коефіцієнт, матимемо канонічну λ-матрицю. Нехай твердження істинне ∀ λ-матриць порядку $n-1$. Візьмемо довільну λ-матрицю $A(\lambda)$ порядку n. Якщо вона 0-ва, то канонічна, тому вважаємо, що серед елементів матриці A(λ) с ненульові. Міняючи місцями рядки і стовпці матриці A(λ), є можливість перевести один з ненулевих елементів матриці у верхній лівий куточок матриці A(λ). Отож, між λ-матрицями, які еквівалентні матриці A(λ), є матриці, у яких в лівому верхньому кутку стоїть ненулевий многочлен. Будемо розглядати всі такі матриці. Між цими матрицями знайдемо таку, у якої ненулевий многочлен, що знаходиться в її лівому верхньому кутку, має найменший степінь. Виконаємо елементарне перетворення типу 1), та отримаємо:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \dots & b_{1n}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \dots . & \dots & \dots & \dots \\ b_{ni}(\lambda) & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

тут $e_1(\lambda)$ є ненулевим многочленом з старшим коефіцієнтом 1. Доведемо, що усі елементи 1-ого рядка і 1-ого стовпця отиманої матриці націло поділяться на многочлен $e_1(\lambda)$. Інакше розглянемо для певного $j-2,\dots,n$ многочлен $b_{1j}(\lambda)$ (чи $b_{j1}(\lambda)$) після ділення на $e_1(\lambda)$ дасть ненулеву остачу $r_j(\lambda)$, її степінь буде менший за степінь $e_1(\lambda)$: $b_{1j}(\lambda) = e_1(\lambda)q_j(\lambda) + r_j(\lambda)$. Додавши до $j-$ го стовпця матриці її перший стовпець, помножений на $-q_j(\lambda)$, переставляючи перший та $j-$ й стовпчики, одержимо матрицю, що буде еквівалентною $A(\lambda)$. У її лівому кутку зверху стоятиме многочлен $r_j(\lambda)$, що має менший степінь, за степінь $e_1(\lambda)$, а це суперечить добору многочлена $e_1(\lambda)$. Звідси слідує, що усі елементи 1-ого рядка націло поділяться на многочлен $e_1(\lambda)$. Остачі $r_j(\lambda)$ будуть рівні нулю $\forall\ j-2,\dots,n$. Додавшии до j-го стовпця отриманої матриці її 1-ий стовпець, помножений на $-q_j(\lambda)$, замінимо нулями $b_{ij}(\lambda)$. Також, за цим же принципом, замінимо нулями всі інші елементи. Тоді отримаємо, що матриця $A(\lambda)$ буде еквівалентною λ-матриці $\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{2n}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$. Тоді матриця $(n-1)$ –го порядку, яка є в нижньому кутку справа отриманої матриці, з використанням елементарних перетворень зведеться до канонічного вигляду $\begin{pmatrix} c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix}$. Здійснивши аналогічні перетворення над стовпцями та рядками попередньої матриці n-го порядку матимемо, що $A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix}$. Покажемо, що $e_2(\lambda)$ націло поділиться на многочлен $e_1(\lambda)$. Якщо $e_1(\lambda) = e_1(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$, степінь $r(\lambda)$ буде меншим степеня $e_1(\lambda)$, то, додавши до 2-ого стовпця одержаної матриці перший стовпчик, помножений на $-q(\lambda)$, а опісля

додавши до 2-ого рядка перший, ми легко можемо замінити $e_2(\lambda)$ на елемент $r(\lambda)$. Переставляючи 1-ші два рядочки та 1-ші два стовпці одержаної матриці, перемістимо $r(\lambda)$ у верхній лівий куточок, а це суперечитиме вибору $e_1(\lambda)$, якщо $r(\lambda) \neq 0$. Тоді $e_2(\lambda)$ буде ділиться націло на $e_1(\lambda)$ та одержана матриця буде канонічною для $A(\lambda)$. Згідно методу математичної індукції, твердження теореми буде справедливим для $\forall$ λ-матриці.

Зауваження. Доведення наведене вище дає нам практичний спосіб перетворення λ-матриць до канонічного виду.

Лема 1. НСД (найбільший спільний дільник) $d_k(\lambda)$ усіх мінорів k-го порядку λ-матриці $A(\lambda)$ $(k = 1, \dots, n)$ не змінюється за елементарних перетвореннь матриці $A(\lambda)$.

Теорема 2. Довільна λ-матриця є еквівалентною тільки одній канонічній λ-матриці.

Дві λ-матриці є еквівалентними тоді та тільки тоді, якщо вони зводуться до одного та того самого канонічного виду.

Дві λ-матриці є еквівалентними тоді та тільки тоді, якщо ці матриці з однаковими інваріантними множниками.

Унімодулярні λ - матриці

λ-матриця $U(\lambda)$ є унімодулярною, якщо вона зводиться до одиничної матриці E за допомогою деяких елементарних перетворень. Це те ж саме, що матриця E є канонічною формою для матриці $U(\lambda)$.

λ-матриця $U(\lambda)$ буде унімодулярною тоді та тільки тоді, якщо визначник відповідної матриці не дорівнює 0, але не залежний від λ, а саме- буде ненулевим елементом поля P.

λ-матриця $U(\lambda)$ буде унімодулярною тоді та тільки тоді, якщо існує обернена λ-матриця.

Лема 4. Будь-яке елементарного перетворення в λ-матриці $A(\lambda)$

рівносильне множенню матриці справа чи зліва на певну елементарну λ-матрицю.

Теорема. Дві λ-матриці одного порядку $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ будуть еквівалентними тоді та тільки тоді, якщо існуватимуть унімодулярні матриці $U(\lambda)$ і $V(\lambda)$, і $B(\lambda) = U(\lambda) \times A(\lambda) \times V(\lambda)$.

Наслідок. λ-матриця є унімодулярною тоді та тільки тоді, якщо цю матрицю можливо подати як добуток елементарних λ-матриць.

Матричні многочлени

Матричним λ-многочленом з порядком n над полем P назвемо многочлен змінної λ, і коефіцієнтами цього многочлена будуть квадратні матриці того ж самого порядку n над полем P:

$$A_0\lambda^k + A_1\lambda^{k-1} + \ldots + A_{k-1}\lambda + A_k \quad (6)$$

Проведемо множення матриці A_i на λ^{k-i}, домножимо на λ^{k-i} усі елементи матриці A_i , додамо отримані матриці. В результаті отримаємо, що $\forall$ матричний многочлен з порядком n записується у вигляді λ-матриці порядку n. Дійсно,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda^3 - \lambda & -\lambda^3 - \lambda^2 \\ 2\lambda - 3 & \lambda^3 + \lambda \end{pmatrix}$$

λ-матрицю із порядком n можна записати як матричний λ-многочлен порядку n.

Дійсно,

$$\begin{pmatrix} \lambda^4 - 3\lambda & \lambda^2 - \lambda + 1 \\ \lambda^3 + 1 & \lambda^3 + 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 +$$
$$+ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Степенем матриці $A(\lambda)$ називається число k у випадку запису λ-матриця A(λ) у вигляді (6). Представлення -матриць як матричних многочленів дає нам можливість формувати для λ-матриць теорію подільності, проте з певними ускладненнями, які зумовлені некомутативнітю операції множення

матриць та наявністю у множині усіх квадратних матриць $n-$ го порядком дільників нуля. Тут обмежимо себе розглядом питання алгоритму ділення із остачею.

Теорема 4. Припустимо, що над полем P задано λ-матриці $n-$ го порядку $A(\lambda) = A_0\lambda_k + +A_1\lambda_k - {}_1 + \ldots + A_k - {}_1\lambda + A_k$,

$B(\lambda) = B_0\lambda^l + B_1\lambda^l - {}_1 + \ldots + B_l - {}_1\lambda + +B_l$, і матриця B_0 є невиродженою. Тоді над P існуватимуть, до того ж єдині λ-матриці $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ такого ж порядку n, що $A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + +R_1(\lambda), A(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda),$ і якщо $\forall$ із остач $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ не рівна нулю, то степінь її буде менший від степеня многочлена $B(\lambda)$.

Доведення. Почнемо із процесу знаходження неповних остач та часток. При k<l, маємо $Q_1(\lambda) = Q_2(\lambda) = 0, R_1(\lambda) = R_2(\lambda) = A(\lambda)$. При k≥$l$, утворюються такі послідовні різниці:

$$P_1(\lambda) = A(\lambda) - A_0\, B_0 - {}_1\lambda^k - {}_1 B(\lambda) = C_1\lambda^{m1} + \cdots,$$

$$P_2(\lambda) = P_1(\lambda) - C_1 B_0 - {}_1\lambda^{m1} - {}_l\, B(\lambda) = C_1\lambda^{m2} + \cdots,$$

……..

$$P_s + {}_1(\lambda) = P_s(\lambda) - C_s B_0 - {}_1\lambda^{m_s} - {}_l\, B(\lambda) = C_s + {}_1\lambda^{m_s} + 1 + \cdots,$$

тутm_s≥l, а m_{s+1}<l. Додавши рівності почленно і припустивши, що $R_2(\lambda) = P_s + {}_1(\lambda)$

$$Q_2(\lambda) = A_0 B_0 - {}_1\lambda^k - {}_l + C_1 B_0 - {}_1\lambda^{m1} - {}_l + \cdots + C_s B_0 - {}_1\lambda^{m_s} - {}_l,$$

маємо: $A(\lambda) = B(\lambda)Q_2(\lambda) + +R_2(\lambda)$. Аналогічно доведемо існування многочленів $Q_1(\lambda)$ і $R_1(\lambda)$, у утворених різницях від'ємники запишемо у виді: $B(\lambda)B_0 - {}_1C_i\lambda^{m_i} - {}_l$. Покажемо єдиність матриць. Дійсно, при $A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda) = B(\lambda)\ \overline{Q_1(\lambda)} + \overline{R_1(\lambda)}$, матриці $R_1(\lambda)$ і $\overline{R_1(\lambda)}$ нулеві, чи їхні степені менші за степені матриці $B(\lambda)$, отже $B(\lambda)\big(Q_1(\lambda) - \overline{Q_1(\lambda)}\big) = \overline{R_1(\lambda)} - R_1(\lambda)$. Степінь справа менший I, степінь

зліва, при $Q_1(\lambda) \neq \overline{Q_1(\lambda)}$, більше або рівне *1*, бо матриця B_o є не виродженою. Одержимо суперечність яка показує нам, що $Q_1(\lambda) = \overline{Q_1(\lambda)}$, а, отже, і $R_1(\lambda) = \overline{R_1(\lambda)}$. Єдиність матриць $Q_2(\lambda)$ та $R_2(\lambda)$ доводимо аналогічно.

Теорема. Якщо λ-матриці 1-ого степеня $A\lambda + B$ та $C\lambda + D$ із невиродженими матрицями A та C є еквівалентними, тоді знайдуться такі невироджені числові матриці P і Q, що $A\lambda + B = P(C\lambda + D)Q$.

Доведення. Справедливо, що $C\lambda + D \sim A\lambda + B$, тоді знайдуться такі унімодулярні матриці $U(\lambda)$ і $V(\lambda)$, що справедливим буде

$$A\lambda + B = U(\lambda)(C\lambda + D)V(\lambda). \qquad (7)$$

За наведеною теоремою вище, існують матриці $Q_2(\lambda), Q_2(\lambda), R_1, R_2$, що виконуватиметься

$U(\lambda) = (A\lambda + B)Q_1(\lambda) + R_1, V(\lambda) = Q_2(\lambda)(A\lambda + B) + R_2,$ і матриці R_1, і R_2 будуть числовими, бо їх степені менші степенів матриці $A\lambda + B$, а саме одиниці. Доведемо, що $A\lambda + B = R_1\ (C\lambda + D)R_2$. Помноживши обидві частини рівності на $U - 1(\lambda)$ і підставивши замість $V(\lambda)$ відповідний вираз, після певних перетворень маємо: $[U - 1(\lambda) - (C\lambda + D)Q_2\ (\lambda)](A\lambda + B) = (C\lambda + D)R_2$. Порівнявши степені лівої та правої частин рівності, отримаємо, що вираз в квадратних дужках має бути рівним певній числовій матриці T, а саме $T = U - 1(\lambda) - (C\lambda + D)Q_2(\lambda), T(A\lambda + B) = (C\lambda + D)R_2$. Тоді

$$E = U(\lambda)U - 1(\lambda) = U(\lambda)[(C\lambda + D)Q_2(\lambda) + T] = U(\lambda)(C\lambda + D)Q_2(\lambda) + U(\lambda)T = (A\lambda + B)V - 1(\lambda)Q_2(\lambda) + [(A\lambda + B)Q_1(\lambda) + R_1]T$$

,

$E = (A\lambda + B)[V - 1(\lambda)Q_2(\lambda) + Q_1(\lambda)T] + R_1T$. Вираз справа матиме нулевий степінь у випадку, якщо вираз в квадратних дужках рівний 0, а, отже, $E = R_1T, T = R_1 - 1$. Тоді,

$R_1 - 1(A\lambda + B) = (C\lambda + D)R_2, (A\lambda + B) = R_1(C\lambda + D)R_2$ і матриця R_1 є невиродженою. Аналогічно матриця R_2 також є невиродженою. Тому за

матриці P та Q беремо матриці R_1 та R_2.

Наслідок. Дві числові квадратні матриці A та B над P є подібними тоді та тільки тоді, якщо їхні відповідні матриці $A - \lambda E$ i $B - \lambda E$ (характеристичні) є еквівалентними.

Лема 5. Якщо $V(\lambda) = V_0\lambda^k + V_1\lambda^k - 1 + \cdots + V_k - 1\lambda + V_k$ $(V_0 \neq 0)$ і

$$V(\lambda) = (\lambda E - B)Q_1(\lambda) + R_1 \quad V(\lambda) = Q_2(\lambda)(\lambda E - B) + R_2, \quad (8)$$

то

$$R_1 = B^k V_0 + B^k - 1 V_1 + \cdots + BV_k - 1 + V_k, \qquad R_2 = V_0 B^k + V_1 B^k - 1 + \\ + \cdots + V_k - 1 B + V_k \qquad (9)$$

Доведення здійснимо безпосередньо перевіривши рівності (8), коли у них замість R_1 і R_2, підставимо вирази (9) і візьмемо

$$Q_1(\lambda) = V_0\lambda^k - 1 + +(BV_0 + V_1)\lambda^k - 2 + (B(BV_0 + V_1) + V_2)\lambda^k - 3 + \cdots \\ + (B^k - 1 V_0 + B^k - 2 V_1 + \cdots + V_k - 1),$$

$$Q_2(\lambda) = V_0\lambda^k - 1 + (V_0 B + V_1)\lambda^k - 2 + \big((V_0 B + V_1)B + V_2\big)\lambda^k - 3 + \cdots \\ + (V_0 B^k - 1 + V_1 B^k - 2 + \cdots + V_k - 1.$$

2.4. Жорданова клітина, жорданова матриця, теорема Гамільтона-Келі.

Жорданова нормальна форма матриці.

Розглянемо спеціальний тип числових матриць, що є нормальною формою широкого класу матриць. Квадратна матриця $k - \text{ого порядку}$, яка представлена:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_0 \end{pmatrix},$$ на головній діагоналі знаходиться один і той самий елемент λ_0, верхня паралель якої, сама ближча головній діагоналі, складається із одиниць, інші елементи рівні нулю називається Жордановою клітиною із порядком елемента $\lambda_0 \epsilon$P. Усі матриці

(λ_0),$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ будуть жордановими клітинами відповідно першого, другого і третього порядків.

Означення. Квадратна матриця n-го порядку називається жордановою матрицею порядку n, якщо вона має вид: $J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_S}(\lambda_S) \end{pmatrix}$, і на головній діагоналі знаходяться жорданові клітини $J_{k_1}(\lambda_1)$, $J_{k_2}(\lambda_2)$, …, $J_{k_s}(\lambda_s)$ певних порядків, допускаються різні, і які стосуються певних елементів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ із поля P, допускається рівність деяких із елементів, інші місця у J заповнені нулями. Частковим випадком жорданової матриці є діагональна матриця: до них належать ті жорданові матриці, жорданові клітини яких мають порядок 1.

Розглянемо канонічний вид характеристичної матриці одної жорданової клітинки:

$$J_k(\lambda_0) - \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Врахуємо, що старший коефіцієнт многочлена $d_{\underline{k}}(\lambda)$ має бути рівним одиниці, і обчислимо визначник: $d_{\underline{k}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\underline{k}}$. Серед усіх мінорів $(\underline{k} - 1)$-го порядку нашої матриці знаходиться мінор, рівний одиниці, його отримуємо викреслюванням у характеристичній матриці 1-ого стовпця і останнього рядка, отримаємо $d_{\underline{k}-1}(\lambda) = 1$. Тоді очевидно, що канонічною матрицею для $J_k(\lambda_0) - \lambda E$ стане λ-матриця: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda - \lambda_0)^{\underline{k}} \end{pmatrix}$.

Твердження (лема). Якщо многочлени $\varphi_1(\lambda)$ і $\varphi_2(\lambda)$ із кільця $P[\lambda]$ є

взаємно простими, то $\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix}$.

Доведення. Дійсно, многочлени $\varphi_1(\lambda)$ і $\varphi_2(\lambda)$ є взаємно простими, і в у кільці $P[\lambda]$ будуть існувати многочлени $v_1(\lambda)$ і $v_2(\lambda)$, що $\varphi_1(\lambda)v_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)v_2(\lambda) = 1$.Виконавши елементарні перетворення отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)v_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)v_2(\lambda) \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 1 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(\lambda) \\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

Розглянемо характеристичну матрицю $J - \lambda\mathrm{E}$ жорданової матриці J-го порядку: $J - \lambda\mathrm{E} = \begin{pmatrix} J_1 - \lambda\mathrm{E}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 - \lambda\mathrm{E}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_S - \lambda\mathrm{E}_S \end{pmatrix}$ (де $\mathrm{E}_i, i = 1, \dots,$ S- одинична матриця такого ж порядку, що і жорданова клітинка J_i). Припустимо, що елементи $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ із поля P, $t \leq S$, різні значеннями, до яких належать жорданові клітинки матриці J. До елемента λ_i відносемо q_i жорданових клітинок, і нехай порядки даних клітинок, які розміщено у порядку спадання, будуть $\underline{k}_{i_1} \geq \underline{k}_{i_2} \geq \dots \geq \underline{k}_{i_{q_i}}$. Застосувавши елементарні перетворення до стовпчиків та рядків матриці : $J - \lambda\mathrm{E}$, що проходять через матрицю$J_i - \lambda\mathrm{E}_i$ жорданової клітинки J_i, не будемо перетворювати, звичайно, характеристичні матриці інших жорданових клітинок. Отже, в матриці $J - \lambda\mathrm{E}$ за допомогою елементарних перетворень легко можна замінити характеристичну матрицю $J_i - \lambda\mathrm{E}_i$довільної жорданової клітини J_i,на канонічний вигляд. Матриця $J - \lambda\mathrm{E}$ є еквівалентною діагональній матриці. Вздовж головної діагоналі якої, стоять наступні многочлени, які відповідатимуть усім жордановим клітинкам матриці J:

$$(\lambda - \lambda_1)^{\underline{k}_{11}}, (\lambda - \lambda_1)^{\underline{k}_{12}}, \dots, (\lambda - \lambda_1)^{\underline{k}_{tq1}},$$

$$(\lambda-\lambda_2)^{\underline{k}_{21}},(\lambda-\lambda_2)^{\underline{k}_{22}},\dots,(\lambda-\lambda_2)^{\underline{k}_{2q2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\lambda-\lambda_t)^{\underline{k}_{t1}},(\lambda-\lambda_t)^{\underline{k}_{t2}},\dots,(\lambda-\lambda_t)^{\underline{k}_{tq1}},$$

У $\forall$ діагональній λ- матриці елементи, що знаходяться на головній діагоналі, можна переставляти з допомогою перестановок рядочків і стовпців матриці. Припустимо, що q - найбільше з чисел $q_i(i=1,\dots,t)$. Позначимо $e_{n-J+1}(\lambda)$ добуток многочленів, які знаходяться в J- ому стовпчику таблиці $(10)(J=1,\dots,q)$, а саме

$$e_{n-J+1}(\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i)^{\underline{k}_{iJ}}$$

Всі елементи $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t$ є різними, а отже многочлени J-го стовпчика таблиці є попарно взаємно простими. Тому, вони елементарними перетвореннями можуть бути змінені у одержаній діагональній матриці добутком $e_{n-J+1}(\lambda)$ і певною кількістю одиниць. Здійснивши ці дії для усіх J=1,…, q, матимемо:

$$J-\lambda E\sim\begin{matrix}1&0&&0&0&0&0\\ \ddots&\ddots&&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots\\ 0&0&1&0&&\ddots&0\\ 0&\ddots&0&e_{n-q+1}(\lambda)&0&&0\\ \ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&&\ddots\\ 0&0&0&0&0&&e_n(\lambda)\end{matrix}.$$

Отримали канонічний вид матриці $J-\lambda E$. Дійсно, старші коефіцієнти многочленів $e_{n-J+1}(\lambda)$ дорівнюють 1-ці та кожний із цих многочленів ділиться націло на попередній, бо $\underline{k}_{i1}\geq\underline{k}_{i2}\geq\dots\geq\underline{k}_{ig_i}(i=1,\dots,t)$. Для жорданової матриці матимемо:

$$J = \begin{pmatrix} J_3(2) & & & & \\ & J_1(2) & & 0 & \\ & 0 & J_2(5) & & \\ & & & J_2(5) & \\ & & & & J_1(2) \end{pmatrix}$$

Таблиця многочленів матиме вигляд:

$$(\lambda-2)^3, \lambda-2, \lambda-2$$

$(\lambda-5),^2, (\lambda-5)^2$

Отже, інваріантними множниками матриці $J-\lambda E$ очевидно, є многочлени $e_9(\lambda) = (\lambda-2)\times, e_8(\lambda) = (\lambda-2)\times(\lambda-5)^2, e_7(\lambda) = (\lambda-2), e_6(\lambda) = \cdots = e_1(\lambda) = 1$

Теорема 6. Подібними дві жорданові матриці є тоді та тільки тоді, якщо вони складаються із одних та тих жорданових клітинок, відрізняючись між собою, можливо, тільки порядком їхнього розміщення по головній діагоналі.

Наслідок. Подібними дві діагональні матриці є тоді та тільки тоді, якщо на їх головних діагоналях знаходяться однакові елементи, відрізняючись, тільки порядком їхнього розміщення.

Теорема 7. Квадратна матриця A над полем P зведеться у полі P до жорданової нормальної форми тоді та тільки тоді, коли усі характеристичні корені матриці A знаходяться у полі P.

***Наслідок* 1.** Будь-яку квадратну матрицю із комплексними елементами можна звести у полі C до жорданової форми.

***Наслідок* 2.** Квадратичну матрицю A порядку n над полем P можна звести у полі P до діагонального вигляду тоді та тільки тоді, коли усі корені останнього інваріантного множника $e_n(\lambda)$ її характеристичної матриці знаходяться у полі P, і між ними немає кратних.

Доведення. Дійсно, можливість звідності матриці A до діагонального виду є рівносильною можливістю звідності A до такої жорданової нормальної форми, з жордановими клітинами порядку 1. Це є рівносильним

тому, що у таблиці многочленів показники k_{ij} дорівнюють 1Усі інваріантні множники $A-\lambda E$ будуть ділянками многочлена $e_n(\lambda)$. Тоді остання умова аналогічна тому, що усі корені многочлена $e_n(\lambda)$ знаходяться у полі P, і між ними нема кратних.

Припустимо, що A- є лінійним оператором з рангом r, і заданий у n-вимірному просторі V над полем $P, N = KerA$- ядро оператора, $AV = ImA$-образ. Переріз підпросторів позначимо M, $M = N \cap AV$. Зафіксуємо у M певний базис $x_1, x_2, \dots, x_m$ та доповнимо цей базис до базису $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_k$ ядра N та до базису $x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_r$ підпростору AV. Ранг A рівний r, підпростір AV має розмірність r, а підпростір N – має розмірність $n-r$, $k=n-r$. Через $y_1, y_2, \dots, y_m$ позначимо прообрази під час дії оператора A векторів $x_1, x_2, \dots, x_m$, а через $z_{m+1}, \dots, z_r$ – прообразів векторів $x'_{m+1}, \dots, x'_r$, себто $Ay_i = x_i (i=1,\dots,m)$, $Az_i = x'_i$ і $(i=m+1,\dots,)$. Зобразити схематично це можна так:

$$\begin{array}{ccl} & & x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_k \text{ – базис } N \\ x_1, x_2, \dots, x_m & & \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow & & x_{m+1}, x'_{m+2}, \dots, x'_r \text{ – базис } AV \\ y_1, y_2, \dots, y_m & & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ & & z_{m+1}, z_{m+2}, \dots, z_r \end{array}$$

Лема 7. Вектори $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_r$ складають базис простору V.

Доведення. Векторів у системі є $k+r=(n-r)+r=n$, отже нам потрібно показати, що вони є лінійно незалежними. Нехай деяка їхня лінійна комбінація рівна нуль- вектору:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m + \beta_{m+1} z_{m+1} + \dots + \beta_r z_r = 0, (13)$$

Застосовавши до обох частин даної рівності оператор A, отримаємо:

$$\alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_k Ax_k + \beta_1 Ay_1 + \dots + \beta_m Ay_m + \beta_{m+1} Az_{m+1} + \dots + \beta_r Az_r = 0.$$

Оскільки $Ax_i = 0$ при $i = 1, \dots, k$, $Ay_i = x_i$ при $i = 1, \dots, m$, $Az_i = x_i$ при

$i = m+1, \dots, r$, то $\beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m + \beta_{m+1} x'_{m+1}. + \beta_r x'_r$.

Вектори $x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_r$ є лінійно незалежними, бо вони утворюють базис підпростору AV а отже $\beta_i = 0$ для $\forall i = 1, \dots, r$. Тоді $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$ і $\alpha_1 = 0$ для $\forall\ i = 1, \dots, k$, бо вектори $x_1, \dots, x_k$ створюють базис підпростору N. Звідси випливає, що система векторів є лінійно-незалежною, бо вона є базисом простору V.

Над полем C комплексних чисел розглянемо певний лінійний оператор A n–вимірного векторного простору V. Матриця A оператора A зведеться в полі C до нормальної жорданової форми. Побудуємо базис простору V, у якому матриця оператора A є жордановою матрицею. Такий базис будемо називати жордановим базисом оператора A. Розглянемо випадок, коли у оператора A є тільки одне єдине власне значення λ_0. Тобто характеристичний многочлен має вид $(\lambda - \lambda_0)^n$. У випадку, коли x-довільний власний вектор оператора A, то $Ax = \lambda_0 x$ і $(A - \lambda_0 E)x = Ax - \lambda_0 Ex = \lambda_0 x - \lambda_0 x = 0$. Нехай A_{λ_0} є лінійним оператором $A - \lambda_0 E$. Тоді $A_{\lambda_0}\mathrm{x} = 0$ для $\forall$ власного вектора x оператора A. Якщо $A_{\lambda_0}\,\mathrm{x} = 0\ (\mathrm{X} \neq 0)$, то $Ax = \lambda_0 x$, тобто x- власний вектор оператора A. Нехай V_1 образ оператора A_{λ_0}, а саме $V_1 = A_{\lambda_0}\ V = ImA_{\lambda_0}$, а через N_1 позначимо ядро оператора A_{λ_0}, а саме $N_1 = KerA_{\lambda_0}$. Підпростір N_1 містить усі власні вектори оператора A і нуль- вектора. Оскільки $N_1 > 0$, то $dimV_1 < dimV = n$. Підпростір V_1 є інваріантним стосовно оператора A, бо $AV_1 = A(A_{\lambda_0}V) = A_{\lambda_0}(AV) \subseteq A_{\lambda_0}$ $V = V_1$ $(A_{\lambda_0}A = (A - \lambda_0 E)A = A^2 - \lambda_0 EA = A^2 - A\lambda_0 E = A(A - \lambda_0 E) = AA_{\lambda_0})$.

Оператор A є лінійним оператором підпростору V_1, $V_1 \neq \{0\}$, в підпросторі V_1 існуватиме власний вектор оператора A, який належить власному значенню λ_0, бо характеристичний многочлен оператора A, який розглядаємо як оператор підпростору V_1, матиме вияд $(\lambda - \lambda_0)^{n_1}$, тут

$n_1 = dimV_1$. Підпростір V_1 є інваріантним також стосовно оператора A_{λ_0}, тому A_{λ_0} розглядатимемо як лінійний оператор підпростору V_1. Якщо x-є власним вектором оператора A із підпростору V_1, то, $A_{\lambda_0}x = 0$, а тому ядро N_2 оператора A_{λ_0} в підпросторі V_1 є ненульовим. Тоді $N_2 = N_1 \cap V_1$. $dimN_2 > 0$, отже розмірність образу V_2 оператора A_{λ_0} у підпросторі V_1 ($V_2 = A_{\lambda_0}V_1 = A_{\lambda_0}^2 V$) менша за $dimV_1$.

У випадку, коли підпростори V_p і N_p уже визначені, позначимо через N_{p+1} ядро, через V_p– позначимо образ оператора A_{λ_0} у підпросторі V_p. У випадку $V_p \neq \{0\}$, то упідпросторі V_p, є власні вектори оператора A , бо характеристичний многочлен оператора A, який розглядаємо як оператор підпростору V_p матиме вид $(\lambda - \lambda_0)^{n_p}$, де $n_p = dimV_p$. При$x \in V_p$- є одним із власних векторів оператора A, $A_{\lambda_0}x = 0$, а саме $x \in N_{p+1}$, а тому $dimN_{p+1} > 0$, звідси, $dimV_{p+1} < dimV_p$. Тому матимемо, що $N_{p+1} = N_p \cap V_p$. Отже, ми отримаємо строго спадний ланцюжок підпросторів

$$V \supset V_1 = A_{\lambda_0} \; V \supset V_2 = A_{\lambda_0}^2 \; V \supset V_3 = A_{\lambda_0}^3 \; V \supset \cdots.$$

Цей ланцюжок має закінчитися нулевим підпростором, бо $dimV_{i+1} < dimV_i$. Припустимо, наприклад, $V_{k+1} = A_{\lambda_0}^{k+1} \; V = \{0\}$, проте $V_k = A_{\lambda_0}^k \; V \neq \{0\}$. Тоді $N_{k+1} = V_k$ і, врахувавши, що $N_{k+1} = N_k \cap V_k$ $V_k \subseteq N_k$. Виберемо в підпросторі V_k певний базис $x_1, \dots, x_{p_1}$ та доповнимо його до базису $x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, x_{p_2}$ підпростору N_k. Припустимо, що $y_1, \dots, y_{p_1}$- прообрази векторів $x_1, \dots, x_{p_1}$ після дії оператора A_{λ_0}, а саме $A_{\lambda_0}y_i = x_i (i = 1, \dots, p_1)$. Вектори $x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, x_{p_2}, y_1, \dots, y_{p_1}$ утворять базис підпростору V_{k-1} (розмірності $p_1 + p_2$).

Побудуємо базис у підпросторі V_{k-2}. В підпросторі $N_k = N_{k-1} \cap V_{k-1}$ уже побудовано базис $x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}$. Будемо доповнювати

його до базису $x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}, x_{p_2+1}, \dots, x_{p_3}$ підпростору N_{k-1}. Вектори $x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, x_{p_2}, y_1, \dots, y_{p_1}$ утворюватимуть базис підпростору V_{k-1}. Через $y_{p_1+1}, \dots, y_{p_2}$ позначимо прообрази після дії оператора A_{λ_0} векторів $x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}$ та через $z_1, \dots, z_{p_1}$-прообразів векторів $y_1, \dots, y_{p_1}$. Схематично зобразимо це так:

$$
\begin{array}{lll}
 & & x_{p_2+1}, \dots, x_{p_3} \text{ – базис } N_{k-1} \\
x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2} & \nearrow & \\
\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow & & y_1, \dots, y_{p_1} \text{ – базис } V_{k-1} \\
y_1, \dots, y_{p_1}, y_{p_1+1}, \dots, y_{p_2} & & \uparrow \quad \uparrow \\
z_1, \dots, z_{p_1} & &
\end{array}
$$

Вектори

$x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}, x_{p_2+1}, \dots, x_{p_3}, y_1, \dots,$
$y_{p_1}, y_{p_1+1}, \dots, y_{p_2}, z_1, \dots, z_{p_1}$

утворюють базис підпростору V_{k-2} (розмірністю $p_1 + p_2 + p_3$). Тоді $A_{\lambda_0} x_i = 0$ при $i = 1, \dots, p_3$, $A_{\lambda_0} y_i = x_i$ для $i = 1, \dots, p_2$ $A_{\lambda_0} z_i = y_i$ при $i = 1, \dots, p_1$.

Побудову продовжуватимемо доти, поки не отримаємо базис усього простору V. Розібємо на окремі групи вектори отриманого базису простору V. Розглянемо вектори $x_1, \dots, x_{p_1}$, які утворюють базис підпростору V_k. Вони є образами дії оператора A_{λ_0} векторів $y_1, \dots, y_{p_1}$ із підпростору V_{k-1}. Вони в свою чергу будуть образами векторів $z_1, \dots, z_{p_1}$ із підпростору V_{k-2} та т.д. У випадку фіксованого і отримуємо послідовність $k+1$ векторів x_i, y_i, $z_i, \dots, w_i$ яку називають жордановим ланцюжком векторів довжини $k+1$. Отже з побудованого базису простору V виділимо p_1 жорданових ланцюжків довжини $k+1$.

Розглянемо вектори $x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}$ із базису підпростору V_{k-1}, які є образами дії оператора A_{λ_0} векторів $y_{p_1+1}, \dots, y_{p_2}$ із підпростору V_{k-2}. Образи в свою чергу, є образами векторів $z_{p_1+1}, \dots, z_{p_2}$ із підпростору V_{k-3} і т.д. За фіксованого j отримуємо жордановий ланцюжок векторів x_i, y_i, $z_i, \dots, v_i$ довжини k. Таких жорданових ланцюжків довжиною k у побудованому базисі простору V стане $p_2 - p_1$. Виділимо у побудованому базисі простору V $p_3 - p_2$ жорданових ланцюгів довжини $k-1$, $p_4 - p_3$ жорданових ланцюжків довжиною $k-2$ та т. д. Тоді $p_{k+1} - p_k$ жорданових ланцюжків довжиною 1. Із побудови, $p_i = dimN_{k-i+2}$ то $p_{k+1} = dimN_1 = dimKerA_{\lambda_0} = n - r$, де r-ранг оператора A_{λ_0}. Тоді, кількість жорданових ланцюжків буде рівна

$$p_1 + (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \dots + (p_{k+1} - p_k) = p_{k+1} = n - r$$

Побудову базису простору V можна схематично зобразити у вигляді:

$$\begin{array}{ll}
V & \underline{|w_i|v_i|u_i| \dots |z_i|y_i|x_i|} \\
V_1 = A_{\lambda_0}V & \underline{|v_i|u_i|t_i| \dots |y_i|x_i|}\ i = p_k + 1, \dots, p_{k+1} = n - r \\
V_2 = A_{\lambda_0}^2 V & \underline{|u_i|t_i|s_i| \dots |x_i|}\ \ i = p_{k-1} + 1, \dots, p_k \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ i = p_{k-2} + 1, \dots, p_{k-1} \\
V_{k-2} = A_{\lambda_0}^{k-2}V & \underline{|z_i|y_i|x_i|} \\
V_{k-1} = A_{\lambda_0}^{k-1}V & \underline{|y_i|x_i|}\ i = p_2 + 1, \dots, p_3 \\
V_k = A_{\lambda_0}^{k}V & \underline{|x_i|}\ i = p_1 + 1, \dots, p_2 \\
 & i = 1, \dots, p_1
\end{array}$$

Якщо розглянемо підпростір, який утворений векторами певного жорданового ланцюжка $w, v, u, \dots, z, y, x$, то для лінійного оператора $A_{\lambda_0} = A - \lambda_0 E$ матимемо: $(A - \lambda_0 E)w = v$, $(A - \lambda_0 E)v = u$, $\dots$, $(A - \lambda_0 E)z = y$, $(A - \lambda_0 E)y = x$, $(A - \lambda_0 E)x = 0$, *або* $Aw = \lambda_0 w + v$, $Av = \lambda_0 + u$, …

$Az = \lambda_0 z + y$, $Ay = \lambda_0 y + x$, $Ax = \lambda_0 x$. *Тоді матрицею оператора A у цьому підпросторі відносно базису w, v, u, … , z, y, x, буде матриця*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Припустимо, що A певний лінійний оператор, який задано в n-вимірному векторному просторі V над полем C комплексних чисел, а λ_0 - одне із його власних значень, $e_1, \dots, e_k$ – є базисом ядра N_1 оператора $A_e = A - \lambda_0 E$. Вектори $e_1, \dots, e_k$ будуть власними векторами оператора A, які належатимемуть власному значенню λ_0 ,тобто $\mathrm{Ae}_1 = \lambda_0 \mathrm{e}_1, \mathrm{Ae}_2 = \lambda_0 \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{Ae}_k = \lambda_0 \mathrm{e}_k$. Доповнимо цю систему векторів до базису $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ усього простору V. Матриця A оператора A в цьому базисі матиме вигляд:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+11} & a_{k+12} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Розкладаючи визначник $|A - \lambda E|$за елементами перших k рядків, для характеристичного многочлена $\varphi(\lambda)$ оператора A отримаємо вираз:

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = (\lambda_0 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} - \lambda & \dots & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nk+1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Розглянемо образ $V_1 = A_{\lambda\varphi}$ V оператора $A_{\lambda\varphi}$.Оскільки ядро N_1 оператора A_{λ_0} має розмірність k, то ромірність підпростору V_1 дорівнює $\mathrm{n} - \mathrm{k}$. За базис підпростору V Візьмемо $\forall$ $n - k$ лінійно незалежних векторів з множини $\{A_{\lambda 0}\mathrm{e}_1, \dots, A_{\lambda 0} e_k, A_{\lambda 0} e_{k+1}, \dots, A_{\lambda 0} e_n\}$, яка складається із образів базисних векторів простору V. Оскільки перші k рядків матриці $A - \lambda_0 E$ нулеві, то останні $\mathrm{n} - \mathrm{k}$ рядків цієї матриці утворюють базис підпростору V_1 . Позначимо ці вектори $q_{k+1}, \dots, q_n$, тобто $q_i = A_{\lambda 0} e_i$ $(i = k + 1, \dots, n)$.

Підпростір V_1 є інваріантним стосовно оператора A, тому A розглядають як лінійний оператор підпростору V_1. Знайдемо матрицю A_1 оператора A в базисі $q_{k+1}, \dots, q_n$ підпростору V_1. Рядками матриці A_1, з координатні рядки векторів $Aq_{k+1}, \dots, Aq_n$. Але

$Aq_0 = A(A_{\lambda 0}e_i) = A_{\lambda 0}(Ae_i) = A_{\lambda 0}(a_{i1}e_1 + \dots + (a_{in}e_n) = (a_{ik+1}q_{k+1} + \dots + a_{in}$ $(i = k+1, \dots, n)$,

оскільки $A_{\lambda 0}e_i = 0$ для $i = 1, \dots, k$ і $A_{\lambda 0}e_i = q_i$ для

$i = k+1, \dots, n$. Отже, $A_1 \begin{pmatrix} a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{nk+1} & \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Тоді характеристичний многочлен $\psi(\lambda)$ оператора A у просторі V_1 дорівнює $\psi(\lambda) = |A_1 - \lambda E| = \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda_0 - \lambda)^k}$. Многочлен $\psi(\lambda)$ це може мати в полі C корінь λ_0, проте кратність його буде на k одиниць меншою, за кратність кореня λ_0 для характеристичного многочлена $\varphi(\lambda)$ оператора A у просторі V.

Мінімальний многочлен матриці та її лінійного оператора

Нехай задано квадратну матрицю A порядку n над полем P. Якщо $f(\lambda) == a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k$ довільний многочлен із кільця $P[\lambda]$, то матриця $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \dots + a_{k-1}A + a_kE$, де E – є одиничною матрицею того ж порядку, як і A , зветься значенням многочлена $f(\lambda)$ коли $\lambda = A$. При $f(A) = O$, де O – нульова матриця, A звуть матричним коренем многочлена $f(\lambda)$, многочлен $f(\lambda)$анулюється матрицею A.

Теорема Усяка квадратна матриця над полем P буде коренем певного ненулевого многочлена із кільця $P[\lambda]$.

Теорема 9. Довільний многочлен, $f(\lambda)$ який анулюється матрицею A, націло ділиться на мінімальний многочлен $m(\lambda)$ цієї матриці.

Доведення. Дійсно, коли $f(\lambda)$ ділиться на $m(\lambda)$ із ненулевою остачею: $f(\lambda) = m(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$, де степінь $r(\lambda)$ менший від степеня $m(\lambda)$, то

$f(A) = m(A)q(A) + r(A)$. Оскільки $f(A) = m(A) = O$, то $r(A) = O$, що суперечить умові того, що $m(\lambda)$ – мінімальний многочлен матриці A. Тоді, $f(\lambda)$ націло ділиться на $m(\lambda)$.

***Теорема* Гамільтона-Келі** Усяка квадратна матриця над полем P буде коренем свого характеристичного многочлена.

Доведення. Нехай $B(\lambda)$ приєднана для матриці $A - \lambda E$. Її елементами будуть многочлени від λ не вище $(n-1)$-го степеня, бо вони дорівнюють, із точністю до знаків плюс-мінус, мінорам $(n-1)$-го порядку матриці $A - \lambda E$, елементи останньої містять λ в степені, не вищому, за одиницю. Тоді матрицю $B(\lambda)$ подамо у виді матричного λ-многочлена $B(\lambda) = B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n$, де B_0 – числові матриці над полем P. Характеристичний многочлен матриці A запишемо у вигляді: $f(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Будемо мати: $B(\lambda)(A - \lambda E) = |A - \lambda E| \times E$, або, розписавши,

$$(B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n)(A - \lambda E) = ((-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)E$$

Прирівнюючи матричні коефіцієнти при однакових степенях λ , отримаємо:

$$B_1A - B_2 = a_1E$$

$$B_2A - B_3 = a_2E$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_{n-1}A - B_n = a_{n-1}E$$

$$B_nA = a_nE.$$

Домноживши справа першу рівність на A^n, а другу домноживши на A^{n-1} і т. д., $(n-1)$-шу на A та додаючи ці рівності почленно, зліва отримаємо нулеву матрицю, а справа отримуємо вираз, який є значенням характеристичного многочлена $f(\lambda)$ матриці A при $\lambda = A$, тобто

$$f(\lambda) = (-1)^nA^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE = O.$$

Тоді, матриця A буде коренем свого характеристичного многочлена.

Мінімальний многочлен матриці A буде дільником її ж характеристичного многочлена.

Теорема 11. Многочлен $f(\lambda)$ одночасно анулюється чи не анулюється матрицями A та B якщо матриці A та B подібні.

Доведення. Дійсно, якщо $B = C^{-1}AC,\ f(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k$ та $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \cdots + a_{k-1}A + a_kE = O$, звідси $C^{-1}f(A)C = C^{-1}(a_0A^k + a_1A^{k-1} + \cdots + a_{k-1}A + a_kE)C = a_0(C^{-1}AC)^k + a_1(C^{-1}AC)^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(C^{-1}AC) + a_kE = a_0B^k + a_1B^{k-1} + \cdots + a_{k-1}B + a_kE = O$, тобто $f(B) = O$. Якщо ж $f(B) = O$, то, врахувавши, що $A = (C^{-1})^{-1}BC^{-1}$, $f(A) = (C^{-1})^{-1}f(B)C^{-1} = O$.

У подібних матриць один та той самий мінімальний многочлен.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРІВ ТА ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

3.1. Розв'язування задач з використанням теорії векторів.

У школі, зокрема, в курсі шкільної геометрії розглядають вектори як направлені відрізки. Для цих векторів означають операцію додавання векторів та операцію множення векторів на скаляри з поля дійсних чисел. На ці операції покладають вимогу виконання певних властивостей, які аналогічні властивостям додавання та множення чисел. Усі вектори площини чи простору утворюють векторний простір над полем R. Абстрагувавшись від геометричної природи векторів, зберігши основні властивості операції додавання векторів та операції множення цих векторів на скаляри, отримаємо поняття абстрактних векторних просторів. Наведемо приклади типових задач на застосування теорії векторних просторів.

Завдання 1. Дано вектори $a_1 = (1,1,-1)$, $a_2 = (1,2,1)$, $a_3 = (3,2,1)$. Чи утворюють вони базис у 3-вимірному арифметичному просторі V_3.

Розв'язання. Спосіб1. Доведемо, що, вектори a_1, a_2, a_3 лінійно незалежні. Складемо із компонент векторів матрицю , визначимо її ранг. Для цього зведемо її з використанням елементарних перетворень до ступінчастого вигляду: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Бачимо, що ранг матриці $r = 3$, тоді вектори a_1, a_2, a_3 будуть лінійно незалежні. Це означає, що у тривимірному арифметичному просторі V_3, вони утворюватимуть базис($\forall$ три лінійно незалежні вектори утворюватимуть базис).

Спосіб2 .Скористаємось означенням базису векторного простору. А тому перевіримо вектори на лінійну незалежність. Нехай лінійна комбінація

цих векторів рівна нульовому вектору: $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3=0$. Знайдемо значення коефіцієнтів за яких це можливо. Підставимо компоненти векторів у комбінацію, матимемо: $\lambda_1(1,1,-1)+ \quad +\lambda_2(1,2,1)+\lambda_3(3,2,1)=(0,0,0)$. Прирівнявши відповідні координати, отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$. Для її розвязання, використаємо формули Крамера:

$$\lambda_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \lambda_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \lambda_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2-2+3+6-2-1=6; \quad \Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$$

Маємо єдиний розв'язок $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, що означає лінійно незалежність системи векторів a_1, a_2, a_3. Доведемо, що будь-який вектор $b=(\alpha,\beta,\gamma)$ можна подати як лінійнукомбінацію векторів a_1, a_2, a_3: $b=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3$. Підставивши компоненти векторів у останню рівність, отримуємо систему: $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=\alpha \\ \lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=\beta \\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\gamma \end{cases}$. Головний визначник системи $\Delta=6\neq 0$, отже система має єдиний розв'язок. А це означає, що $\forall$ вектор b із простору V_3 можна подати через вектори a_1, a_2, a_3. Звідси слідує, що ці вектори утворять базис V_3.

Завдання 2. Дано базисні вектори $a_1=(1,1,-1)$, $a_2=(1,2,1)$, $a_3=(3,2,1)$ 3-вимірного арифметичного простору V_3. Віднайдіть координати вектора b=(4,1,–4) в цьому базисі.

Розв'язання. Спочатку переконуємось, аналогічно приклад1, що вектори a_1, a_2, a_3 є базисними у просторі V_3. Знайдемо координати вектора b відносно даного базису. Для цього подамо його у виді $b=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3$ та віднайдемо невідомі коефіцієнти. Підставивши компоненти векторів, матимемо: $(4,1,-4)=\lambda_1(1,1,-1)+ \quad +\lambda_2(1,2,1)+\lambda_3(3,2,1)$. Тоді для

відшукання коефіцієнтів отримуємо наступну систему: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4 \end{cases}$.

Використавши формули Крамера отримаємо розвязки: $\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-2+3+6-2-1=6; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8-8+3+24-8-1=18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1-8-12+3+8-4=-12, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -8-1+4+8-1+4=6.$$

Тоді, $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1$. Вектор b має координати $(3,-2,1)$ відносно базису a_1, a_2, a_3.

Завдання 3. З'ясуйте, чи множина U усіх арифметичних векторів, сума компонент яких рівна: а) нулю; б) одиниці буде підпростором n-вимірного арифметичного простору V_n.

Розв'язання. Використаємо критерій підпросторів. Припустимо, що $a,b \in U$, $a=\quad=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $b=(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Тоді $a+b=(\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n)$, $\lambda a=(\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)$ для $\forall$ скалярної величини λ.

а) $a+b, \lambda a \in U$, раз $(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_n+\beta_n)=(\alpha_1+ \dots +\alpha_n)+\quad+(\beta_1+ \dots +\beta_n)=0+0=0$, $\lambda\alpha_1+ \dots +\lambda\alpha_n=\lambda(\alpha_1+ \dots +\alpha_n=\lambda 0=0$, то підмножина U буде підпростором, бо є замкненою відносно операцій додавання векторів та операцій множення векторів на скалярні величини.

б) Тут $a+b, \lambda a \notin U$, оскільки $(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_n+\beta_n)=(\alpha_1+ \dots +\alpha_n)+\quad+(\beta_1+ \dots +\beta_n)=1+1=2$, $\lambda\alpha_1+ \dots +\lambda\alpha_n=\lambda(\alpha_1+ \dots +\alpha_n=\lambda 1=\lambda$, то оскільки підмножина U не замкнена відносно операцій додавання векторів і множення векторів на скаляри то вона не є підпростором.

Завдання 4. Дано $a_1=(1,2,1)$, $a_2=(1,1,-1)$, $a_3=(1,3,3)$, $b_1=(2,3,-1)$,

b_2=(1,2,2), b_3=(1,1,–3) – 3-вимірні арифметичні вектори. Знайдіть базис і розмірність суми та перерізу підпросторів $U = L(a_1, a_2, a_3)$ і $W = L(b_1, b_2, b_3)$,.

Розв'язання. Знайдемо базис та розмірність підпросторів U та W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отож, базисом підпростору U будуть вектори a_1 та a_2: $U = L(a_1, a_2)$, $dimU = 2$; а базисом підпростору W будуть вектори b_1 та b_2: $W = L(b_1, b_2)$, $dimW = 2$. Будь-який вектор c підпростору $U + W$ подамо у виді $c = a + b$, де $a \in U$, $b \in W$, тому $c=a+b=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\beta_1 b_1+\beta_2 b_2$ та $U+W=L(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Віднайдемо базис та розмірність підпростору $U + W$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що базисом підпростору $U + W$ будуть вектори a_1, a_2, b_1: $U + W = L(a_1,a_2,b_1)$, dim(U+W)=3. Оскільки $dim(U + V) + dim(U \cap W) = dimU + dimV$, то $dim(U \cap W)$= 2+2–3=1, тобто базис підпростору $U \cap W$ складатиметься зі 1-ого вектора c: $U \cap W = L(c)$. Віднайдемо його. Оскільки $c \in U$ та $c \in W$, то $c=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2= \quad =\beta_1 b_1+\beta_2 b_2$. Підставивши у рівність компоненти векторів, матимемо: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + \beta_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 3\beta_1 + 2\beta_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = -\beta_1 + 2\beta_2 \end{cases}$. Отримана система матиме безліч розв'язків; для знаходження конкретного, припустимо $\beta_2 = 1$: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 3\beta_1 + 2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = -\beta_1 + 2 \end{cases}$. Отже

$2\alpha_1 = \beta_1 + 3$, $\alpha_1 = \beta_1 + 1$, тоді $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Отож, $c=2a_1+a_2=b_1+b_2=(3,5,1)$ – базисний вектор підпростору $U \cap W$.

Завдання 5. Перевірте, чи відповідність, яка векторам $a=(x_1,y_1)$, $b=(x_2,y_2)$ ставить у відповідність скаляр $x_1x_2–y_1y_2$ буде скалярним множенням у 2-вимірному арифметичному векторному просторі V_2. Якщо так, то з'ясуйте яким саме: виродженим чи не виродженим.

Розв'язання. Перевіримо виконання аксіом скалярного добутку.

(1) $\forall_V a \forall_V b((a,b) = (b,a))$ – операція скалярного множення є комутативною.

Дійсно, згідно умови $(a,b)=x_1x_2–y_1y_2$, $(b,a)=x_2x_1–y_2y_1$. В силу комутативності операції множення у $\forall$ полі, то властивість (1) справджується.

(2) $\forall_P \alpha \forall_V a \forall_V b((\alpha a, b) = \alpha(a,b))$ – операція скалярного множення є асоціативною стосовно множення на скалярну величину.

Тоді $\alpha a=(\alpha x_1,\alpha y_1)$, $(\alpha a,b)=\alpha x_1x_2–\alpha y_1y_2=\alpha(x_1x_2–y_1y_2)=\alpha(a,b)$, отже властивість (2) також виконується.

(3) $\forall_V a \forall_V b \forall_V c((a+b,c) = (a,c) + (b,c))$ –скалярний добуток дистрибутивний відносно додавання векторів.

Припустимо, що $c =(x_3,y_3)$. Отже $a+b=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, $(a+b,c)=(x_1+x_2)x_3–(y_1+y_2)y_3=(x_1x_3–y_1y_3)+(x_2x_3–y_2y_3)=(a,c)+(b,c)$, тоді властивість (3) виконується. Звідси, задана відповідність буде скалярним добутком у просторі V_2. Перевіримо виконнання умови невиродженості скалярного добутку: $(a,a)\neq 0$ для $\forall$ ненульового вектора a. Тут для вектора $a=(1,1)\neq 0$ $(a,a)=1–1=0$, отже цей скалярний добуток є виродженим.

Завдання 6. Дано систему векторів $a_1=(1,0,1,1)$, $a_2=(1,1,1,1)$, $a_3=(0,0,1,2)$, $a_4=(–1,0,3,1)$. Побудуйте ортонормований базис 4-вимірного евклідового арифметичного простору E_4, взявши записану вище систему векторів за вихідну

Розв'язання. Перевіримо, чи a_1,a_2,a_3,a_4 є базисними векторами

простору E_4. Маємо, що dim E_4=4, тоді досить перевірити, чи будуть вектори лінійно незалежними. Якщо при $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in R$ $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3+\lambda_4 a_4=0$, то отримаємо систему рівнянь: $\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4=0$, $\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4=0$. Якщо $\lambda_2=0$, то з 1-ого рівняння випливе, що $\lambda_1=\lambda_4$. Підставивши в 3-тє і 4-те рівняння, отримаємо: $4\lambda_1+\lambda_3=0$, $2\lambda_1+2\lambda_3=0$, тоді $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=0$. Отож, a_1,a_2,a_3,a_4 лінійно незалежна система векторів, а отже буде базисом простору E_4. Для отримання ортогонального базису b_1,b_2,b_3,b_4, використаємо для a_1,a_2,a_3,a_4 процес ортогоналізації. Нехай $b_1=a_1=(1,0,1,1)$. Вектор b_2 запишемо у вигляді $b_2=a_2+\lambda b_1$. Тоді використавши $0=(b_2,b_1)=(a_2,b_1)+\lambda(b_1,b_1)$ знаходимо: $\lambda=-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}=-1$. Отож, $b_2=a_2-b_1=(0,1,0,0)$. Припустимо. що $b_3=a_3+\mu_1 b_1+\mu_2 b_2$. Тоді із умови $0=(b_3,b_1)=(a_3,b_1)+\mu_1(b_1,b_1)+\mu_2(b_2,b_1)=(a_3,b_1)+\mu_1(b_1,b_1)$ одержимо: $\mu_1=-\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}=-1$. А із умови $0=(b_3,b_2)=(a_3,b_2)+\mu_1(b_1,b_2)+\mu_2(b_2,b_2)=(a_3,b_2)+\mu_2(b_2,b_2)$ одержимо: $\mu_2=-\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}=0$. Тоді, $b_3=a_3-b_1=(-1,0,0,1)$. Припустимо $b_4=a_4+\nu_1 b_1+\nu_2 b_2+\nu_3 b_3$. Із $0=(b_4,b_1)=(a_4,b_1)+\nu_1(b_1,b_1)+\nu_2(b_2,b_1)+\nu_3(b_3,b_1)=(a_4,b_1)+$ $+\nu_1(b_1,b_1)$ знаходимо: $\nu_1=-\frac{(a_4,b_1)}{(b_1,b_1)}=-1$. По аналогії, $\nu_2=-\frac{(a_4,b_2)}{(b_2,b_2)}=0$, $\nu_3=-\frac{(a_4,b_3)}{(b_3,b_3)}=-1$. Отож, $b_4=a_4-b_1-b_3=(-1,0,2,1)$. Провіввши нормування векторів b_1,b_2,b_3,b_4, одержимо ортонормований базис простору E_4: $c_1=\|b_1\|^{-1}\cdot b_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,1)=$ $=(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $c_2=\|b_2\|^{-1}\cdot b_2=(0,1,0,0)$, $c_3=\|b_3\|^{-1}\cdot b_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $c_4=\|b_4\|^{-1}\cdot b_4=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2,1)=(-\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Наведемо приклади задач для самостійної роботи

студентів та учнів.

1. Перевірте, чи множина усіх радіус-векторів площини, кінці яких знаходяться: а) в 1-й або 2-й координатних чвертях; б) на фіксованій прямій, що проходить через початок координат; в) в 1-й або 3-й координатних чвертях, утворює векторний простір над полем R.
2. Дано систему векторів $a_1 = (2,0,0,-2)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3=(2,2,2,2)$, $a_4=(1,2,3,4)$, $a_5=(0,1,2,3)$ 4-вимірного арифметичного векторного простору V_4. Знайдіть базис та ранг цієї системи векторів.
3. Задано систему векторів $a_1=(0,2,0)$, $a_2=(2,4,4)$, $a_3 = (3,2,7)$. З'ясувати, чи утворюють базис ці вектори у просторі V_3. Якщо так, то знайти відносно цього базису координати вектора $b = (3,3,5)$.
4. Дано матриці $\grave{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\grave{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\grave{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\grave{A}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$.

   Покажіть, що ці матриці є базисом векторного простору квадратних матриць другого порядку. У цьому базисі записати координати матриці $\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5. З'ясуйте, чи множина U всіх арифметичних векторів, усі компоненти яких із парними номерами рівні: а) нулю; б) одиниці буде підпростором n-вимірного арифметичного простору V_n.

6. Дано $a_1=(2,0,0,-2)$, $a_2=(2,3,2,0)$, $a_3=(2,2,2,1)$, $a_4=(1,3,1,3)$, $a_5=(4,5,2,1)$ – 4-вимірні арифметичні вектори. Знайти базис та розмірність підпростору $U = L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

7. Дано $a_1=(1,0,1)$, $a_2=(-1,2,1)$, $a_3=(0,2,2)$, $b_1=(3,2,1)$, $b_2=(2,1,0)$, $b_3=(1,1,1)$ – 3-вимірні арифметичні вектори. Запишіть базис та розмірність суми та перерізу підпросторів $U = L(a_1, a_2, a_3)$ і $W=L(b_1, b_2, b_3)$, де

8. Доведіть, що підпростори збігаються коли розмірність суми цих двох підпросторів векторного простору рівна розмірності їхнього перерізу.

9. Знайдіть підпростір розв'язків даної однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 \quad - 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$.

10. Задано відповідність, яка у 2-вимірному арифметичному векторному просторі V_2 векторам $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ ставить у відповідність скаляр $3x_1x_2 - 2y_1y_2$. Визначити, чи є скалярним множенням така відповідність, якщо так, то вкажіть яким саме: виродженим чи не виродженим.

11. Дано систему 3-вимірних арифметичних векторів $a1 = (4, 0, -2)$, $a2 = (4, -1, 4)$, $a3 = (2, 7, -3)$. Ортогоналізувати її.

12. Дано $a_1=(1,3,1)$, $a_2=(3,4,7)$, $a_3=(1,-2,-1)$. Побудувати ортонормований базис 3-вимірного арифметичного евклідового простору, взявши за основу базис a_1, a_2, a_3.

13. Доповнити систему векторів $a_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\grave{a}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ до ортонормованого базису 3-вимірного арифметичного евклідового простору.

3.2. Розв'язування задач з використанням теорії лінійних операторів.

В курсі аналітичної геометрії розглядається поняття лінійних відображень яке по суті є узагальненням поняття афінних перетворень площини та тривимірного простору.

Пригадаємо, що лінійним відображенням чи гомоморфізмом простору U у простір V, називається відображення A, якщо воно задовольняє умови лінійності:

$$1)\ \forall u_1 \in V \forall u_2 \in V\left(A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2\right),$$

$$2)\ \forall \alpha \in P \forall u \in V\left(A(\alpha u) = \alpha Au\right).$$

Лінійним оператором простору U називається лінійне відображення

векторного простору U в себе.

Завдання 1. Задано вектори $a_1=(7,3)$, $a_2=(2,1)$, $b_1=(6,1)$, $b_2=(5,1)$. Лінійний оператор A у просторі V_2 в базисі a_1, a_2, має матрицю $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, лінійний оператор B в базисі b_1, b_2, має матрицю $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & -6\end{pmatrix}$. Знайти матриці лінійних операторів $A+B$, $A\cdot B$ і $B\cdot A$ у базисі b_1, b_2. Відшукати вектори, в які вектор $u=(4,1)$ переведуть дані оператори.

Розв'язання. Для знаходження у базисі b_1, b_2 матриць потрібних операторів, запишемо матриці операторів A та B у цьому ж базисі. Відомою нам є матриця оператора B у базисі b_1, b_2, це буде матриця B. Потрібно віднайти у базисі b_1, b_2 матрицю A' відповідного оператора A. Оператор A у базисі a_1, a_2 має матрицю A, тоді $A'=C\cdot A\cdot C^{-1}$, тут C - є матрицею переходу від a_1, a_2 до b_1, b_2. Подання векторів b_1, b_2 через a_1, a_2 досить не просте, тому перехід від a_1, a_2 до b_1, b_2 здійснюватимемо, використавши допоміжний базис, який складатиметься із векторів $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$. Через C_1 і C_2 відповідно запишимо матриці переходу від базису e_1, e_2 до a_1, a_2 і b_1, b_2. Оскільки $a_1=7e_1+3e_2$, $a_2=2e_1+e_2$, тоді $C_1=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. За аналогією знайдемо $C_2=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$. Використаємо між базисні формули переходу: $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=C_1\cdot\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=C_2\cdot\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$ З 1-ої та 3-ої формул маємо: $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=C\cdot C_1\cdot\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$. Врахувавши другу формулу отримаємо матричну рівність $C\cdot C_1=C_2$, звідки $C=C_2\cdot C_1^{-1}$. Матрицю C_1^{-1} знайдемо із використанням методу доповнень: $|C_1|=1$,

$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді, $C = C_2 \cdot C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$. Після цього, знайдемо матрицю C^{-1}: $|C| = 1$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Отож, $A' = C \cdot A \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$. Матриця $A' + B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ буде матрицею оператора $A + B$ у базисі b_1, b_2. Матриця $A' \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -14 \\ 27 & -32 \end{pmatrix}$ буде Матрицею оператора $A \cdot B$ у базисі b_1, b_2. Матриця $B \cdot A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 18 & -24 \end{pmatrix}$ буде матрицею оператора $B \cdot A$ у базисі b_1, b_2.

Для знаходження образу вектора $u = (4,1)$ внаслідок дії даних операторів, знайдемо координатний рядок $[u]$ даного вектора у базисі b_1, b_2. Врахувавши, що $(4,1)$ буде координатним рядком u у базисі e_1, e_2, а також що матриця C_2 є матрицею переходу від e_1, e_2 до b_1, b_2, одержимо: $[u] = (4,1) \cdot C_2^{-1} = (4,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = (-1,2)$, тобто $u = -b_1 + 2b_2$. Отже, $[(A+B)u] = [u] \cdot (A'+B) = (-1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,1)$, тобто $(A+B)u = b_1 + b_2 = (6,1) + (5,1) = (11,2)$. По аналогії, $[(A \cdot B)u] = (-1,2) \cdot \begin{pmatrix} 12 & -14 \\ 27 & -32 \end{pmatrix} = (42,-50)$, тобто

$(A \cdot B)u = 42b_1 - 50b_2 = 42 \cdot (6,1) - 50 \cdot (5,1) = (2,-8) \cdot [(B \cdot A)u] = (-1,2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 18 & -24 \end{pmatrix} =$
$= (32,-43)$,

або $(B \cdot A)u = 32b_1 - 43b_2 = 32 \cdot (6,1) - 43 \cdot (5,1) = (-29,11)$.

Завдання 2. Лінійний оператор A 4-ри вимірного векторного простору V_4, задано у базисі e_1, e_2, e_3, e_4 матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти образ, ядро, дефект і ранг лінійного оператора.

Розв'язання. Нам відомо, що ранг оператора A рівний рангу його матриці A. Отже, спочатку, знайдемо $r(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо, що $r(A) = 2$, тоді ранг оператора A рівний 2. Підпростір $\operatorname{Im} A$ породжено векторами $Ae_1 = (1,-2,1,2)$, $Ae_2 = (2,1,0,1)$, $Ae_3 = (3,-1,1,3)$, $Ae_4 = (4,-3,2,5)$, отже за базис $\operatorname{Im} A$ візьмемо $\forall$ два лінійно незалежні вектори системи, не зменшуючи загальності, оберемо Ae_1 та Ae_2. Сума дефекту і рангу лінійного оператора рівна розмірності простору його задання, то звідси маємо, що дефект дорівнює $4 - 2 = 2$. Відомо, що вектор $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ належить $\operatorname{Ker} A$ тоді та тільки тоді, якщо $(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot A = (0,0,0,0)$. Це рівносильно наступній однорідній системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Вектори, координатні рядочки яких будуть фундаментальними розв'язками даної однорідної системи утворять базис підпростору $\operatorname{Ker} A$. Віднайдемо їх:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, за базис підпростору $\mathrm{Ker}A$ візьмемо вектори $c_1 = (-1,-1,1,0)$, $c_2 = (-2,-1,0,1)$.

Завдання 3. Задано матрицю $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Відшукати власні вектори та значення оператора A векторного простору V над полем R, що задано матрицею A. Чи зведеться матриця A до діагонального виду? Якщо так, то знайти цю діагональну матрицю, та матрицю, якою з матриці A отримується діагональна матриця.

Розв'язання. Власні значення оператора A знайдемо з характеристичного рівняння матриці:

$$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -4-2\lambda \\ 1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -4-2\lambda \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -4-2\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2(-1-\lambda) + (-4-2\lambda)(1-\lambda)]$$

-

$$[(-4-2\lambda)(-1+\lambda) + 4(1-\lambda)^2 - (-4-2\lambda)(1-\lambda)] = (1-\lambda)^2(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

Усі корені $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2$ характеристичного рівняння матриці A дійсні числа, Зауважимо, що корені λ_1 та λ_3 прості, корінь λ_2 з кратністю 2. На цій основі найдемо власні вектори оператора A, які відповідають власним значенням $-1, 1, -2$.

1) Нехай $\lambda_1 = -1$. Якщо $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – є власним вектором

оператора A, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = -1$ то $Au = \lambda_1 u = -u$, тоді $(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot A$ $=(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$ Покомпонентно розписавши матричну рівність, одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = -x_1 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & x_4 & = -x_2 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = -x_3 \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -x_4 & = -x_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & & = 0 \end{cases}$$

Далі шукаємо фундаментальні розв'язки системи

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси ранг r_1 матриці системи рівний 3, отже система мтиме один фундаментальний розв'язок $c_1 = (1,1,1,1)$.

Усі вектори αc_1, де $\alpha \in R\backslash\{0\}$ є власними векторами оператора A, які належить власному значенню $\lambda_1 = -1$.

2) Нехай $\lambda_2 = 1$ $Au = u, (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot A = ((x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = -x_1 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & x_4 & = -x_2 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = -x_3 \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -x_4 & = -x_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг r_2 матриці даної системи рівний 2, тоді система матиме 2 фундаментальні розв'язки $c_2 = (0,-1,1,0)$ і $c_3 = (1,1,0,1)$. Усі вектори $\beta c_2 + \gamma c_3$, де $\beta, \gamma \in R$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ є власними векторами оператора A, і

належать власному значенню $\lambda_2 = 1$.

3) $\lambda_3 = -2. Au = -2u, (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot A = (-2x_1, -2x_2, -2x_3, -2x_4)$.

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & + & x_4 & = -2x_1 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & + & x_4 & = -2x_2 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & + & x_4 & = -2x_3 \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & - & x_4 & = -2x_4 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & + & x_4 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & -2x_3 & + & x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & x_3 & + & x_4 & = 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг r_3 даної матриці однорідної системи рівний 3, отже система матиме 1 фундаментальний розв'язок $c_4 = (1,1,1,0)$. Усі вектори δc_4, де $\delta \in R \setminus \{0\}$ будуть власними векторами оператора A, які відповідають власному значенню $\lambda_3 = -2$.

Усі корені даного характеристичного рівняння матриці A дійсні числа, і для кожного кореня λ_i різниця $n - k_i$, рівна рангу r_1 матриці $A - \lambda_1 E$ то матрицю A легко зведемо до діагонального вигляду :

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. У базисі простору V, який складено із власних векторів c_1, c_2, c_3, c_4 матриця D буде матрицею оператора A . Тоді матриці A та D пов'язані таким співвідношенням:

$D = C \cdot A \cdot C^{-1}$, тут C – є матрицею переходу від базису e_1, e_2, e_3, e_4, де оператор A має матрицю A до c_1, c_2, c_3, c_4, . Тоді маємо,

$c_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$

$c_2 = -e_2 + e_3$

$c_3 = e_1 + e_2 + e_4$

$c_4 = e_1 + e_2 + e_3$

Отже $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайдемо C^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ тоді } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{c}^{-1}$$

Після цього переконуємось, що $\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{C}^{-1} = D$ здійснивши безпосередню перевірку.

Завдання 4 Дано матрицю $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти її жорданову форму.

Розв'язання. Будемо зводити характеристичну матрицю $A - \lambda E$ матриці A до канонічного вигляду використавши елементарні перетворення:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 1-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2+2\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1-\lambda^2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+2\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2+2\lambda & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(\lambda+1) & -2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 2(\lambda+1) & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1-\lambda^2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2(1+\lambda) & -1 & -(\lambda+1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(\lambda+1) & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda+1)^2 & -(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & -(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & -(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda+1)^2 & -(\lambda+1)^2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)^2 & (\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)^2 & 2(\lambda+1)^2 & 0 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

Многочлени $e_5(\lambda)=(\lambda+1)^2, e_4(\lambda)=(\lambda+1)^2, e_3(\lambda)=(\lambda+1)^2$, $e_2(\lambda)=(\lambda+1)^2$ є інваріантними множниками $A-\lambda E$. Вигляд таблиці многочленів буде таким : $(\lambda+1)^2, (\lambda+1)^2, \lambda+1$.

Таким чином у полі R матриця A зведеться до нормальної жорданової форми $J=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, отже існуватиме невироджена дійсна матриця C, для якої справедливим буде $C^{-1}AC=J$.

Завдання для самостійної роботи

1. Задано відображення A, яке вектору $a=(x1,x2,x3)$ зіставляє арифметичний вектор: а) $Aa=(2x1-7x2+x3,x3,x2)$; б) $Aa=(x1,x2+x1,x3+2x2+9)$ Чи буде відображення A лінійним оператором 3-вимірного арифметичного простору V_3.
2. Дано a_1=(2,2,3), a_2=(1,–1,0), a_3=(–1,2,1), b_1=(1,2,–3), b_2=(0,1,2), b_3=(0,0,1).. Знайти матрицю лінійного оператора A в базисі b_1, b_2, b_3,якщо оператор A тривимірного арифметичного простору V_3 в базисі a_1, a_2, a_3, має матрицю $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Знайти матриці лінійних операторів $A+B$, $A\cdot B$ і $B\cdot A$ у базисі b_1, b_2, та вектори, у які вектор $u=(3,-1)$ переводять дані оператори, якщо лінійний

оператор A простору V_2 у базисі, який складено із $a_1 = (1,-2)$, $a_2 = (3,-5)$, має матрицю $A = \begin{pmatrix} 37 & -13 \\ 108 & -38 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі, який складено із $b_1 = (1,2)$, $b_2 = (2,5)$, має матрицю $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Лінійний оператор A простору V_3, заданий в базисі e_1, e_2, e_3 матрицею $\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти образ, ядро, дефект, ранг оператора.

5. Задано матрицю A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 4 \\ -2 & -1 & -7 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Відшукати власні вектори та значення оператора A векторного простору V над полем R, що задано матрицею A. Чи зведеться матриця A до діагонального виду? Якщо так, то знайти цю діагональну матрицю, та матрицю, якою з матриці A отримується діагональна матриця.

6. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти її жорданову форму.

Висновки

При написанні кваліфікаційної роботи магістерського рівня я досягнула таких поставлених завдань: опрацювала ряд літературних джерел згідно тематики мого дослідження, зібрала та систематизувала у доступній для студентів та обдарованих учнів формі теоретичний матеріал теорії векторних просторів та теорії лінійних операторів, розглянула практичні завдання згідно розглянутих у роботі теоретичних положень, запропонувала свої приклади та задачі для самостійної роботи здобувачів.

Розглянутий у роботі матеріал вивчається в рамках навчального курсу «Лінійна алгебра» . Сам же курс спрямовано на формування у студентів розуміння основних понять розглянутих розділів лінійної алгебри, теорії, а також її результатів та методів. Успішне засвоєння матеріалів курсу сприяє підготовці студентів та учнів до здійснення самостійної науково-пошукової діяльності. Зокрема, дозволить їм використовувати основні поняття та методи лінійної алгебри (векторні простори, матриці, оператори) при розв’язуванні природничо-наукових проблем, уміти характеризувати природні системи різних рівнів організації базуючись на взаємозв’язках фундаментальних закономірностей суспільства та природи.

Результати роботи можуть бути використані викладачами при розробці лекційних, практичних занять, завдань для самостійної роботи студентів, зокрема, їх подання у дистанцій формі. Студентами при вивченні курсу «Лінійна алгебра», написанні курсових та бакалаврських робіт, вчителями, при роботі з обдарованими дітьми, зокрема, в рамках роботи МАН України.

Список використаних джерел:

1) Беклемишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре // Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. - М. Физматлим, 2001.-496 с

2) Булдигін В. В. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри /В. В. Буддигін., В. А. Жук, С. О. Рушицька, В. В. Ясінський. - К. : Вища школа,1999р.

3) Воеводин В.В. Линейная алгебра. - М.- Наука, 1974, 400 с

4) Діскакт В. І. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В. І. Діскакт, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. - К: Вища школа, 2001.-303е.

5) Завало СТ. Курс алгебри - К. Вища школа, - 1988, 502 с.

6) Марач В.С. Курс лекцій з лінійної алгебри / В.С.Марач, О.В.Крайчук. – Рівне, 2005. – 312с.

7) Калужнін Л. А. Лінійні простори // Л. А. Калужнін, В. А. Вишенський, Ц. О. Шуб. - К/ Вища школа, 1Л971. - 343 с

8) Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрий и линейной алгебре. - М. Физматтиз, 1974, 240 с

9) Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. Учебник для вузов. – 3-е изд. / А.И. Кострикин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

10) Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература, 2000. — 368с.

11) Проскуряков Й.В. Сборник задач по линейной алгебре. - М. Наука. - 1974, 336с.

12) Рудавський Ю. К, Костробій П. П., Луник Х. П, Уханська Д. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія - Л: Бескид Біт, 2002, 261 с

13) Рибицька О. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. / О. М. Рибицька, Д. М. Білонога, П. І. Каленюк ; М-во освіти і науки, молоді та спорту України, Нац. ун-т «Львів. політехніка». — Л. : Вид-во Львів. політехніки, 2011. — 124 с.

14) Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. - М.- Наука, 1977, 316 с

15) Чарін В. С. Лінійна алгебра. - К. Техніка, 2004. - 413 с.

16) Шарипов Р.А. Бистрое введение в тензорный анализ. CopyRight, 2004, 50 с.

17) Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. - К.: А С.К., 2003, 648с.

18) Беклемишев. Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М., Наука, 1971

19) Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П.Дубовик, І1.Юрик та ін.;За ред. В.П Дубовика, ІЛ.Юрика. - К.: АСК. 2003, 480 с.

20) Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М. :1980.

21) Мальцев А.Й. Основы линейной алгебры. - М.- Наука, 1970.

22) Гельфанд Й.М. Лекции по линейной алгебре. - М.- Наука, 1966.

23) Єрмаков А. І., Крамар М. М. Лінійна алгебра: Навчальний посібник. — Луганськ: Вид-во СУДУ, 2000. 176 с/

24) Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.