Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

Розв'язність алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах та побудовність чисел циркулем і лінійкою

Виконала: студентка II курсу магістратури,
групи М-М-21
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Гамза Марія Сергіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики
Сапіліді Тамара Михайлівна

Рецензент: д-р техн. наук, зав. кафедри комп'ютерних наук і прикладної математики
Турбал Юрій Васильович

Рівне - 2021 року

Зміст

ВСТУП **3**

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ **8**

РОЗДІЛ ІІ. РОЗВ'ЯЗНІСТЬ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ У КВАДРАТНИХ РАДИКАЛАХ **12**

2.1 Поняття розв’язності алгебраїчних рівнянь у радикалах. 12

2.2 Розв’язність алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах. 13

2.3 Необхідні і достатні умови розв’язності алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах. 16

РОЗДІЛ ІІІ. ПОБУДОВНІСТЬ ЧИСЕЛ ЦИРКУЛЕМ ТА ЛІНІЙКОЮ. **22**

3.1 Геометричні побудови циркулем і лінійкою на площині. 22

3.3 Необхідні і достатні умови побудовності числа циркулем і лінійкою 24

3.4 Нерозв’язність трьох класичних задач на побудову. 27

3.5 Поділ кола на рівні частини (побудова правильних многокутників). 29

3.6 Основні положення проективної геометрії 36

3.7 Класифікація геометричних задач на побудову 49

3.8 Візуальні задачі першого і другого степеня 52

3.9 Метричні задачі першого та другого степеня 57

3.10 Графічне розв’язування рівнянь другого степеня. 60

РОЗДІЛ IV. ПРАКТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНИЙ МАТЕРІАЛ **66**

ВИСНОВКИ **89**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **90**

ВСТУП

Математика – одна з найстародавніших наук. Вона зародилась на зорі людської цивілізації з потреб практики.[24]

Роль математики в різних галузях людської діяльності з часом змінювалася, причому найістотніше залежала вона від двох факторів: рівня розвитку математичного апарату і ступеня зрілості знань про той чи інший досліджуваний об’єкт, тобто можливості описати найістотніші його властивості мовою математичних понять або, як тепер прийнято говорити, можливості побудувати математичну модель цього об’єкта.

Одним з основних видів математичних моделей, що розглядаються в шкільному курсі математики, є рівняння.

Вивчення починається з найпростішого випадку одного рівняння першого степеня з одним невідомим, а потім поглиблюється в двох напрямах: 1) розглядаються системи двох і трьох рівнянь першого степеня з двома, і відповідно, трьома невідомими; 2) вивчається одне квадратне рівняння з одним невідомим і деякі окремі типи рівнянь, що легко зводяться до квадратних ([20], [23],[24]).

Більше чотирьох тисяч років людство вміє розв’язувати задачи, які призводять до рівнянь. Ахмес, творець папіруса Райда, говорив, що переписав задачі зі старих рукописів, щоб усунути всі таємниці, «які приховують в собі речі».

Задачами алгебри XVII – XVIII ст. були перетворення буквенних виразів, розв’язання алгебраїчних рівнянь. У відповідності з цим одна із кращих робіт того часу «Введення в алгебру» Ейлера. Ця робота містить виклад теорії цілих чисел і дробів, коренів, розв’язання рівнянь до четвертого степеня включно. Перераховані розділи вивчалися в дореволюційних гімназіях. У наш час елементи цих теорій вивчаються в середній школі, а повністю ними можуть оволодіти студенти математичних факультетів вишів ([6], [20], [23]).

В XVIII – XIX ст. алгебра стала перш за все стала алгеброю рівнянь. Основною задачею її стало розв’язання рівнянь з одним невідомим. Після того, як зусиллями Кардано та Феррарі були знайдені способи розв’язання рівнянь третього та четвертого степенів, на протязі майже трьох століть робилися спроби знайти формули для знаходження коренів рівняння більш високих степенів через їх коефіцієнти ([6], [9]).

В найдавніших єгипетських джерелах – папірусі Райда і Московському папірусі – можна знайти задачі на «аха» (невідома величина, яка підлягає визначенню), відповідні сучасним лінійним рівнянням, а також квадратним рівнянням виду $ax^2 = b$. У вавилонських клинописних текстах є велика кількість задач, які розв'язуються за допомогою рівнянь і систем першого і другого степеня, які записані без символів, але в специфічній термінології. В цих текстах розв'язуються задачі, які призводять до трьохчленних квадратних рівнянь виду $ax^2 - bx = c$, $x^2 - px = q$. В задачах на «аха» можна знайти зачатки алгебри як науки, яка вивчає рівняння ([10] [12] [20] [25]).

Вавилоняни ще за два тисячоліття до нашої доби вміли розв'язувати задачі пов'язані з рівняннями першого та другого степеня числовим шляхом. Проте розвиток алгебри в працях Евкліда (365 – бл. 300 р. до н. д.), Архімеда (бл. 287 – 212 р. до н. д.) та Аполлонія (бл. 260 – 212 р. до н. д.) мав зовсім інший характер: греки оперували відрізками, площинами та об'ємами. Їх алгебра будувалась на основі геометрії ([19, [12] [20]).

В курсі елементарної геометрії, одним з найбільш цікавих розділів є теорія геометричних побудов. Вчення про геометричні побудови виникло у стародавній Греції ще у VI-V ст. до н. е. і швидко розвинулося в процесі розробки грецькими вченими основ геометричної науки. Велике принципове значення геометричних побудов у стародавній грецькій математиці визначалося тим, що на той час більшість геометричних завдань не можна було розв'язати обчислювальними методами, оскільки не було теорії дійсних чисел і вчення про вимірювання відрізків. Навпаки, багато завдань арифметичного та алгебраїчного характеру розв'язували зведенням до геометричних побудов ([3], [13], [19]).

Істотною особливістю постановки завдань на побудову у стародавній грецькій геометрії було обмеження засобів розв'язування лише двома інструментами - лінійкою і циркулем. При цьому лінійка вважалася необмежено довгою, одно-сторонньою і без поділок. Ці інструменти дозволяють побудувати пряму лінію або відрізок за двома певними точками та провести коло, якщо задано його центр і радіус.

«Монополія» лінійки та циркуля як засобів розв'язування конструктивних завдань була закріплена у «Началах» Евкліда - енциклопедії елементарної геометрії. Це проявилося не тільки в тому, що в «Началах» розглядаються лише прямолінійні і круглі фігури (хоч грецькі вчені знали і детально вивчали багато ліній, відмінних від прямої кола - еліпс, параболу, гіперболу, спіралі та ін.), але й у формулюванні перших трьох постулатів Евкліда, які можна розглядати як аксіоматичне обґрунтування використання циркуля лінійки для розв'язування задач геометрії ([14], [26]).

У зв'язку з цим обмеженням, використовувати для побудови лише два інструментами - лінійку і циркуль - стало історичною традицією, яка і досі позначається на шкільному викладанні. Оскільки лінійка і циркуль є дуже простими і зручними інструментами, то згадане обмеження приводить до того, що практично всі геометричні побудови виконуються порівняно просто. Але відразу ж виникає питання, чи всяка задача на побудову може бути розв'язана за допомогою лише цих двох інструментів.

Ще близько двох з половиною тисяч років тому грецькі геометри виявили, що деякі задачі на побудову неможливо розв'язати за допомогою циркуля і лінійки. До цих задач, зокрема, належать три класичні проблеми, широко відомі як задачі «подвоєння куба», «трисекції кута» та «квадратура круга». Перша полягає у побудові куба, об'єм якого вдвічі більший за об'єм даного куба. У другій задачі вимагається поділити на три рівні частини довільний заданий кут. Проблема квадратури круга полягає в тому, щоб побудувати квадрат, рівновеликий даному кругу. Серед інших завдань на побудову, яких не вдавалося розв'язати за допомогою циркуля і лінійки, незважаючи на чисельні спроби, можна назвати побудову правильного семикутника ([11], [22], [27]).

Вперті спроби розв'язати ці класичні завдання циркулем і лінійкою тривали і далі протягом багатьох століть, але були безрезультатними. Тим часом у математиці все більшого поширення діставали такі криві, як еліпс, парабола, гіпербола, циклоїда та інші. У XVI-XVII ст. у зв'язку з видатними досягненнями механіки і астрономії (зокрема, відкриттями Коперніка, Галілея, Кеплера, розвиненими і узагальненими пізніше Ньютоном) стало ясно, що такі криві своїм значенням і поширенням у математиці та природознавстві не поступаються перед прямою і колом. Проте, в елементарній геометрії привілейоване положення цих останніх ліній продовжувало зберігатися, частково тому, що вивчення інших кривих вимагало досить складних методів, частково в силу класичних традицій. Особливу роль прямої і кола у планіметрії деякі математики, також, пояснювали тим, що серед усіх плоских кривих лише ці дві мають сталу кривизну (тобто, образно кажучи, ту властивість, що довільний відрізок лінії може рухатися по ній без деформації) ([2], [19], [21]).

В 1797 р. італійський математик Маскероні довів, що кожна задача, яку можна розв'язати циркулем і лінійкою, може бути розв'язана і за допомогою самого циркуля. Цей результат мав не тільки теоретичне, але й практичне значення, оскільки при виконанні конкретних побудов на порівняно невеликих частинах площини циркуль має переваги перед лінійкою, бо характеризується більшою точністю ([2], [19], [21], [22]).

Актуальність теми зумовлена важливістю вміти розв'язувати алгебраїчні рівняння у квадратних радикалах та будувати числа за допомогою циркуля і лінійки.

Мета дослідження: розглянути розв'язність алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах та побудовність чисел за допомогою циркуля та лінійки.

Об'єкт дослідження: алгебраїчні рівняння у квадратних радикалах; числа, побудовні циркулем та лінійкою.

Обсяг роботи: Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаної літератури. В першому розділі наведено історичні відомості про алгебраїчні рівняння та побудовність чисел за допомогою циркуля і лінійки ([1], [4], [5], [6], [14], [16], [22]). Розділ два присвячений розв'язності алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах, розкрито поняття та умови розв'язності рівнянь ([14], [16], [25]). У третьому розділі розповідається про побудовність чисел за допомогою циркуля та лінійки, поняття та умови побудовності даних задач, а також показано, які задачі не можуть бути розв'яззані за допомогою циркуля та лінійки ([1], [8], [11],

[13], [22], [27]). Четвертий розділ містить приклади алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах та задачі на побудовність чисел циркулем і лінійкою ([14], [25]).

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Розв’язуванням найпростіших рівнянь першого та другого степеня займалися ще вавилонські, єгипетські, а згодом і давньогрецькі математики. Звичайно, способи розв’язування, позначення та термінологія були іншими. Зокрема, усі проміжні обчислення було потрібно тримати в пам’яті, а дії з числами виражати словами.

В XVII століття в постійному багато столітньому розвитку математики відбувся стрибок до виникнення нової математики. І тому з того моменту математика стала робочим інструментом наукового природознавства, основи якого в той час закладалися. [20]

Розвиток нових методів став можливим завдяки тому, що нова математика була побудована на базі алгебри і користувалася лише єдиною символічною мовою. Це створило передумови для побудови абстрактних понять математики. Проникнення алгебри в математику і суміжні науки дозволило розробити алгоритми, застосовані до задач окремих класів, системи з характерними правилами перетворень і специфічною символікою. Відкриттям в області диференціального та інтегрального числення здійсненні Ньютоном (1643-1727) і Лейбніцем (1646-1716) в кінці XVII ст. передували значні досягнення в алгебрі: розв’язання рівнянь першого та другого степеня, введення в алгебру єдиної алгебраїчної символіки.

Алгебраїчні рівняння 1-го степеня з одним невідомим розв'язували вже в давньому Єгипті і давньому Вавилоні. Вавилонські переписувачі вміли розв'язувати і квадратні рівняння, а також найпростіші системи лінійних рівнянь і рівнянь 2-го степеня. За допомогою особливих таблиць вони розв'язували і деякі рівняння 3-го степеня, наприклад $x^3 + x = a$. [23]

В найдавніших єгипетських джерелах – папірусі Райда і Московському папірусі – можна знайти задачі на «аха» (невідома величина, яка підлягає визначенню), відповідні сучасним лінійним рівнянням, а також квадратним рівнянням виду $ax^2 = b$. У вавилонських клинописних текстах є велика кількість задач, які розв’язуються за допомогою рівнянь і систем першого і другого степеня, які записані без символів, але в специфічній термінології. В цих текстах розв'язуються задачі, які призводять до трьохчленних квадратних рівнянь виду $ax^2 - -bx = c$, $x^2 - px = q$. В задачах на «аха» можна знайти зачатки алгебри як науки, яка вивчає рівняння.

Але якщо вавилоняни за два тисячоліття до нашої доби вміли числовим шляхом розв'язувати задачі зв'язані з рівняннями першого та другого степеня, то розвиток алгебри в працях Евкліда (365 – бл. 300 р. до н. д.), Архімеда (бл. 287 – 212 р. до н. д.) та Аполлонія (бл. 260 – 212 р. до н. д.) мало зовсім інший характер: греки оперували відрізками, площинами, об'ємами. Їх алгебра будувалась на основі геометрії. [20]

Теорія геометричних побудов займає значне місце в курсі елементарної геометрії і є одним з найбільш цікавих її розділів. Вчення про геометричні побудови виникло у стародавній Греції ще у VI-V ст. до н. е. і швидко розвинулося в процесі розробки грецькими вченими основ геометричної науки. Велике принципове значення геометричних побудов у стародавній грецькій математиці визначалося тим, що на той час більшість геометричних завдань не можна було розв'язати обчислювальними методами. Це пояснюється ти, шо на той час ще не було теорії дійсних чисел і вчення про вимірювання відрізків. Навпаки, багато завдань арифметичного та алгебраїчного характеру розв'язували зведенням до геометричних побудов. [13]

Істотною особливістю постановки завдань на побудову у стародавній грецькій геометрії було обмеження засобів розв'язування лише двома інструментами - лінійкою і циркулем. При цьому лінійка вважалася необмежено довгою, одно-сторонньою і без поділок. Ці інструменти дозволяють побудувати пряму лінію або відрізок за двома певними точками та провести коло, якщо задано його центр і радіус.

Особлива роль лінійки і циркуля в теорії геометричних побудов відбиває особливу роль прямої і кола в елементарній геометрії. Спостереження та порівнювання просторових форм реального світу призвело насамперед до вироблення уявлень про прямолінійні та круглі фігури і тіла. Вивчення цих геометричних образів і визначило основний зміст класичної геометрії, що сформувався в стародавньої Греції і досі є основою традиційного шкільного курсу.

Те, що прямі і кола становлять фундамент елементарної планіметрії, зумовлено і тим, що з математичної точки зору ці лінії є найпростішими геометричними образами на площині. Справді, з усіх фігур на площині лише пряма визначається довільними двома своїми точками і лише коло - довільними трьома своїми точками. З цієї точки зору побудова прямої і кола виступають як найелементаріші конструктивні операції, до яких бажано звести будь-яку геометричну побудову.

«Монополія» лінійки та циркуля як засобів розв'язування конструктивних завдань була закріплена у «Началах» Евкліда - енциклопедії елементарної геометрії. Це проявилося не тільки в тому, що в «Началах» розглядаються лише прямолінійні і круглі фігури. Хоч грецькі вчені знали і детально вивчали багато ліній, відмінних від прямої кола - еліпс, параболу, гіперболу, спіралі та ін. Це також проявлялося у формулюванні перших трьох постулатів Евкліда, які можна розглядати як аксіоматичне обґрунтування використання циркуля лінійки для розв'язування задач геометрії. [14]

У зв'язку з цим обмеження засобів побудови лише двома інструментами - лінійкою і циркулем - стало історичною традицією, яка і досі позначається на шкільному викладанні. Оскільки лінійка і циркуль є дуже простими і зручними інструментами, то згадане обмеження приводить до того, що практично всі такі геометричні побудови виконуються порівняно просто. Але з принципового погляду відразу ж виникає питання, чи всяка задача на побудову може бути розв'язана за допомогою лише цих двох інструментів.

І справді, вже близько двох з половиною тисяч років тому грецькі геометри виявили, що деякі завдання на побудову вперто не піддають ніяким зусиллям розв'язати їх за допомогою циркуля і лінійки. До цих задач, зокрема, належать три класичні проблеми, широко відомі як задачі «подвоєння куба», «трисекції кута» та «квадратура круга». Перша полягає у побудові куба, об'єм якого вдвічі більший за об'єм даного куба. У другій задачі вимагається поділити на три рівні частини довільний заданий кут. Проблема квадратури круга полягає в тому, щоб побудувати квадрат, рівновеликий даному кругу. Серед інших завдань на побудову, яких не вдавалося розв'язати за допомогою циркуля і лінійки, незважаючи на чисельні спроби, можна назвати побудову правильного семикутника. [11]

Ще стародавні грецькі математики вміли розв'язувати такі задачі за допомогою ліній, відмінних від прямих та кіл, тобто використовуючи, крім циркуля і лінійки, ще інші інструменти. Проте вони не вважали такі побудови «справді геометричними» і продовжували шукати розв'язки за допомогою лише циркуля і лінійки. Можливо, впевненість в існуванні таких розв'язків була зумовлена тим, що у формулюванні цих задач зустрічалися лише фігури, утворені прямими лініями і колами.

Вперті спроби розв'язати ці класичні завдання циркулем і лінійкою тривали і далі протягом багатьох століть, але були безрезультатними. Тим часом у математиці все більшого поширення діставали такі криві, як еліпс, парабола, гіпербола, циклоїда та інші. У XVI-XVII ст. у зв'язку з видатними досягненнями механіки і астрономії (зокрема, відкриттями Коперніка, Галілея, Кеплера, розвиненими і узагальненими пізніше Ньютоном) стало ясно, що такі криві своїм значенням і поширенням у математиці та природознавстві не поступаються перед прямою і колом. Проте, в елементарній геометрії привілейоване положення цих останніх ліній продовжувало зберігатися. Певною мірою, це відбувалося тому, що вивчення інших кривих вимагало досить складних методів, частково в силу класичних традицій. Особливу роль прямої і кола у планіметрії деякі математики, також, пояснювали тим, що серед усіх плоских кривих лише ці дві мають сталу кривизну. Тобто, образно кажучи, ту властивість, що довільний відрізок лінії може рухатися по ній без деформації. [2]

В 1797 р. італійський математик Маскероні довів, що кожна задача, яку можна розв'язати циркулем і лінійкою, може бути розв'язана і за допомогою самого циркуля. Цей результат мав не тільки теоретичне, але й практичне значення, оскільки при виконанні конкретних побудов на порівняно невеликих частинах площини циркуль має переваги перед лінійкою, бо характеризується більшою точністю. [2]

РОЗДІЛ II. РОЗВ'ЯЗНІСТЬ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ У КВАДРАТНИХ РАДИКАЛАХ

2.1 Поняття розв’язності алгебраїчних рівнянь у радикалах.

Нехай P – деяке поле. Будемо говорити, що елемент α подається в радикалах над P, якщо він виражається через елементи поля P за допомогою скінченої кількості дій добування коренів (довільного степеня) і раціональних операцій – додавання, віднімання, множення і ділення. Це означає, що існує така послідовність елементів α_1, α_2, α_3, … , α_n , що $\alpha_n = \alpha$ і кожний елемент α_k цієї послідовності або належить полю P, або ж для нього справджується одна з наступних можливостей: $\alpha_k = \alpha_i + \alpha_j$, $\alpha_k = \alpha_i - \alpha_j$, $\alpha_k = \alpha_i\alpha_j$, $\alpha_k = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$, $\alpha_k=\sqrt[r]{\alpha_i}$ для деяких $i, j < k$ і деякого натурального r (під $\sqrt[r]{\alpha_i}$ розуміють одне із значень кореня $r-$го степеня із елемента α_i, якщо таких значень існує декілька). Алгебраїчне рівняння $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ з коефіцієнтами з поля P називається розв’язним у радикалах над P, якщо всі його корені подаються в радикалах над P. Поняття розв’язності в радикалах конкретного алгебраїчного рівняння не слід плутати з розв’язністю в радикалах загального рівняння степеня n. Останнє означає можливість виразити за допомогою загальної формули корені будь-якого алгебраїчного рівняння степеня n над полем P через його коефіцієнти і елементи поля P за допомогою скінченої кількості дій добування коренів і раціональних операцій. Зрозуміло, що із розв’язності в радикалах загального рівняння степеня n випливає розв’язність в радикалах будь-якого конкретного рівняння степеня n. Обернене ж твердження не правильне. Наприклад, загальне рівняння степеня n над полем C комплексних чисел при $n \geq 5$ нерозв’язне в радикалах, але будь-яке конкретне алгебраїчне рівняння над C розв’язне в радикалах, оскільки його корені лежать в C. Найбільш важливе значення для застосувань має питання про розв’язність в радикалах алгебраїчних рівнянь над полем Q раціональних чисел. Зрозуміло, що існують рівняння як завгодно великих степенів, розв’язні в радикалах над полем Q, наприклад, рівняння $x^n - q = 0$, де $q \in Q$. Французький математик Е. Галуа в 30-х роках XIX ст. довів, що для довільного $n \geq 5$ існують алгебраїчні рівняння степеня n з раціональними коефіцієнтами, нерозв'язні в радикалах над Q, а також встановив необхідні і достатні умови розв'язності в радикалах конкретного алгебраїчного рівняння. [19]

2.2 Розв'язність алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах.

Розглянемо більш детально питання про розв'язність алгебраїчного рівняння в квадратних радикалах. Будемо говорити, що елемент α подається у квадратних радикалах над полем P, якщо він виражається через елементи поля P за допомогою скінченої кількості раціональних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) та дій добування квадратного кореня, тобто якщо існує скінчена послідовність елементів

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \qquad (1)$$

така, що $\alpha_n = \alpha$ і кожний член α_k цієї послідовності або належить полю P, або ж для нього справджується одна з наступних можливостей: $\alpha_k = \alpha_i + \alpha_j$, $\alpha_k = \alpha_i - -\alpha_j$, $\alpha_k = \alpha_i \alpha_j$, $\alpha_k = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$, $\alpha_k = \sqrt{\alpha_i}$ для деяких $i, j < k$. Алгебраїчне рівняння з коефіцієнтами з поля P називається розв'язним у квадратних радикалах над P, якщо всі його корені подаються у квадратних радикалах над P. [14]

За послідовністю (1) побудуємо ланцюжок простих алгебраїчних розширень полів $P_0 = \mathrm{P}$, $P_1 = P_0(\alpha_1)$, $P_2 = P_1(\alpha_2), \dots$, $P_n = P_n - 1(\alpha_n)$. Якщо α_k належить полю P або ж отримується в результаті раціональної операції над якими–небудь двома попередніми членами послідовності (1), то, очевидно, $\alpha_k \in P_k - 1$, отже, $P_k = P_k - 1$. Якщо ж $\alpha_k = \sqrt{\alpha_i}$ для деякого і $< k$, то або знову $\alpha_k \in P_k - 1$ і тоді $P_k = P_k - 1$, або ж $\alpha_k \notin P_k - 1$ і тоді P_k є простим алгебраїчним розширенням поля P_{k-1} степеня 2, оскільки в цьому випадку α_k є коренем незвідного в полі P_{k-1} многочлена $x^2 - \alpha_i$. В останньому випадку $[P_k : P_k - 1] = 2$. Просте алгебраїчне розширення степеня 2 називається квадратичним розширенням. Таким чином у будь-якому випадку $[P_k: P_{k-1}]$=1 або 2, тобто P_k є скінченним розширенням поля P_{k-1} степеня 1 або 2. Згідно теореми P_k є скінченним розширенням поля P, причому $[P_k\ : P] = [P_k\ P_k - 1][P_k - 1: P]$, тобто $[P_k : P] = [P_k - 1: P]$або $[P_k : P] = 2[P_k - 1: P]$. Отже, $[P_m : P] = 2$, де s дорівнює кількості індексів k в послідовності (1), для яких $\alpha_k \in P_k\ - 1$. Справджується наступна теорема. [14]

Теорема 1. Елемент α подається в квадратних радикалах над полем P тоді і тільки тоді, коли існує такий скінчений ланцюжок полів $\mathrm{P} = P_0$, $P_1, P_2, \ldots, P_k$, що P_i є квадратичним розширенням $P_i - 1\ (i = 1, \ldots, k)$ і $\alpha \in P_k$.

Доведення. Необхідність випливає з наведених вище міркувань. Доведемо достатність. Нехай $\mathrm{P} = P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_k$ – скінчений ланцюжок квадратичних розширень полів, причому $P_0 = \mathrm{P}$, $P_1 = P_0(\alpha_1)$, $P_2 = P_1(\alpha_2)$, … , $P_k = P_k - (\alpha_k)$ і нехай $\alpha \in P_k$. Тоді кожний елемент поля P_1 подається у вигляді $\beta = a + b\alpha_1$, де $a, b \in P_0 = P$, а α_1 – корінь деякого незвідного в полі P_0 многочлена 2-го степеня з кільця $P_0[x]$. Оскільки α_1 подається у квадратних радикалах над полем P (згідно із загальною формулою знаходження коренів квадратного рівняння, яка залишається істинною в будь-якому полі), то й будь-який елемент поля P_1 подається у квадратних радикалах над P_0. Так само встановлюємо, що довільний елемент поля P_2 подається у квадратних радикалах над P_1, а отже, і над P_0. Продовжуючи аналогічно, дістанемо, що довільний елемент поля P_k, в тому числі й α, подається у квадратних радикалах над полем $P_0 = \mathrm{P}$. [14]

Теорема 2. Нехай $f(x) \in P[x]$ – многочлен степеня n, незвідний у полі P. Якщо n не є степенем двійки, то жодний з коренів рівняння $f(x) = 0$ не подається у квадратних радикалах над P.

Доведення. Припустимо, що деякий корінь α рівняння $f(x) = 0$ подається у квадратних радикалах над P. Тоді, згідно теореми 1, існує такий скінчений ланцюжок квадратичних розширень полів $\mathrm{P} = P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_k$, що $\alpha \in P_k$. Розглянемо тепер просте алгебраїчне розширення $\mathrm{P}(\alpha)$ поля P. Оскільки многочлен $f(x)$ незвідний у полі P, то $[P(\alpha): P] = n$. Очевидно, $\mathrm{P}(\alpha) \subseteq P_k$, бо $\alpha \in P_k$, тому $2^k = [P_k: P] = [P_k: P(\alpha)][P(\alpha): P] = [P_k: P(\alpha)] \cdot n$, звідки $n = 2^m$, де $0 < m \leq k$.

Отже, якщо n не є степенем двійки, то жодний з коренів рівняння $f(x) = 0$ не подається у квадратних радикалах над Р. [14]

Теорема 3. Кубічне рівняння $f(x) = 0$ з коефіцієнтами з поля Р розв'язне у квадратних радикалах над Р тоді і тільки тоді, коли воно має хоча б один корінь у полі Р.

Доведення. Справді, якщо многочлен 3-го степеня $f(x)$ не має коренів у полі Р, то він, як не важко зрозуміти, буде незвідним в полі Р. Згідно з теоремою 2, рівняння $f(x) = 0$ в цьому випадку буде нерозв'язним у квадратних радикалах над Р. Отже, якщо рівняння 3-го степеня $f(x) = 0$ розв'язне в квадратних радикалах над Р, то воно має хоча б один корінь в полі Р. Навпаки, якщо дане рівняння має корінь $x_0 \in P$, то після ділення $f(x)$ на $x - x_0$ рівняння $f(x) = 0$ зведеться до розв'язування квадратного рівняння з коефіцієнтами з поля Р, яке, очевидно, розв'язне у квадратних радикалах над Р. Отже, всі корені рівняння $f(x) = 0$ в цьому випадку подаються у квадратних радикалах над Р.

Теорема 4. Рівняння 4-го степеня $f(x) = 0$ з коефіцієнтами з поля Р розв'язне у квадратних радикалах над Р тоді і тільки тоді, коли його кубічна резольвента розв'язна у квадратних радикалах над Р. [14]

Доведення. Нехай кубічна резольвента рівняння $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + +cx + d = 0$ розв'язна у квадратних радикалах над Р. Тоді, вона має корінь $y_0 \in P$ і на основі відомих перетворень рівняння $f(x) = 0$ зведеться до вигляду: $(x^2 + +\frac{ax}{2} + y_0)^2 - (\alpha x + \beta)^2 = 0$, де $\alpha = \sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b}$, $\beta = \sqrt{y_0 - d}$. Отже, корені рівняння $f(x) = 0$ будуть подаватися у квадратних радикалах через коефіцієнти квадратних рівнянь $x^2 + (\frac{a}{2} + \alpha)x + (y_0 + \beta) = 0$ і $x^2 + \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)x + +(y_0 - \beta) = 0$, які, очевидно, подаються у квадратних радикалах над Р. Тому корені рівняння $f(x) = 0$ в даному випадку теж подаються у квадратних радикалах над Р. Навпаки, якщо корені рівняння $f(x) = 0$ подаються у квадратних радикалах над Р, то, позначивши через x_1, x_2 корені першого, а через x_3, x_4 – корені другого з наведених вище квадратних рівнянь, до яких зводиться рівняння $f(x) = 0$, за формулами Вієта дістанемо: $x_1x_2 = y_0 + \beta$, $x_3x_4 = y_0 - \beta$, звідки $y_0 = \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4)$. Отже, корінь y_0 кубічної резольвенти рівняння $f(x) = 0$ теж подається у квадратних радикалах над P. Оскільки подібним чином може бути виражений будь-який корінь кубічної резольвенти, то вона розв'язна у квадратних радикалах над P.

Наприклад, рівняння $x^4 + x + 1 = 0$ нерозв'язне у квадратних радикалах над полем Q раціональних чисел, оскільки його кубічна резольвента $8y^3 - 8y - 1 = 0$ не має раціональних коренів (даний факт легко перевірити, якщо зробити заміну $2y = z$: раціональними коренями рівняння $z^3 - 4z - 1 = 0$ можуть бути лише числа ± 1). Оскільки многочлен $x^4 + x + 1$, як неважко перевірити, незвідний у полі Q, то звідси випливає, що твердження, обернене до теореми 2, неправильне.

2.3 Необхідні і достатні умови розв'язності алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах.

Теорема 2 дає необхідну умову подання у квадратних радикалах над P хоча б одного кореня незвідного в полі P многочлена $f(x)$: для цього необхідно, щоб $deg f$ був степенем двійки. Однак, було б недоцільним ставити питання про знаходження достатніх умов подання у квадратних радикалах лише одного кореня многочлена, оскільки тоді виникла б проблема виділення серед всіх його коренів саме цього кореня. Тому будемо шукати достатні умови подання у квадратних радикалах всіх коренів многочлена $f(x)$ або, що те саме, розв'язності у квадратних радикалах рівняння $f(x) = 0$. Нехай $f(x)$ – многочлен $n-$го степеня з кільця $P[x]$, який в деякому розширенні поля P має n коренів $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Мінімальне поле Ω, яке містить поле P і всі корені $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ многочлена $f(x)$, називається нормою многочлена $f(x)$ і позначається $\Omega = P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Очевидно, норма Ω є деяким підполем поля розкладу многочлена $f(x)$, оскільки в полі Ω многочлен $f(x)$, буде розкладатись на лінійні множники: $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_nx + a_0 = a_n(x - \alpha_1)\dots(x - a_n)$. Поле Ω можна отримати в результаті скінченного ланцюжка простих алгебраїчних розширень:

P$\subseteq$P$(\alpha_1)\subseteq$P$(\alpha_1) \times (\alpha_2) \subseteq \ldots \subseteq$P$(\alpha_1)(\alpha_2)\ \ldots\ (\alpha_n) = \Omega$, тому поле Ω є скінченним розширенням поля P і кожен його елемент алгебраїчний над полем P. Зокрема, у випадку, коли многочлен $f(x)$ є незвідним в полі P квадратним тричленом: $f(x) =$ $= ax^2 + bx + +c\ (a, b, c\ \in P)$ і α_1, α_2 – його корені, $P(\alpha_1) = P(\alpha_1, \alpha_2) = \Omega$, оскільки в цьому випадку $\alpha_2 = -\frac{b}{a} - \alpha_1 \in P(\alpha_1)$. Отже, якщо $f(x)$ є незвідним в полі P квадратним тричленом, то його нормою є квадратичне розширення поля P, отримане приєднанням до P одного з його коренів. [14]

Доведемо тепер необхідну умову розв'язності алгебраїчного рівняння $f(x) =$ $= 0$ у квадратних радикалах.

Теорема 5. Якщо алгебраїчне рівняння $f(x) = 0$ з коефіцієнтами з поля P розв'язне у квадратних радикалах над P, то степінь норми Ω многочлена $f(x)$ відносно поля P є степенем двійки, тобто $[\Omega : P] = 2^m$.

Доведення. Нехай рівняння $f(x) = 0$ розв'язне у квадратних радикалах над P, тобто всі його корені $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ подаються у квадратних радикалах над P. Тоді, згідно з теоремою 1, існує такий ланцюжок квадратичних розширень полів P$\subseteq$P$_1\subseteq \ldots \subseteq$P$_k$, що $\alpha_1 \in$P$_k$. Якщо $\alpha_2 \notin$ P$_k$, то, оскільки α_2 тим більше подається у квадратних радикалах над P$_k$, вказаний ланцюжок квадратичних розширень можна продовжити: P$\subseteq$ P$_1\subseteq \ldots \subseteq$P$_k\subseteq \ldots \subseteq$ P$_m$ таким чином, що $\alpha_2 \in$ P$_m$. Продовжуючи аналогічно, отримуємо скінченний ланцюжок квадратичних розширень P$\subseteq$ P$_1\subseteq \ldots \subseteq$P$_s$ такий, що $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in$ P$_s$, тобто $\Omega=$ P$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\subseteq$P$_s$. Згідно з теоремою 3, $2^s = [P_s\colon P] = [P_s\colon \Omega][\Omega\colon \mathrm{P}]$, звідки випливає, що [Ω:P] є дільником числа 2^s, тобто [Ω:P]= 2^r, що й треба було довести.

Виявляється, що доведена нами необхідна умова розв'язності алгебраїчного рівняння $f(x) = 0$ у квадратних радикалах над P є також і достатньою. Ідея доведення достатності полягає в тому, що встановлюється існування між нормою Ω і полем P такого квадратичного розширення P$_1$ поля P, що P$\subseteq P_1 \subseteq \Omega$, звідки $[\Omega\ :$ $: P_1] = 2^m - 1$. Далі встановлюється існування квадратичного розширення P_2 поля P_1, яке міститься між P_1 і Ω:$P_1 \subseteq P_2 \subseteq \Omega$, звідки [Ω:$P_2$]= 2^{m-2}. Продовжуючи аналогічно, встановлюємо існування скінченого ланцюжка квадратичних розширень

Р$\subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_m$ такого що, $P_m = \Omega$. Згідно з теоремою 1, тоді всі елементи з Ω, в тому числі і корені $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ рівняння $f(x) = 0$, подаються у квадратних радикалах над Р. [14]

Перш ніж наводити строге доведення достатньої умови, встановимо два допоміжні твердження.

Лема 1. Якщо $f(x)$ *і* $p(x)$ – многочлени з кільця Р$[x]$, причому $p(x)$ незвідний в полі Р, і $f(x) \vdots\, p(x)$, то степінь норми Ω многочлена $f(x)$ відносно поля Р ділиться на степінь многочлена $p(x)$, тобто [Ω:Р]⋮ $degp$.

Доведення. Оскільки $f(x) \vdots\, p(x)$, то довільний корінь α многочлена $p(x)$ є також коренем многочлена $f(x)$, тому $\alpha \in \Omega$. Із незвідності многочлена $p(x)$ у полі Р випливає, що просте алгебраїчне розширення Р(α) має степінь $degp$ відносно поля Р: $[P(\alpha):P] = deg$p. При цьому Р$(\alpha) \subseteq \Omega$ і [Ω:Р] = [Ω:$P(\alpha)$][$P(\alpha)$: P], звідки [Ω:P] ⋮ $degp$.

Лема 2. Якщо Ω – норма незвідного в полі Р многочлена p(x)$\in$Р$[x]$ і [Ω:Р] = $= 2^m$, де $m > 1$, то існує такий незвідний у полі Р многочлен $q(x)$, що всі його корені належать Ω, $deg\, q < degp$; $i\ degq = 2^l$.

Доведення. Оскільки многочлен $p(x)$ ділиться сам на себе, то, згідно з лемою 1, $degp$ є дільником числа 2^m, тобто многочлен $p(x)$ має степінь $n = 2^k$, де $k \leq m$. При цьому $k > 1$, оскільки у випадку $k = 1$ отримали б, що [Ω:Р]= 2 всупереч умові $m > 1$, а при $k = 0$ мали б Ω=Р, що теж неможливо. Позначимо корені многочлена $p(x)$ через $a_1, \ldots, a_n$. Вони, очевидно, не належать полю Р, бо $p(x)$ незвідний в Р. Складаючи різні комбінації цих коренів по два, побудуємо елементи $\gamma_{ij} = \alpha_i \alpha_j + \lambda(\alpha_i + \alpha_j)$, де $i < j$, λ – деякий елемент поля Р. Всього таких елементів при фіксованому λ можна утворити $C_n^2 = \frac{n(n-1}{2} = 2^{k-1}(2^k - 1)$. Розглянемо тепер многочлен $\varphi(x) = \prod_{i,j(i<j)} x - \gamma_{ij}$, коренями якого є елементи γ_{ij} і лише вони. При дальшому доведенні леми істотне значення має вибір елемента $\lambda \in$ Р. Тому розглянемо окремо два випадки. [14]

a) Нехай для кожного значення $\lambda \in$ P серед елементів γ_{ij} знайдеться хоча б один, який буде належати полю P. Оскільки різних комбінацій по два з n коренів $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ є лише скінчена кількість, в той час як для елемента $\lambda \in$ P існує нескінченна кількість можливостей вибору, то знайдуться такі елементи $\lambda_1, \lambda_2 \in$ P і такі індекси $i, j,$ що елементи $\gamma_{ij} = \alpha_i\alpha_j + \lambda_1(\alpha_i + \alpha_j)$ і $\overline{\gamma_{ij}} = \alpha_i\alpha_j + \lambda_2(\alpha_i + \alpha_j)$ належатимуть полю P (нагадаємо, що поле P ми вважаємо нескінченним). Звідси дістанемо: $\alpha_i + \alpha_j = \frac{\gamma_{ij} - \overline{\gamma_{ij}}}{\lambda_1 - \lambda_2} = s \in P$, $\alpha_i\alpha_j = \gamma_{ij} - \lambda_1 s = t \in P$, тобто α_i і α_j є коренями квадратного тричлена $q(\text{x}) = x^2 – sx + t$ з коефіцієнтами з поля P. Цей тричлен незвідний у полі P, оскільки його корені α_i і α_j не належать полю P. У цьому випадку лема доведена, оскільки побудований тричлен $q(x)$ задовольняє її вимогам.

b) Нехай тепер елемент $\lambda \in$ P можна підібрати так, що жодний з елементів γ_{ij} не належить полю P. Тоді, як легко помітити, при вказаному значенні λ побудований вище многочлен φ(x) не змінюється при довільній перестановці коренів $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, тобто його коефіцієнти є симетричними многочленами від коренів $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, отже, ці коефіцієнти є елементами поля P. Корені γ_{ij} многочлена φ(x) належать нормі Ω многочлена p(x), тому $\Omega_1 \subseteq \Omega$, де Ω_1 – норма многочлена φ(x). Оскільки 2^m=[Ω:P]=[Ω:Ω_1][Ω_1:P] , то [Ω_1:P]= 2^k, де $k < m$. Многочлен φ(x) має степінь $2^{m-1}(2^m–1)$. Розкладемо його на незвідні в полі P множники. Степені всіх цих незвідних многочленів, що входитимуть в даний розклад, згідно з лемою 1, є дільниками числа 2^k тобто будуть степенями двійки. Незвідний множник найменшого степеня позначимо через $q(x)$. Неважко зрозуміти, що $degq = 2^t$, де $t \leq k–1$, бо інакше степені всіх незвідних множників були б степенями двійки, що перевищували б 2^k, тобто всі ці степені ділилися б на 2^k, а отже, і степінь 2^{k-1} $(2^k–1)$ многочлена φ(x) як сума степенів незвідних множників теж мав би ділитися на 2^k, а це не так , бо $2^k–1$ – непарне число. Отже, існує в полі P незвідний многочлен $q(x)$ степеня 2^t, де $t \leq k–1$, корені якого містяться в Ω. Таким чином, лема справджується і в даному випадку. [14]

Теорема 6. Якщо Ω – норма многочлена $f(x) \in P[x]$ і [Ω:P]= 2^m, то рівняння $f(x) = 0$ розв'язне у квадратних радикалах над P. [14]

Доведення. При $m = 0$ $\Omega =$ P, тому в цьому випадку, очевидно, рівняння $f(x) = 0$ розв'язне у квадратних радикалах над P. При $m = 1$ Ω є квадратичним розширенням поля P, тому, згідно з теоремою 1, рівняння $f(x) = 0$ в цьому випадку теж розв'язне у квадратних радикалах над P. Розглянемо основний випадок $m > 1$. Покажемо що тоді існує таке квадратичне розширення P_1 поля P, що $P \subseteq P_1 \subseteq \Omega$. Позначимо через $p(x)$ незвідний в полі P многочлен найменшого степеня із розкладу многочлена $f(x)$ на незвідні в полі P множники. Оскільки $f(x) \vdots p(x)$, то, згідно з лемою 1, $deg\, p = 2^k$, де $k \leq m$. При $k = 1$, $p(x)$ є многочленом 2-го степеня, і якщо α – його корінь, то квадратичне розширення $P_1 = P(\alpha)$ буде шуканим. У випадку $k > 1$ позначимо через Ω_1 норму многочлена $p(x)$. Оскільки $P \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega$, то $2^m = [\Omega:P] = [\Omega:\Omega_1][\Omega_1:P]$, тому $[\Omega_1:P] = 2^l$, $l \leq m$. При цьому $l > 1$, бо при $l = 1$, $deg = 2$ що суперечить зробленому припущенню. Тоді, згідно леми 2, існує незвідний у полі P многочлен $q(x) \in P[x]$ такий, що всі його корені лежать в Ω_1, а отже, і в Ω і $deg q = 2^t < deg p = 2^k$, тобто $t \leq k - 1$. Якщо многочлен $q(x)$ має степінь 2, то приєднання його коренів до поля P дасть шукане квадратичне розширення P_1 поля P. У протилежному випадку, міркуючи аналогічно, дістанемо незвідний у полі P многочлен $r(x) \in P[x]$, всі корені якого містяться в Ω і $deg q =$ $= 2^t$, де $t \leq k - 1$. Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо послідовність незвідних в полі P многочленів $p(x), q(x), r(x), \ldots$ з кільця $P[x]$, корені яких лежать у полі Ω, а їх степені є степенями двійки і послідовно зменшуються. Ця послідовність, очевидно, скінченна і останній її член $s(x)$ обов'язково є квадратним тричленом, тому приєднання його коренів до поля P дасть шукане квадратичне розширення P_1 поля P: $P \subseteq P_1 \subseteq \Omega$. При цьому $[\Omega: P_1] = 2^{m-1}$. Якщо $m - 1 > 1$, то, згідно з доведеним вище, знову існує таке квадратичне розширення P_2 поля P_1, що $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \Omega$, і т.д. Так ми прийдемо, нарешті, до такого поля P_{m-1}, яке є квадратичним розширенням P_{m-2}, що $P_{m-2} \subseteq P_{m-1} \subseteq \Omega$ і $[\Omega:P_{m-1}] = 2$. У результаті одержимо скінченний ланцюжок квадратичних розширень полів $P \subseteq P_1 \subseteq \ldots \ldots \subseteq P_{m-1} \subseteq$

$\subseteq\Omega$. Оскільки корені $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ рівняння $f(x) = 0$ належать нормі Ω, то, згідно теореми 1, дане рівняння розв'язне у квадратних радикалах над Р. Теорему доведено.

РОЗДІЛ ІІІ. ПОБУДОВНІСТЬ ЧИСЕЛ ЦИРКУЛЕМ ТА ЛІНІЙКОЮ.

3.1 Геометричні побудови циркулем і лінійкою на площині.

У задачах на побудову, які розглядаються в шкільному курсі геометрії, за даними геометричними фігурами (точками, прямими, відрізками, кутами) потрібно побудувати іншу фігуру, яка знаходиться в певних співвідношеннях з даними (наприклад, через дану точку провести пряму, яка б дотикалася до даного кола). При цьому дозволяється використовувати лише певні інструменти, як правило, циркуль і лінійку. Особлива роль цих інструментів в теорії геометричних побудов відображає особливу роль прямої і кола в елементарній геометрії.

"Монополія" лінійки і циркуля як засобів розв'язування задач на побудову була закріплена в "Началах" Евкліда. У зв'язку з цим обмеження засобів побудови лише циркулем і лінійкою стало історичною традицією. [14]

У задачах на побудову циркулем і лінійкою розглядаються фігури на площині, що складаються із скінченої кількості елементів наступного виду: точок, прямих, променів і відрізків прямих, кіл або їхніх дуг. При цьому промінь можна задати, вказавши пряму і точку на ній, відрізок – вказавши дві точки на прямій, дугу кола – вказавши дві точки на колі. Тому можна вважати, що всі фігури, які ми розглядаємо, складаються із скінченої кількості точок, прямих і кіл. Процес побудови шуканої фігури, виходячи з елементів заданих фігур, можна розбити на ряд послідовних кроків, кожний з яких може бути зведений до виконання однієї із наступних елементарних побудов: [14]

- знаходження точки перетину двох даних прямих; знаходження точок перетину даної прямої і даного кола;
- знаходження точок перетину двох даних кіл; проведення прямої через дві дані точки;
- проведення кола з центром в даній точці, яке проходить через дану точку.

3.2 Поняття побудовності чисел циркулем і лінійкою. Зв'язок з числовими полями.

У кожній задачі на побудову можна вважати деяку множину точок даною, а деяку іншу – шуканою, яку потрібно побудувати циркулем і лінійкою, виходячи із заданих точок. Якщо на площині вибрати деяку декартову систему координат, то можна вважати заданою деяку множину чисел (координати даних точок), а шуканою – іншу множину чисел (координати шуканих точок). Можна говорити про побудовність або непобудовність довільного дійсного числа ξ, виходячи з множини M заданих дійсних чисел. Множина M заданих чисел визначає систему $\bar{M}$ точок площини, обидві координати яких належать M. Говорять що число ξ побудоване циркулем і лінійкою, виходячи з множини M, якщо побудована циркулем і лінійкою, виходячи із системи $\bar{M}$, хоч одна точка площини, для якої ξ є однією з координат.

Іноді в задачах на побудову зручно інтерпретувати кожну точку площини не як пару (x, y) дійсних чисел, а як комплексне число $x + iy$. Вважатимемо, що комплексне число $\varsigma = \xi + \mathrm{i}\eta$ побудоване циркулем і лінійкою, виходячи з множини M дійсних чисел, якщо побудовними є, виходячи з M, дійсні числа ξ і η. Оскільки множина $\bar{M}$ заданих точок непорожня, то систему координат можна вибрати так, щоб абсциса однієї з точок множини $\bar{M}$ дорівнювала одиниці, тобто завжди можна вважати, що $1 \in M$. [18]

Теорема 7. Сукупність N чисел, які можна побудувати циркулем і лінійкою, виходячи з даної множини M дійсних чисел, утворює числове поле.

Доведення. Оскільки множина N є підмножиною поля C комплексних чисел, то достатньо перевірити, що множина N замкнена відносно операцій додавання, віднімання, множення і ділення. Зрозуміло, що числа a і $|a|$ побудовні або непобудовні одночасно. Нехай $a, b \in N$. Тоді $|a|, |b|$ теж належать N. Припустимо, що $|b| \le |a|$. Оскільки $|a \pm b| = \begin{cases} |a| \pm |b|, \text{ÿêùî} \ \ ab \ge 0, \\ |a| \mp |b|, \text{ÿêùî} \ ab \le 0 \end{cases}$ то побудова чисел $a \pm b$ зводиться до побудови на деякій прямій суми і різниці двох відрізків, що мають довжини $|a|$ і $|b|$ ($|a| \geq |b|$). Це завжди можна зробити циркулем і лінійкою. Звідси випливає, що $(a \pm b) \in N$. Побудова числа ab зводиться до побудови числа $|ab| = |a| \times |b|$, що рівносильно побудові четвертого пропорційного відрізка для відрізків, що мають довжини 1, $|a|, |b|$ відповідно. Справді, якщо $\frac{1}{|a|} = \frac{b}{x}$, то $x = |a| \times |b|$. Якщо $b \neq 0$, то відрізок довжиною $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ теж побудовний циркулем і лінійкою як четвертий пропорційний для відрізків, що мають довжини $|b|$, $|a|$, 1 відповідно: $\frac{|b|}{a} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{|a|}{|b|}$. Отже, множина N замкнена відносно операцій додавання, віднімання, множення і ділення, тому є полем. [18]

3.3 Необхідні і достатні умови побудовності числа циркулем і лінійкою

Перш ніж формулювати необхідні і достатні умови побудовності числа циркулем і лінійкою, розглянемо декілька допоміжних тверджень. [18]

Лема 3. Виходячи з поля P, за допомогою лише лінійки не можна побудувати жодного числа, що не міститься в P.

Доведення. За допомогою лінійки можна побудувати лише пряму (промінь, відрізок), що проходить через дані дві точки, або знайти точку перетину двох таких прямих. Нехай $M_1(a_1, b_1)$, $M_2(a_2, b_2)$ – дві задані точки, тобто їх координати a_1, a_2, b_1, b_2 належать полю P. Рівняння прямої M_1M_2, як відомо, записується у вигляді $\frac{x-a_1}{a_2-a_1} = \frac{y-b_1}{b_2-b_1}$, або $(b_2 - b_1)x - (a_2 - a_1)y + (b_1a_2 - b_2a_1) = 0$. Коефіцієнти цього рівняння раціонально виражаються через a_1, a_2, b_1, b_2 і тому теж належать полю P. Якщо тепер дано дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + {+C_2} = 0$, заданих вказаним чином, то їх коефіцієнти є елементами поля P. Тоді координати точки їхнього перетину (якщо така існує) є розв'язком системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими: $x = \frac{B_1C_2-C_1B_2}{A_1B_2-A_2B_1}$, $y = \frac{A_2C_1-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}$, тому теж належать полю P. Отже, виходячи з поля P, за допомогою однієї лише лінійки не можна побудувати жодного числа, яке б не містилося в полі P.

Лема 4. Якщо число x побудовне, виходячи з поля Р, внаслідок одного застосування циркуля, то воно належить або полю Р, або деякому його квадратичному розширенню.

Доведення. Нехай одноразовим застосуванням циркуля ми побудували коло з центром в точці (a_1, b_1) і яке проходить через дану точку (a_2, b_2). Його рівняння запишеться у вигляді $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2$, де a_1, a_2, b_1, $b_2 \in P$. Після спрощення отримаємо: $x^2+y^2+px+qy+r=0$. Число x_0, яке при цьому отримається, може бути або абсцисою точки перетину цього кола з деякою заданою прямою $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}=0$, або абсцисою точки перетину цього кола з деяким заданим колом $x^2+y^2+p_1x+q_1y+r_1=0$. У першому випадку для абсциси точки перетину отримаємо рівняння $x^2+(-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B})^2+px+q((-\frac{A}{B}x-$ $-\frac{C}{B})+r=0$. У другому випадку, віднімаючи рівняння кіл почленно, дістанемо: $(\mathrm{p}-p_1)x+(q-q_1)y++r-r_1=0$. Виражаючи звідси y через x і підставляючи в рівняння отриманого кола, знову прийдемо до квадратного рівняння з коефіцієнтами з поля Р, якому повинна задовольняти абсциса точки перетину вказаних двох кіл. Отже, в обох випадках x_0 належить або полю Р, або деякому його квадратичному розширенню, що отримується приєднанням до поля Р коренів отриманого квадратного рівняння. Аналогічні міркування справджуються також у випадку, коли в ролі шуканого числа береться ордината точки перетину заданих кола і прямої або двох кіл.

Лема 5. Якщо Р – квадратичне розширення поля Р, то всі числа з Р побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля Р.

Доведення. Нехай $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(\alpha)$, де α – корінь незвідного в полі Р квадратного тричлена x^2+px+q $(p, q \in P)$, тобто $\alpha=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Очевидно, α раціонально виражається через коефіцієнти даного тричлена і число $\sqrt{d}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Відрізок довжиною $\sqrt{d}$ є середнім пропорційним для відрізків з довжинами 1 та d, тому він може бути побудований циркулем і лінійкою. Отже число α побудовне циркулем і лінійкою, виходячи з поля Р. Звідси випливає, що всі числа поля Р подаються у вигляді $a + b\alpha$, де a , $b \in P$, побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля Р.

Теорема 8. Число x побудовне циркулем і лінійкою, виходячи з поля Р, тоді і тільки тоді, коли існує скінчений ланцюжок квадратичних розширень полів $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 \subseteq \mathrm{P}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{P}_k$ такий, що $x \in \mathrm{P}_k$.

Доведення. *Необхідність*. Нехай число х отримане з чисел поля Р в результаті застосування скінченого числа разів лінійки і циркуля. З лем 3, 4 випливає, що застосувавши один раз лінійку або циркуль до чисел поля Р, ми побудуємо число, яке належить полю Р або деякому його квадратичному розширенню P_1. Виходячи вже з поля P_1, всі елементи якого, згідно з лемою 5, побудовні циркулем і лінійкою, і застосовуючи один раз циркуль або лінійку, побудуємо число, яке належить полю P_1 або деякому його квадратичному розширенню P_2. Продовжуючи аналогічно, отримаємо скінчений ланцюжок квадратичних розширень полів $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 \subseteq \mathrm{P}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{P}_k$ такий, що $\mathrm{x} \in \mathrm{P}_k$.

Достатність. Нехай існує вказаний в теоремі скінчений ланцюжок квадратичних розширень полів. Тоді, згідно з лемою 5, всі числа поля P_1 побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля Р. Аналогічно, всі числа поля P_2 побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля P_1, а отже із поля Р. Міркуючи аналогічно, отримаємо, що всі числа поля P_k, зокрема, й число х, побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля Р. [18]

Із щойно доведеної теореми і теорем 1–6 безпосередньо отримується ряд наслідків.

Наслідок 1. Число α побудовне циркулем і лінійкою, виходячи з поля Р, тоді і тільки тоді, коли α подається у квадратних радикалах над Р.

Наслідок 2. Нехай $f(x) \in P[x]$ – многочлен степеня n, незвідний у полі Р. Якщо n не є степенем двійки, то жодний з коренів рівняння $f(x) = 0$ не побудовний циркулем і лінійкою, виходячи з поля Р.

Наслідок 3. Корені кубічного рівняння з коефіцієнтами з поля Р побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля P , тоді ітільки тоді, коли це рівняння має хоча б один корінь в полі P.

Наслідок 4. Корені рівняння 4-го степеня з коефіцієнтами з поля P побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля P, тоді і тільки тоді, коли побудовними є корені його кубічної резольвенти.

Наслідок 5. Корені алгебраїчного рівняння $f(x) = 0$ з коефіцієнтами з поля P побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля P, тоді і тільки тоді, коли степінь норми Ω многочлена $f(x)$ відносно поля P є степенем двійки, тобто $[\Omega:P]=2^m$. [18]

3.4 Нерозв'язність трьох класичних задач на побудову.

Близько двох з половиною тисяч років тому геометрами древньої Греції було виявлено деякі задачі, які неможливо було розв'язати за допомогою циркуля і лінійки. Найбільш відомими серед них є проблеми подвоєння куба, трисекції кута і квадратури круга. Простота формулювання зазначених задач і безрезультатність багатьох спроб їх розв'язання спричинили надзвичайну популярність цих проблем навіть серед не математиків. Строге доведення їх нерозв'язності циркулем і лінійкою було отримане лише в XIX ст., коли в алгебрі многочленів були встановлені критерії побудовності чисел. [22]

1. Подвоєння куба. Ця задача полягає в побудові куба, об'єм якого вдвічі більший за об'єм даного куба. Якщо прийняти довжину ребра даного куба за 1, а довжину ребра куба вдвоє більшого об'єму позначити через x, то дістанемо співвідношення $x^3 = 2$. Отже, задача зводиться до побудови циркулем і лінійкою числа $\sqrt[3]{2}$ виходячи з поля Q раціональних чисел, тобто кореня кубічного рівняння $x^3 - 2 = 0$. Неважко переконатися, що дане рівняння не має раціональних коренів, тому, згідно з наслідком 3, жодний його корінь не може бути побудований, виходячи з поля Q. Отже, задача подвоєння куба нерозв'язна за допомогою циркуля і лінійки.

2. Трисекція кута. Ця задача полягає в поділі довільного кута на три рівні частини. Нехай φ – даний кут (рис 1). Проведемо коло одиничного радіуса з центром у вершині O даного кута і виберемо систему координат так, щоб її початок збігався з точкою O, а вісь абсцис – з однією із сторін кута. Точку A, а отже, і відрізок OM = cosφ можна вважати заданим разом з кутом φ.

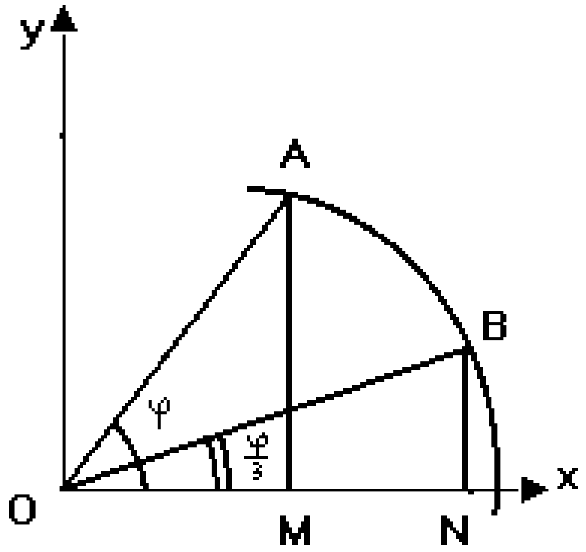

рис. 1

Задача буде розв’язана, якщо ми побудуємо точку B або відрізок ON=cos$\frac{\varphi}{3}$. Таким чином, вихідним полем P в цій задачі є мінімальне поле, що містить числа 1 та $a = cos\varphi$, тобто або поле Q (якщо a – раціональне число). Або поле $Q(a)$ (якщо a – ірраціональне число). Виходячи з цього поля, слід побудувати число x_0= cos$\frac{\varphi}{3}$. Оскільки $\cos\varphi = 4cos^3\frac{\varphi}{3} - 3cos\frac{\varphi}{3}$, то $a = 4x_0^3$, тобто x_0 є коренем кубічного рівняння $4x^3 - 3x - a = 0$. На основі наслідку 3 можна стверджувати, що задачу трисекції кута можна розв’язати за допомогою циркуля і лінійки тоді і тільки тоді, коли вказане рівняння має хоча б один корінь в полі P, а це залежить від конкретних числових значень параметра a $= cos\varphi$. Можна навести скільки зовгодно прикладів таких значень φ, а отже, і значень a $= cos\varphi$, при яких вказане рівняння не має коренів в полі P, тобто жодний його корінь не побудовний циркулем і лінійкою, виходячи з поля P. Наприклад, при $\varphi = 60°$, a $= cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\text{P} = Q$, тому рівняння набуває вигляду: $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ або $6x^3 - 6x - 1 = 0$. Неважко перевірити, що дане рівняння не має раціональних коренів (для спрощення такої перевірки можна зробити заміну $2x = $ y, звівши таким чином рівняння до вигляду: $y^3 - 3y - 1 = 0$). Отже, кут 60^0 не можна поділити на три рівні частини циркулем і лінійкою. Оскільки не для кожного φ можлива побудова кута $\frac{\varphi}{3}$, то задача трисекції кута в загальному вигляді нерозв'язна за допомогою циркуля і лінійки.

3. Квадратура круга. Ця задача полягає в побудові квадрата, рівновеликому даному кругу, тобто квадрата, який має таку саму площу, як і даний круг. Ця задача була найбільш відомою і разом з тим найбільш важкою з усіх класичних проблем. Якщо прийняти радіус даного круга за одиницю, то його площа, як відомо, дорівнює π. Отже, задача зводиться до побудови відрізка довжиною $\sqrt{\pi}$, якщо задано одиничний відрізок. Таким чином, питання про можливість або неможливість побудови циркулем і лінійкою, виходячи з поля Q, числа$\sqrt{\pi}$, або, що рівносильно, π. У 1882 р. німецький математик Ф. Ліндеман встановив, що число π трансцендентне, тобто не є коренем жодного многочлена з цілими коефіцієнтами. Це означає, що число π не можна побудувати циркулем і лінійкою, виходячи з поля Q, бо інакше число π подавалося б у квадратних радикалах над Q, тобто було б коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами. Отже, проблема квадратури круга нерозв'язна за допомогою циркуля і лінійки. [22]

3.5 Поділ кола на рівні частини (побудова правильних многокутників).

Задача поділу кола на n рівних частин полягає в побудові правильного n −кутника, вписаного в це коло. Зрозуміло, що радіус цього кола можна вважати рівним 1. Уже в стародавній Греції було помічено, що в той час, як деякі правильні n −кутники (наприклад, при $n = 3,4,5,6,8,10,12$) можна побудувати циркулем і лінійкою досить легко, при інших значеннях n $(7,9,11,13)$ це не вдається зробити. Повну відповідь на питання, при яких n правильний n-кутник допускає побудову за допомогою циркуля і лінійки, дав німецький математик К. Гаусс у кінці XXIII ст.

Переходячи до викладу результатів Гаусса, зробимо деякі попередні зауваження. [17]

Зауваження 1. Якщо правильний n-кутник побудовний циркулем і лінійкою, то таким буде і довільний правильний многокутник із числом сторін $2n$ для довільного натурального π. Справді, довільну дану дугу кола можна поділити на дві рівні частини за допомогою циркуля і лінійки, тому число вершин правильного n-кутника, вписаного в коло, завжди можна подвоїти.

Зауваження 2. Якщо побудовний циркулем і лінійкою правильний n $-$кутник із числом сторін $n = n_1 \cdot n_2$, то побудовними є і правильні многокутники з числом сторін n_1 та n_2 відповідно.

Справді, взявши по n_1 сусідніх дуг, на які поділяє коло вписаний в нього правильний n-кутник, отримаємо поділ кола на n_2 рівних частин, а взявши по n_1 сусідніх дуг, отримаємо поділ кола на n_1 рівних частин.

Зауваження 3. Якщо побудовні циркулем і лінійкою правильні многокутники з числом сторін n_1 і n_2, де $(n_1, n_2) = 1$, то побудовний і правильний многокутник з числом сторін $n = n_1 \cdot n_2$

Справді, якщо $(n_1, n_2) = 1$, то знайдуться такі натуральні числа m_1 і m_2, що $n_1 m_1 - n_2 m_2 = \pm 1$, звідки $m_1 \frac{1}{n_2} - m_2 \frac{1}{n_1} = \pm \frac{1}{n_1 n_2}$. Остання рівність показує, що з побудовності дуг, які дорівнюють $\frac{1}{n_1}$ і $\frac{1}{n_2}$ частинам кола, випливає побудовність дуги, що дорівнює $\frac{1}{n_1 n_2}$ частині кола, тобто правильного много-кутника з числом сторін $n_1 \cdot n_2$.

Нагадаємо, що довільне натуральне число n можна єдиним чином подати у вигляді: $n = 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – різні непарні прості числа. Оскіль-ки числа p_1, p_2 , … , p_s будуть при цьому попарно взаємно простими, то з попередніх тверджень безпосередньо отримується наступна теорема. [17]

Теорема 9. Для того, щоб правильний многокутник з числом сторін $n =$ $= 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ був побудовний циркулем і лінійкою, необхідно і достатньо, щоб були побудовними правильні многокутники $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot\times \ldots \cdot p_s^{k_s}$ відповідно.

Враховуючи теорему 9, тепер достатньо з'ясувати питання про побудовність циркулем і лінійкою правильного многокутника, число сторін якого є непарним простим числом або степенем такого числа.

Теорема 10. Якщо p – непарне просте число, то правильний p - кутник побудовний циркулем і лінійкою тоді і тільки тоді, коли $p = 2^n + 1$.

Доведення. Розглянемо двочленне рівняння $z^p - 1 = 0$, коренями якого в полі С є всі корені p - го степеня з одиниці: $\varepsilon_k = cos\frac{2\pi k}{p} + isin\frac{2\pi k}{p}$ $(k = 0,1, \dots p-1)$, які геометрично зображаються точками комплексної площини, розміщеними у вершинах правильного p - кутника, вписаного в одиничне коло. Для побудовності цього правильного p - кутника необхідно і достатньо, щоб було побудовним, виходячи з поля Q, комплексне число $\varepsilon_1 = cos\frac{2\pi}{p} + isin\frac{2\pi}{p}$. Справді, якщо це число побудовне, то будуть відомі дві сусідні вершини ($\varepsilon_0 = 1$ та ε_1) правильного p - кутника, вписаного в одиничне коло, тому побудовним буде і сам p - кутник. Навпаки, якщо правильний p - кутник побудовний циркулем і лінійкою, то, помістивши початок системи координат в його центр і направивши осі так, щоб одна з його вершин мала координати (1,0), дістанемо, що сусідня з нею (при русі годинникової стрілки) вершина зображатиме комплексне число ε_1. Оскільки $z^p - -1 = (z-1)(z^{p-1} + \dots + z + 1)$ і ε_1 є коренем многочлена $f(z) = z^{p-1} + \dots + z + +1$, який незвідний у полі Q, то для побудовності числа ε_1 циркулем і лінійкою необхідно, згідно з наслідком 2, щоб виконувалась умова: $p - 1 = 2^m$, тобто $p = = 2^m + 1$. Ця умова є достатньою для побудовності циркулем і лінійкою числа ε_1. Справді, в нашому випадку норма Ω многочлена $f(z)$ збігається з простим алгебраїчним розширенням $Q(\varepsilon_1)$. Це випливає з того, що всі інші корені многочлена $f(z)$ раціонально виражаються через ε_1: $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_1^3, \dots$, $\varepsilon_{3-1} = = \varepsilon_1^{3-1}$, тобто вони належать полю $Q(\varepsilon_1)$. Оскільки многочлен $f(z)$ незвідний у полі Q, то [Ω:Q] = [$Q(\varepsilon_1)$:Q] = p–1. У випадку $\mathrm{p} = 2^m + 1$ будемо мати: [Q:P]= 2^m і, згідно з наслідком 5, всі корені многочлена $f(z)$, в тому числі й ε_1, побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з поля Q. Теорему доведено.

Прості числа виду $\text{p} = 2^m + 1$ називаються простими числами Ферма (на честь французького математика П. Ферма). Для того, щоб число вказаного виду було простим, необхідно, щоб показник m був степенем двійки. Справді, якщо $m = nk$, де $k > 1$ – непарне число, то $2^m + 1 = (2^n + +1)((2^n)^{k-1} - 2^n)^{k-2} + \cdots - -2^n + 1$ і тому не є простим числом. Ферма висловив припущення, що числа виду: $F_n = 2^{2^n} + 1$ є простими для всіх $n = 0,1, \dots$. Справді, числа $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ є простими. Але вже число F_5, як встановив Л. Ейлер, є складеним ($F_5 = 641 \cdot 6700417$). Крім вказаних перших п'яти простих значень до нашого часу не знайдено більше жодного простого числа Ферма. [17]

Теорема 11. Якщо p – непарне просте число і $k \geq 2$ – довільне натуральне число, то правильний n - кутник з числом сторін $n = p^k$ не можна побудувати циркулем і лінійкою.

Доведення. Достатньо довести, що така побудова неможлива вже для $k = 2$, оскільки при $k > 2$, згідно із зауваженням 2, з побудовності правильного p^k- кутника випливала б побудовність правильного p^2 - кутника. Міркуючи аналогічно, як і при доведенні теореми 10, переконуємось, що для побудовності циркулем і лінійкою правильного p^2 - кутника необхідно і достатньо, щоб був побудовний корінь $\eta_1 = cos\frac{2\pi}{p^2} + isin\frac{2\pi}{p^2}$ многочлена $\varphi(z) = z^{p^2} - 1$. Многочлен $\varphi(z)$ звідний у полі Q; він ділиться, наприклад, на многочлен $\omega(z) = z^p - 1$. Оскільки η_1 не є коренем $\omega(z)$ (бо $\omega(\eta_1) = cos\frac{2\pi}{p} + isin\frac{2\pi}{p} - 1 \neq 0$), то η_1 є коренем частки $\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{\omega(z)} = \frac{z^{p^2}-1}{z^p-1} = z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \cdots + z^p + 1$. Покажемо, що многочлен $\psi(z)$ незвідний у полі Q. Зауважимо спочатку, що при діленні многочленів з цілими коефіцієнтами у випадку, коли старший коефіцієнт дільника рівний одиниці, всі коефіцієнти частки визначаються через коефіцієнти діленого і дільника за допомогою дій лише віднімання і множення. Тому якщо всі коефіцієнти діленого і дільника (крім старших) діляться на якесь просте число p, то й усі коефіцієнти частки (крім старшого) ділитимуться на p. Зробивши тепер у многочлені

$\psi(z)$заміну $z = u + 1$, дістанемо: $\psi(z) = \varphi_1(u) = \frac{\varphi(u+1)}{\omega(u+1)} = \frac{(u+1)p^2-1}{(u+1)^p-1}$. Старший коефіцієнт многочлена $\omega(u+1) = (u+1)^p - 1$ дорівнює 1, решта ж його коефіцієнтів, діляться на p. Аналогічно, старший коефіцієнт многочлена $\varphi(u+$ $+1) = (u+1)p^2 - 1$ дорівнює 1, а всі інші його коефіцієнти діляться на p. Справді, розкладаючи $(u+1)p^2$ за формулою бінома Ньютона, отримаємо, що коефіцієнт біля $u^{p^2} - k$ буде: $C_{p^2}^k = \frac{p^2(p^2-1)\dots\cdot(p^2-k+1)}{k!}$. Тут p^2 вже може не бути взаємно простим з $k!$, бо не виключається умова $k \geq p$, але в останньому випадку p^2 і $k!$ матимуть не більше одного спільного множника p, бо $k < \mathrm{p}^2$. В усякому разі, цей коефіцієнт ділиться на p. Враховуючи зроблене вище зауваження, звідси виводимо, що всі коефіцієнти частки $\varphi_1(u)$, крім старшого, діляться на p. Оскільки $\varphi_1(u) =$ $(u+1)^{p(p-1)} + (u+1)^{p(p-2)} + \dots + (u+1)^p + 1$, то старший коефіцієнт многочлена $\varphi_1(u)$ дорівнює 1, а вільний член – p. Згідно з критерієм Ейзенштейна, многочлен $\varphi_1(u)$, а отже, і многочлен $\psi(z)$ незвідні в полі Q. За наслідком 2 для побудовності кореня η_1 многочлена $\psi(z)$ необхідно, щоб $deg\,\psi$ був степенем двійки, тобто $p(p-1) = 2^m$. Проте ця умова не може справджуватися для жодного непарного простого числа p. Цим теорему доведено. [18]

Об'єднуючи твердження, встановлені в теоремах 9–11, сформулюємо остаточний результат.

Теорема 12. Для того, щоб правильний n - кутник можна було побудувати циркулем і лінійкою, необхідно і достатньо, щоб n подавалося у вигляді $n = 2^k \cdot$ $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$, де $p_1, p_2, \dots, p_s$ – різні прості числа Ферма.

Приклад 1. Вказати спосіб побудови циркулем і лінійкою правильного 17-кутника.

Розв'язання. Згідно теореми 10, правильний 17-кутник допускає побудову циркулем і лінійкою. Задача зводиться, як зазначалося вище, до побудови циркулем і лінійкою одного із значень $\sqrt[17]{1}$, а саме, значення $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{17} + isin\frac{2\pi}{17}$, тобто точки з координатами $(cos\frac{2\pi}{17}, sin\frac{2\pi}{17})$, яка лежить на одиничному колі. Для цього достатньо побудувати одне з дійсних чисел, що є координатами цієї точки, наприклад, $cos\frac{2\pi}{17}$. Як відомо, $\sqrt[17]{1}$ має в полі C 17 різних значень. Іншими значеннями, крім ε, як неважко зрозуміти, будуть числа $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{16}, \varepsilon^{17} = 1$. Отже, для побудови циркулем і лінійкою правильного 17-кутника достатньо вказати спосіб побудови відрізка довжиною $\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon^{16} = 2cos\frac{2\pi}{17}$. Оскільки $\varepsilon,\ \varepsilon^2, \dots,\ \varepsilon^{17}$ є коренями многочлена $z^{17} - 1 = 0$ (причому це будуть всі його корені), то, згідно з формулами Вієта, $\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{17} = 0$, звідки $\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{16} = -\varepsilon^{17} = -1$. Позначимо:

$$(\varepsilon + \varepsilon^{16}) + (\varepsilon^2 + \varepsilon^{15}) + (\varepsilon^4 + \varepsilon^{13}) + (\varepsilon^8 + \varepsilon^9) = \gamma_1\,,$$

$$(\varepsilon^3 + \varepsilon^{14}) + (\varepsilon^5 + \varepsilon^{12}) + (\varepsilon^6 + \varepsilon^{11}) + (\varepsilon^7 + \varepsilon^{10}) = \gamma_2.$$

З попередньої рівності випливає, що $\gamma_1 + \gamma_2 = -1$. З іншого боку, враховуючи рівність $\varepsilon^{17} = 1$, неважко встановити, що $\gamma_1\gamma_2 = -4$. Справді, оскільки γ_1 і γ_2 є сумами восьми доданків, то $\gamma_1\gamma_2$ буде сумою 64-ох доданків, кожний з яких буде степенем числа ε. Якщо в кожному з тих доданків в який ε входить з показником, не меншим 17, замінити ε^{17} одиницею, то отримаємо як неважко перевірити безпосереднім підрахунком, що $\gamma_1\gamma_2 = 4(\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{16}) = -4$. З рівностей $\gamma_1 + \gamma_2 = -1$, $\gamma_1\gamma_2 = -4$ випливає, що γ_1 і γ_2 є коренями квадратного рівнян – ня $\gamma^2 + \gamma - 4 = 0$, тобто $\gamma_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Обидва ці корені допускають побудову циркулем і лінійкою, виходячи з поля Q . Щоб вказати конкретні значення γ_1 і γ_2, зауважимо, що

$$\gamma_2 = (\varepsilon^3 + \varepsilon^{14}) + +(\varepsilon^5 + \varepsilon^{12}) + (\varepsilon^6 + \varepsilon^{11}) + (\varepsilon^7 + \varepsilon^{10}) =$$

$$= \left(\varepsilon^3 + \frac{1}{\varepsilon^3}\right) + \left(\varepsilon^5 + \frac{1}{\varepsilon^5}\right) + \left(\varepsilon^6 + \frac{1}{\varepsilon^6}\right) + \left(\varepsilon^7 + + \frac{1}{\varepsilon^7}\right) =$$

$$= 2\left(cos\frac{6\pi}{17} + +cos\frac{10\pi}{17} + cos\frac{12\pi}{17} + cos\frac{14\pi}{17}\right) < 0,$$

тому $\gamma_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $\gamma_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Маючи числа γ_1 і γ_2, можна побудувати циркулем і лінійкою числа

$$\beta_1 = (\varepsilon + \varepsilon^{16}) + (\varepsilon^4 + \varepsilon^{13})\,, \qquad \beta_2 = (\varepsilon^2 + \varepsilon^{15}) + (\varepsilon^8 + \varepsilon^9)\,,$$

$$\beta_3 = (\varepsilon^3 + \varepsilon^{14}) + +(\varepsilon^5 + \varepsilon^{12}), \qquad \beta_4 = (\varepsilon^6 + \varepsilon^{11}) + (\varepsilon^7 + \varepsilon^{10}).$$

Справді, неважко перевірити, що $\beta_1 + \beta_2 = \gamma_1$, $\beta_1\beta_2 = -1$, тому β_1 і β_2 є коренями квадратного рівняння $\beta^2 - \gamma_1\beta - 1 = 0$, тобто $\beta_{1,2} = \frac{\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2+4}}{2}$. Аналогічно, $\beta_3 + \beta_4 = \gamma_2$, $\beta_3 + \beta_4 = -1$, тому β_3 і β_4 є коренями квадратного рівняння $\beta^2 - -\gamma_2\beta - 1 = 0$, тобто $\beta_{3,4} = \frac{\gamma_2 \pm \sqrt{\gamma_2^2+4}}{2}$. Оскільки

$$\beta_1 = (\varepsilon + \varepsilon^{16}) + (\varepsilon^4 + \varepsilon^{13}) = \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) + \left(\varepsilon^4 + \frac{1}{\varepsilon^4}\right) = 2\left(cos\frac{2\pi}{17} + cos\frac{8\pi}{17}\right) > 0,$$

$$\beta_4 = (\varepsilon^6 + \varepsilon^{11}) + (\varepsilon^7 + \varepsilon^{10}) = \left(\varepsilon^6 + \frac{1}{\varepsilon^6}\right) + \left(\varepsilon^7 + \frac{1}{\varepsilon^7}\right) =$$

$$= 2\left(cos\frac{12\pi}{17} + os\frac{14\pi}{17}\right) < 0,$$

то $\beta_1 == \frac{\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2+4}}{2}$, $\beta_2 = \frac{\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2+4}}{2}$, $\beta_3 = \frac{\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2+4}}{2}$, $\beta_4 = \frac{\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2+4}}{2}$.

Оскільки числа γ_1 і γ_2 побудовні циркулем і лінійкою, то теж саме справджується і для чисел β_1, β_2, β_3, β_4. Позначимо, далі, $\varepsilon + \varepsilon^{16} = \alpha_1$, $\varepsilon^4 + +\varepsilon^{13} = \alpha_2$. Тоді, як неважко перевірити безпосередньо, $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1$, $\alpha_1\alpha_2 = \beta_3$, тому α_1 і α_2, є коренями квадратного рівняння $\alpha^2 - \beta_1\alpha + \beta_3 = 0$, тобто $\alpha_{1,2} = \frac{\beta_2 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}$, причому обидва корені є дійсними числами. Справді, з отриманих виразів для γ_1, γ_2, β_1, β_3 безпосередньо отримуються такі оцінки: $\frac{3}{2} < \gamma_1 < 2$, $-3 < \gamma_2 < -\frac{5}{2} - 3$, $\beta_1 > \frac{7}{4}$, $\beta_3 < \frac{3}{4}$, звідки $\beta_1^2 - 4\beta_3 > 0$. Оскільки

$$\alpha_1 = \varepsilon + \varepsilon^{16} = \varepsilon + \frac{1}{3} = 2cos\frac{2\pi}{17}, \ \alpha_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{13} = \varepsilon^4 + \frac{1}{\varepsilon_4} = 2cos\frac{8\pi}{17}, \text{то } \alpha_1 > \alpha_2,$$

$$\text{тому } \alpha_1 = \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}, \ \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}.$$

З побудовності циркулем і лінійкою чисел β_1 і β_3 випливає побудовність циркулем і лінійкою числа $\alpha_1 = 2cos\frac{2\pi}{17}$, що рівносильно поділу одиничного кола на 17 рівних частин. [18]

3.6 Основні положення проективної геометрії

1. *Подвійне відношення, гармонійні ряди точок і пучок променів, інволюція на прямій лінії.* [1]

а) Якщо A, B, C, D - чотири точки деякої прямої, то вираз

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{BC}}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{\overline{BD}}} = (ABCD)$$

називають подвійним або антигармонійним відношенням цих чотирьох точок.

Наведемо теорему Паппа:

Теорема Паппа. Нехай A, B, C — три точки на одній прямій, A', B', C' — три точки на іншій прямій. Нехай три прямі AB', BC', CA' перетинають три прямі $A'B$, $B'C$, $C'A$, відповідно у точках X, Y, Z. Тоді точки X, Y, Z лежать на одній прямій (рис.2).

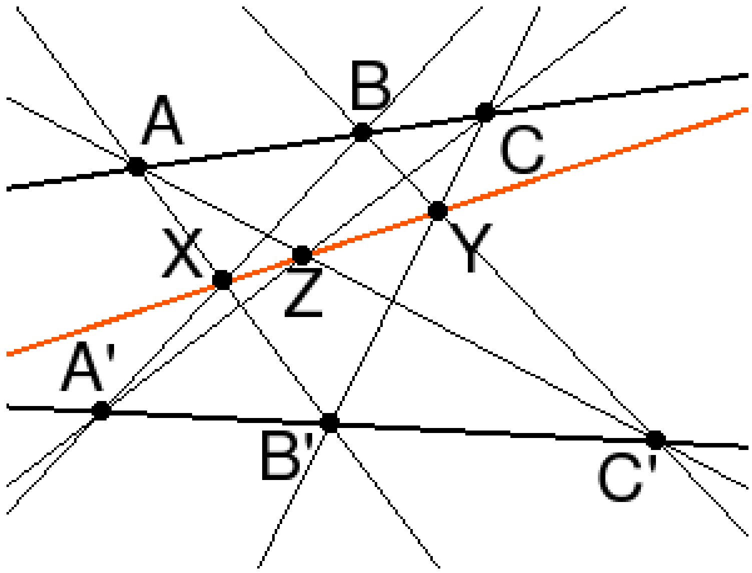

Рис. 2

Це подвійне відношення, яке, як відомо, згідно з теоремою Паппа, не змінюється при проектуванні. Тобто, якщо ці чотири точки спроектувати на другу пряму, то аналогічно утворене відношення точок дорівнює подвійному відношенню даних точок.

Під подвійним відношення чотирьох точок пучка розуміють подвійне відношення чотирьох точок, у яких ці промені перетинаються з довільною прямою.

Якщо чотири точки мають подвійне відношення, рівне – 1, то вони називаються чотирма гармонійними точками.

Чотири промені пучка носять назву чотирьох гармонійних променів, якщо вони перетинаються з якою-небудь прямою у чотирьох гармонійних точках.

b) Якщо A та A' - точки прямої, то на ній можна знайти нескінченну множину пар точок B, B', які разом з A, A' будуть чотирма гармонійними точками, причому пара точок A, A' розділяється парою точок B, B'.

Якщо точка B рухається вздовж прямої (при нерухомих A, A'), то переміщається і точка B'. Зокрема, якщо точка B співпадає з серединою відрізка AA', то точка B' видаляється у нескінченність.

Якщо a, a' - сторони кута, а b, b' - рівноподіляючі цього кута і суміжного з ним, то чотири промені a, b, a', b' утворюють гармонійний пучок променів.

c) Нехай знову будуть дані точки A, A'. Сукупність всіх пар точок (таких пар безліч), які гармонійно розділяються точками A і A', називаються інволюцією.

Якщо на тій же прямій AA' дана ще одна пара точок M, M', то пари точок, гармонійно розділених точками M, M', утворюють другу інволюцію на тій же основі.

Можна легко довести, що ці дві інволюції мають одну і тільки одну спільну пару точок, яка може бути і уявною.

Таким чином, якщо A, A' і M, M' - дві пари точок на одній і тій же прямій, то існує лише єдина пара точок X, X', які гармонійно розділяється як точками A, A', так і точками M, M'.

Нехай, далі, a, a' будуть дві довільні прямі лінії на площині, а S – їх точка перетину. Якщо дві точки B, B' тієї ж площини розташовані так, що прямі b , b', які з'єд - нують їх з точкою S, гармонійно розділяються прямими a, a', то говорять: прямі a, a' гармонійно розділяються точками B, B'.

Зокрема, якщо a, a', m, m' - чотири промені одного і того ж пучка і g є довільна пряма плошини, то, згідно вище сказаного, на цій прямій існує єдина пара точок X, X', які гармонійно розділяються як промені a, a', так і промені m, m'.

2. *Перспектива просторових образів.* [1]

а) Проектування і перетин, тобто дві основні операції проективної геометрії, приводять до поняття про нескінченно віддаленні елементи (поняття про них матимуть велике значення для наступних викладок і тому мають бути розвинені).

Нехай E і F будуть дві довільні площини, s – пряма їх перетину, Z довільна точка простору. (рис.3)

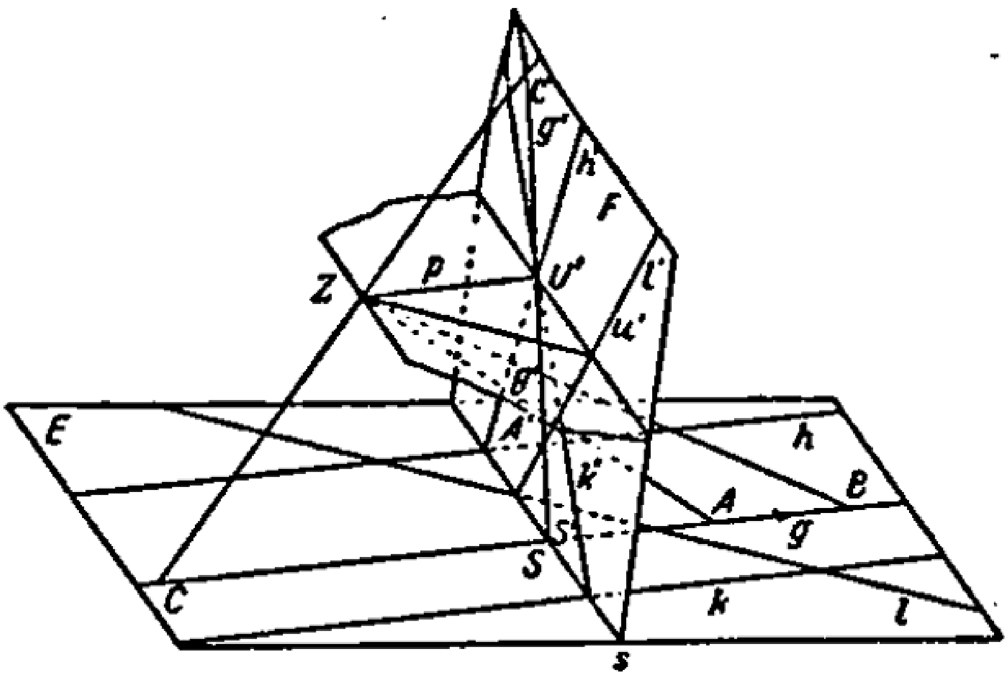

Рис. 3

Уявімо собі, що точки і прямі площини E спроектовані із точки Z на площину F.

Нехай g буде довільна пряма площини E (рис.3). Проекцію g' цієї прямої на площину F можна знайти, взявши на g дві точки A та B і визначивши їх проекції на F. Пряма g' повинна перетинати g в деякій точці S прямої s.

b) Якщо точку B все далі пересувати вздовж прямої g за напрямом стрілки, то і точка B' буде змінювати своє положення; зокрема, коли точка B стане нескінченно віддаленою, її зображення B' співпадає з точкою U' прямої g', у якій пряма p, паралельна g, перетинається з площиною F (рис.3).

Якщо знову пересувати точку B вздовж прямої g, але в зворотньому напрямку, то буде рухатися і її зображення, яке знову співпаде з U', якщо скоро B віддалиться у нескінченність.

Отже, нескінченно віддаленні елементи прямої g відображаються в одній точці U'. Це приводить нас до припущення, що пряма має одну нескінченно віддалену точку. В цьому випадку говорять про нескінченно віддалену або невласну точку прямої g.

Зображення g' прямої g можна також отримати, якщо провести через Z промінь p, паралельний прямій g і який перетинає площину F в точці U', і з'єднає U' з S, бо U' є зображенням нескінченно віддаленої точки прямої g, а S – зображення сліду прямої g на площині проекцій F.

Якщо в площині E дано декілька паралельних прямих $g, h, k,$ то їм відповідає один і той же паралельний промінь, який виходить із Z. Отже, їх зображення проходять через одну і ту ж точку.

Таким чином ми приходимо до припущення, що паралельні прямі перетинаються в одній нескінченно віддаленій точці.

с) Візьмемо на площині ще одну пряму l і відшукаємо зображення її нескінченно віддаленої точки. З цією ціллю через Z проведемо промінь, паралельний l, і продовжимо його до перетину з площиною F (рис.3).

Якщо пряма l змінюється, то змінюється і паралельний їй промінь, який проходить через Z, але останній завжди лежить в тій площині, яка може бути проведена через точку Z паралельно площині E.

Отже, всі нескінченно віддаленні елементи площини відображаються в деякій прямій лінії.

Якщо зображення фігури, що не містить нескінченно віддалених елементів, є пряма, то і сама фігура повинна бути прямою.

Аналогічні дослідження у просторі приводять до твердження: паралельні площини у просторі мають спільну нескінченно віддалену пряму; всі нескінченно віддаленні елементи простору лежать на деякій площині.

3. *Центральна колінеація на площині, або гомологія.* [1]

Нехай будуть дані на площині: точка S, пряма s, яка може також проходити через S, і дві точки A, A', що лежать на одному промені, який виходить із S.(рис.4).

Візьмемо довільну іншу точку B на тій же площині, з'єднаємо її з A прямою g, точку перетину прямих g і s з'єднаємо з A' прямою g', яка перетне пряму SB в точці B' (рис.4).

Дві такого роду точки B, B' ми будемо називати відповідними точками.

Якщо тепер дана третя точка C, то відповідну їй точку C' можна визначити або з допомогою пари точок A, A', або за допомогою точок B, B'.

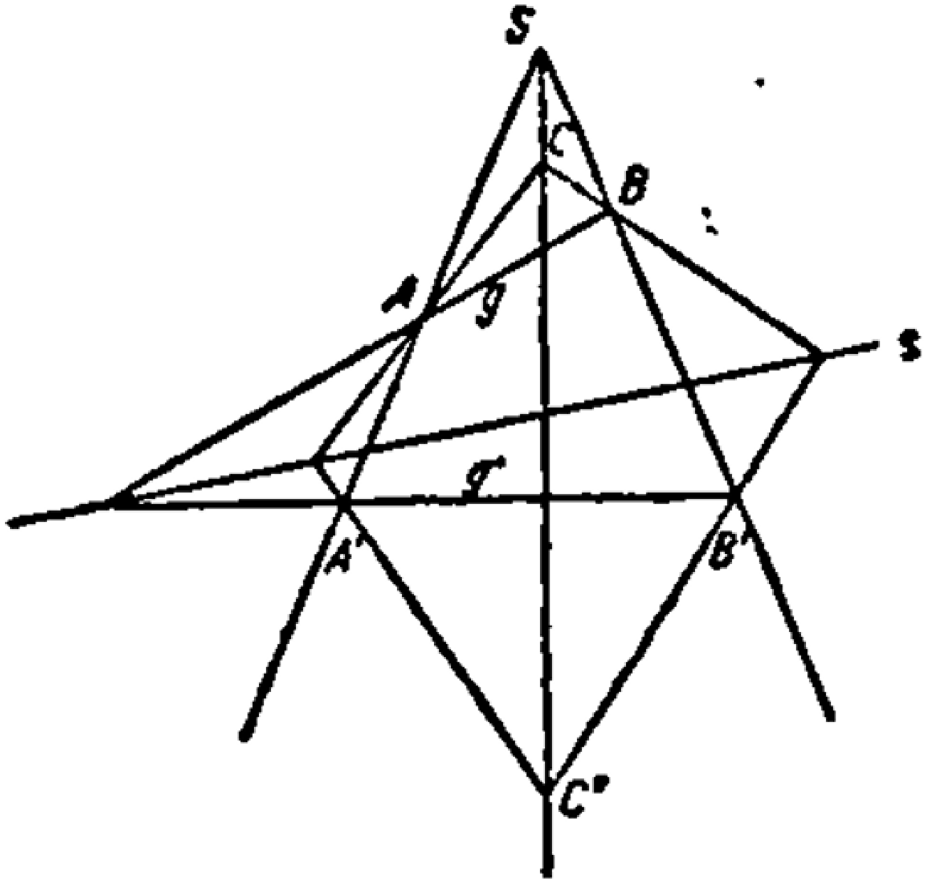

Рис.4

В обох випадках, в силу теореми про перспективно розташовані трикутники, приходять до однієї і тої ж точки C'. Якщо D, E, F, … - подальші точки площини, то відповідні їм точки можна знайти, виходячи із будь-якої пари відповідних точок.

Дві прямі ліній, які знаходяться в такому ж відношенні, як прямі g і g', h і h', k і k' на рис.4, називаються відповідними.

Таким чином кожні дві відповідні точки лежать на прямій, яка проходить через

S, і кожні дві відповідні прямі перетинаються в точці на прямій s. Кожна точка прямої s відповідає сама собі; кожна пряма, яка виходить із S, також відповідає сама собі. Точка S співпадає з відповідною їй точкою; так само, пряма s співпадає з відповідною їй прямою.

Якщо точка P описує пряму g, то відповідна їй точка P' описує пряму g', відповідну g; якщо пряма g обертається навколо деякої точки Q, то відповідна їй пряма g' обертається навколо точки Q', відповідній Q.

Відповідність, яка таким чином встановлюється між точками і прямими площини, називають центральною колінеацією або гомологією. З нею, як відомо, дуже часто доводиться зустрічатися у нарисній геометрії і в геометричних задачах.

Точка S називається центром колінеації, пряма s – віссю колінеації.

Основні елементи S, s і A, A' можуть мати різне взаєморозташування; їм характеризуються часткові випадки гомології.

Згадаємо тут про ті із них, які будуть важливі для нас згодом.

а) Вісь колінеації s є кінцева пряма (рис.5). Відрізок AA' розташований перпендикулярно до прямої s і ділиться нею навпіл. Крім того центр колінеації S, який повинен лежати на прямій AA', нескінченно віддалений.

При цьому два відповідних трикутника ABC і A'B'C' (рис.5) конгруентні, але зворотньо розташовані. Одна із фігур може бути приведена до співпадіння з іншим шляхом повороту кругом осі колінеації.

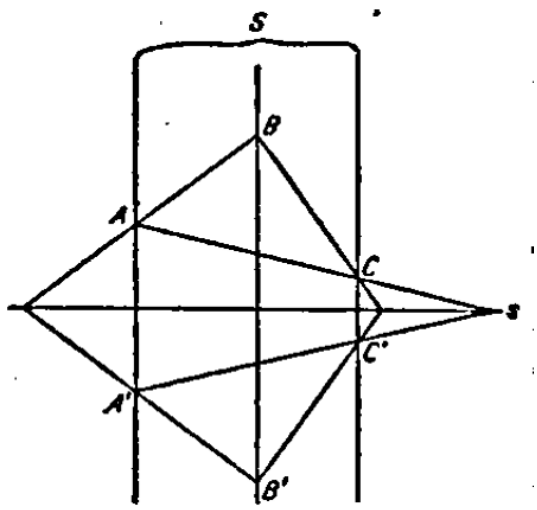

Рис.5

Обидві фігури розташовані симетрично відносно колінеації s. Симетрія, таким чином, є частинним випадком гомології.

За допомогою проектування двох фігур, симетрично розташованих відносно осі, на нову площину виходить загальний випадок гомології.

b) Нехай вісь колінеації проходить через S.

Побудова відповідних точок і прямих здійснюється, як і в загальному випадку (рис.6)

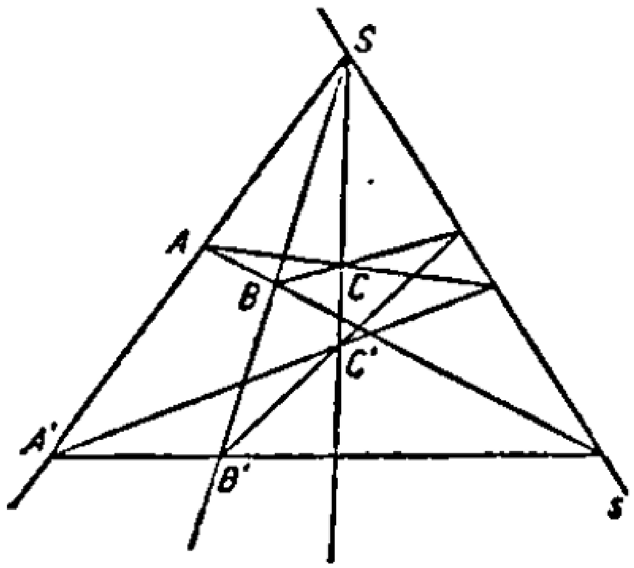

Рис.6

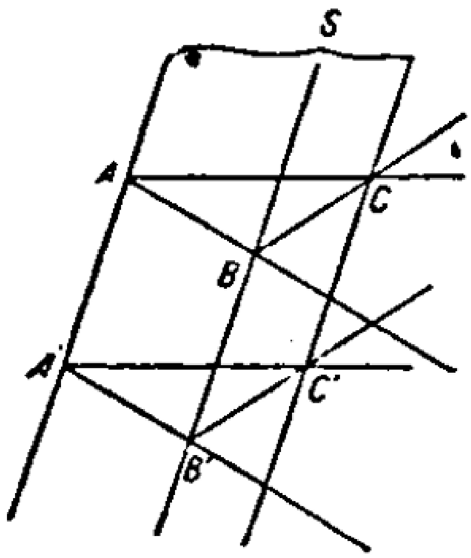

Рис.7

c) Якщо взяти S і s нескінченно віддаленні, тобто, якщо за вісь колінеації прийняти нескінченно віддаленну пряму нашої площини і S є однією із її точок, то прямі, які з'єднують відповідні точки, паралельні; більше того, паралельні відповідні прямі (рис.7).

Два відповідних трикутники ABC і A'B'C' конгруентні і можуть бути приведені до співпадіння за допомогою паралельного перенесення.

Отже, паралельні перенесення також є окремим випадок гомології і при проектуванні переходить в загальний випадок.

4. *Уявні циклічні точки, абсолютна інволюція.* [1]

a) Нехай буде дана прямокутна система координат.

Тоді рівняння кожного кола, яке лежить у площині осей координат, може бути написане у вигляді:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

причому для кожного даного кола a, b, c - дані числа. Потрібно визначити точки j_1 , j_2 перетину кола, вираженні цим рівнянням, з нескінченно віддаленою прямою. З цією метою ми припускаємо $x = \frac{x\prime}{t\prime}$, $y = \frac{y\prime}{t\prime}$ і знаходимо рівняння кола в однорідних координатах:

$$x'^2 + y'^2 + ax't' + by't' + ct'^2 = 0.$$

Для нескінченно віддаленої точки повинно бути $t' = 0$, тому

$$x'^2 + y'^2 = 0,$$

так що

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = \pm i,$$

тобто, тангенси кутів, утворених прямими OJ_1, OJ_2 з віссю x - ів дорівнюють $+i$ та $-i$, так що ці кути не залежать від a, b, c.

Згідно з цим всі кола площини перетинають нескінченно віддалену пряму у двох цілковито визначених точках J_1 , J_2, названих уявними циклічними точками.

Отже, коло може бути розглянуто як конічний переріз, який проходить через уявні циклічні точки. Тому коло визначається уже трьома точками.

b) Із багаточислових відношень, які можуть бути встановлені для уявних циклічних точок, вкажемо тільки ті, які потрібні будуть нам пізніше.

Перш за все доведемо наступну важливу теорему.

Теорема. Якщо a і b - дві взаємно перпендикулярні прямі, то вони гармонійно розділяються уявними циклічними точками. Навпаки, якщо дві прямі гармонійно розділяються уявними циклічними точками, то вони взаємно перпендикулярні.

Доведення. Покладемо, що ХОУ (рис. 7) є прямокутна система координат, a, b – дві довільні прямі, i_1, i_2 – ті прямі, які з'єднують О з уявними циклічними точками. Рівняння уявних прямих i_1, i_2 згідно пункту а), можуть бути представлені у вигляді:

$$i_1 \dots y = ix,$$

$$i_2 \dots y = -ix.$$

Запишемо рівняння прямих а, b, які проходять через О:

$$a \dots y = mx,$$

$$b \dots y = nx.$$

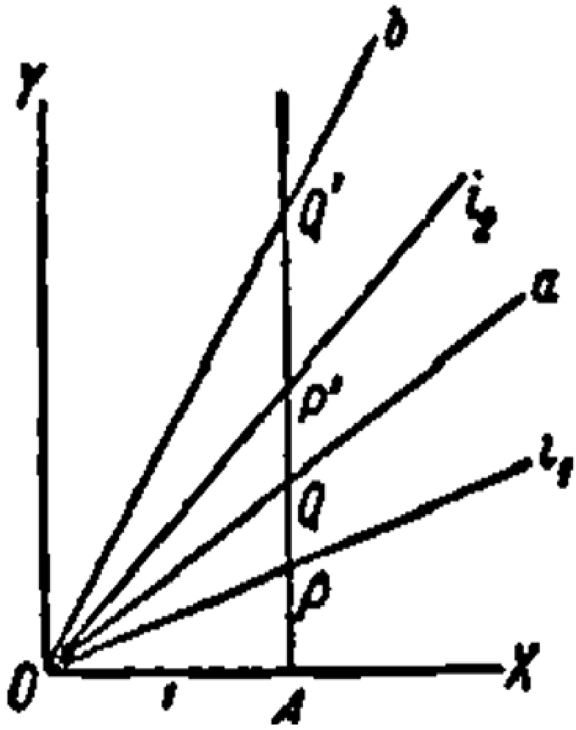

Рис.7

Візьмемо тепер точку А на відстані 1 від О на вісь $x -$ ів і, проводячи через А паралель осі $y -$ ів, розглянемо точки її перетину з чотирьма прямими i_1 , i_2 , a , b.

Подвійне відношення чотирьох променів при цьому дорівнює подвійному відношенню точок перетину, так що

$$(i_1 i_2 ab) = (PP'QQ') = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q}} : \frac{\overline{PQ'}}{\overline{P'Q'}} .$$

Далі,

$$\overline{AP} = +i; \qquad \overline{AQ} = m$$

$$\overline{AP'} = -i; \qquad \overline{AQ} = n,$$

тому

$$(PP'QQ') = \frac{-i+m}{+i+m} : \frac{-i+n}{+i+n}.$$

Якщо прямі a, b взаємно перпендикулярні, то, як відомо, існує відношення:

$$n = -\frac{1}{m};$$

тоді

$$(PP'QQ') = \frac{-i+m}{+i+m} : \frac{-i-\frac{1}{m}}{+i-\frac{1}{m}},$$

звідки слідує, що

$$(PP'QQ') = -1,$$

так що

$$\frac{-i+m}{+i+m} = \frac{-i+n}{+i+n}.$$

Звідси випливає:

$$n = -\frac{1}{m},$$

що доводить теорему.

c) Наведемо ще одну надзвичайно важливу формулу, яка допускає проективне представлення кута, саме – формулу Лагерра.

Для цього складемо подвійне відношення чотирьох променів i_1 , i_2 , a , b , де i_1 , i_2 - це ті прямі, які з'єднують O з уявними циклічними точками, а прямі a, b є довільними променями, які проходять через O (рис 7). Тоді

$$(i_1 i_2 ab) = (PP'QQ') = \frac{-i+m}{+i+m} : \frac{-i+n}{+i+n}.$$

Далі, $m = \operatorname{tg}\alpha$ і $n = \operatorname{tg}\beta$, тому

$$(PP'QQ') = \frac{-icos\alpha + sin\alpha}{+icos\alpha + sin\alpha} : \frac{-icos\beta + sin\beta}{+icos + sin\beta} = \frac{cos\alpha + isin\alpha}{cos\alpha - isin\alpha} : \frac{cos\beta + isin\beta}{cos\beta - isin\beta}.$$

Як відомо (формула Ейлера):

$$cosz + sinz = e^{iz}.$$

Якщо підставимо замість z відповідні значення, то отримаємо:

$$(PP'QQ') = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} : \frac{e^{i\beta}}{e^{-i\beta}} = e^{2i\alpha} : e^{2i\beta} = e^{2i}(\alpha - \beta).$$

Звідси слідує, що

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2i} iDV,$$

де DV – подвійне відношення чотирьох променів i_1, i_2, a, b, тобто подвійне відношення сторін кута і двох мінімальних прямих (ізотропні прямі), які проходять через нього.

Тому два кути рівні, якщо подвійне відношення, утворене сторонами першого кута з уявними циклічними точками, дорівнює подвійному відношенню, утвореному сторонами другого кута з уявними циклічними точками.

5. *Візуальні і метричні властивості геометричних фігур.* [1]

а) Властивості фігури можуть належати до двох різних категорій.

α) Вони можуть бути візуальними (властивостями положення, графічними, нарисними властивостями) і бути у зв'язку з поняттями про точку, про пряму, про конічний переріз і т.д., даючи, лише, вказівки відносно розташування цих елементів.

Якщо, наприклад, три прямі перетинаються в одній точці, декілька точок фігури лежать на одній прямій, пряма торкається конічного перерізу фігури, або дві фігури гомологічно відповідають одна одній, то всі ці властивості будуть візуальними.

β) Вони можуть бути метричними і зв'язані тоді з поняттями про довжину відрізка і величину кута.

Ми маємо справу з метричними властивостями фігури, якщо, наприклад, в її склад входять два рівних відрізка або два рівних кути, прямий кут, кут у 60°, або якщо вхідне у її конічний переріз є коло, і т. д.

γ) Можна говорити також про проективні властивості фігури.

Властивість фігури називається проективною, якщо вона не змінюється при довільному проектуванні на інше площину, тобто, переходить в аналогічну властивість трансформованої фігури.

Кожна візуальна властивість є також і проективною, тобто, зберігається при проектуванні. Але не кожна проективна властивість буде візуальною.

Якщо, наприклад, подвійне відношення чотирьох точок деякої прямої дорівнює двом, то ця властивість зберігається при проектуванні. Дійсно, чотири дані точки про проектуванні переходять в чотири точки з таким же подвійним відношенням.

Ця властивість, таким чином, є проективною. Але вона зовсім не візуальна, так як значення подвійного відношення може бути визначено тільки шляхом виміру (порівняння двох відрізків).

Навпаки, якщо, наприклад, два пучки променів $abcd$ i $a'b'c'd'$ мають одне і те ж подвійне відношення, то ця властивість є властивістю візуальною, бо в цьому випадку, як відомо, можна побудувати третій пучок променів, які знаходяться в перспективному положенні по відношенню до обох пучків.

Для того, щоб мати можливість стверджувати, що два пучки променів мають одне і те ж подвійне відношення, немає потреби визначати подвійне відношення кожного із пучків, але достатньо лише виявити, що може бути побудований пучок, який знаходиться в перспективному положенні з даними пучками.

b) Якщо два кути рівні, то ця властивість є метричною властивістю обох фігур.

Як сказано вище (рис. 7), сторони кожного із двох рівних кутів утворюють з уявними циклічними точками площини одне і те ж подвійне відношення.

Твердження, що два подвійних відношення деякої фігури рівні, виражають візуальну властивість цієї фігури. Тому ми можемо згадану вище метричну властивість розглядати, як візуальну, якщо введемо обидві уявні циклічні точки.

Легко можуть бути дані і інші параметри.

Якщо, наприклад, точка M є серединою відрізка AB, то ця властивість є метричною. Але точка M від нескінченно віддаленної точки гармонійно розділяється точками A і B. Якщо дана ця нескінченно віддаленна точка, то вказане співвідношення є візуальною властивістю.

Кути, які діляться навпіл (a, b) і суміжні з ним кути взаємно перпендикулярні. Отже, вони являються тими прямими пучками a, b, які гармонійно розділяються, як променями a, b, так і уявними циклічними точками. Тоді згідно з цим вони визначаються візуальними властивостями, співвідношеннями розташування, якщо дано тільки уявні циклічні точки.

6. *Тепер покажемо, що з приєднанням нескінченно віддаленої прямої і уявних циклічних точок, які разом називаються, також, абсолютом площини креслення, кожна метрична властивість фігури може бути розглянута, як візуальна.* [1]

а) Всі метричні властивості фігури зводяться до двох понять, а саме, до поняття про рівність двох відрізків і до поняття про рівність двох кутів.

Для того, щоб довести згадане вище речення, потрібно лише представити рівність двох відрізків, як візуальну властивість, тому що вище вже було визначено рівність двох кутів, як візуальну властивість фігури, якщо даний абсолют площини.

b) Якщо тепер AB і $A'B'$ два рівних відрізки (рис 8), то можна відрізок AB привести до співпадіння з другим відрізком, перенісши спочатку відрізок AB паралельно самому собі і відобразивши потім отриманий таким чином відрізок у бісектрису f (рис. 8).

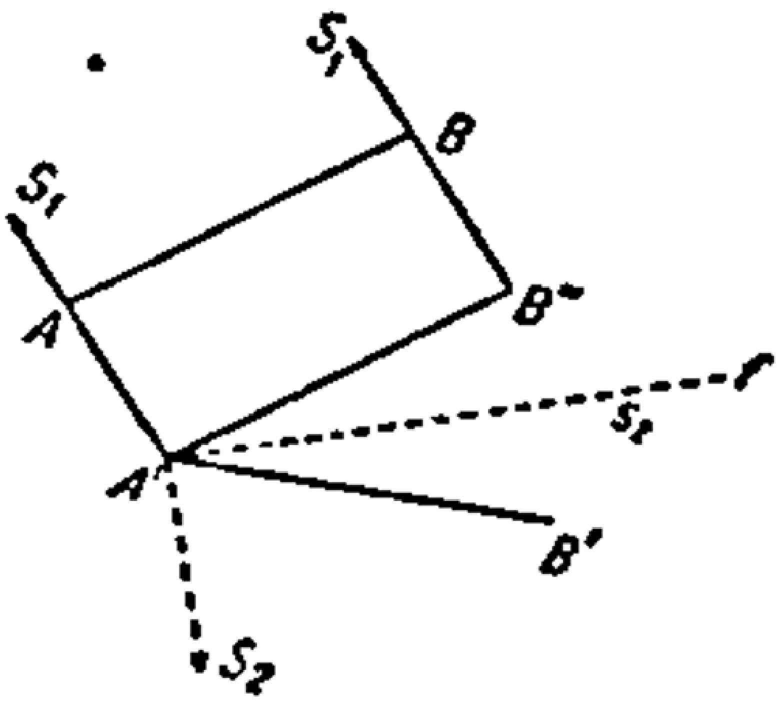

Рис.8

Але паралельне перенесення є окремим випадком гомології. Віссю s_1 гомології при цьому є нескінченно віддаленна пряма площини, а центром S_1 - нескінченно віддалена точка прямої AA'.

Відображення, рівним чином, є окремим випадком гомології. Вісь колінеації s_2 Співпадає при цьому з бісектрисою f, а центр колінеації S_2 – з нескінченно віддаленною точкою прямої g, перпендикулярної до бісектриси.

Якщо тепер даний абсолют площини, то тим самим дані $s_1, S_1,$ і в такому ви – падку s_2, S_2 можуть бути визначені без допомоги вимірювання шляхом побудови таких прямих f, g, які гармонійно розділяються, з однієї сторони, прямими $A'B'$ і $A'B''$, з другої є уявними циклічними точками.

Тому, якщо приєднаний абсолют площини, то і рівність двох відрізків можна розглядати як візуальну властивість.

7. *Роз'яснимо ще декількома прикладами уявлення метричних властивостей у вигляді візуальних.* [1]

a) Якщо дві прямі взаємно перпендикулярні, то цю метричну властивість можна виразити візуально, сказавши: дві прямі гармонійно розділяються уявними циклічними точками.

b) Якщо даний чотирикутник є паралелограмом, то з приєднанням нескінченно віддаленої прямої можна також сказати: протилежні сторони перетинаються на нескінченно віддаленій прямій. Ця властивість візуальна.

c) Якщо фігура - квадрат, то цю властивість за допомогою абсолюта площини можна виразити візуально, сказавши: протилежні сторони перетинаються на нескінченно віддаленій прямій в точках, які гармонійно розділяються уявними циклічними точками.

d) Трикутник буде рівностороннім, якщо кожна пара його сторін утворює з уявними циклічними точками одне і те ж подвійне відношення.

e) Сума кутів трикутника утворює 180 градусів. Як можна представити це твердження у вигляді візуальної властивості трикутника?

f) Кут деякої фігури дорівнює 60 градусів. Як можна виразити це візуально?

3.7 Класифікація геометричних задач на побудову

Геометричні задачі на побудову можуть бути розглянуті з різних точок зору і відповідно з цим розділяються на класи. [1]

а) По-перше, їх можна, у зв'язку з викладеним вище, підрозділити на візуальні і метричні задачі на побудову.

А саме, кожна геометрична конструктивна задача потребує побудови, яка володіє даними властивостями.

Якщо всі ці властивості є візуальними, то і саму задачу називають візуальною задачею на побудову.

Якщо ж хоча б деякі із потрібних властивостей належать до метричних, то і задача називається метричною.

Візуальні задачі не мають свого візуального вираження при проектуванні даних у шуканих образів із якого-небудь центра на другу площину, тобто якщо спроектувати дані образи, то побудова по їх проекціях проекцій шуканих образів потребує точно таких же операцій на другій площині, які необхідні для того, щоб на першій площині по даним образам побудувати шукані.

Тому візуальні задачі завжди можуть бути розв'язані за допомогою проектування перетину прямих, конічних перерізів і т. д. один з одним.

Метрична задача потребує для свого розв'язку, крім проведених прямих ліній, ще порівняння і перенесення відрізків та кутів, проведення кола або ж креслення вищих кривих.

Відомо, що кожна метрична властивість фігури завжди може бути розглянута, як візуальна властивість, якщо тільки до фігури приєднаний абсолют площини.

Можна тому також сказати, що кожна метрична задача за допомогою приєднання абсолюта площини може бути перетворена у візуальну задачу.

Цю задачу називають проективною, якщо проектування не має її словесного вираження.

Наприклад, задача: за трьома пучкам побудований четвертий, який разом з цими трьома утворив би подвійне відношення, рівне двом, - є проективною, але вона зовсім не є візуальною задачею, бо в ній мова йде про вимірювання.

b) До другого важливого принципу класифікації геометричних задач на побудову приходять, розв'язуючи задачі шляхом обчислення. [1]

Задачі при цьому підрозділяються в залежності від роду зроблених операцій і степеня рівняння, до яких призводить їх розв’язок.

Перш за все їх ділять на алгебраїчні та трансцендентні в залежності від того, належить їх розв’язок до алгебраїчних рівнянь чи до трансцендентних.

Так, наприклад, квадратура круга являє собою трансцендентну задачу на побудову.

Алгебраїчні задачі на побудову підрозділяються далі на задачі першого, другого, третього, четвертого степеня, відповідно найвищого степеня зустрічаються при розв’язуванні рівнянь

c) Можна також класифікувати геометричні задачі на побудову по роду кривих, які креслять при їх розв'язанні, або за властивостями інструментів, використаних для креслення кривих і, відповідно, для розв’язування задач.

Згідно з цим, можна говорити про геометричні задачі на побудову, які розв’язуються за допомогою проведення одних лише прямих ліній, кіл та одної конхоїди.

Можна також вести мову про геометрію прямих ліній, циркуля, еліптичного циркуля і т.д.

d) Кожна геометрична задача, для якої взагалі існує розв’язок, може бути розв’язана побудовою, але не за допомогою будь-якого інструмента. [1]

Трисекція кута, наприклад, не може бути строго виконана за допомогою циркуля та лінійки, але, як скоро доведемо, виконується за допомогою вищих засобів розв’язування.

Отже, не існує абсолютно нерозв’язуваних задач, але є лише відносно нерозв’язні.

Греки допускали тільки циркуль та лінійку в якості засобів розв’язування, тому багато задач були нерозв’язними, як, наприклад, відомі задачі про трисекцію кута, подвоєння куба, квадратуру круга.

Але всі ці задачі можуть бути розв’язані побудовою, навіть задача про квадратуру кругу, яка зводиться до побудови відрізка, рівного по довжині даному колу. Ця задача не може бути строго розв’язана циркулем та лінійкою, навіть і еліптичним циркулем: вона розв'язується лише за допомогою інструмента, який креслить трансцендентні криві, як, наприклад, інтеграф Абданк - Абакановича.

3.8 Візуальні задачі першого і другого степеня

А) Візуальні задачі першого степеня

Ці задачі не змінюють свого словесного виразу при проектуванні, не потребують жодних вимірів відрізків чи кутів і, будучи розв'язані обчисленням, приводять до рівнянь першого степеня.

На основі останнього міркування вони в будь - якому випадку мають один розв'язок, якщо вони не розпадуться в ряд інших лінійних задач.

Їх розв'язок потребує тільки операцій проектування і перетину. Їх можна розв'язати за допомогою проведення лише одних прямих ліній, бо застосування конічного перерізу в будь - якому випадку дало б два розв'язки.

Навпаки, відносно кожної геометричної задачі на побудову, яка має тільки один розв'язок і є візуальною, так що не змінює свого словесного виразу при проектуванні і не потребує жодного вимірювання, можна стверджувати, що вона розв'язується за допомогою проведення одних лише прямих ліній.

Наведемо приклади візуальних задач першого степеня:

- побудова за заданими трьома точками четвертої гармонійної;
- побудова двох проективних рядів точок чи пучків променів, коли дані три пари відповідних елементів;
- побудова проективних плоских систем, коли дані чотири пари відповідних елементів;
- визначення другої точки перетину прямої, яка виходить із уже відомої точки конічного перерізу, якщо уже відомі три точки перерізу.

Всі ці задачі візуальні, мають тільки один розв'язок і тому можуть бути розв'язані за допомогою проведення одних прямих ліній.

Нехай, наприклад, будуть дані три точки деякого ряду. Потрібно визначити четверту точку цього ряду так, щоб подвійне відношення, утворене нею з трьома даними точками дорівнювало двом.

Ця задача буде проективною, але не візуальною; вона не може бути розв’язана за допомогою проведення лише одних прямих ліній, якщо не даний абсолют площини.

Розглянемо деякі задачі вкажемо їх розв’язок, який базується на теоремі про перспективно розташовані трикутники.

1. Дані дві прямі лінії a , a', і точка P. Потрібно провести пряму x через точку P і через недоступну точку перетину обох даних прямих.

Розв’язування виконується згідно рис. 9 або рис. 10. На першому рисунку пряма h і точки A, B довільні; на другому - довільними є прямі h, k, l і точка S.

2. Дані дві пари прямих a, a', b, b', причому точки перетину $a \times a', b \times b'$ лежать поза рисунком. Потрібно побудувати пряму, яка буде з’єднувати обидві ці точки.

З цією метою на другій діагоналі чотирикутника $aa'bb'$ беруть довільну точку S, проводять через неї прямі h, g і розглядають отримані перспективно розташовані трикутники.

Точки A і B лежать на шуканій прямій x.

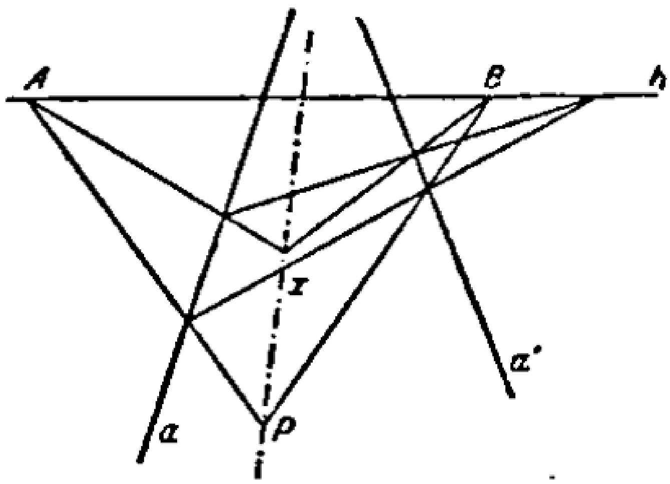

Рис. 9

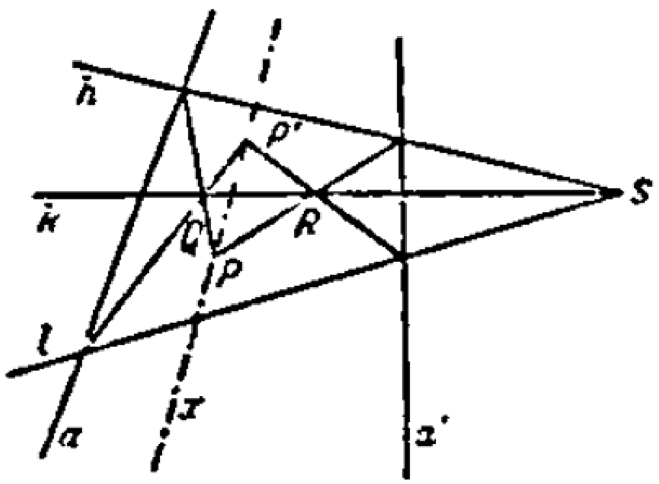

Рис.10

3. Пряма g, яка лежить поза рисунком, задана двома парами прямих a, a', b, b' (рис. 11), більше того дано пряму c, яка перетинає пряму g в точці P, яка лежить поза епюром. Потрібно побудувати другу пряму c', яка проходить через P.

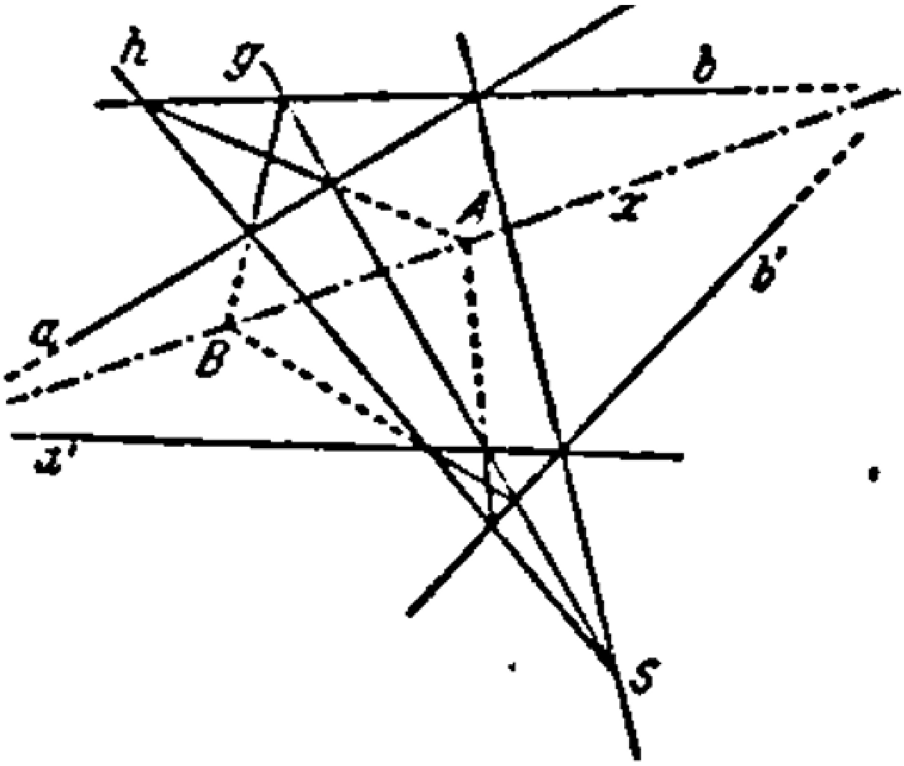

Рис. 11

З’єднують точки $a \times b$ і $a' \times b'$ (рис. 11), беруть на цій прямій довільну точку S і будують c', як сторону трикутника, який знаходиться у перспективі відносно трикутника $abbc$ і точки S. [1]

В) Візуальні задачі другого степеня

Ці задачі потребують лише встановлених визначених відношень положення шуканої фігури і, розв’язуючись обчисленням, призводять до рівнянь першого і другого степеня; вони не змінюють свого словесного виразу при проектуванні і не потребують жодних вимірів відрізків чи кутів.

Так як кожне рівняння другого степеня має два розв’язки, то і кожна задача другого степеня, якщо вона не розпадається на більше число задач другого степеня, має тільки два розв’язки, які, проте, можуть і співпадати чи бути уявними.

Тому також говорять: геометричні задачі другого степеня мають або два розв’зки, або один, або зовсім розв'язків не мають.

Візуальними задачами другого степеня будуть, наприклад, наступні:

- визначення точки перетину прямої з конічним перерізом, заданими п'ятьма точками;
- побудова дотичної із даної точки до конічного перерізу, якщо відомі дві їх спільні точки;
- побудова подвійних точок двох проективних рядів, розташованих на одній прямій і заданих трьома парами відповідних точок;
- побудова подвійних точок інволюції, заданої двома її парами точок, або (іншими словами) визначення такої пари точок прямої, які гармонійно розділяються двома парами точок тієї ж прямої і т. д.

Всі візуальні задачі на побудову другого степеня можуть бути зведені до наступної задачі.

Задача. Між двома рядами точок, розташованих на накресленому конічному перерізі K (рис.12), встановлена проективна залежність, задана трьома парами відповідних точок AA', BB', CC'. Потрібно визначити подвійні елементи X та У (точки, які відповідають самі собі) цієї проективної залежності.

Для отримання цих точок проектують, як відомо, обидва розташованих на K ряди точок відповідно на A та A' і будують таким шляхом два проективні пучки, які знаходяться у перспективному положенні один до одного, так як вони мають спільний промінь AA', який відповідає сам собі.

Тому відповідні промені цих двох пучків перетинаються в точках деякої прямої s, яка зі зручністю може бути використана для відновлення обох рядів точок.

Легко бачити, що точки перетину *s* з *K* і будуть шуканими точками *X, У.*

До розв'язаної вище задачі зводиться, як відомо, визначення подвійних елементів двох проективних рядів точок, розташованих на одній прямій, а отже, і визначення точок перетину прямої лінії з конічним перерізом, заданого п'ятьма його елементами.

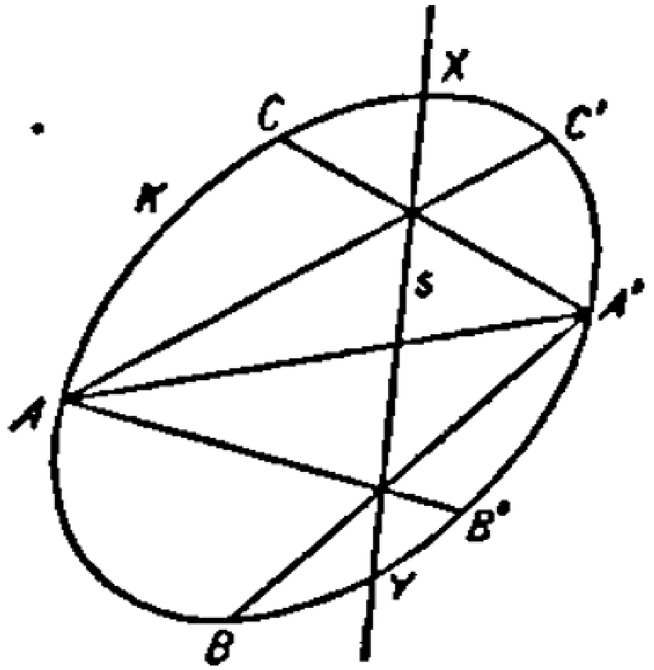

Рис. 12

Раніше згадані задачі також можуть бути зведені до цієї задачі.

Слід відмітити, що кожна візуальна задача другого степеня може бути розв’язана за допомогою проведення одних лише прямих ліній, якщо у площині малюнка дано постійний конічний переріз К.

Для розв’язування кожної візуальної задачі другого степеня можна лише проводити прямі, визначати конічні перерізи, будувати точки перетину прямих з прямими і з конічними перерізами, відтворювати операції проектування і перетину.

Але побудова точок перетину прямої з конічним перерізом, заданого п’ятьма його елементами, завжди може бути зведена до основної задачі пункту 2 і при використанні конічного перерізу К може бути виконана шляхом проведення одних лише прямих ліній.

Тому кожну візуальну задачу другого степеня можна розв’язати, проводячи одні лише прямі лінії, якщо у площині побудовано конічний переріз, наприклад, коло, причому немає потреби знати її центр

Зауважимо, що кожна візуальна задача другого степеня може бути, таким чином, остаточно зведена до визначення подвійних елементів двох проективних накладених один на одного рядів точок.

Звідси випливає надзвичайно загальний метод розв’язування такого роду задач, так званий “метод випробування”. Пояснимо його на прикладі.

Нехай буде дано три прямі g_1 , g_2 , g_3 і три точки 1, 2, 3 (рис.13). Потрібно накреслити трикутник XYZ так, щоб вершини його лежали відповідно на прямих g_1, g_2, g_3, а сторони проходили відповідно через точки 1, 2, 3.

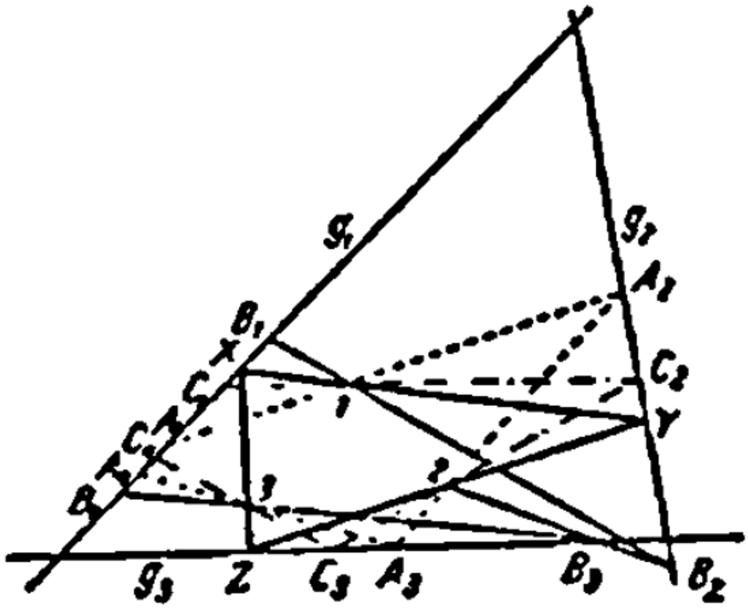

Рис.13

Беруть на g_1 довільну точку A_1, проектують її із 1 на g_2 в точку A_2, потім A_2 із 2 на g_3 в точку A_3 і A_3 із 3 на g_1 в точку A_4.

Якщо точка A_1 описує пряму g_1, то A_2 пробігає ряд точок на g_2, які знаходяться у перспективі по відношенню до ряду точок на g_1 , A_3 пробігає ряд точок на g_3 , перспективно розташований у відношенні g_2 , нарешті, A_4 - ряд точок на g_1 , перспективний відносно g_3 .

Ряди точок, які пробігають на g_1 точками A_1 і A_4 , будуть, проективними; шукані точки X є подвійними точками цієї проективної залежності, бо якщо A_4 співпадає з A_1 , то ми будемо мати розв’язок задачі. [1]

3.9 Метричні задачі першого та другого степеня

Метричні задачі першого та другого степеня – це такі геометричні задачі на побудову, які при розв’язуванні їх шляхом обчислення приводять до рівнянь, відповідно, першого і другого степеня і в яких, між іншим, йде мова і про вимірювання. [17]

Лінійними метричними задачами є, наприклад, наступні: поділити відрізок навпіл; провести пряму, паралельну до даної; опустити перпендикуляр, і т. д.

Ці задачі мають тільки один розв'язок, так, як вони залежать від лінійного рівняння. Проте вони не розв'язуються шляхом проведення одних прямих ліній, якщо не даний абсолют площини.

До метричних задач другого степеня відносять, наприклад, наступні:

- поділ кута навпіл;
- перенесення відрізка;
- визначення точок перетину прямої з колом, заданим його центром і радіусом, і т. д.

Всі ці задачі мають два розв'язки (які можуть також співпадати або бути уявними), так як вони залежать від квадратних рівнянь; вони не можуть бути розв'язані шляхом проведення одних прямих навіть при користуванні накресленим конічним перерізом, якщо не даний абсолют площини.

Слід відмітити що кожну метричну властивість можна розглядати, як візуальну якщо поставити у зв'язок з фігурою абсолют площини.

Дві паралельні прямі визначають нескінченно віддалену точку, дві пари паралельних прямих (паралелограм) визначають нескінченно віддалену пряму.

Якщо задано накреслений квадрат, то ним визначається нескінченно віддалена пряма і більше того ще і уявні циклічні точки.

Саме, вони гармонійно розділяються кожними двома суміжними сторонами квадрата, а також його діагоналями; звідси слідує, що вони цілком визначені.

Отже, накреслений квадрат визначає нескінченно віддалену пряму і уявні циклічні точки, тобто абсолют площини.

Тому, якщо даний квадрат, то кожну лінійну метричну задачу можна розглядати, як візуальну лінійну задачу і розв'язати її за допомогою проведення одних прямих ліній.

Якщо накреслене коло і даний його центр, то тим самим даний абсолют площини. Саме, нескінченно віддалена пряма є полярою центру у відношенні кола, а уявні циклічні точки є точками перетину кола з визначеною таким чином нескінченно віддаленою прямою. [13]

Накресленого кола без центра достатньо для розв'язування кожної візуальної задачі другого степеня шляхом проведення одних прямих ліній. Якщо ж окрім самого кола, дано і його центр, то кожна метрична задача другого степеня може бути розглянута, як візуальна і тому може бути розв'язана за допомогою проведення одних лише прямих ліній.

Якщо накреслені конічний переріз і квадрат, то можна кожну візуальну і метричну задачу другого степеня розв'язати шляхом проведення одних лише прямих; того ж можна досягнути і за допомогою накресленого конічного перерізу, якщо дано його центр і один із фокусів.

З а д а ч і д л я р о з в ' я з у в а н н я. [1]

5. Дано дві паралельні прямі a , a' і точка P. Побудувати пряму, яка проходить через P, паралельну a і a', проводячи лише одні прямі лінії (рис. 9,10). (Нескінченно віддалена точка розглядається, як точка, яка лежить поза епюром).

6. Дано дві пари паралельних прямих aa', bb', тобто паралелограм; більше того дано пряма c і точка P; побудувати пряму c', яка проходить через P і паралельна c, проводячи лише одні прямі лінії (рис. 12). (нескінченно віддалена пряма розглядається, як пряма, яка лежить поза епюром).

7. За відомою теоремою проективної геометрії, три пари протилежних сторін повного чотирикутника 1 2 3 4 перетинають кожну пряму s у трьох парах точок A і A', B і B', C і C' деякої інволюції (мал. 14). З другої сторони, відомо наступне.

Якщо кожні два взаємно перпендикулярні промені a і a', b і b', c і c',.. деякого пучка віднести один до одного, то промені пучка утворять інволюцію.

Але інволюція визначається двома парами її елементів. Тому, якщо промінь a перпендикулярний до a', промінь b перпендикулярний до b', то промінь

c', перпендикулярний до c , може бути, згідно рис. 14, побудований лінійно. (Беруть довільну пряму s і точку 2 на c; будують потім точки 3,4).

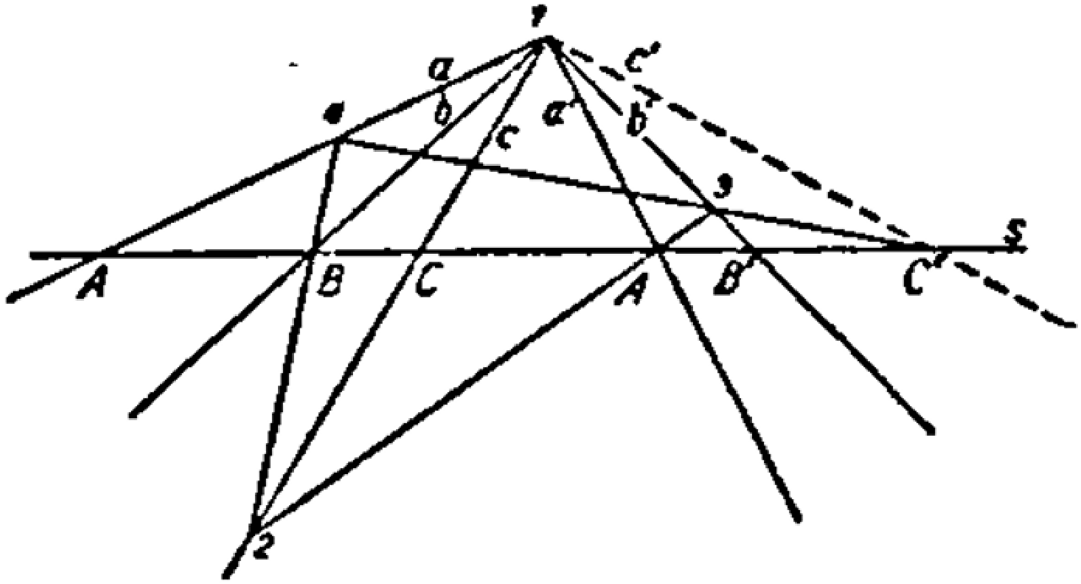

Рис. 14

8. Дано квадрат, пряму g і, більше того, точку P. Провести через P перпендикуляр до g, користуючись лише прямими лініями. (Розв’язується за допомогою попередньої задачі) .

9. Дано квадрат, три точки $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ і пряму g, яка проходить через A. Шляхом проведення одних прямих ліній визначити другу точку перетину прямої g з колом, яке проходить через $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$.

3.10 Графічне розв’язування рівнянь другого степеня.

Якщо звернутися до обчислення, то кожна геометрична задача другого степеня потребує розв’язування рівнянь другого степеня, коефіцієнти яких отримуються із відомих величин за допомогою раціональних операцій і добуванням квадратних коренів.

Якщо при розв’язуванні деякої геометричної задачі шляхом обчислення приходять до квадратного рівняння [1]

$$x^2 + mx + n = 0, \quad (2)$$

то або коефіцієнт m повинен бути відомий відрізком і n - квадратом деякого відрізка, або ж m і n будуть числами, якщо який - небудь відрізок прийнято за одиницю; саме x може бути знайдено у вигляді відрізка шляхом побудови виразу

$$x = -\frac{m}{2}\sqrt{\frac{m^2}{4} - n}. \quad (3)$$

Якщо у якості засобів побудови для розв'язування рівняння (2) дано тільки циркуль або лінійку про два паралельні краї (дві паралельні прямі на постійній відстані), то будують знайдене значення для x за допомогою цих засобів розв'язування по раніше даним правилам.

1. Розв'язування квадратного рівняння шляхом проведення одних лише прямих ліній при використанні намальованого кола.

Нехай буде дано для розв'язування рівняння [1]

$$x^2 - px + q = 0, \quad (4)$$

де $p\ i\ q$ - раціональні числа. У даному допоміжному колі К радіусом 1 (рис. 15) проведемо діаметр AB, побудуємо на його кінцях дотичні до К і визначимо на них точки $C\ i\ D$ так, щоб АС $= 4p$ i $BD = qp$ по абсолютній величині і по знаку, причому додатній напрямок для обох дотичних ми вибираємо один і той же.

Пряма CD (рис. 15) перетинає коло у двох точках $E\ i\ F$, які, будучи зпроектовані із А, дають точки X_1 , X_2 . Ми доведемо, що $BX_1 = x_1$, $BX_2 = x_2$ - шукані корені рівняння (4).

Д о в е д е н н я. Прийнявши x_1, x_2 і точки X_1, X_2 за дані, визначимо звідси відрізки АС і BD нашої фігури.

Із неї слідує, що

$$tg\alpha_1 = \frac{x_1}{2}, \qquad tg\alpha_1 = \frac{x_2}{2}.$$

У трикутнику AFC

$$\sphericalangle A = 90 - \alpha_2\ i\ \sphericalangle F = 90 - \alpha_1,$$

Тому

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AF}cos\alpha_1}{\sin{(\alpha_1 + \alpha_2)}}.$$

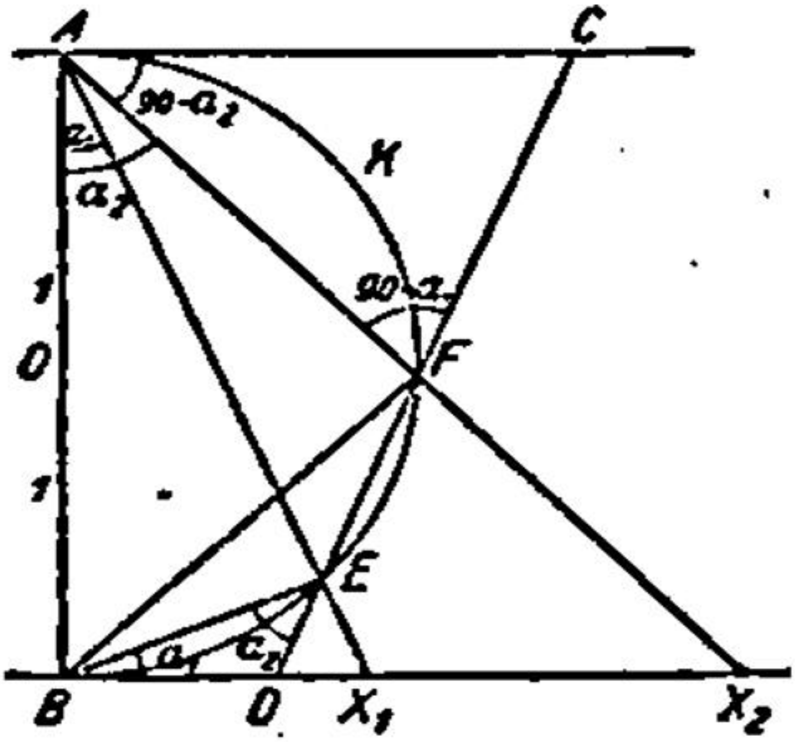

Рис.15

Розглянемо трикутник AFB:

$\overline{AF} = 2cos\alpha_2.$

Тому

$$\overline{AC} = \frac{2cos\alpha_1 cos\alpha_2}{\sin{(\alpha_1 + \alpha_2)}} = \frac{2}{tg\alpha_1 + tg\alpha_2} = \frac{4}{x_1 + x_2}.$$

Аналогічно із трикутника $DBE,$ у якому

$$\sphericalangle B = \alpha_1 \; i \; \sphericalangle E = \alpha_2,$$

слідує, що

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BE}\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{2\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2)} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

Але x_1 і x_2 корені рівняння:

$$x^2 - px + q = 0;$$

тому

$$x_1 + x_2 = p \quad \text{і} \quad x_1 \cdot x_2 = q,$$

так що

$$\overline{AC} = \frac{4}{p} \quad \text{і} \quad \overline{BD} = \frac{q}{p},$$

що і потрібно було довести.

Як відомо за допомогою штейнерового круга можна помножувати відрізки і ділити їх, провівши лише прямі.

Тому, якщо p і q – раціональні числа, то відрізки $\frac{4}{p}$ і $\frac{q}{p}$ можуть бути побудовані за допомогою одних прямих ліній.

Корені рівняння визначаються відрізками BX_1 і BX_2. Якщо бажають знайти їх числові значення, то необхідно визначити відношення цих відрізків до радіуса кола.

При цьому перш за все дізнаються, скільки разів радіус круга вкладається у BX_1, а потім ділять радіус на десять рівних частин і визначають, скільки разів може бути відкладена $\frac{1}{10}$ радіуса; у разі потреби, визначають ще, скільки раз вкладається $\frac{1}{100}$ радіуса.

2. Визначення коренів рівняння другого степеня за допомогою прямого кута.

Нехай для розв'язування буде дано рівняння [1]

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \tag{5}$$

де, a_1, a_2, a_3 – цілі числа (зокрема, a_1 – додаткове ціле число).

а) Ми перш за все будемо розглядати два випадки.

α) Коефіцієнт a_3 буде додатковим, маючи, таким чином, такий є же знак, що і a_1.

В цьому випадку креслять прямокутну ламану лінію $ABCD$ (рис. 16), сторони якої по порядку пропорціональні коефіцієнтам a_1, a_2, a_3, причому CD має напрямок, протилежний напрямку AB.

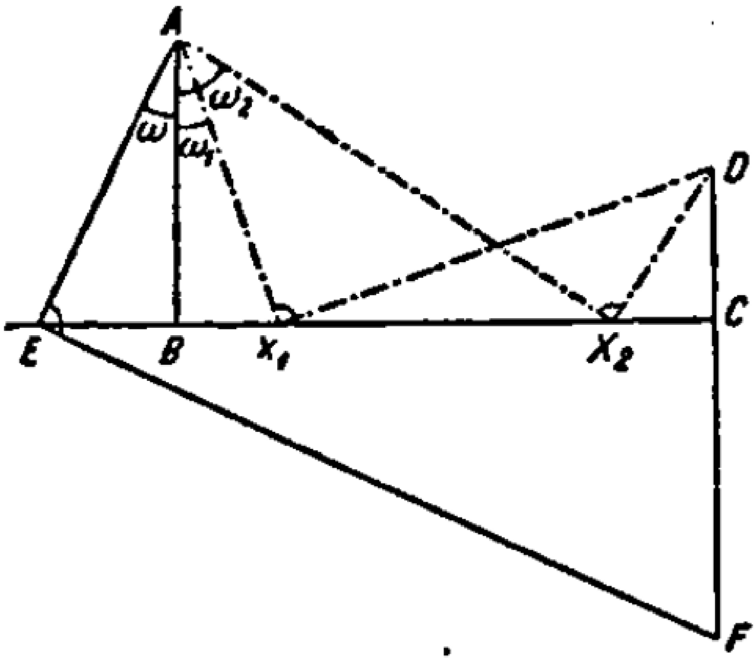

Рис. 16

Якщо тепер провести пряму AE, нахилену до AB під довільним кутом ω, і EF перпендикулярно до AE і надати $tg\ \omega = x,$ то

$$\overline{BE} = a_1 x,$$
$$\overline{CE} = a_1 x + a_2,$$
$$\overline{CF} = (a_1 x + a_2)x,$$
$$\overline{FD} = a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

Якщо F співпадає з D, то $\overline{FD} = 0$, так що $tg\omega$ буде коренем рівняння.

На малюнку $tg\omega_1$ і $tg\omega_2$ (з від'ємним знаком) – корені рівняння, так як прямокутні ламані AX_1D і AX_2D закінчуються в D.

Такого роду роздільну ламану лінію легко побудувати за допомогою прямого кута. Прямий кут розміщують у площині малюнка так, щоб його сторони проходили через A і D, а вершина лежала на прямій BC (у разі потреби – на її продовженні). Тоді коренями рівняння будуть:

$$x_1 = -\frac{\overline{BX_1}}{AB}, \ \ x_2 = -\frac{\overline{BX_2}}{AB}.$$

β) Вільний член a_3 даного для розв'язування рівняння буде від'ємним, тобто його знак протилежний знаку a_1.

В даному випадку креслять прямокутну ламану лінію, зі сторонами a_1 , a_2 , a_3 , причому відрізки a_1 і a_3 мають однаковий напрямок.(рис. 17)

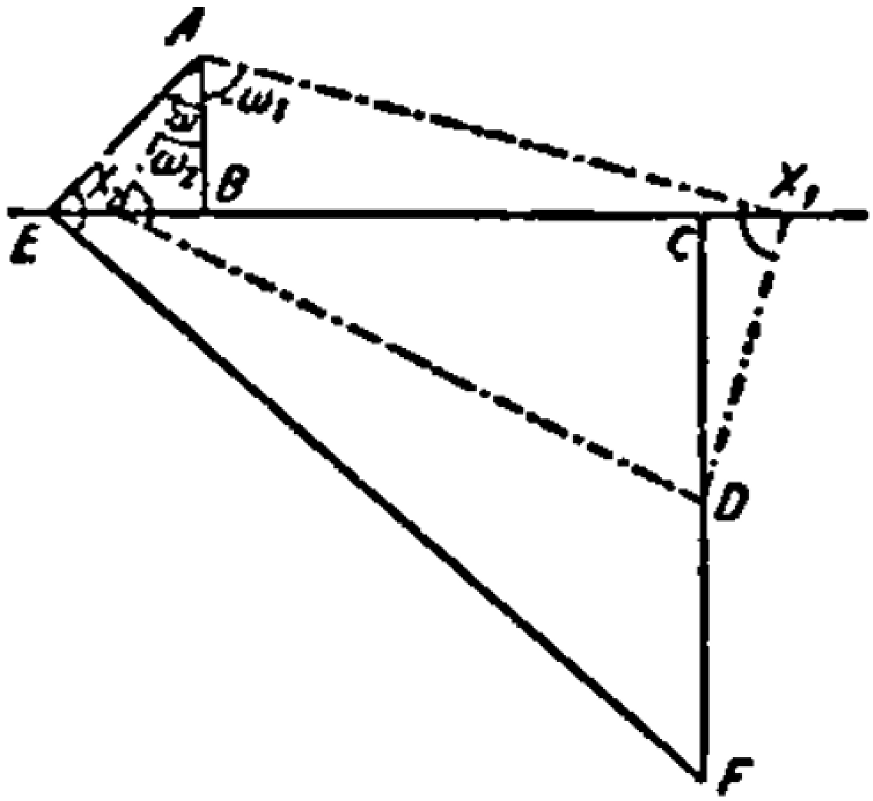

Рис.17

Якщо побудувати на AB довільний кут ω і провести перпендикулярно до AE, то, поклаши знову $tg\ \omega = x$, отримаємо:

$$\overline{BE} = a_1 x,$$

$$\overline{CE} = a_1 x + a_2,$$

$$\overline{FD} = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

(число a_3 буде від'ємним).

Визначення коренів рівняння потребує побудови роздільної ламаної лінії. Цього можна досягнути, помістивши прямий кут у площині малюнка так, щоб його сторони проходили через A і D, а вершина його лежала на необмеженій прямій BC.

b) Обидва випадки $\alpha)$ і $\beta)$ можуть бути об'єднані наступним правилом.

Креслять ламану лінію, сторони якої дорівнюють коефіцієнтам запропонованого рівняння. При цьому приймають деякий зручно вибраний відрізок за одиницю. Дві перші сторони взаємно перпендикулярні, в іншому їх взаємне розміщення можна вибирати довільно. Третя сторона ламаної лінії повинна мати напрямок, який співпадає з напрямком паралельної їй першої сторони, або протилежний йому – в залежності від того, чи мають коефіцієнти a_1 і a_3 запропонованого рівняння неоднакові чи однакові знаки.

Для кута ω за додатковий повинні приймати той напрямок, виходячи від AB, при якому кут $\omega = 270°$ відповідає додатковому напрямку прямої BC або CB, дивлячись по тому, чи буде коефіцієнт a_2 додатковим чи від'ємним.

Як відомо, користуючись прямим кутом, як єдиним інструментом креслення, можна проводити паралельні прямі, опускати перпендикуляри, збільшувати або ділити відрізки.

Отже, можна побудувати за допомогою цього інструмента і ламану лінію $ABCD$, яка «представляє» тричлен $a_1x^2 + a_2x + a_3$, якщо a_1, a_2, a_3 – раціональні числа.

Ламані, які розв'язуються, розшукуються знову таки при виключному користуванні прямим кутом. Чисельне визначення коренів може також бути знайдено за допомогою одного лише прямого кута.

РОЗДІЛ IV. ПРАКТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Приклад 1. Розв'язати рівняння: [25]

$$x^2-4x\sqrt{x+1}+8x-8\sqrt{x+1}+8=0\,.$$

Запишемо рівняння:

$$x^2-4x\sqrt{x+1}+4(x+1)+4x-8\sqrt{x+1}+4=0$$

або

$$(x-2\sqrt{x+1})^2+4\left(x-2\sqrt{x+1}\right)+4=0$$

або

$$(x-2\sqrt{x+1})^2=0\,,\ \ \left(x+1-2\sqrt{x+1}+1\right)=0$$

або

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2=0\,,\qquad \sqrt{x+1}=1\,,\ \ x=0\,.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння: [25]

$$1+\sqrt{1+8x^2-6x\sqrt{1-x^2}}=10x^2$$

Під знаком кореня — повний квадрат

$$\sqrt{9x^2-2{,}3x\sqrt{1-x^2}+(1-x^2}=10x^2-1$$

$$\left|3x-\sqrt{1-x^2}\right|=10x^2-1$$

Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} -1\le x\le -\dfrac{1}{10} \\ -\left(3x-\sqrt{1-x^2}\right)=(3x)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10}\le x\le 1 \\ 3x-\sqrt{1-x^2}=\left(3x-\sqrt{1-x^2}\right)\left(3x+\sqrt{1-x^2}\right) \end{cases}$$

З першої системи знаходимо $x_1=-\frac{3}{5}$, $x_2=0$. Корінь x_2 — сторонній.

З другої системи знаходимо $x_3=\frac{1}{\sqrt{10}}$,$x_4=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Корінь $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ — сторонній.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: [25]

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + 4\sqrt[4]{x(x^2 - x + 1)} - 5\sqrt{x} = 0\,.$$

Уведемо позначення

$$\sqrt[4]{\frac{x^2 - x + 1}{x}} = t$$

і приходимо до рівняння

$$t^2 + 4t - 5 = 0\,, \qquad t_1 = 1\,, \qquad t_2 = -5\,.$$

З рівняння

$$\frac{x^2 - x + 1}{x} = 1\,, x = 1\,.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння: [25]

$$\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$$

Знайдемо спочатку ОДЗ із нерівностей

$$2x^2 + 8x + 6 = 2(x + 1)(x + 3) \geq 0,$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \geq 0, \quad x + 1 \geq 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \in \{-1\} \cup [1; \infty); \;\; x_1 = -1$$

Винесемо загальний множник

$$\sqrt{x + 1}\left(\sqrt{2(x + 3)} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x + 1}\right) = 0$$

Зведемо обидві частини рівняння до квадрату

$$\sqrt{2x + 6} + \sqrt{x - 1} = 2\sqrt{x + 1}$$

$$2x + 6 + 2\sqrt{2x + 6}\sqrt{x - 1} + x - 1 = 4x + 4\,,$$

або

$$2\sqrt{2x + 6}\sqrt{x - 1} = x - 1\,, \;\; x_2 = 1\,.$$

Уявіть, що у вас немає під рукою калькулятора (але є циркуль та лінійка чи косинець) і вам потрібно порахувати результат у вигляді відрізка. Завдання вирішується за 5 простих кроків.

Базова формула обчислення

Для початку доведемо одну формулу, яка нам допомагатиме з подальшим рішенням.

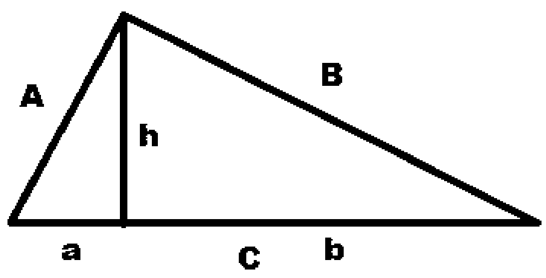

Рис.18

У прямокутному трикутнику ABC (рис. 18) проведемо висоту h до сторони c. За теоремою Піфагора виводимо:

$$C^2 = A^2 + B^2$$

$$A^2 = h^2 + a^2$$

$$B^2 = h^2 + b^2$$

$$C = a + b.$$

Підставляємо все в першу формулу:

$$(a + b)^2 = h^2 + a^2 + h^2 + b^2$$

і якщо розкрити дужки:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2h^2 + a^2 + b^2$$

Після скорочення отримаємо:

$$ab = h^2 \quad (6)$$

Ось за допомогою цієї формули і виводитимемо наші розв'язки.

Обчислення квадрата довжини

Для обчислення квадрата величини x використовуємо нашу формулу як:

$$a = 1, h = X, b = X^2 \quad (7)$$

Малюємо пряму лінію достатньої довжини (рис.19).

Рис.19

Відкладаємо на ній відрізок одиничної довжини (рис.20).

Рис.20

Від правого кінця одиничного відрізка 1 відкладаємо вгору перпендикуляр завдовжки X (рис.21).

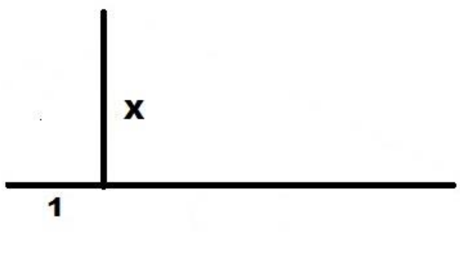

Рис.21

Проводимо лінію від лівого кінця одиничного відрізка 1 до верхнього кінця відрізка X (рис.22).

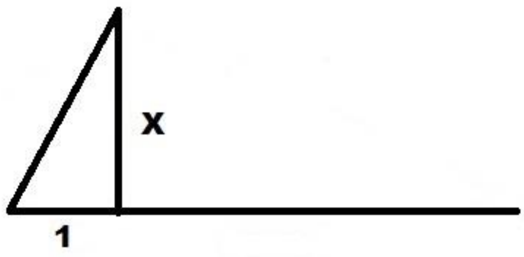

Рис.22

Від цього відрізка відкладаємо перпендикуляр на лінію продовження одиничного відрізка 1 (рис.23). Їх перетин і є правий край квадрата довжини. Лівий край починається від точки, де відкладено висоту.

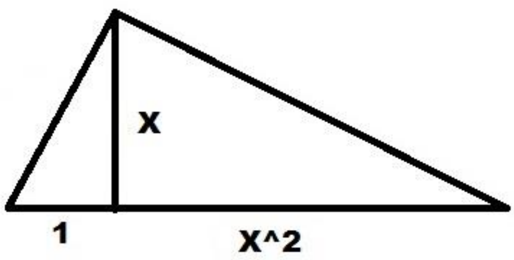

Рис.23

Обчислення квадратного кореня довжини

Для обчислення квадратного кореня величини використовуємо таку формулу як:

$$a = 1, b = X, h = sqrt(X) \tag{8}$$

Малюємо пряму лінію достатньої довжини (рис.24).

Рис.24

Відкладаємо на ній одиничний відрізок довжини 1 (рис.25)

Рис.25

На продовженні одиничного відрізка відкладаємо відрізок довжини ***X*** (рис.26).

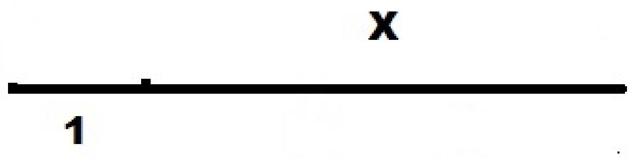

Рис.26

Отриманий відрізок $\mathbf{1}+\boldsymbol{X}$ ділимо навпіл за допомогою циркуля та отримуємо точку О. Позначимо довжину знайденої половини як R (рис.27).

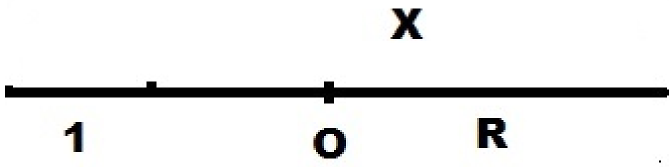

Рис.27

Навколо центру $\boldsymbol{O}$, циркулем намалюємо дугу радіусом $\boldsymbol{R}$ (рис.28).

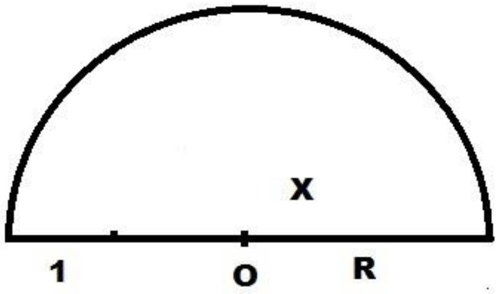

Рис.28

Від правого кінця відрізка 1 відкладемо вгору перпендикуляр до перетину з дугою кола (рис.29). Довжина цього перпендикуляра і дорівнюватиме кореню квадратному з довжини $\boldsymbol{X}$.

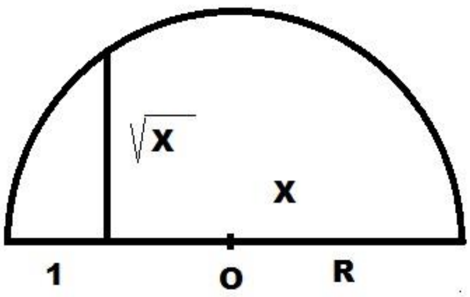

Рис.29

Задача 5. Побудувати трикутник ABC за стороною $\mathrm{BC}=\mathrm{a}$, висотою $\mathrm{h_a}$, опущеною на сторну a, і бісектрисою b_B кута B. [14]

Для спрощення розглянемо окремий випадок, а саме – припустимо, $h_a = b_B =$ $= 1.$

Нехай (рис.30) $BC = a = 1,\ BD = b_B = 1,\ AP = h_a = 1.$ Позначимо $AB = x$. Очевидно, досить побудувати x, щоб розвйязати дану задачу.

Користуючись очевидними співвідношеннями

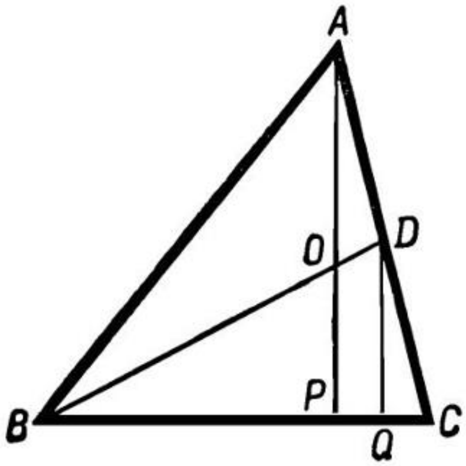

Рис.30

$\frac{AO}{OP} = \frac{AB}{BP}$; $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2}$;

$\frac{OP}{DQ} = \frac{BO}{BD}$; $BO = \sqrt{OP^2 - BP^2}$;

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ або $\frac{AC}{DC} = \frac{AB+BC}{BC} = \frac{AP}{DQ}$,

можна записати

$$\frac{1 - OP}{OP} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\ ;\quad \frac{1}{DQ} = \frac{1 + x}{1}\ ;\quad \frac{OP}{DQ} = \frac{\sqrt{OP^2 + x^2 - 1}}{1}.$$

Виключаючи з цих рівностей OP і DQ , дістанемо після відповідних перетворень таке рівняння для x :

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x - 1 = 0. \qquad (9)$$

Але відомо, що жодний корінь цього рівняння не може бути побудований циркулем і лінійкою, а тому і шуканий трикутник не можна побудувати за допомогою цих інструментів.

Оскільки ми переконалися, що при певному доборі даних трикутник не можна побудувати циркулем і лінійкою, приходимо до висновку, що дана задача в загальному випадку не розв'язується за допомогою циркуляі лінійки.

Задача 6. Побудувати трикутник ABC за стороною BC = a, висотою h_a, опущеною на сторону a, і бісектрисою b_A кута A. [14]

Нехай (рис.31) $DC = a$, $AP = h_a$, $AQ = b_A$.

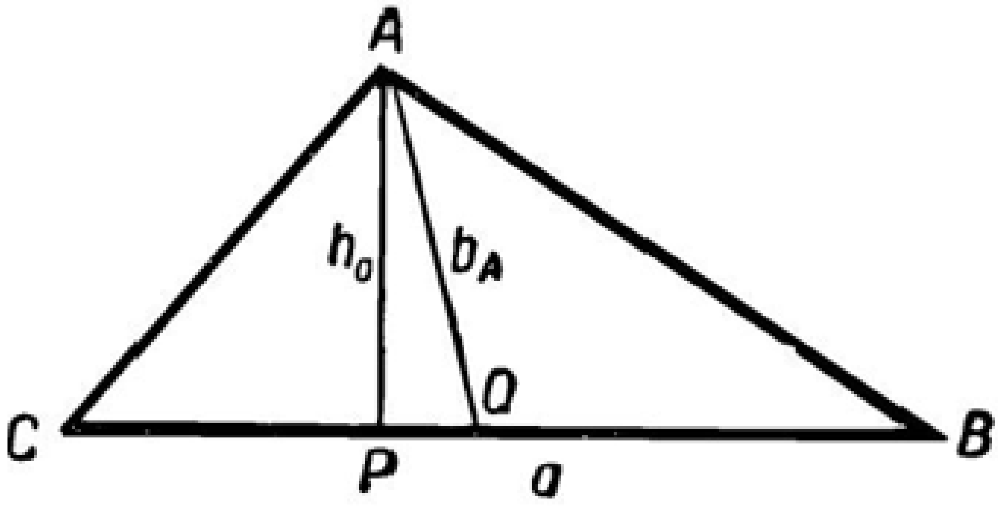

Рис.31

Очевидно, для побудови трикутника ABC досить побудувати відрізок CP; позначимо $CP = x$. Тоді матимемо:

$$AC = \sqrt{h_a^2 + x^2}\,;\;\; AB = \sqrt{h_a^2 + (a-x)^2}\,.$$

Далі, відрізок PQ побудовний, оскільки $PQ = \sqrt{b_A^2 + h_a^2}$; позначимо $PQ = m$. Оскільки b_A – бісектриса кута A, то

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{CQ}, \text{ або } \frac{\sqrt{h_a^2 + (a-x)^2}}{\sqrt{h_a^2 + x^2}} = \frac{a - x - m}{x + m}.$$

З останньої пропорції, виконавши прості перетворення, дістанемо рівняння

$$(a - 2x)(x + m)^2 = [a - 2(x + m)](\,h_a^2 + x^2)\,,$$

або

$$2mx^2 - 2(am - m^2 + h_a^2)x + (ah_a^2 - am^2 - 2mh_a^2) = 0\,. \qquad (10)$$

Як бачимо, x є коренем квадратного рівняння, коефіцієнти якого – побудовні числа. Отже, задачу можна розв'язати циркулем і лінійкою.

Звернемо увагу на те, що задачі 5 і 6 досить подібні за умовою (в одній з них дано a, h_a і b_B, а в другій $-$ a, h_a і b_A), але у питанні про розв'язність циркулем і лінійкою між ними існує принципова відмінність, яку можна виявити лише шляхом аналізу рівняння, що визначає потрібний елемент побудови.

Легко перевірити, що заміна в умові задачі 6 бісектриси b_B медіаною m_b або висотою h_b також приводять до задач, які безпосередньо розв'язуються циркулем і лінійкою.

Задача 7. Побудувати прямокутний трикутник ABC за гіпотенузою c і бісектрисою $\mathrm{b_c}$ прямого кута C. [14]

Порівняння з попередньою задачею, а також безпосередні міркування показують, що для побудови трикутника досить побудувати висоту h_c, опущену на гіпотегузу. Якщо позначити площу трикутника ABC через s, можна записати

$$ch_\mathrm{c} = 2s. \tag{11}$$

Нехай (рис. 32) CD $-$ бісектриса кута C. Тоді площа трикутника ABC є сумою площ трикутників CBD та CDA. Якщо через a, b позначити катети трикутни $-$ ка ABC, то, очевидно, площі останніх двох трикутників дорівнюють відповідно $\frac{1}{2}ab_c\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{1}{2}bb_c\frac{\sqrt{2}}{2}$, звідки

$$s = (a+b)b_c\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Порівнюючи з (3), маємо

$$ch_c = (a+b)b_c\frac{\sqrt{2}}{2},$$

або

$$2c^2h_c^2 = (a^2+2ab+b^2)b_c^2.$$

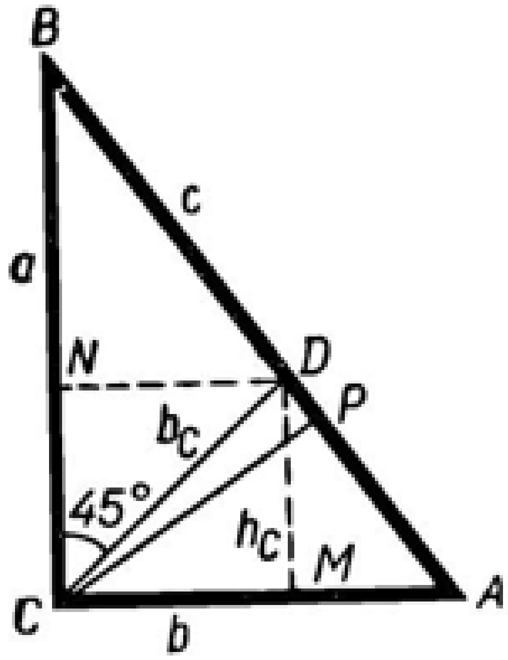

Рис.32

Але $a^2 + b^2 = c^2$, $2ab = 4s = 2ch_c$,

тому

$(c^2 + 2ch_c)b_c^2 = 2c^2h_c^2$,

звідки для h_c дістаємо рівняння

$$2ch_c^2 - 2b_c^2h_c - cb_c^2 = 0. \quad (12)$$

Оскільки (12) є квадратним рівнянням, то задача 7 може бути розв'язана циркулем і лінійкою.

Задача 8. Побудувати трикутник за трьома висотами. [14]

Нехай a, b, c – невідомі сторони шуканого трикутника, h_a, h_b, h_c – задані (відповідні) висоти. Як відомо, справедливі рівності

$$ah_a = bh_b = ch_c ,$$

або

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} , \ \frac{c}{h_b} = \frac{b}{h_c} .$$

Звідси дістаємо:

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}} .$$

Очевидно, $h = \frac{h_a h_b}{h_c}$ можна побудувати циркулем і лінійкою. Позначимо спільне значення розглядуваних відношень через x:

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{h} = x$$

і зауважимо, що для розв'язання поставленої задачі досить виявити побудовність числа x, бо тоді побудовними будуть і сторони трикутника

$$a = xh_b,\ b = xh_a,\ c = xh. \qquad (12)$$

Як відомо, висоти трикутника можна подати через його сторони за формулами такого виду:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, \text{де } p = \frac{a+b+c}{2}. \qquad (13)$$

Якщо ввести позначення $p' = \frac{h_a+h_b+h}{2}$, то на підставі (12) $p = xp'$ і (13) можна переписати у вигляді

$$h_a = \frac{2}{xh_b}\sqrt{x^4p'(p'-h_b)(p'-h_a)(p'-h)}\,,$$

або

$$2x\sqrt{p'(p'-h_b)(p'-h_a)(p'-h)} = h_ah_b\,,$$

звідки побудовність x, а тому і шуканого трикутника циркулем і лінійкою видно безпосередньо.

Як бачимо, за трьома висотами трикутник завжди можна побудувати циркулем і лінійкою. Аналогічно легко показати побудовніть трикутника за трома медіанами. Однак виявляється, що побудувати трикутник циркулем і лінійкою за трьома бісектрисами вже неможливо.

Задача 9. Побудувати трикутник за трьома бісектрисами. [14]

Як і в задачі 5, обмежимось розглядом частинних випадків. Будемо вважати трикутник рівнобедреним (але не рівностороннім, оскільки останній завжди побудовний за його бісектрисами), тобто покладемо $b_A = b_B \neq b_C$.

Щоб побудувати шуканий трикутник ABC (рис. 33) досить побудувати один з його кутів. Для цього, в свою чергу, досить побудувати значення якоїсь з тригонометричних функцій цього кута. В даному разі зручно поставити питання про побудовність числа $x = sin\frac{A}{2}$.

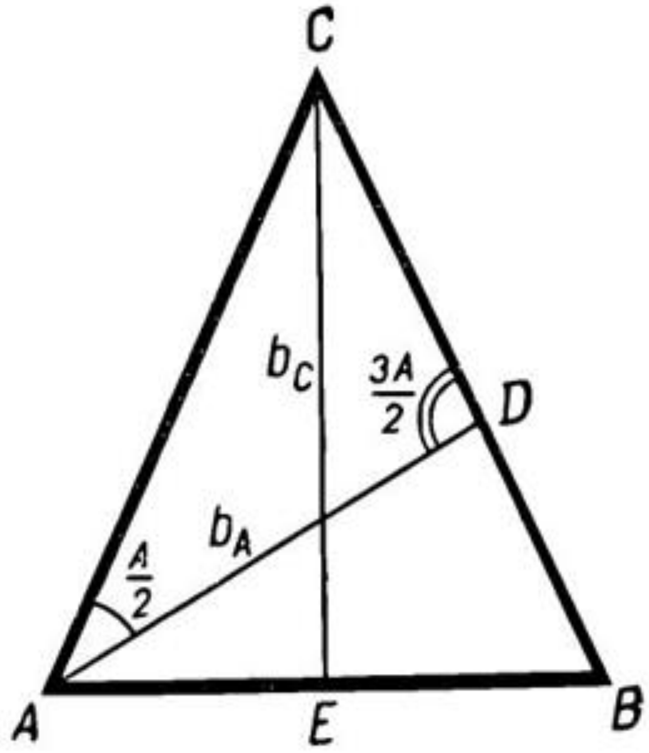

Рис. 33

Оскільки $C = 2d - 2A$, а $\angle CAD = \frac{A}{2}$, $\angle ADC = \frac{3A}{2}$.

Застосовуючи теорему синусів до трикутника ACD, можна записати

$$\frac{AC}{sin\frac{3A}{2}} = \frac{AD}{\sin(2d - 2A)},$$

або

$$\frac{AC}{sin\frac{3A}{2}} = \frac{b_A}{sin2A}.$$

Але $AC = \frac{b_C}{\sin A}$ тому маємо

$$\frac{b_C}{\sin A\, sin\frac{3A}{2}} = \frac{b_A}{sin2A},$$

тобто (після очевидних перетворень)

$$2b_C cosA - b_A sin\tfrac{3A}{2} = 0\,. \qquad (14)$$

Оскільки $sin\frac{A}{2} = x$, то $cosA = 1 - 2sin^2\frac{A}{2} = 1 - 2x^2$

і

$$sin\frac{3A}{2} = 3sin\frac{A}{2} - 4sin^3\frac{A}{2} = 3x - 4x^3.$$

Введемо також позначення $k = \frac{b_C}{b_A}$. Тоді (14) можна переписати у вигляді

$$4x^3 - 4kx^2 - 3x + 2k = 0\,. \qquad (15)$$

Ми бачимо, що коефіцієнти рівняння (15), корінь якого нас цікавить, залежать від параметра $k = \frac{b_C}{b_A}$. Отже, цілком природно, що і висновок про побудовність або непобудовність трикутника ABC за допомогою циркуля і лінійки може залежати від цього параметра.

Справді, при $k = 3$ з рівняння (15) набирає вигляду

$$4x^3 - 12x^2 - 3x + 6 = 0\,.$$

Многочлен $4x^3 - 12x^2 - 3x + 6$ незвідний у полі раціональних чисел, як це випливає з критерію Ейзенштейна. Цей критерій формулюєься так:

Якщо у многочлені з цілими коефіцієнтами

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

коефіцієнти $a_0,\ a_1,\ \dots\ ,a_{n-1}$ діляться на деяке просте число p, причому a_0 не діли - ться на p^2, а старший коефіцєнт a_n не ділиться на p, то многочлен $f(x)$ – незвідний у полі раціональних чисел.

Отже, його корені не можуть бути побудовані циркулем і лінійкою.

При $k = 2$ дістанемо рівняння

$$4x^3 - 8x^2 - 3x + 4 = 0\ ,$$

Яке після множення на 2 і заміни $y = 2x$ переходить у рівняння

$$y^3 - 4y^2 - 3y + 8 = 0\ .$$

Але многочлен $y^3 - 4y^2 - 3y + 8$ також незвідний у полі раціональних чисел, бо не має раціональних коренів. Справді, раціональні корені зведеного многочлена з цілими коефіцієнтами мають бути цілими числами і дільниками вільного члена. Але в даному разі жодне з таких чисел $(\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm 4,\ \pm8)$ не є коренем сногочлена, що легко перевірити безпосереднім підставленням.

Ці приклади показують, що в загальному випадку задача побудови трикутника за трьома бісектрисами не розв'язується циркулем і лінійкою.

Звичайно, в окремих випадках така побудова можлива. Наприклад, при $b_A = = b_B = 2b_C$ маємо $k = \frac{1}{2}$, і тому рівняння (8) набирає вигляду

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0\ .$$

Очевидно, це рівняння має раціональний корінь $x = 1$, і тому всі його корені можуть бути побудовані циркулем і лінійкою.

Задача 10. У дане коло вписати рівнобедрений трикутник за висотою, опущеною на одну з рівних сторін. [14]

Приймемо радіус даного кола за одиницю. Очевидно, для побудови трикутника

ABC (рис.34) досить побудувати кут $C = 2\alpha$ або число $x = sin\alpha$.

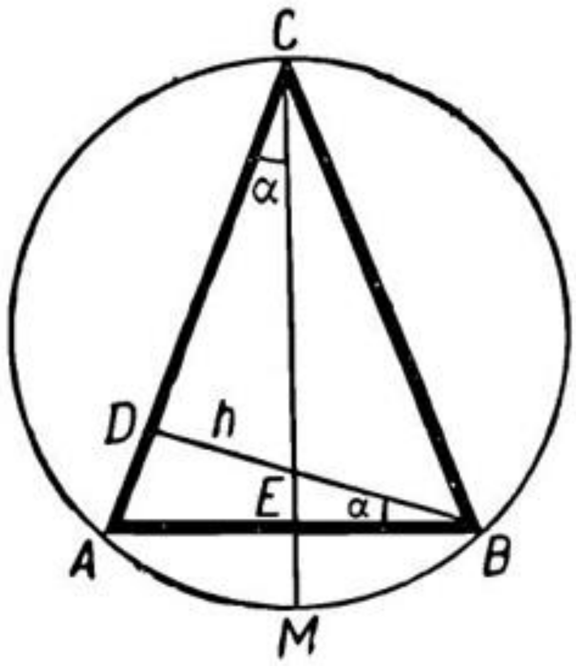

Рис.34

Як відомо,

$$CE \cdot EM = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \tag{16}$$

і, крім того

$$AC \cdot DB = AB \cdot CE\ . \tag{17}$$

Далі маємо (ураховуючи, що висота $BD = h$ задана):

$$AB = \frac{h}{cos\alpha}\ , \qquad AC = \frac{AB}{2sin\alpha} = \frac{h}{2cos\alpha sin\alpha} = AB = \frac{h}{sin2\alpha}\ .$$

Підставляючи ці вирази в (17), дістаємо

$$\frac{h^2}{sin2\alpha} = \frac{h}{cos\alpha} \cdot CE\ ,$$

звідки

$$CE = \frac{hcos\alpha}{sin2\alpha} = \frac{h}{sin2\alpha}\,.$$

Тепер (9) дає нам:

$$\frac{h}{2sin\alpha}\left(2 - \frac{h}{2sin\alpha}\right) = \left(\frac{h}{2cos\alpha}\right)^2,$$

або, після перетворень,

$$4cos^2\alpha sin\alpha = h\,.$$

Вводячи позначення $sin\alpha = x,$ дістаємо для x рівняння

$$4x^3 - 4x + h = 0\,. \qquad (18)$$

В загальному випадку кубічне рівняння (18) не можна розв'язати у квадратних радикалах. Так, при $h = \frac{1}{2}$ дістанемо рівняння

$$8x^3 - 8x + 1 = 0,$$

ліва частина якого, як легко перевірити, є многочленом, незвідним у полі раціональних чисел.

Як і в попередніх випадках, при окремих значеннях параметра задача може бути розв'язна циркулем і лінійкою. Так, наприклад, при $h = \frac{15}{16}$ відповідне рівняння

$$4x^3 - 4x + \frac{15}{16} = 0$$

має раціональний корінь $x = \frac{1}{4}$, і тому всі його корені виражаються через квадратні радикали.

Задача 11. Дано кут і точку поза ним. Провести через цю точку пряму так, щоб сторони кута відтинали на ній відрізок заданої довжини s . [14]

Для аналізу цієї задачі застосуємо методи аналітичної геометрії.

Нехай (рис.35) AMB - заданий ку, а O - задана точка. Побудуємо конхоїду Г, для якої O є центром, MB - базою, а s – інтервалом. Очевидно, шукану пряму OP буде побудовано, якщо ми знайдемо точку P перетину цієї конхоїди з сторо-ною MA заданого кута.

Якщо прийняти O за початок координат, а за вісь абсцис взяти пряму, паралельну базі MB, то рівняння конхоїди можна записати у вигляді:

$$(x^2 + y^2)(y - p)^2 = s^2 y^2, \tag{19}$$

де p – віддаль точки O від бази MB (цю віддаль можна вважати заданою).

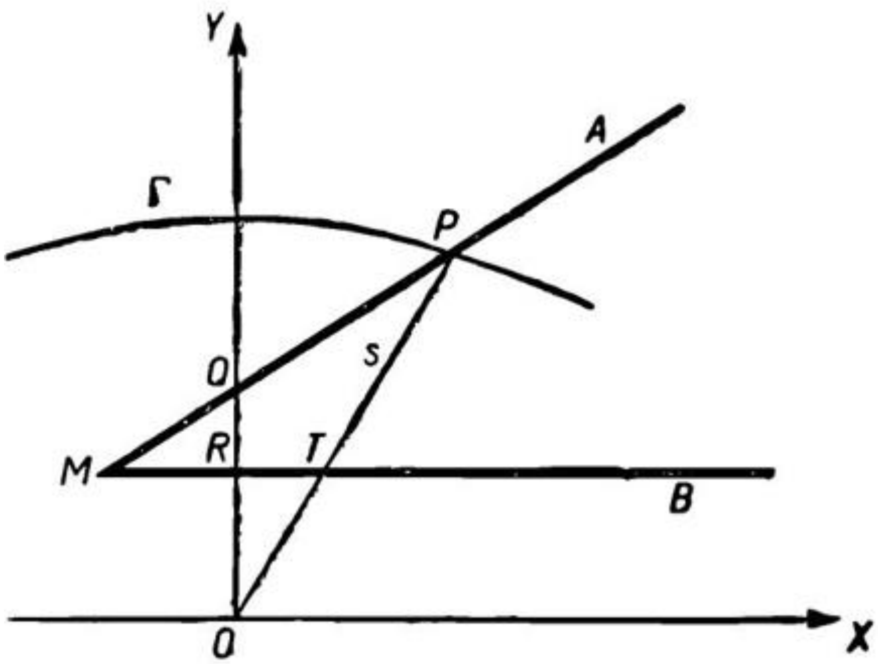

Рис.35

Рівняння сторони MA заданого кута можна записати у вигляді [14]

$$y = kx + m, \tag{20}$$

де кутовий коефіцієнт k і початкову ординату m слід вважати заданими. Щоб знайти координати точки P, досить розв'язати систему рівнянь (19) і (20). Підставляючи y з (20) в (19), отримаємо

$$[x^2 + (kx + m)^2](kx + m - p)^2 = s^2(kx + m)^2 \,. \tag{21}$$

Як бачимо, x є коренем повного рівняння 4-го степеня, коефіцієнти якого залежать від параметрів p , k , m і s . У зв'язку з цим можна вважати, що дана задача в загальному випадку не розв'язується циркулем і лінійкою.

Справді, наприклад, при $k = 1$, $s = p = 1$, $m = 1$ дістаємо рівняння

$$2x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0 \,,$$

яке після множення на 8 і заміни $2x - y$ переходить у рівняння

$$y^4 + 2y^3 - 8y - 8 = 0 \,. \tag{22}$$

Покажемо насамперед, що це рівняння не можна розв'язати у квадратних радикалах. Для цього складемо його кубічну резольвенту. Покладаючи $a = 2,\ b = 0,\ c = -8,\ d = -8,$ у рівняння для визначення допоміжної величини t:

$$t^3 - bt^2 + (ac - 4d)t - (da^2 - 4db + c^2) = 0 \,, \tag{23}$$

отримаємо

$$t^3 + 16t - 32 = 0 \,,$$

яке є резольвентою рівняння (22).

Наведемо формулювання відомої теореми.

Теорема. Для того, щоб усі корені многочлена 4-го степеня над полем Δ були побудовні циркулем і лінійкою, виходячи з цього поля, необхідно і достатньо, щоб у полі Δ була звідною кубічна резольвента даного многочлена.

За даною теоремою буде, що жодний корінь рівняння (23) не можна побудувати циркулем і лінійкою.

Отже, при $k = s = m = p = 1$ задачу не можна розв’язати циркулем і лінійкою.

Згаданим значенням параметрів геометрично відповідає згадана конфігурація, вказана на рис.36

Звичайно, при спеціальному доборі значень параметрів і дана побудова може бути виконана лінійкою і циркулем. Так, наприклад, якщо між значеннями параметрів справджується співвідношення $m = p + s$, то як легко помітити, у рівняння (14) зникає вільний член, у зв'язку з чим одним з кренів буде $x = 0$. Саме корінь і відповідає умовам задачі, як це безпосередньо видно з рис.37. Адже в даному випадку $QR = m - p = s$, і тому шукана пряма збігається з віссю ординат, а точ - ка P $-$ з точкою Q.

Можна було б навести і менш тривіальні приклади тих випадків, коли дана задача розв'язується циркулем і лінійкою. В цілому ж її слід віднести до числа тих побудов, які нездійсненні цими інструментами.

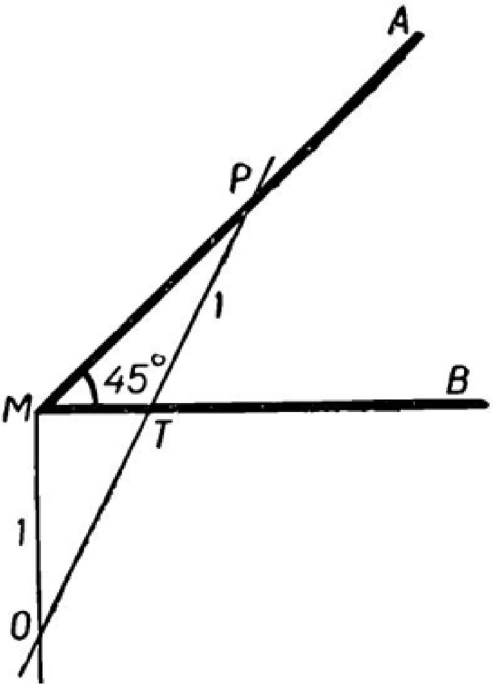

Рис.36

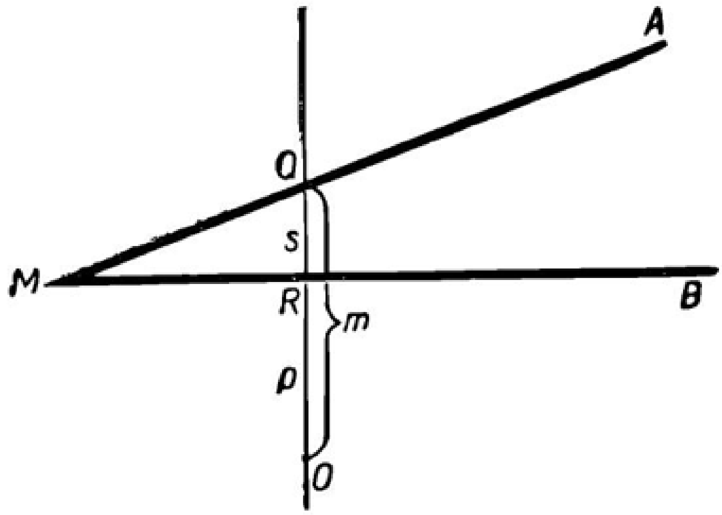

Рис.37

До того ж результату прийдемо і у випадку, коли заданий кут прямий. Рівняння сторони MA кута має тоді вигляд $x = c$, а побудова точки P зводиться до побудови її ординати, яка задовольняє рівняння [пор. з (19)]:

$$(c^2+y^2)(y-p)^2 = s^2y^2\,. \qquad (24)$$

Рівняння (24) є рівнянням 4-го степеня і в загальному випадку не розв'язується у квадратних радикалах.

Наприклад, при $c = s = 2$, $p = 1$ дістаємо рівняння $y^4 - 2y^3 + y^2 - 8y + +4 = 0$, кубічною резольвентою якого є рівняння $t^3 - t^2 - 64 = 0$, що не розв'язується у квадратних радикалах. Навпаки, при $c = s = p = 1$ дістаємо рівняння $y^4 - 2y^3 + y^2 - 2y + 1 = 0$, яке належить до так званих «симетричних» і легко розв'язується в квадратних радикалах.

Зауважимо, що якби точка O лежала всередині даного кута, то весь аналіз задачі і висновки залишилися б у силі. У випадку ж, коли точка лежить на стороні кута , $p = 0$, і тому рівняння (19) набирає вигляду

$$x^2 + y^2 = s^2\,,$$

тобто конхоїда замінюється колом. Звідси ясно, що задача розв'язується циркулем і лінійкою; цей результат безпосередньо очевидний.

Замінюючи в задачі 11 кут AMB іншим геометричним образом, можна прийти до ряду цікавих конструктивних задач. Деякі з них розв'язуються циркулем і лінійкою, деякі – ні. Так, легко показати, що через дану точку поза колом можна провести циркулем і лінійкою пряму, яка в перетині з колом утворює хорду заданої довжини. Якщо ж замінити коло квадратом, то міркування аналогічні до проведених лінійкою лише в окремих випадках. [14]

Цікаво, що задачу 7 можна також звести до побудови точок перетину конхоїди з деякою фігурою. Справді, побудуємо коло K, взявши за діаметр гіпотенузу $AB = c$ шуканого трикутника (рис.38). Тоді вершину C можна шукати як точку одного півкола AB. Якщо O –середина другого півкола AB, то задана бісектриса $CD = b_c$ повинна, очевидно, лежати на відрізку CO. Отже, точка C кола K належить також конхоїді Γ з полюсом O, базою AB і інтервалом b_c. Введемо прямокутну систему координат, взявши за початок точку O, а за вісь абсцис – пряму, паралельну базі AB .

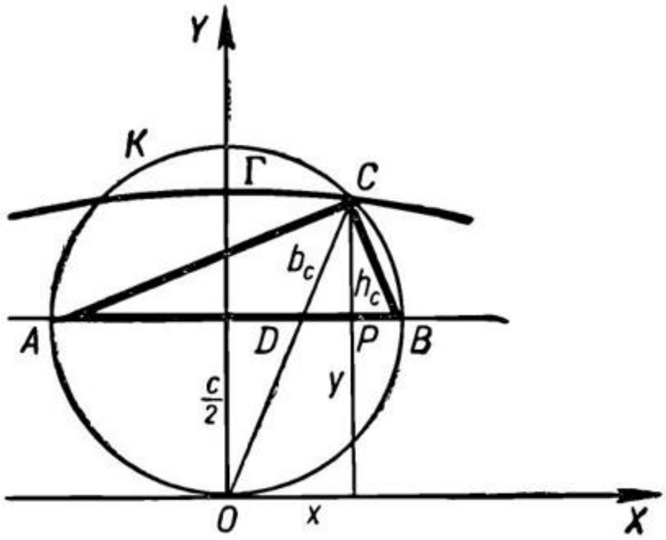

Рис.38

Тоді рівняння конхоїди Γ дістанемо з (12), поклавши $p = \frac{c}{2}$, $s = b_c$:

$$(x^2 + y^2)\left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = b_c^2 y^2 . \tag{25}$$

Рівняння кола K має вигляд

$$x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 ,$$

або

$$x^2 + y^2 = cy . \tag{26}$$

Природно чекати, що точки перетину конхоїди з колом непобудовні циркулем і лінійкою. Але в даному випадку, внаслідок спеціального розміщення кола щодо конхоїди, приходимо до протилежного висновку.

Справді, виключивши $x^2 + y^2$ з рівнянь (25), (26) і відкинувши розв'язок $y = 0$ (який не відповідає умовам задачі), дістанемо

$$c\left(y-\frac{c}{2}\right)^2 = b_c^2 y\,, \qquad (27)$$

Тобто квадратне рівняння для ординати y точки C. Звідси й випливає можливість розв'язати задачу 7 циркулем і лінійкою.

Якщо помітити, що $y-\frac{c}{2}=h_c$, то з (27) можемо дістати для h_c рівняння

$$ch_c^2 = b_C^2\left(h_c+\frac{c}{2}\right), \qquad \text{або} \qquad 2ch_c^2 - 2b_C^2 h_c - cb_C^2 = 0\,,$$

яке збігається з рівнянням (5). [14]

Розглянуті приклади свідчать про те, що конструктивні задачі, нерозв'язні циркулем і лінійкою, можуть бути використані вчителями на факультативах з математики. Це показує, наскільки важливо для вчителя бути обізнаним з відповідними критеріями.

ВИСНОВКИ

В магістерській роботі розглянуто поняття та умови розв'язності алгебраїчних рівнянь у радикалах. Значна частина роботи присвячена побудовності розв'язків задач за допомогою цирклуля та лінійки. Наведена класифікація геометричних задач на побудову.

Під час написання даної роботи було розглянуто і розв'язано значну кількість прикладів на побудову за допомогою циркуля та лінійки, зокрема, було показано, що ідентичні задачі за умовою і різним дано можуть бути нерозв'язні циркулем і лінійкою. Також було наведено приклади розв'язування алгебраїчних рівнянь у радикалах, графічне розв'язування рівнянь другого степеня. В роботі розглядаються візуальні та метричні задачі.

Матеріал роботи може бути використаний студентами при вивченні алгебри і проективної геометрії, а також вчителями при проведенні занять математичного гуртка або факультативу з математики, та при підготовці учнів до олімпіад.

Результати роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2021 рік.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адлер А. Теория геометрических построений / Август Адлер. – Ленинград: Государственое учебно-педагогическое издательство Наркомпроса РСФСР. Ленинградское отделение, 1940. – 232 с. – (3).
2. Аргунов Б.И. Геометрические построения на плоскости / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк – Москва, 1957. – (2).
3. Аксенова М.В. Энциклопедия по математике / М.В. Аксенова, Г.І. Храмов.- Москва: Аванта+, 1995. – 162 с.
4. Бородін О.І. Теорія чисел / О.І. Бородін. – Київ: Вища школа, 1970. – 276 с.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – Москва: Высшая школа, 1967. – 384 с.
6. Вигодський М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире / М.Я. Вигодський. – Москва: Наука, 1967. – (2).
7. Выноградов И.М. Основы теории чисел / И.М. Выноградов. – Москва: Наука, 1965. – 168 с.
8. Гейлер В. О. Нерозв'язні задачі на побудову / В. О. Гейлер. // СОЖ. – 1999. – №12. – С. 115–118.
9. Глейзер Г.И. История математики в школе / Г.И. Глейзер. – Москва: Просвещение, 1964.-324-325.
10. Дідківська Т. В. Розв'язування рівнянь методами геометричної алгебри в історії математики / Т. В. Дідківська, І. А. Сверчевська. // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – 2015. – №78. – С. 113–117.
11. Класичні задачі, нерозв’язні циркулем і лінійкою та їх значення для розвитку математики [Електронний ресурс] // allbest. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: https://revolution.allbest.ru/mathematics/00547968_0.html
12. Коба І.В. Бесіди про рівняння / І.В. Коба, Т.О. Чуб, А.М. Нікулін. – Київ: Радянська школа, 1986.
13. Коло і круг. Геометричні побудови [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://subject.com.ua/textbook/mathematics/7klas_2/18.html

14.Костарчук В. М. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля і лінійки / В. М. Костарчук, Б. І. Хацет. – Київ: Державне учбово-педагогічне видавництво "Радянська школа", 1962. – 130 с.

15.Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – Москва: Наука, 1971. – 432 с.

16.Лиман Ф.М. Елементи теорії груп, кілець та полів: Навчальний посібник / Ф.М. Лиман, Т.Д. Лукашова. – Суми: МакДен, 2013. – 208 с.

17.Манин И.Ю. О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки / И.Ю. Манин. – Москва: Фитматгиз, 1963. – (Энциклопедия элементарной математики; т. 4).

18.Марач В. С. Курс лекцій з лінійної алгебри / В. С. Марач, О. В. Крайчук. – Рівне: Принт Хауз, 2005. – 312 с.

19.Метод геометричних місць в задачах на побудову [Електронний ресурс] // Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: http://surl.li/awxef

20.Никифоровский В.А. Из истории алгебры XVI - XVII вв. / В.А. Никифоровский. – Москва: Наука, 1979. – (академия наук СССР). – (История науки и техникии).

21.Побудова за допомогою циркуля та лінійки [Електронний ресурс] // Вікіпедія – Режим доступу до ресурсу: http://surl.li/awxih .

22.Прасолов В.В. Три классические задачи на построение / В.В. Прасолов. – Москва: Наука, 1992.

23.Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Москва: Наука, 1984.

24.Требенко Д.Я. Алгебра і теорія чисел / Д.Я. Требенко, О. О. Требенко. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – 400 с.

25.Уравнения в радикалах [Електронний ресурс]. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: https://otherreferats.allbest.ru/mathematics/00057594_0.html.

26.Широков П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского / П.А. Широков. – Москва: Наука, 1983. – 76 с.

27.Щетников А.И. Как были найдены некоторые решения трёх классических задач древности? / А.И. Щетников – Москва, 2008. – (Математическое образование).