Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Розв’язування задач з параметрами

Виконала: студентка II курсу магістратури,
групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Герук Наталія Василівна
Керівник: *к.ф.-м.н. , доц. Сапіліді Т. М.*
Рецензент: д-р. техн. наук, завідувач кафедри
комп’ютерних наук і прикладної математики
Турбал Юрій Васильович

Рівне – 2021 року

Зміст

Вступ

У галузі математики є основні завдання позашкільної освіти це:

висвітлити нестандартні підходи та методи розв'язування задач;

розширити знання з математики;

розглянути важливі теми, які недостатньо висвітлені у шкільному курсі;

виконати посильні дослідно-експериментальних завдання [7].

За допомогою практичних завдань, а саме задач з параметрами, тому що саме вони відкривають перед учнями низку евристичних прийомів, які і мають величезну цінність у математичному розвитку особистості та застосовуються у різних дослідженнях – ці питання можна з легкістю вирішити [2].

Також ці завдання стосуються і симетрії аналітичних виразів, а також застосування властивостей функцій та засвоєння графічних прийомів розв'язування задач як рівноправних, по суті, з аналітичними методами [7].

Задачі з параметрами часто можна зустріти у прикладних напрямках елементарної математики та в дослідницьких завданнях. Адже вони допомагають учням розвивати логічне мислення та вміння лаконічно та прозоро записувати розв'язання а також підібрати всі можливі варіанти розташування графіків, а це є основа для майбутніх дослідників природничих наук [4].

Структура даної роботи побудована за логічним принципом і складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

Перший розділ включає в себе теоретичні основи розв'язування рівнянь з параметрами, основні види рівнянь з параметрами.

У другому розділі наводяться методи розв'язування задач з параметрами.

У третьому розділі описуються можливості розв'язку задач за допомогою комп’ютерної програми Microsoft Mathematics 4.0.

Об'єктом дослідження роботи є задачі з параметрами, а предметом — методи розв’язання задач з параметрами.

Метою даної роботи є систематизація та розробка методів розв’язання задач з параметрами.

Розділ 1. Історія виникнення задач з параметрами

1.1. Поняття параметра

При вивченні теми «задачі з параметром» важливо знати, що означає термін параметр. Якщо рівняння чи нерівність крім невідомих містить ще деякі змінні (позначені літерами) і нам потрібно знайти розв'язок даного рівняння чи нерівності при певних значеннях параметрів то такі рівняння або нерівності називаються параметричними.

Можливі випадки, що розв'язок рівняння залежить від значень одного або кількох параметрів, і в цих випадках це рівняння прийнято називати рівнянням з параметром або з декількома параметрами.

Для того, щоб розв'язати рівняння з параметром необхідно для кожного значення параметра знайти таке значення кореня, яке буде задовольняти даному рівнянню, а також дослідити, при яких значеннях параметра рівняння буде мати корінь та кількість їх для різних значень параметра, знайти всі корені та вказати для кожного з них ті значення параметрів, при яких цей вираз дійсно визначає корінь рівняння [2].

Розглянемо рівняння $a(x+k)=a+c$ де a,c,k,x - змінні величини.

Нехай A - множина всіх допустимих значень a, K - множина всіх допустимих значень k, X - множина всіх допустимих значень x, C - множина всіх допустимих значень c. Якщо з кожної множини A,K,C,X вибрати та зафіксувати відповідно по одному значенню a,c,k, і підставити їх у рівняння, то отримаємо рівняння відносно x, тобто рівняння з одним невідомим.

Змінні a,c,k, можна вважати сталими при розв'язуванні рівняння та називати параметрами, а саме рівняння будемо називати рівнянням з параметрами [1].

Параметри позначаються першими літерами латинського алфавіту: $a,b,c,d,\dots,k,l,m,n,$ а невідомі – літерами x,y,z.

1.2. Історія виникнення задач з параметрами

У 499р. в астрономічному трактаті, створеному Аріабхаттою, вже зустрічалися задачі з параметрами. Проте загальне правило розв'язку квадратних рівнянь, зведених до єдиної канонічної форми, виклав індійський вчений, Брахмагупта (VII ст.):

$ax^2 + bx = c,\ a > 0$.

У рівнянні коефіцієнти $b\ i\ c$ можуть і від'ємними

Ал-Хорезмі у своєму трактаті класифікує лінійні та квадратні рівняння з параметром а. Автор виділяє 6 видів рівнянь, виражаючи їх так:

Квадрати дорівнюють кореням, тобто $\mathrm{ax}^2 = \mathrm{bx}$.

Квадрати дорівнюють числу, тобто $\mathrm{ax}^2 = \mathrm{c}$.

Корені дорівнюють числу, тобто $\mathrm{ax} = \mathrm{c}$.

Квадрати та числа рівні кореням, тобто $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{c} = \mathrm{bx}$.

Квадрати і корені рівні числу, тобто $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} = \mathrm{c}$.

Корені та числа рівні квадратам, тобто bx+c=ax^2.

Вперше в Європі в «Книзі абака», яку написав італійський математик Леонардо Фібоначчі, були викладені формули розв'язування квадратних рівнянь.

Рівняння з параметрами можна розділити на такі види:

1. *Лінійне рівняння.* Загальний вигляд:

$\alpha x = b$, де x– невідоме; α, b – параметри.

Для даного виду рівнянь цікавим є значення параметру, при якому коефіцієнт, що стоїть біля невідомого перетворюється в нуль.

При розв'язанні лінійного рівняння з параметром бувають випадки, коли параметр дорівнює своєму особливому значенню $\alpha = 0$.

.1.Якщо, а $\neq 0$, то для будь-якої пари параметрів α і b рівняння має єдиний розв'язок.

2.Якщо, а $= 0$, то рівняння має вигляд: 0х $= b$. Значення $b = 0$ є особливим значенням параметра b.

2.1. При $b \neq 0$ рівняння не має розв'язків.

2.2. При $b = 0$ рівняння буде мати вигляд: $0x = 0$.

Розв’язком даного рівняння буде будь-яке число [26].

2. *Квадратні рівняння.* Загальний вигляд:

$x^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, а a, b, c – параметри. Квадратне рівняння може мати два корені, якщо дискримінант $D > 0$, один корінь, якщо $D = 0$ та взагалі не мати коренів, якщо $D < 0$.

3. Дробово-раціональні. Загальний вигляд: $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Для розв’язання даного рівняння необхідно перенести всі доданки в одну сторону, знайти спільний знаменник, звести подібні доданки та розв’язати.

4. Ірраціональні рівняння. Загальний вигляд рис. 1: $\sqrt[n]{x} = a$, $n \in N, n \geq 2$.

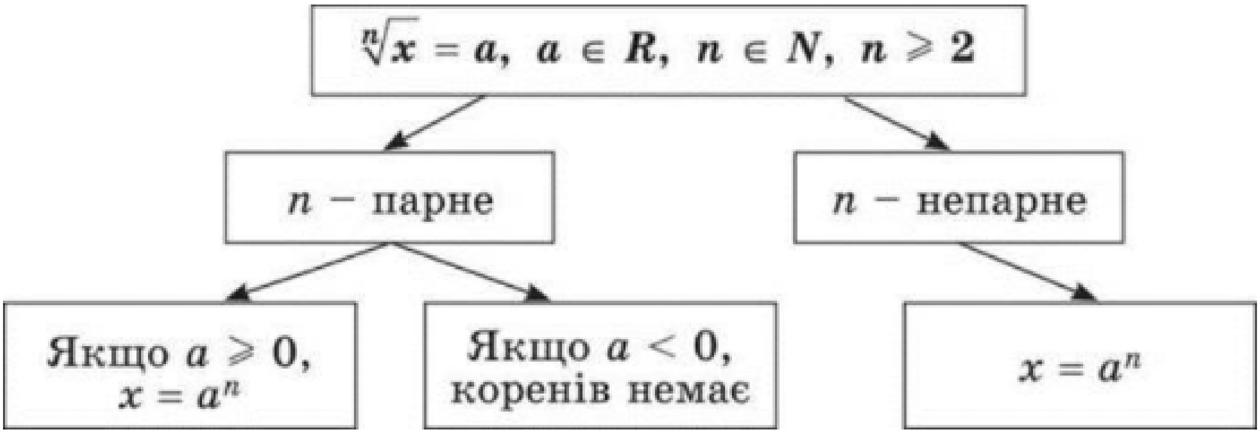

Рисунок 1

5. *Тригонометричні рівняння.* Загальний вигляд найпростіших тригонометричних рівнянь рис. 2:

$$sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx = a.$$

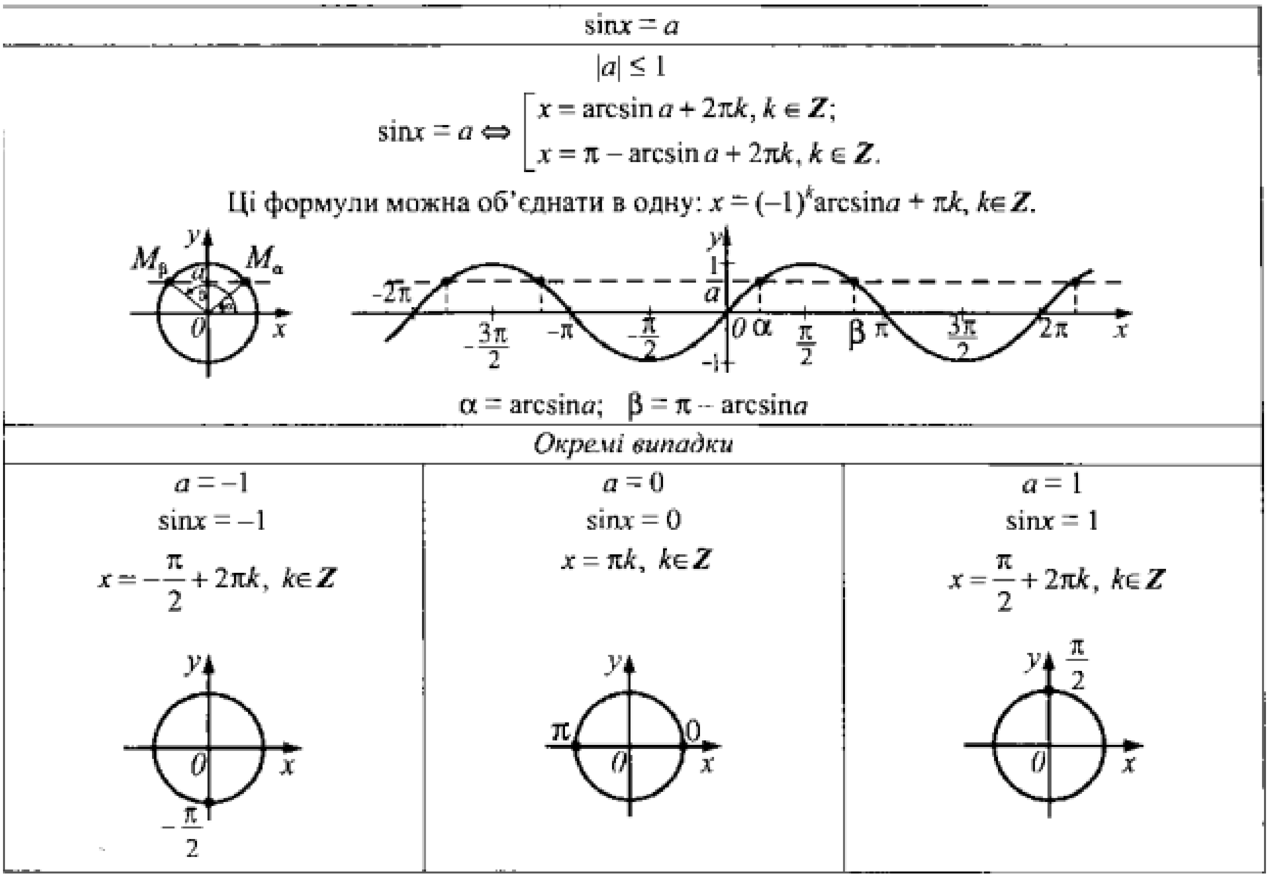

Рисунок 2

5.1. З історії графічного методу розв'язування задач з параметрами

У 14 столітті, коли середньовічна наука була схоластичною, розпочалось дослідження загальних залежностей. Інтенсивність довжини відрізків почав зображувати французький вчений Микола Оресм, він розташував відрізки перпендикулярно до прямої, і таким чином кінці відрізків утворили деяку лінію, яку називали лінією інтенсивностей і отримали графік відповідної функціональної залежності. Вчений також досліджував функції, які залежать від декількох змінних [30].

Особливим зусиллям Оресма можна вважати його спробу класифікувати графіки. Він їх поділив на три типи:

рівномірні;

рівномірно-нерівномірні (постійна швидкість зміни інтенсивності);

нерівномірно-нерівномірні.

Для вивчення графіків функцій потрібно було створити математичний апарат, для цього необхідно знати, що таке змінна величина. Французький філософ та математик Рене Декарт розкрив ідею про єдність алгебри і геометрії та роль і поняття змінних величин, також саме він ввів поняття одиничного відрізка та розкрив відношення інших відрізків до нього.

Отже, графіки функцій за весь час пройшли дуже багато різних фундаментальних перетворень, які призвели їх до того вигляду, до якого ми звикли. Теорія побудови графіків, кожен їх етап являється невід'ємною частиною в історії сучасної алгебри та геометрії.

Графічний спосіб розв'язування параметричних рівнянь часто буває набагато зручніший, ніж аналітичний.

5.2. Основні методи та алгоритми розв'язку завдань із параметром

Виділяють кілька методів, розглянемо декілька з них. Всім відомі найпоширеніші методи розв'язування задач з параметром, це аналітичний та графічний.

Аналітичний – спосіб, який потребує прямого розв'язку, це найважчий спосіб, який вимагає високої грамотності та багато зусиль.

Графічний – красивий та наочний спосіб, дуже зручний, залежно від умови задачі розглядається положення графіка відповідної квадратичної функції у системі координат [30].

Аналітичний метод

Алгоритм рішення:

Спершу, ніж розпочати розв'язувати задачу з параметрами аналітичним методом, необхідно розібратись в ситуації для конкретного числового значення параметра.

Для прикладу, можна взяти значення параметра $a = 1$ і дослідити чи значення параметра α =1 є дійсно шуканим для задачі [2].

На конкретному прикладі спробуємо розібратись в даному аналітичному методі розв'язування задач з параметрами.

Але тут є деякі моменти, на які необхідно звернути увагу:

перевірити всі контрольні значення параметра;

необхідно визначити область допустимих значень як змінної, так і параметра;

знайти значення параметра, яке може привести заданий вираз до тотожно істинного або тотожно хибного виразу [8].

Приклад 1.: розв'яжіть рівняння $\frac{2(a+1)}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$

Розв'язання:

Спершу можна дійти до висновку, що знаменник перетвориться в 0 при $a = 0$ і рівняння не буде мати коренів, але, якщо покласти що $a \neq 0$ і перетворити початкове рівняння, тобто перенести всі елементи в ліву частину і відразу звести до спільного знаменника, будемо мати вигляд:

$$\frac{(2-a)x - (3a+7)}{a} = 0$$

Домножимо дві частини на $a \neq 0$ виразимо $x = \frac{3a+7}{2-a}$

Отримаємо, що вираз $x = \frac{3a+7}{2-a}$ не має сенсу при $a = 2$.

Тоді відповідь буде $a \neq 0$ та $a \neq 2$, якщо $a = 0$ та $a = 2$, то рівняння не має коренів.

Отже, можна зробити висновки, що школярам дуже близький аналітичний метод, оскільки вони можуть розв'язувати рівняння і нерівності різними прийомами. Недолік даного способу полягає у громіздкому розв'язку завдання, що вимагає зосередженості, уважності та математичної грамотності [11].

Графічний метод.

Графік функції – це множина точок, у яких абсциси є допустимими значеннями аргументу, а ординати – відповідними значеннями функції.

Алгоритм графічного розв'язання рівнянь із параметром:

1. знаходимо область визначення рівняння;
2. виражаємо параметр, як функцію від x;
3. у системі координат xOy будуємо графік функції (x) для тих значень x, які входять в область визначення даного рівняння;
4. Знаходимо точки перетину прямої $y = a$, з графіком функції

$y(x)$. Якщо пряма $y = a$ перетинає графік $y(x)$, то визначаємо абсциси точок перетину. Для цього достатньо розв'язати рівняння $y = \alpha(x)$ щодо x.

В залежності від ролі параметра, поділяють на два основних графічних прийоми побудови графічного образу: перший – це на координатній площині (x, y), другий – на (x, a).

Але варто знати, що графічний метод не завжди можна використати, оскільки він не є універсальним. Найлегші завдання на знаходження кількості коренів, оскільки на мові графіків – це кількість точок перетину чи взагалі їх відсутність. [1], [7], [9].

Від учнів вимагається вміння застосовувати графічний метод та проводити побудови різних графіків, а іноді вести графічні дослідженні. Важливо знати, що графіки, залежно від значень параметра можуть змінюватись [11].

Наприклад, можна побачити, що рівняння $y = ax$ задає множину всіх прямих, які проходять через початок координат. Проте, все ж існує пряма, яка проходить через початок координат, але не задовольняє умові і збігається з віссю Oу. Рівняння прямої має вигляд $x = 0$.

Приклад 2. Знайти значення параметра a , при яких рівняння $(a + 6x - x^2 - 8)(a - 1 + |x - 3|) = 0$ має три різних кореня.

Розв’язок

Це завдання можна розв’язати аналітично, проте розв’язок буде надто громіздким і доведеться розв’язувати не лише два рівняння $a + 6x - x^2 - 8 = 0$ і $a - 1 + |x - 3| = 0$, але і врахувати можливість збігу однакових коренів.

Але якщо завдання розв’язати графічним способом, то все стає дуже легко і просто.

На координатній площині (x, y) рівняння $a + 6x - x^2 - 8 = 0$ задає параболу, а рівняння $a - 1 + |x - 3| = 0$ – ламану лінію рис.3.

Побудуємо графіки функцій:

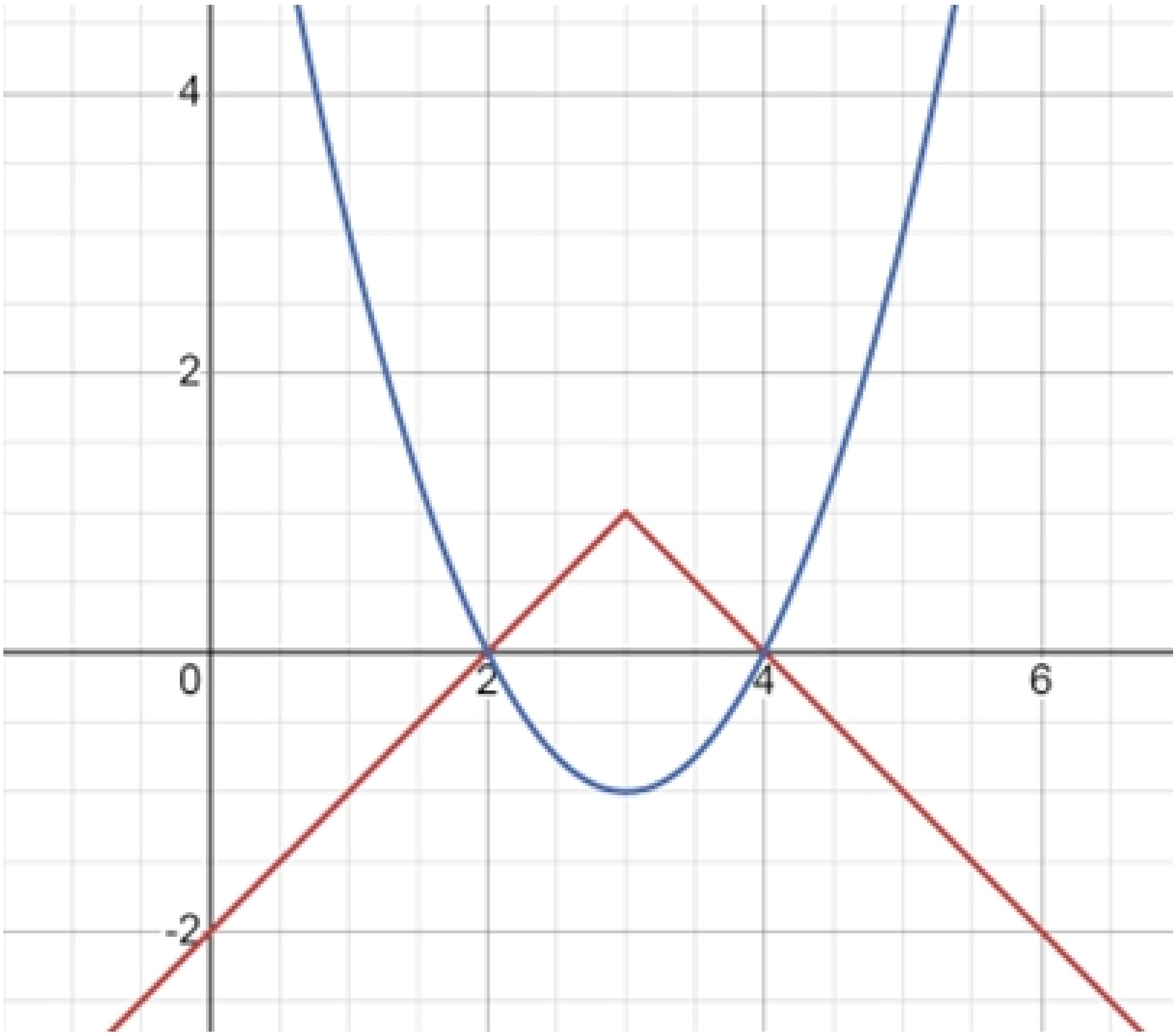

Рисунок 3

На графіку помітно, що рівняння має два різних кореня.

Розглянемо ще один приклад.

Приклад 3. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 + ax + 1 = 0$ має розв’язки.

Розв’язок

Є два способи розв’язання даного рівняння, розглянемо їх.

Спосіб 1. Квадратне рівняння $x^2 + ax + 1 = 0$ має єдиний розв'язок, якщо його дискримінант $D = a^2 - 4$ дорівнює нулю. Розв'язавши рівняння $a^2 - 4 = 0$ отримуємо $a = \pm 2$.

Спосіб 2. Для розв'язання, введемо функцію $y = x^2 + ax + 1$. Оскільки ця функція квадратична, то вона на площині задає параболу. Якщо графік перетинає вісь абсцис, то рівняння має корені. Якщо вершина параболи лежить на осі абсцис, то парабола має лише одну точку перетину, тобто $y(x_0) = 0$. Отримуємо: $x_0 = -\frac{a}{2}$

$y(x_0) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + 1 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 1$, *звідки* $-\frac{a^2}{4} + 1$ *або* $a^2 = 4$, *а це означає, що* $a = \pm 2$.

Відповідь: $a = \pm 2$.

Приклад 4. Знайти всі додатні значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь має три різних розв'язки.

$$\begin{cases} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{2ay - a^2y^2} \\ y = x^2 \end{cases},$$

Спершу піднесемо до квадрату рівняння і додамо одиницю до обох частин:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = a^2y^2 - ay + 1 \\ 2x - x^2 \geq 0 \\ y = x^2 \end{cases},$$

Далі необхідно розв'язати друге рівняння методом інтервалів, таким чином отримаємо відрізок якому буде належати x.

$$\begin{cases} (x-1)^2 = (ay-1)^2 \\ x \in [0; 2] \\ y = x^2 \end{cases},$$

В першому рівнянні потрібно все перенести в одну сторону, і розписати різницю квадратів, яка утвориться.

$$\begin{cases} (x - 1 - ay + 1)(x - 1 + ay - 1) = 0 \\ x \in [0; 2] \\ y = x^2 \end{cases},$$

Тепер можна побудувати графіки рис. 4:

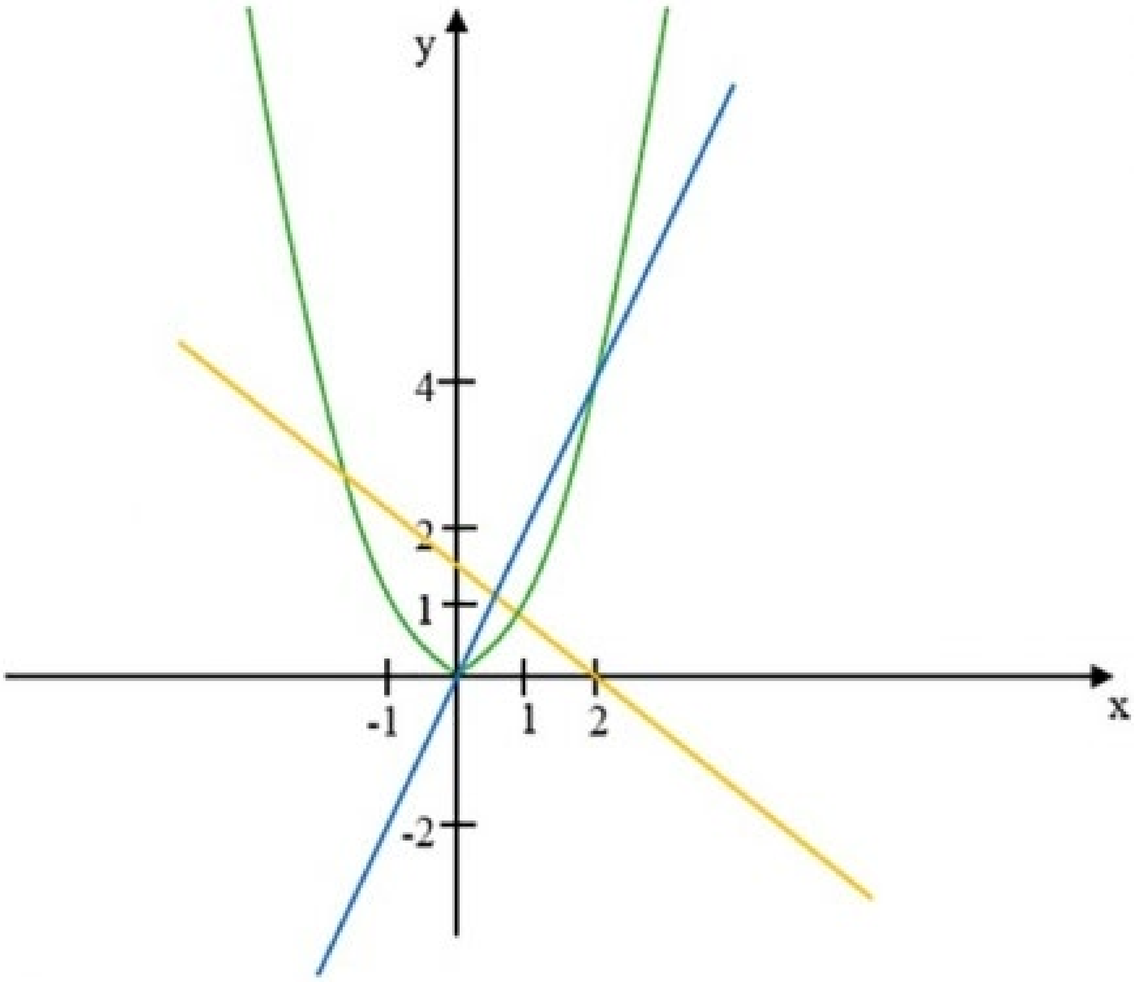

Рисунок 4

Розв'язком цієї системи будуть точки перетину параболи $y = x^2$ і даних прямих, при такій умові $x \in [0; 2]$.

Пряма $y = \frac{x}{a}$ всього лише один раз перетинає параболу в точці $[0; 0]$, а це і є розв'язок. Очевидно, що вона і вдруге перетне параболу для $x \in [0; 2]$ при $\frac{1}{a} \le 2, a \ge 0{,}5$

Відповідно, при $a \in [0{,}5; +\infty)$ за виключенням перетину прямих з параболою в одній і тій же точці:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = -\frac{x}{a} + \frac{2}{a} \\ \frac{x}{a} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{x}{a} = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = 1 .$$

Відповідь: $[0{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$.

Основні типи задач з параметрами:

Тип 1. Рівняння, нерівності, їх системи і сукупності, які потрібно розв’язувати для будь-якого значення чи значень параметра (параметрів), що належать заздалегідь обумовленій множині.

Тип 2. Рівняння, нерівності, їх системи і сукупності, для яких визначають кількість розв’язків в залежності від значення параметра (параметрів).

Тип 3. Рівняння, нерівності, їх системи і сукупності, для яких потрібно знайти всі ті значення параметра, при яких зазначення задачі мають певну кількість розв’язків.

Тип 4. Рівняння, нерівності, їх системи і сукупності, при шуканих значеннях параметра безліч розв’язків задовольняє заданим умовам в області визначення.

Отже, якщо виникають питання, з чого розпочати розв’язування задачі, можна скористатись такими підказками:

Спочатку необхідно дізнатись який тип рівняння задано у завданні (лінійне, квадратне, раціональне або те, що відноситься до іншого класу). Потім можна застосувати до задачі відомі принципи розв’язування.

Необхідно зрозуміти, що необхідно знайти у задачі (розв'язати рівняння або знайти кількість його коренів). Якщо, сказано знайти кількість коренів, то більшість завдань розв’язуються графічним методом.

Наступним кроком необхідно враховувати старший коефіцієнт та дискримінант. Знаходження області допустимих значень змінної, якщо це впливає на параметр. Якщо, наприклад, взяти дробові вирази , особливу увагу потрібно звернути на знаменник дробу, якщо він містить параметр, то потрібно накласти обмеження.

Звичайно, це не весь перелік підказок, його можна продовжувати, але навіть і перевірка рівняння за цими принципами допоможе розв’язати задачу.

Розділ 2. Приклади розв'язування задач з параметрами

2.1. Нерівності з параметрами

Серед задач з параметрами також виділяють нерівності з параметрами.

Алгоритм розв'язку нерівностей.

1. Знаходимо область визначення даної нерівності.

2. Зводимо нерівність до рівняння.

3. Виражаємо як функцію від x.

4. У системі координат xOa будуємо графіки функцій a $= f$(x) для тих значень x, які входять до області визначення даної нерівності.

5. Знаходимо безліч точок, що задовольняють цій нерівності.

6. Досліджуємо вплив параметра на результат.

7. Знайдемо абсциси точок перетину графіків.

8. Задамо пряму a $= const$ і зрушуватимемо її від $-\infty$ дo $+\infty$

9. Записуємо відповідь.

Це лише один з алгоритмів розв'язання нерівностей з параметрами, з використанням системи координат xOa. Можливі інші методи рішення, з використанням стандартної системи координат xOy.

Приклад 5. Для всіх допустимих значень параметра a розв'язати нерівність $\sqrt{x-a}+\sqrt{2a-x}+\sqrt{a-1}+\sqrt{3-a}>0$

Розв'язок

В області визначення параметра a, визначеного системою нерівностей

$$\begin{cases} a-1 \geq 0 \\ 3-a \geq 0' \end{cases} \quad a \in [1;3]$$

Дана нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x-a \geq 0 \\ 2a-x \geq 0' \end{cases} \quad a \in [a;2a]$$

Якщо $a \in [1;3]$*, то розв'язки початкової нерівності входять* $[a;2a]$.

Відповідь: $a \in [1;3]$, $x \in [a;2a]$.

<u>Приклад 6</u>. Знайти розв'язки нерівності $x^2 - (a+1)x - 6a^2 + 3a \geq 0$ при всіх допустимих значеннях параметра a.

<u>Розв'язок.</u>

Знайдемо корені тричлена в лівій частині нерівності:

$x_1 = -2a + 1$; $x_2 = 3a$.

Розкладемо тричлен на множники:

$(x + 2a - 1)(-x - 3a) \geq 0;$

$$\left[\begin{cases} x + 2a - 1 \geq 0 \\ x - 3a \geq 0 \end{cases} \atop \begin{cases} x + 2a - 1 \leq 0 \\ x - 3a \leq 0 \end{cases}\right. ; \qquad \left[\begin{cases} a \geq 0.5(1 - x) \\ a \leq \frac{1}{3}x \end{cases} \atop \begin{cases} a \leq 0.5(1 - x) \\ a \geq \frac{1}{3}x \end{cases}\right. .$$

Прямі, задані рівняннями $x = -2a + 1; x = 3a$, розбивають координатну площину xoa на чотири області, в кожній з яких квадратний тричлен $x^2 - (a+1)x - 6a^2 + 3a$ зберігає постійний знак.

Знайдемо ординату точки перетину прямих $x = -2a + 1$; $x = 3a$: $a = 0.2$.

Задамо пряму $a = c(c - const)$ і будемо переміщати її при $c \in (-\infty; +\infty)$.

Проаналізуємо взаємне розташування графіка нерівності $x^2 - (a + 1)x - 6a^2 + 3a > 0$ та прямих $a = c$ при $c \in (-\infty; +\infty)$ записуємо розв'язки даної нерівності.

Маємо: $x^2 - (a+1)x - 6a^2 + 3a \geq 0$

при $a \in (-\infty; 0.2)$. $\quad x \in (-\infty; 3a) \cup (-2a + 1; +\infty)$;

при $a \in (0.2; +\infty)$. $\quad x \in (-\infty; -2a + 1) \cup (3a; +\infty)$;

при a=0.2 $\quad x \in (-\infty; +\infty)$.

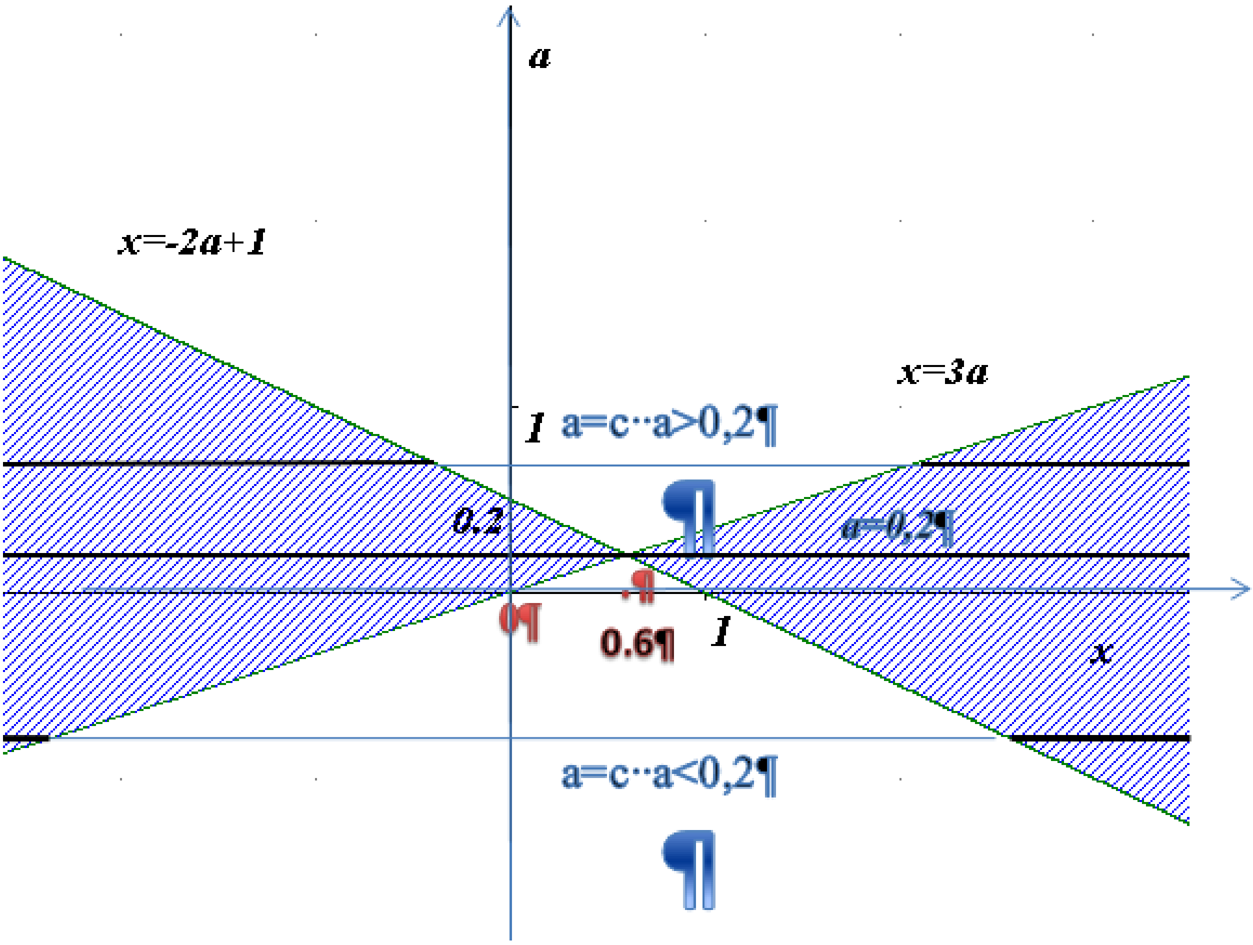

Рисунок 5

<u>Відповідь:</u>

при $a \in (-\infty; 0.2)$ $x \in (-\infty; 3a) \cup (-2a+1; +\infty)$;

при $a = 0.2$ $x \in (-\infty; +\infty)$;

при $a \in (0.2; +\infty)$ $x \in (-\infty; -2a+1) \cup (3a; +\infty)$.

Приклад 7. При якому найменшому значенні параметру a нерівність $\sin^{155}x + \cos^{237}x \leq a$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання

Будемо розглядати 2 випадки:

<u>Випадок 1:</u> $a < -1$

Якщо $a < -1$, то скористаємося наступними нерівностями:

$\sin^{155} x = (\sin^2 x) \cdot (\sin^{153} x) \Rightarrow -\sin^2 x \leq \sin^{155} x$;

$\cos^{237} x = (\cos^2 x) \cdot (\cos^{235} x) \Longrightarrow -\cos^2 x \le \cos^{237} x.$

Додамо ці нерівності, та отримаємо, що

$$-1 = -\sin^2 x - \cos^2 x \le \sin^{155}x + \cos^{237}x ,$$

$\sin^{155}x + \cos^{237}x \ge -1$.Тому при $a < -1$ нерівність не має розв'язків.

<u>Випадок 2:</u> $a \ge -1$

Якщо $a \ge -1$, то, наприклад, число π є розв'язком: $\sin^{155}\pi + \cos^{237}\pi = -1 \le a$.

Приклад 8. При яких значеннях параметра *a* нерівність

$$a \sin^2 x + (a+2)\cos x + 3 - a \ge 5$$

має кінцеве додатне число рішень на інтервалі $(-3\pi;\ 5\pi)$?

Розв'язування.

$a \sin^2 x + (a+2)\cos x + 3 - a \ge 5$;

$a\,(1 - \cos^2 x) + (a+2)\cos x - a \ge 2$;

$a - a\cos^2 x + (a+2)\cos x - a - 2 \ge 0$;

$a\cos^2 x - (a+2)\cos x + 2 \le 0$;

Розглянемо наступні випадки:

<u>Випадок1:</u> $a = 0$.

Якщо $a = 0$, то нерівність приймає вигляд:

$$-2\cos x + 2 \le 0;$$

$\cos x \ge 1$;

$\cos x = 1$;

$x = 2\pi n, n\epsilon Z$

Корні рівняння , які входять до інтервалу $(-3\pi; 5\pi)$, це: $-2\pi; 0; 2\pi; 4\pi$.

Отже, останнє рівняння має кінцеве додатне число рішень на інтервалі $(-3\pi;\ 5\pi)$, тому $\boldsymbol{a = 0}$ входить у відповідь завдання.

<u>Випадок</u> 2: $a < 0$

Нехай $\cos x = t$. Отримаємо квадратну нерівність:

$$at^2-(a+2)t+2\le 0;$$

Розв’яжемо рівняння $at^2-(a+2)t+2=0$.

$$D=(a+2)^2-8a=a^2+4a+4-8a=a^2-4a+4=(a-2)^2;$$

$t_1=\frac{a+2-(a-2)}{2a}=\frac{2}{a}$; $t_2=\frac{a+2+(a-2)}{2a}=1$.

Якщо $a<0$, то $t_1=\frac{2}{a}<0$. Врахуємо, що гілки параболи $y=at^2-(a+2)t+2$ спрямовані вниз. Тому рішення квадратного нерівності задаються сукупністю

$$\left[\begin{array}{l} t\le\frac{2}{a};\\ t\ge 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x\le\frac{2}{a};\\ \cos x\ge 1. \end{array}\right.$$

$\cos x\ge 1\Leftrightarrow \cos x=1$ і має кінцеве позитивне число рішень на інтервалі $(-3\pi;\ 5\pi)$.

Тоді треба, щоб нерівність $\cos x\le\frac{2}{a}$ чи зовсім не мала рішень на інтервалі $(-3\pi;\ 5\pi)$, чи мало на цьому інтервалі кінцеве число рішень, що відповідає умові $\frac{2}{a}\le -1$, тобто $\frac{2+a}{a}\le 0$; $\boldsymbol{-2\le a<0}$.

<u>*Випадок*</u> *3:* $\boldsymbol{a>0}$

Нехай $\cos x=t$. Отримаємо квадратну нерівність: $at^2-(a+2)t+2\le 0$;

Якщо $a>0$, то $t_1=\frac{2}{a}>0$ та $t_2=1$.

Врахуємо, що гілки параболи $y=at^2-(a+2)t+2$ спрямовані до верху. Але треба розглянути, два випадки взаємного розташування коренів рівняння.

Якщо $t_1<t_2$, тобто $0<\frac{2}{a}<1$; $\boldsymbol{a>2}$.

Маємо ,що при $a>2$, рішення нерівності $t_1\le t\le t_2$,

тобто $\frac{2}{a}\le t\le 1, \frac{2}{a}\le\cos x\le 1$

Ця нерівність має на інтервалі $(-3\pi;\ 5\pi)$ нескінченно багато рішень.

2) Якщо $t_1\ge t_2$, тобто $\frac{2}{a}\ge 1$; $\frac{2-a}{a}\ge 0$; $\frac{a-2}{a}\le 0$, то отримаємо $0<a\le 2$.

Тоді при $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} \leq \mathbf{2}$, наша нерівність має розв’язок $t_2 \leq t \leq t_2$, $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{t} \leq \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{a}}$

$$\mathbf{1} \leq \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} \leq \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{a}}$$

Ця нерівність рівносильна рівнянню $\cos x = 1$ і має кінцеве додатне число рішень на інтервалі $(-3\pi;\ 5\pi)$.

Відповідь: $-2 \leq a \leq 2$.

2.2 Рівняння з параметрами

Для того аби успішно розв’язати рівняння з параметрами, необхідно пам’ятати, про те, що:

- у двох частинах рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки;
- будь-який член рівняння можна переносити з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний;
- обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Тобто усі прийнятні перетворення, які можуть бути зроблені для вирішення звичайного рівняння, можуть бути зроблені і для вирішення рівнянні з параметром [1].

Лінійні рівняння з параметрами

Рівняння виду $\mathrm{ax} = \mathrm{b}$, де a і b – деякі числа, називають лінійним рівнянням зі змінною x. Для того щоб знайти корені рівняння необхідно його розв’язати, лінійне рівняння може не мати коренів, мати один, або безліч коренів. При розв’язуванні такого типу рівнянь відносно змінної x, всі доданки що містять цю невідому переносять в ліву частину, а які не містять в праву, тоді це рівняння зведеться до вигляду $\mathrm{ax} = \mathrm{b}$.

Визначимо, при яких значеннях a і b, рівняння $ax = b$ має один або безліч кренів і взагалі не має коренів.

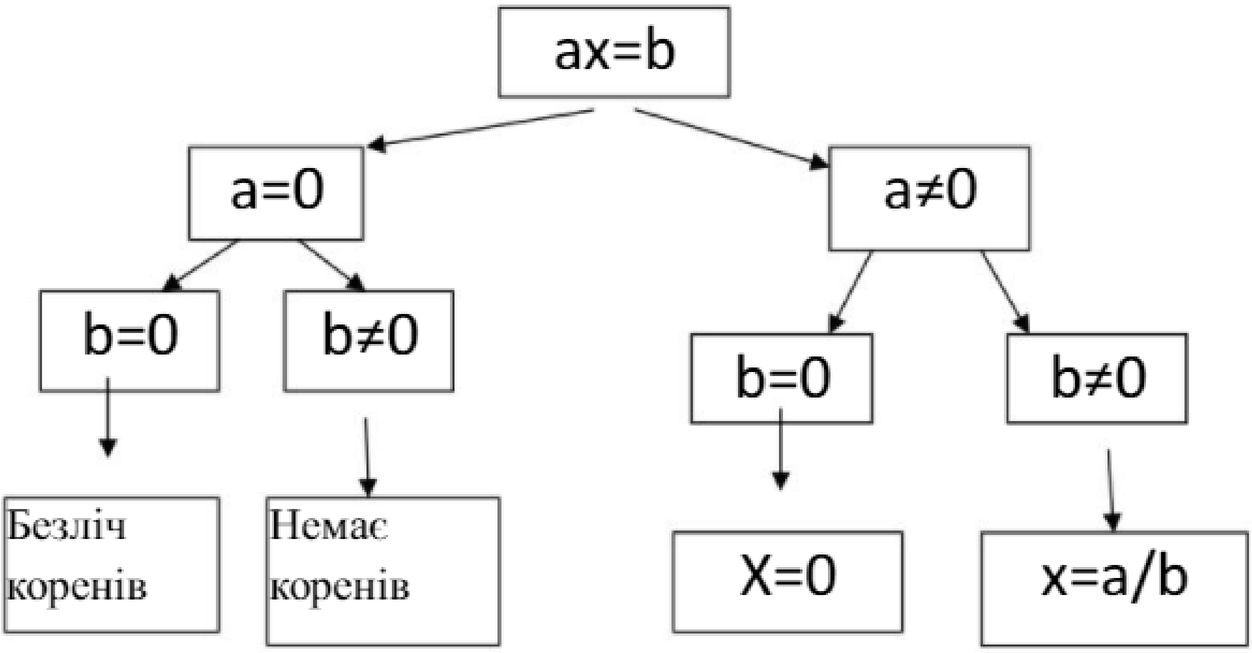

Рисунок 6

Зі схеми помітно:

якщо $a = 0, b = 0$, то рівняння має безліч коренів;

якщо $a = 0, b \neq 0$, то рівняння немає коренів;

якщо $a \neq 0, b = 0$, то рівняння має один корінь 0;

якщо $a \neq 0, b \neq 0$, то рівняння має корінь, який дорівнює $x = \frac{a}{b}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $ax - 3 = b$, залежно від параметрів a і b.

Розв'язання

У рівнянні $ax - 3 = b$ виконаємо тотожні перетворення та отриаємо: $ax = b + 3$.

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b+3}{a}$, при будь-якому b.

Якщо $a = 0$, то при $b = -3$ рівняння набуває такого вигляду $0x = 0$, тобто можна сказати, що коренями рівняння є будь-які числа.

Якщо $a = 0$, а $b \neq -3$, то ми отримаємо наступний вигляд рівняння $0x = b + 3$, причому $b + 3 \neq 0$. Така рівність означає. Що рівняння не має коренів.

Відповідь: при $a \neq 0$ і при будь-якому b, $x = \frac{b+3}{a}$; при $a = 0$, і $b = -3$ корені всі числа; при $a = 0$, і $b \neq -3$ коренів немає.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $(a + 1)\,x = a^2 - 1$.

Розв'язання:

Аналізуючи рівняння, приходимо до висновку, що треба розглянути дві множини значень a: $a = -1$ $і$ $a \neq -1$.

Коли $a = -1$, то рівняння приймає вигляд: $0x = 0$. Цьому рівняння задовольняє довільне значення x ($x \in R$).

Коли $a \neq -1$, то після скорочення на вираз (a +1) дістанемо рівняння, яке має єдиний розв'язок $x = a - 1$.

Відповідь: При $a = -1$ розв'язком є довільне число ($x \in R$), коли $a \neq -1$, то $x = a - 1$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти кількість коренів системи $\begin{cases} ax + 8y = 24 \\ 2x + ay = 12 \end{cases}$ та значення параметра a при яких система матиме безліч коренів.

2. При яких значеннях параметра m система рівнянь $\begin{cases} mx + 4y = 6 - 9m \\ 2x + (2 + m)y = 8 \end{cases}$ має розв'язки $x > 0,\ y > 0$.

Квадратні рівняння з параметром

Квадратне рівняння з параметрам – це рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, а a, b, c – параметри.

Наочний приклад розв'язання типового квадратного рівняння з параметром у вигляді схеми:

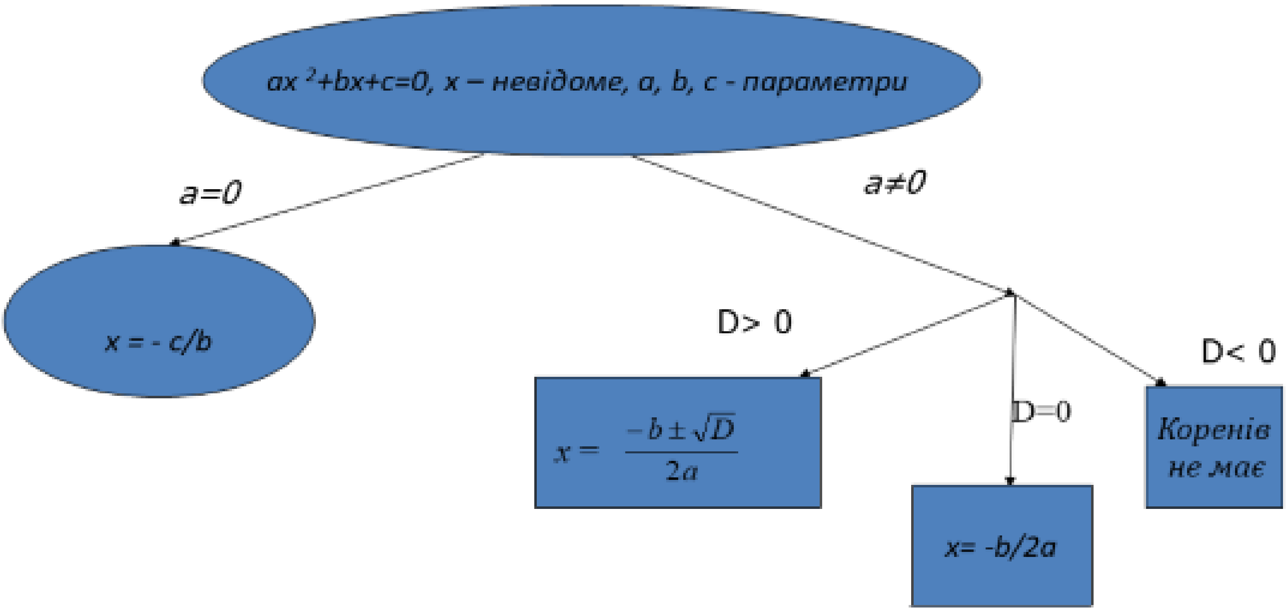

Рисунок 7

Відповідь: при $a = 0, x = -\frac{c}{b}$; *якщо* $a \neq 0, D > 0$ то $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; якщо $a \neq 0,\ D = 0$ то $x = \frac{-b}{2a}$;*і якщо* $a \neq 0,\ D < 0$ *то* $x \in \emptyset$.

Приклад 11 У рівнянні $x^2 + ax + a + 2 = 0$ знайти усі значення параметра a, при кожному з яких один корінь рівняння дорівнює подвійному значенню другого кореня [29].

Розв'язання:

Дане рівняння буде зручно розв'язати за допомогою теореми Вієта та скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = a + 2 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена. Із цієї системи знаходимо значення

$$x_1 = -\frac{2}{3}a, x_2 = -\frac{1}{3}a$$

і дістанемо рівняння відносно параметра a: $2a^2 - 9a - 18 = 0$. Розв'язуючи це рівняння, отримаємо шукані значення $a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = 6$. Перевіряємо ці значення. Коли $a = -1{,}5$, то задане рівняння приймає вигляд

$x^2 - 1{,}5x + 0{,}5 = 0$, корені якого 1; 0,5. Якщо $a = 6$, то маємо рівняння

$x^2 + 6x + 8 = 0$, корені якого $x_1 = -4, x_2 = -2$.

Можна побачити, що отримані значення *а* задовольняють умови задачі.

Відповідь: $a = -1{,}5$; $a = 6$ [3. стр. 16].

Наступний приклад цікавий тим, що там на першому місці стоїть не коефіцієнт, як звично нам, а параметр. Тому до рівняння потрібно підходити з особливим підходом – розглядати вираз при змінній, тобто дослідити при якому значенню параметра цей вираз дорівнює нулю. За допомогою схеми можна побачити розв'язок такого рівняння:

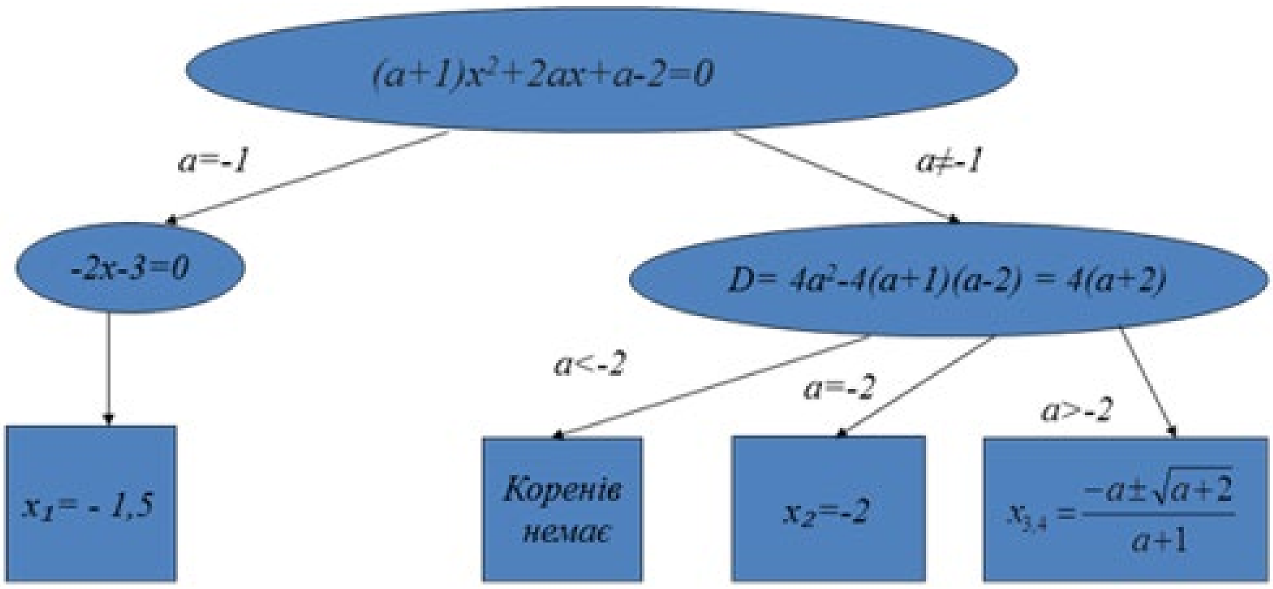

Рисунок 8

Відповідь: при $a = -1, x = -1{,}5$; *якщо* $a < -2$ *то* $x \in \emptyset$; при $a = -2,\ x = -2$; якщо $a > -2$, $x = \frac{-a \pm\sqrt{a+2}}{a+1}$.

Приклад 12. Знайти корені рівняння $4x^2 - (3a + 1)x - a - 2 = 0$ та значення параметра a, які належать інтервалу (-1;2) [27].

Розв'язання.

Спершу будемо обчислювати дискримінант рівняння

$D = (3\text{a} + 1)2 + 16(\text{a} + 2) = 9\text{a}^2 + 22\text{a} + 33.$

Якщо $D \geq 0$, то корені рівняння будуть $x_{1,2} = \frac{3a+1\pm\sqrt{9a^2+22a+33}}{8}$. Потім потрібно розв'язати систему нерівностей, оскільки корені $x_1, x_2 \in (-1; 2)$

$$\begin{cases} -8 < 3a + 1 + \sqrt{9a^2 + 22a + 33} < 16 \\ -8 < 3a + 1 - \sqrt{9a^2 + 22a + 33} < 16, \\ 9a^2 + 22a + 33 \geq 0 \end{cases}$$

Краще розглянути простий і зручний спосіб розв'язування – графічний.

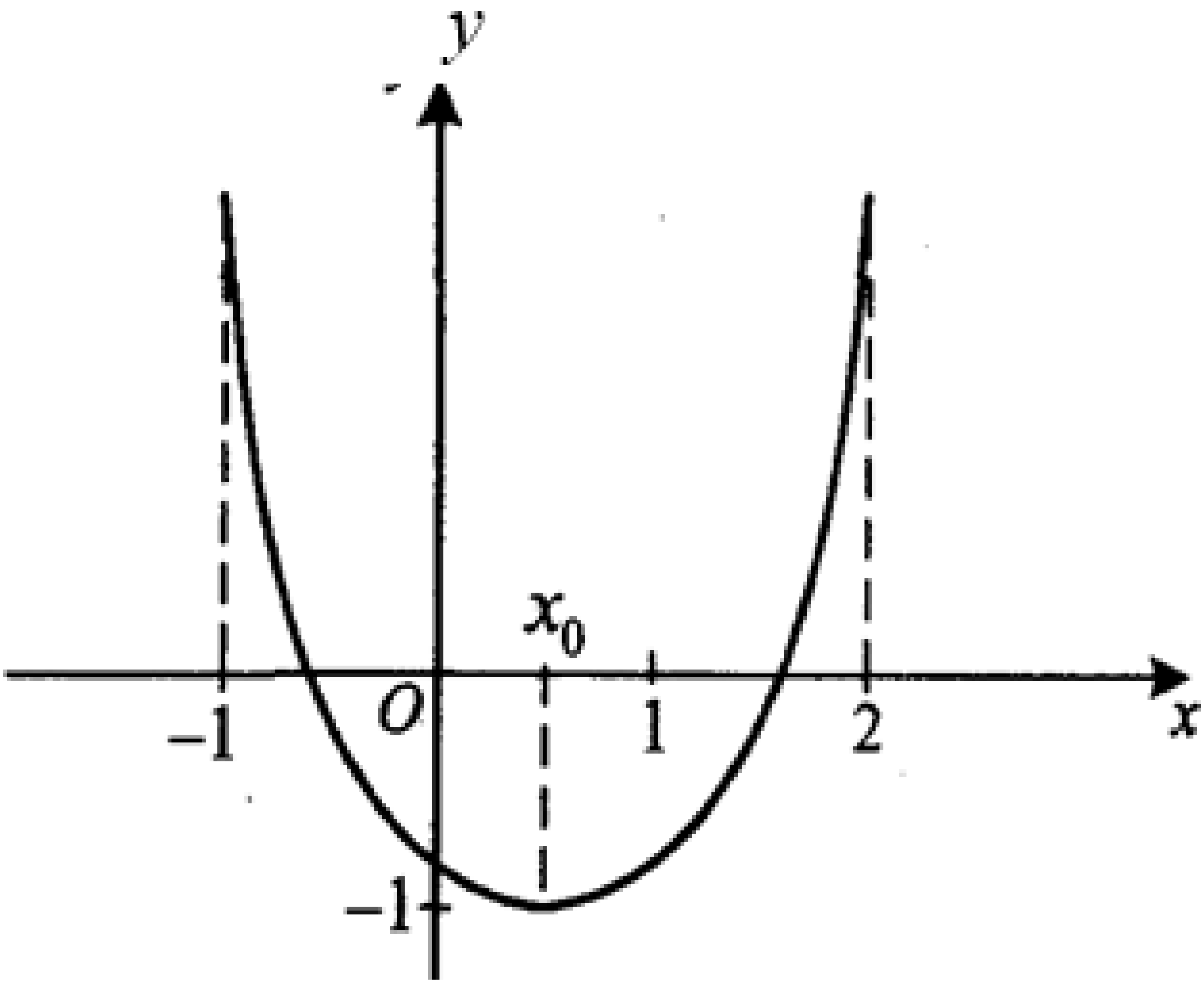

Рисунок 9

Умови, що визначають саме таке положення параболи:

$$\begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \\ D \geq 0 \\ -1 < x_0 < 2 \end{cases}$$

У даному конкретному випадку, будемо мати:

$$\begin{cases} 2a+3>0 \\ -7a+12>12 \\ 9a^2+22a+33\geq 0 \\ -1<\dfrac{3a+1}{8}<2 \end{cases}$$

Проаналізувавши дану систему, отримаємо, що $a \in \left(-\frac{3}{2};\frac{12}{7}\right)$.

Відповідь: $a \in \left(-\frac{3}{2};\frac{12}{7}\right)$.

Дробово-раціональні рівняння з параметрами

Рівняння у яких ліва чи права частина, або навіть і обидві частини дробові вирази і мають один або ж декілька параметрів, називаються дробово-раціональні рівняння з параметрами.

Варто при розв'язуванні таких рівнянь пам'ятати про область визначення даного рівняння [1].

Приклад 13. Розв'язати рівняння $\frac{a-1}{2ax+3}=1$

Розв'язання:

У даному рівнянні потрібно розглянути наступні значення параметра a: $a = 1$ і $a \neq 1$.

1. Якщо $a = 1$, то отримаємо рівняння $\frac{0}{2x+3}=1$, яке не має змісту.

2. Якщо $a \neq 1$, спершу необхідно знайти область визначення рівняння, яке залежить від a. Область визначення рівняння: $2ax + 3 \neq 0$. Якщо $a = 0$, то ця умова виконується при усіх дійсних значеннях x. Для усіх x із області визначення $x \neq -\frac{3}{2a}$ задане рівняння має розв'язок: $x = \frac{a-4}{2a}$. Потрібно обов'язково знайти розв'язок рівняння при $a = 0$. Підставляючи $a = 0$ у задане рівняння, отримуємо $-\frac{1}{3}=1$, тобто при $a = 0$ рівняння розв'язків не має [28].

Відповідь: при $a = 0$ і $a = 1$рівняння розв'язків не має, коли $a \neq 0$; $a \neq 1$ x=$\frac{a-1}{2a}$ [9. стр. 13].

Ірраціональні рівняння з параметрами

Рівняння в якого ліва і права частини є алгебраїчними виразами, один з яких ірраціональний, а в лівій чи правій, або ж в обох частинах міститься параметр, називається ірраціональним рівнянням з параметром.

Ірраціональними називають такі алгебраїчні вирази, які крім дій додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня з натуральним показником містять також і дії добування кореня n-го степеня.

Важливо відмітити, що в таких типах рівнянь, як і в дробово-раціональних рівняннях, важливо не забувати про область визначення [13].

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} = x$.

Розв'язання:

Маємо ірраціональне рівняння, тому припустимі значення параметра a і змінної x визначаються із наступних умов:

Область визначення: $\begin{cases} 1+ax \geq 0 \\ 1-ax \geq 0 \end{cases}$ => $-1 \leq ax \leq 1$.

Наступним кроком будемо з'ясовувати, коли добуток ax має додатне і від'ємне значення.

1. Якщо $ax > 0$, то вираз $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} > 0$, тобто додатний. Згідно з заданим рівнянням змінна $x > 0$. Відповідно параметр $a > 0$ (бо $ax > 0$).

2. Якщо $ax < 0$, то вираз $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} < 0$,тому $x < 0$ і відповідно $a > 0$.

3. Коли $a = 0$, то із заданого рівняння знаходимо розв'язок $x = 0$ [18].

Таким чином, задане рівняння має розв'язок тільки при $a \geq 0$. Перетворимо рівняння до виразу: $\sqrt{1+ax} = x + \sqrt{1-ax}$. Після того як рівняння піднести до квадрата та виконати відповідні перетворення дістанемо:

$x(x + 2\sqrt{1-ax} - 2a) = 0$.

Отримуємо, що рівняння має розв'язок $x_1 = 0$ для усіх дійсних значень a.

Друге рівняння $2\sqrt{1-ax} = 2a - x$ має розв'язок, коли $2a - x \geq 0$, $1 - ax$

≥ 0. Після піднесення до квадрата маємо $x^2 = 4(1 - a^2)$. Це рівняння має корені при

$|a| \leq 1$: $x_2 = -2\sqrt{1-a}$; $x_3 = 2\sqrt{1-a}$.

Таким чином, x_2 і x_3 є розв'язками заданого рівняння при виконанні наступних умов:

$$\begin{cases} ax \leq 1 \\ 2a - x \geq 0 \\ a > 0 \\ |a| \leq 1 \end{cases}$$

Підставляючи значення x_2 і x_3 у систему вище дістанемо інтервал зміни параметра a.

$$\begin{cases} \pm 2a\sqrt{1-a^2} \leq 1 \\ a \geq \sqrt{1-a^2} \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2(1-a^2) \leq 1 \\ a^2 \geq 1 - a^2 \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^4 - 4a^2 - 1 \geq 0 \\ 2a^2 \geq 1 \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2a^2 - 1)^2 \geq 0 \\ a^2 \geq 0{,}5 \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; \infty) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1 \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

Відповідь: Розв'язки: $x_1 = 0$ для $a \in R$, $x_2 = -2\sqrt{1-a^2}$, $x_3 = 2\sqrt{1-a^2}$ при $0{,}5\sqrt{2} \leq a \leq 1$ [9. стр. 14].

Рівняння з параметрами, що містять модуль

Для розв'язання рівнянь з параметрами, що містять знак модуля, найчастіше використовують два методи:

1. Метод інтервалів (для таких рівнянь $|x + a| \geq a$);
2. Метод областей (для рівнянь $|x + a| \leq x$).

Алгоритм розв'язку методу інтервалів:

- Спершу потрібно визначити область допустимих значень та позначити їх на проміжку;
- Вирази, що стоять під знаком модуля прирівняти до нуля, та

знайти невідомі значення;

- Область допустимих значень, а також нулі функції на проміжку визначають систему інтервалів, на кожному з яких функції є неперервними, оскільки вони стоять під знаком модуля;
- Наступний крок, розв'язування рівнянь на кожному з інтервалів;
- Останнім етапом буде знаходження остаточного розв'язку рівняння на кожному з інтервалів.

Алгоритм розв'язку методу областей

- Спершу необхідно знайти та побудувати на площині область допустимих значень рівняння з параметром;
- Потім, вирази, що стоять під знаком модуля прирівняти до нуля. Побудувати графік на координатній площині xOa, де x – змінна, a – параметр, який задовольняє даному рівнянню;
- За допомогою графіка, необхідно визначити проміжки на яких область допустимих значень буде розбитою;
- На кожному проміжку розв'язуємо рівняння;
- Останній крок, знайти остаточні розв'язки рівняння.

Приклад 15. Знайти кількість розв'язків рівняння $\frac{|x+2|}{|x|-2} = |x| + a$ залежно від параметра a [26].

Розв'язання

Найперше потрібно побудувати в системі координат $(x; y)$ графіки функцій $y = \frac{|x+2|}{|x|-2}$ та $y = |x| + a$.

Далі шукаємо область визначення функцій – це буде множина дійсних чисел, окрім 2 та -2.

Для функції $y = |x| + a$:

$$\begin{cases} \dfrac{-(x+2)}{-x-2}, \text{якщо } x < 2 \\ \dfrac{x+2}{-x-2}, \text{якщо} -2 < x < 0 \\ \dfrac{x+2}{x-2}, \text{якщо } x \geq 0, x \neq 2 \end{cases}$$

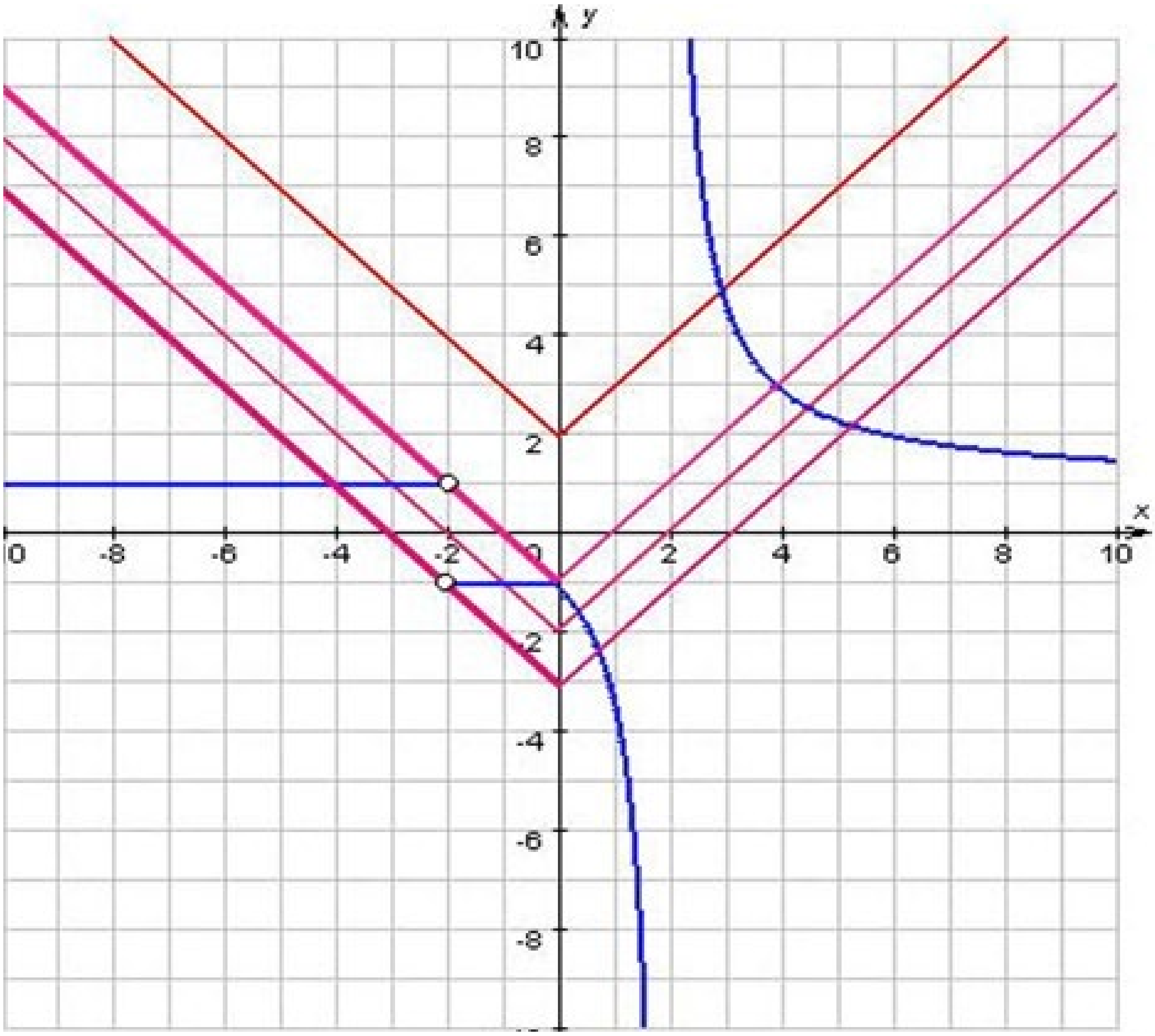

Рисунок 10

Чітко можна побачити, що графіки функцій $y = \frac{|x+2|}{|x|-2}$ та $y = |x| + a$, мають одну точку перетину, тобто один розв'язок, при $a > -1$.

При $a = -1$, графіки мають дві спільні точки, тобто рівняння має два розв'язки.

При $-3 < a < -1$, графіки мають 4 точки перетину, а отже і чотири розв'язки.

При $a \leq -3$, графіки мають три спільні точки, а отже і три розв'язки.

Відповідь. Якщо $a \leq -3$ — рівняння має 3 розв'язки;

якщо $-3 < a < -1$ — 4 розв'язки;

якщо $a = -1$ — 2 розв'язки;

якщо $a > -1$ — 1 розв'язок.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $\left|\mathbf{x^2 - 8|x| + 7}\right| = \mathbf{a}$

та знайти при яких значеннях параметра a є менше чотирьох коренів.

Розв'язання

Виконаємо деякі перетворення у рівнянні та запишемо його у вигляді:

$$|(|x|-4)^2-9|=a$$

Виділимо дві функції та запишемо їх $f(x)$ = $|(|x|-4)^2-9|$ *та* *g(x)*= a

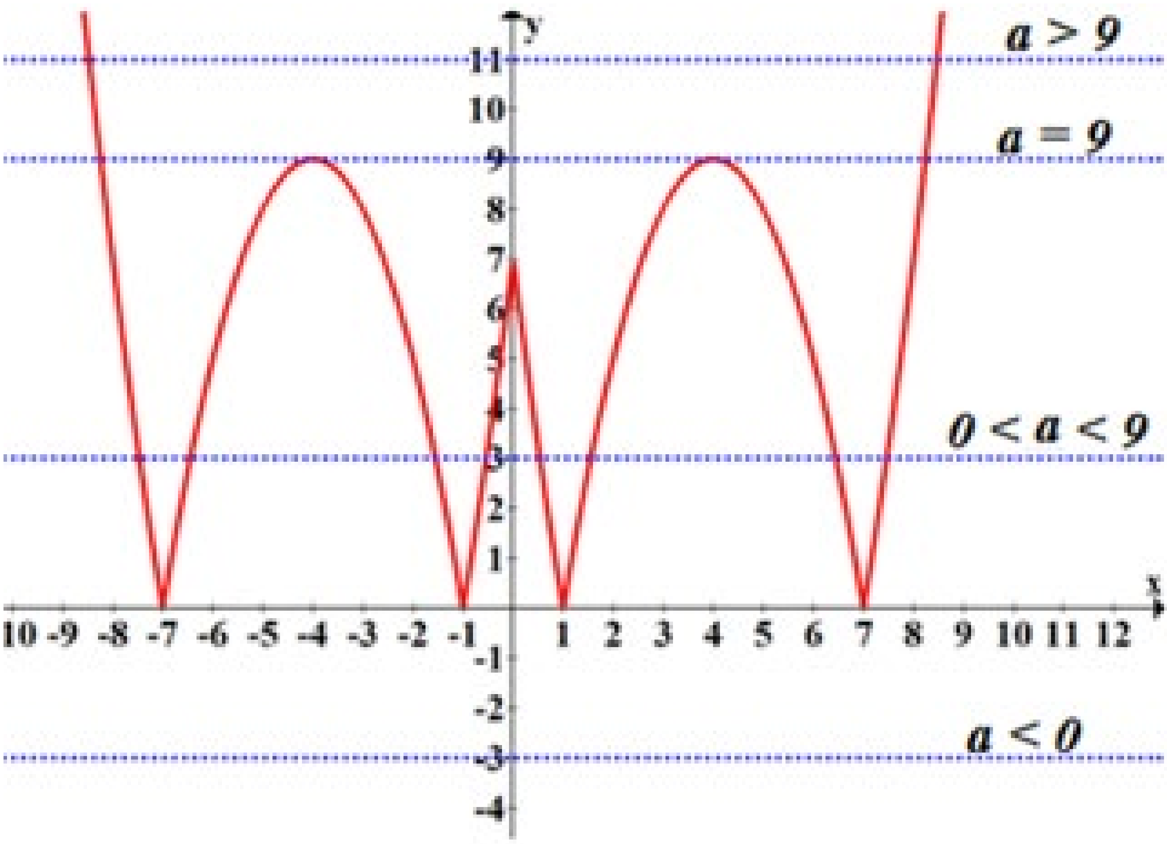

Рисунок 11

Побудуємо графіки функцій $f(x)$ та $g(x)$

Графіком функції $g(x) = a$ буде пряма, паралельна осі *Ox*. Розв'язком рівняння є абсциси точок перетину графіків функцій. Пряма $g(x)$ не перетинає графік $f(x)$, якщо $a < 0$ і $a > 9$, то точок перетину з графіком буде менше, ніж чотири, а це означає, що рівняння буде мати менше чотирьох коренів. $a \in (-\infty; 0) \cup (9; +\infty)$ [29].

Відповідь: $\boldsymbol{a} \in (-\infty; \mathbf{0}) \cup (\mathbf{9}; +\infty)$

Приклад 17. Знайти корені рівняння $|x^2 - 4| - |x^2 - 9| = a$ при всіх дійсних значеннях параметра a.

Розв’язання

Поділимо рівняння на дві функції та розглянемо їх

$f(x) = |x^2 - 4| - |x^2 - 9|$ і $g(x) = a$.

Знайдемо нулі модулів та знаки їх на проміжку і побудуємо графік функції $f(x)$.

Для $-3 < x < -2$; $2 < x < 3$ $f(x) = 2x^2 - 13$

Для $-2 < x < 2$ $f(x) = -5$

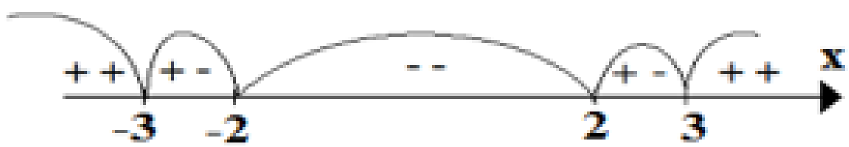

Рисунок 12

Проаналізувавши розв’язки рівняння можна зробити такі висновки:

якщо $a < -5$ *або* $a > 5$ – розв’язків не має

якщо $a = -5$, то $x \in [-2; 2]$

якщо $a = 5$, то $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$

якщо $a \in (-5; 5)$ то $x = \pm\sqrt{\frac{a+13}{2}}$

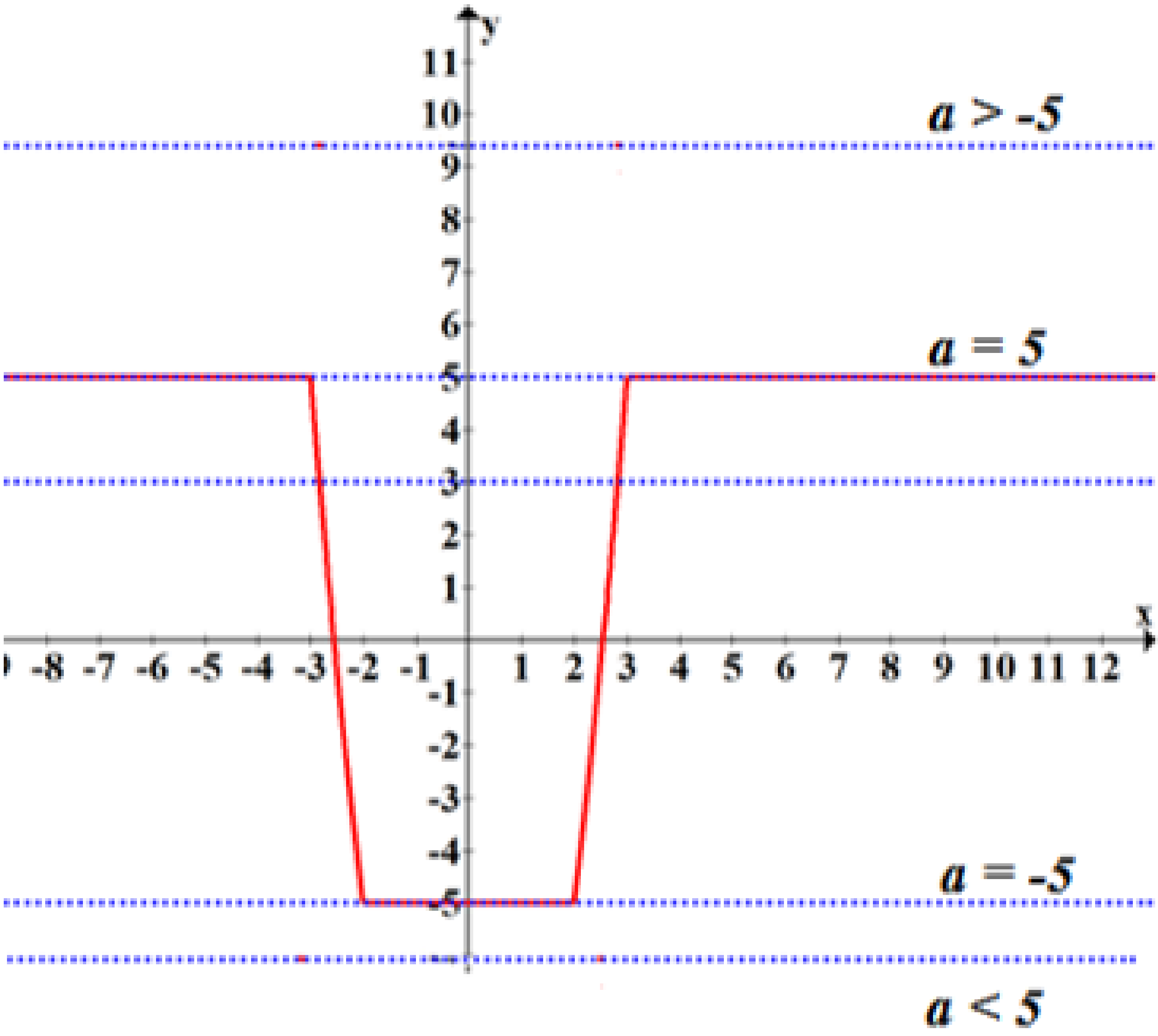

Рисунок 13

Відповідь: при $a < -5$ *або* $a > 5$ – розв'язків не має

при $a = -5$, то $x \in [-2; 2]$

при $a = 5$, то $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$

при $a \in (-5; 5)$ то $x = \pm\sqrt{\frac{a+13}{2}}$

Тригонометричні рівняння з параметрами

Тригонометричні рівняння з параметром – це такий тип рівнянь, коли невідома величина знаходиться під знаком тригонометричних функцій, а в лівій, або правій, або в обох частинах якого є параметр, або параметри.

Найпростішими тригонометричними рівняннями називаються рівняння $sinx = a$; $cosx = a$; $tgx = a$; $ctgx = a$. Для того, щоб розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння потрібно знайти множину всіх кутів, що мають дане значення a тригонометричної функції. Якщо рівняння не є найпростішим, то його треба звести до найпростішого [18].

Для правильного розв'язку тригонометричного рівняння з параметром необхідно пам'ятати:

1) всі тригонометричні формули (основні тригонометричні формули, формули подвійних кутів, формули зниження степеню, формули перетворення добутку в суму, формули перетворення суми в добуток, універсальні тригонометричні підстановки тощо);

2) періоди тригонометричних функцій (у функцій $sin\ x, cos\ x$ період $2П$, у $tg\ x, ctg\ x$ період $П$;

3) обмеженість функцій ($cos\ x, sin\ x$ за модулем одиницею);

4) формули зведення;

5) метод заміни змінної;

6) метод введення допоміжного кута;

7) метод вирішення однорідних тригонометричних рівнянь (поділити обидві частини рівняння на старших аргумент, який не дорівнює нулю).

Приклад 18. При яких значеннях a рівняння $cos^2 4x + (a - 3)\cos 4x = 0$ має корені на проміжку і дослідити їх кількість $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right]$?

Розв'язання.

Спершу необхідно винести спільний множник за дужки, отримаємо рівняння $\cos 4x\,(\cos 4x + a - 3) = 0$.

Припустимо спочатку, що $\cos 4x = 0$.

Тоді при $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, k \in Z$ можна отримати три кореня $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$, які належать відрізку $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right]$.

Другий множник не дорівнює нулю при $a \neq 3$ на цьому відрізку і може перетворитися в нуль при $|3-a| \leq 1$.

Якщо $|3-a| \leq 1$, то коренями другого множника будуть числа $\mp\frac{1}{4}\arccos(3-a)+\frac{\pi}{2}n$ і хоча б один з них потрапить на відрізок $\left[\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right]$.

Отже, має бути $|3-a| \leq 1$, звідки отримуємо

$$a < 2 \quad \text{або} \quad a > 4.$$

Відповідь: $a \in (-\infty;2) \cup (4;+\infty)$.

Приклад 19. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\cos(\sqrt{a^2-x^2})=1$ має шість коренів.

Розв'язання.

Рівняння $\cos(\sqrt{a^2-x^2})=1$ рівносильне рівнянню

$$\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n, n \in Z.$$

При $n \in Z_-$—рівняння не має коренів.

При $n=0$ рівняння має два корені.

Розглянемо рівняння при $n \in Z_+$.

Графіком рівняння $y=\sqrt{a^2-x^2}$ є півколо з центром у точці O (0;0), радіусом $R=|a|$.

Графіком рівняння $y=2\pi n, n \in Z_+$ є прямі, паралельні осі абсцис. Наприклад,

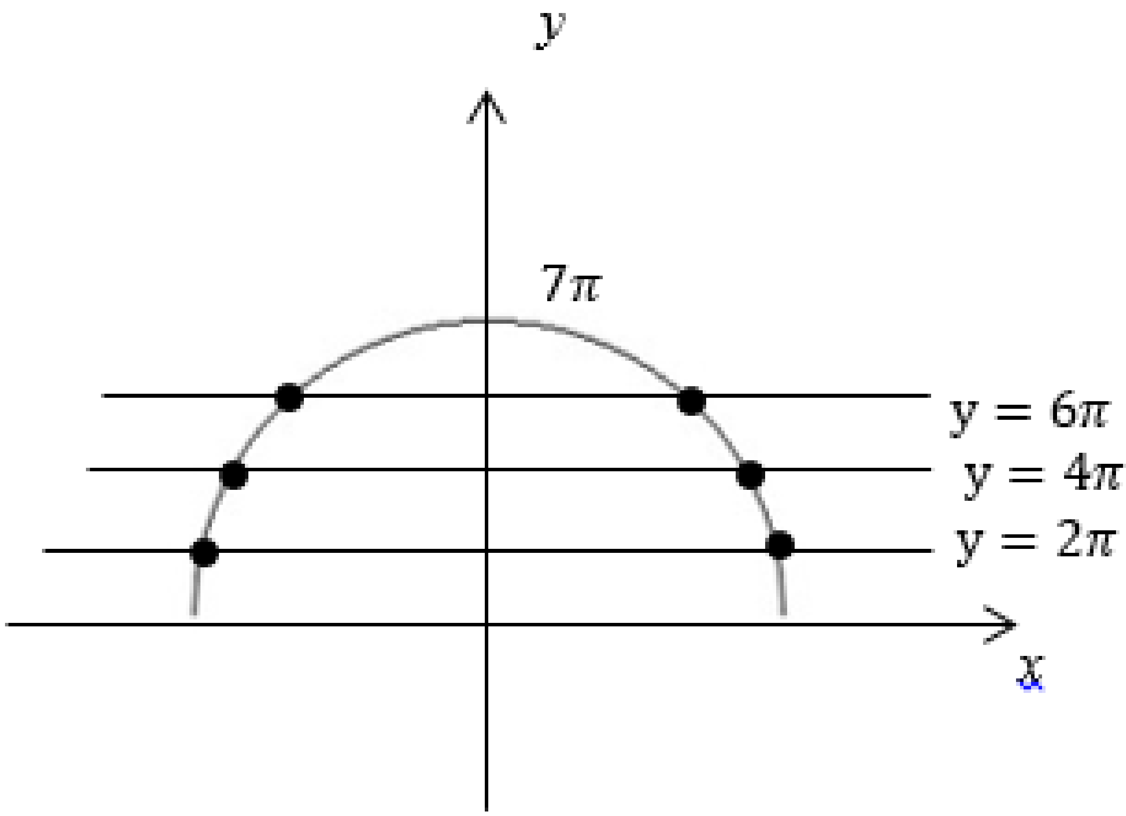

Рисунок 14

Якщо $a = 6\pi$, то рівняння має 5 рішень, а при $a = 8\pi$, то розв'язків вже 7.

Отже, при $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$ рівняння матиме шість коренів.

Відповідь: При $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

Приклад 20. При яких значеннях параметра b рівняння

$$(1 - b)tg^2x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3b = 0$$

має більш ніж один корінь на проміжку $(0; \frac{\pi}{2})$?

Розв'язання.

Нехай $t = \cos x$, тоді

$$tg^2x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - cos^2x}{cos^2x} = \frac{1 - t^2}{t^2},$$

($0 < t < 1$, враховуючи умову задачі).

Тоді рівняння набуває вигляду

$$(1-b)\frac{1-t^2}{t^2}-\frac{2}{t}+1+3b=0,$$

$$(1-b)(1-t^2)\ -2t+t^2+3bt^2=0,$$

$$1-t^2-b+bt^2-2t+t^2+3bt^2=0;$$

$$4bt^2-2t+(1-b)=0.$$

Нехай спершу $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, тоді рівняння набуває вигляду $2t=1$, звідки $t=\frac{1}{2}$.

Звідки слідує $\cos x=\frac{1}{2}$;

Тобто, $x=\pm arccos\frac{1}{2}+\pi n, n\epsilon Z$;

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\epsilon Z.$

Отже, в цьому випадку рівняння має єдиний корінь $x=\frac{\pi}{3}$ на проміжку $(0;\frac{\pi}{2})$, а даний факт не задовольняє умову задачі.

Проаналізуємо рівняння при $b\neq 0$: $4bt^2-2t+(1-b)=0.$

Дискримінант рівняння $\frac{D}{4}$ буде дорінювати:

$\frac{D}{4}=1-4b+4b^2=(1-2b)^2,$

А тому

$t_1=\frac{2+4b-2}{8b}=\frac{4b}{8b}=\frac{1}{2},$

$t_2=\frac{2-4b+2}{8b}=\frac{4-4b}{8b}=\frac{1-b}{2b}.$

$\cos x=\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{1-b}{2b}$;

За умовою задачі нам потрібно, щоб рівняння мало більше ніж один корінь на інтервалі $(0;\frac{\pi}{2})$, тобто має виконуватися нерівність

$$0<\frac{1-b}{2b}<1.$$

З останньої умови слідує, що рівняння матиме більше ніж один корінь на проміжку $(0;\frac{\pi}{2})$, за виконання умов, звідки знаходимо:

$$\begin{cases} \frac{1-b}{2b} > 0, \\ \frac{1-b}{2b} < 1, \\ \frac{1-b}{2b} \neq \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{b-1}{2b} < 0, \\ \frac{1-b-2b}{2b} < 0, \\ \frac{1-b}{b} \neq 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{b-1}{b} < 0, \\ \frac{3b-1}{b} > 0, \\ 1-b \neq b, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < b < 1; \\ b < 0;\ b > \frac{1}{3}, \\ b \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Звідки маємо $b \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Відповідь: При $b \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ рівняння може мати більше ніж один кокрінь.

Приклад 21. Знайдіть всі значення параметру р, при яких рівняння $\cos x + \sqrt{1+p}\sin x = 1 + \sqrt{1-p}$ має розв'язки.

Розв'язання.

Область визначення для параметра *p:* $\begin{cases} 1+p \geq 0, \\ 1-p \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} p \geq -1, \\ p \leq 1. \end{cases}$

Маємо $-1 \leq p \leq 1$.

Застосуємо метод допоміжного аргументу . Для цього введемо параметри a, b та c.

$$a = 1, b = \sqrt{1+p}\,, c = 1 + \sqrt{1-p}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1+p} = \sqrt{2+p}$$

Поділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{2+p}$, отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2+p}}\cos x + \frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{2+p}}\sin x = \frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}};$$

Зауважимо, при цьому у нас коефіцієнти перед синусом і косинусом володіють наступними властивостями:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2+p}} \leq 1; \quad 0 \leq \frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{2+p}} \leq 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2+p}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{2+p}}\right)^2 = \frac{1+1+p}{2+p} = \frac{p+2}{p+2} = 1;$$

Позначимо $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2+p}}$; $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{2+p}}$.

$$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = \frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}};$$

$$\sin(\varphi + x) = \frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}};$$

Зауважимо, що невідому х шукати не треба

$-1 \le \sin(\varphi + x) \le 1.$

Тоді $-1 \le \frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}} \le 1.$

Враховуючи, що цей дріб приймає додатні значення, маємо

$1 + \sqrt{1-p} \le \sqrt{2+p}.$

Обидві частини нерівності теж приймають додатні значення. Отже, можна піднести обидві частини до квадрату. Тоді матимемо нерівність

$1 + 2\sqrt{1-p} + 1 - p \le 2 + p;$

Звідки

$$2\sqrt{1-p} \le 2p; \text{ тобто } \sqrt{1-p} \le p$$

$$\begin{cases} 1-p \ge 0; \\ p \ge 0; \\ 1-p \le p^2. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le p \le 1; \\ p^2 + p - 1 \ge 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le p \le 1; \\ \left[\begin{array}{l} p \le \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \\ p \ge \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Аналізуючи отримані нерівності, будемо мати, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \le p \le 1.$

Відповідь:$p \in \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1\right]$

Приклад 22. При якому значенні параметра a рівняння $cos^2 3x + \left(2a^2 - \frac{7}{2}\right) cos3x + a^2 - 2 = 0$ має корені на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$? [8]

Розв’язання

$$cos^2 3x + \left(2a^2 - \frac{7}{2}\right) cos3x + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} cos3x = -\frac{1}{2} \\ cos3x = -2a^2 + 4 \end{array}\right.$$

Розглянемо графік $y = cos3x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

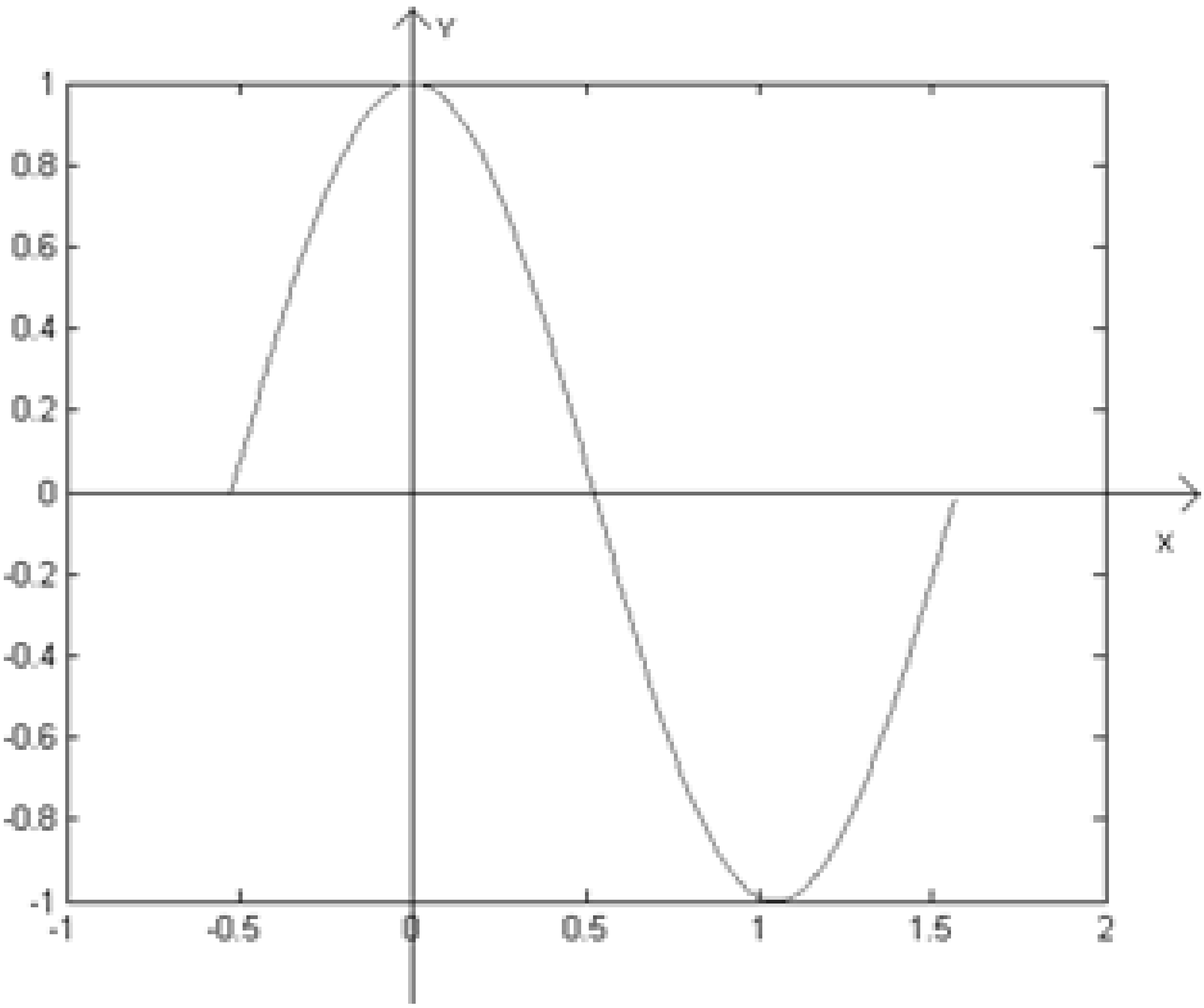

Рисунок 15

Рівняння $cos3x = -\frac{1}{2}$ на даному проміжку має два корені$\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$. Для того щоб виконати умову задачі потрібно, щоб це рівняння

Для виконання умови задачі необхідно, щоб рівняння $cos3x = -2a^2 + 4$ мало корені на цьому проміжку. Відразу зрозуміло, що потрібн6о щоб $-2a^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$.

Відповідь: $a = \pm\sqrt{2}$.

Приклад 23. Розв'язати рівняння $|a - 2sinx| + 2|sinx - cosx| + |2cosx - 1| = a - 1$. [19]

Розв'язання

Для зручнішого розв'язку потрібно подати рівняння у вигляді:

$$|a-2\sin x|+2|\sin x-\cos x|+|2\cos x-1| = (a-2\sin x)+(\sin x-\cos x)+(2\cos x-1)$$

Скористаємося тим, що $|a|+|b|=a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ b\ge 0 \end{cases}$.

Звідси випливає, що

$$|a-2sinx|+2|sinx-cosx|+|2cosx-1|=a-1 \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-2\sin x\ge 0 \\ \sin x-\cos x\ \ge 0 \\ 2\cos x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\le \frac{a}{2} \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 0 \\ \cos x\ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x\le \frac{a}{2} \\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le \frac{5\pi}{4}+2\pi n \\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\le x\le \frac{\pi}{3}+2\pi n, \ \ n\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\le \frac{a}{2} \\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le \frac{\pi}{3}+2\pi n, \ \ n\in R \end{cases}.$$

Розв'язки другої нерівності можна розглянути на одиничному колі:

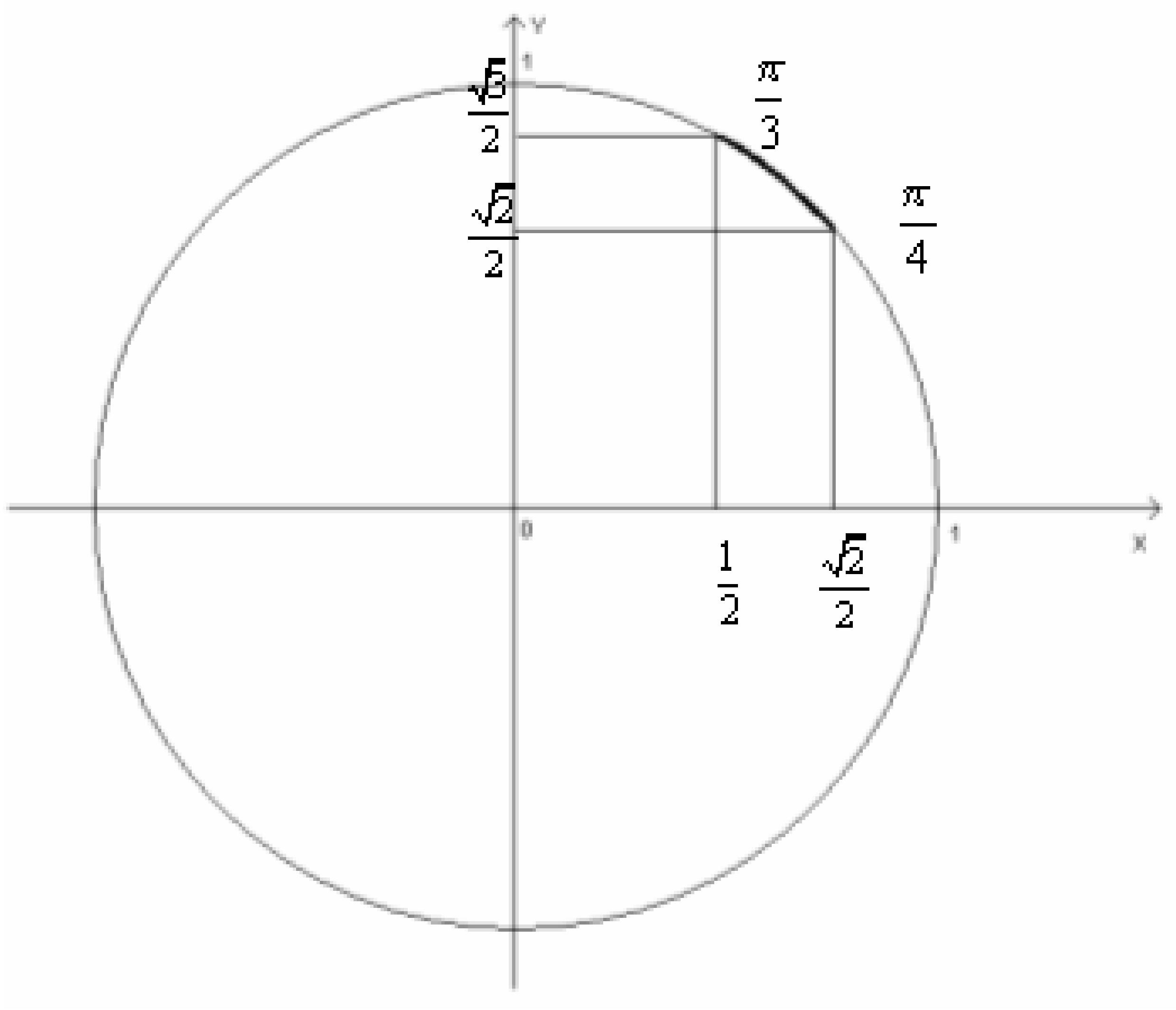

Рисунок 16

Перша нерівність при $a \geq 2$ виконується завжди, при $a < -2$ не має розв'язків і при $-2 < a < 2$:

$$-\pi - \arcsin\frac{a}{2} + 2\pi k \leq x \leq \arcsin\frac{a}{2} + 2\pi k, \quad k \in R$$

Можна зробити висновки, що при $a \geq \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in R$, при $\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq arcsin\frac{a}{2} + 2\pi k, k \in R$ і при $a < \sqrt{2}$, $x \in \emptyset$.

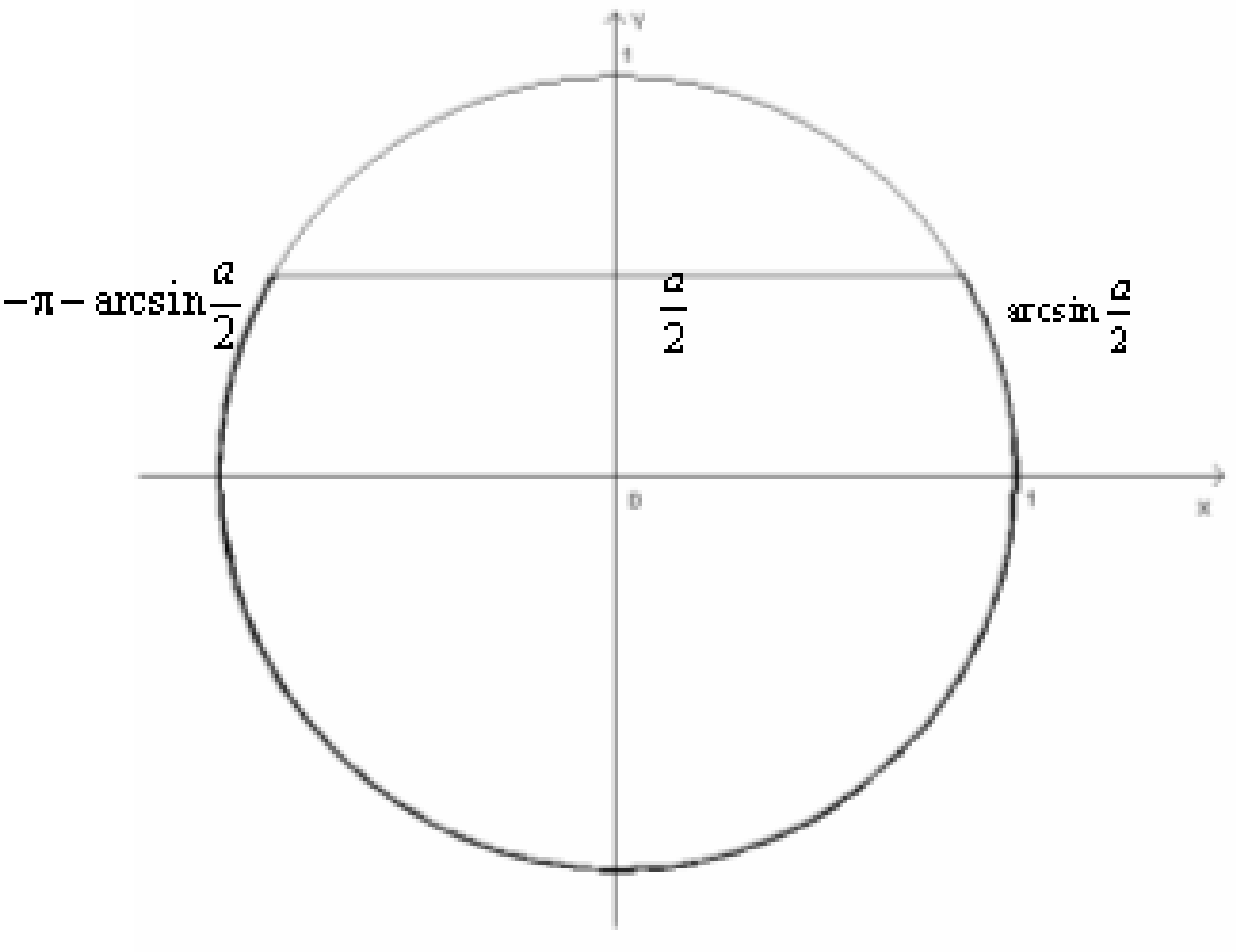

Рисунок 17

Відповідь: при $a \geq \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in R$, при $\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq arcsin\frac{a}{2} + 2\pi k, k \in R$ і при $a < \sqrt{2}$, $x \in \emptyset$.

Розділ 3. Застосування комп’ютерної програми для розв’язання задач з параметрами

За допомогою комп’ютерної програми Microsoft Mathematics 4.0 можна з легкістю побудувати графіки функцій різної складності, а також визначити ОДЗ функцій, знайти проміжки спадання та зростання. Також в програмі можна побудувати декілька функцій на одному графіку різними кольорами, що дає змогу чітко визначити точки перетину графіків.

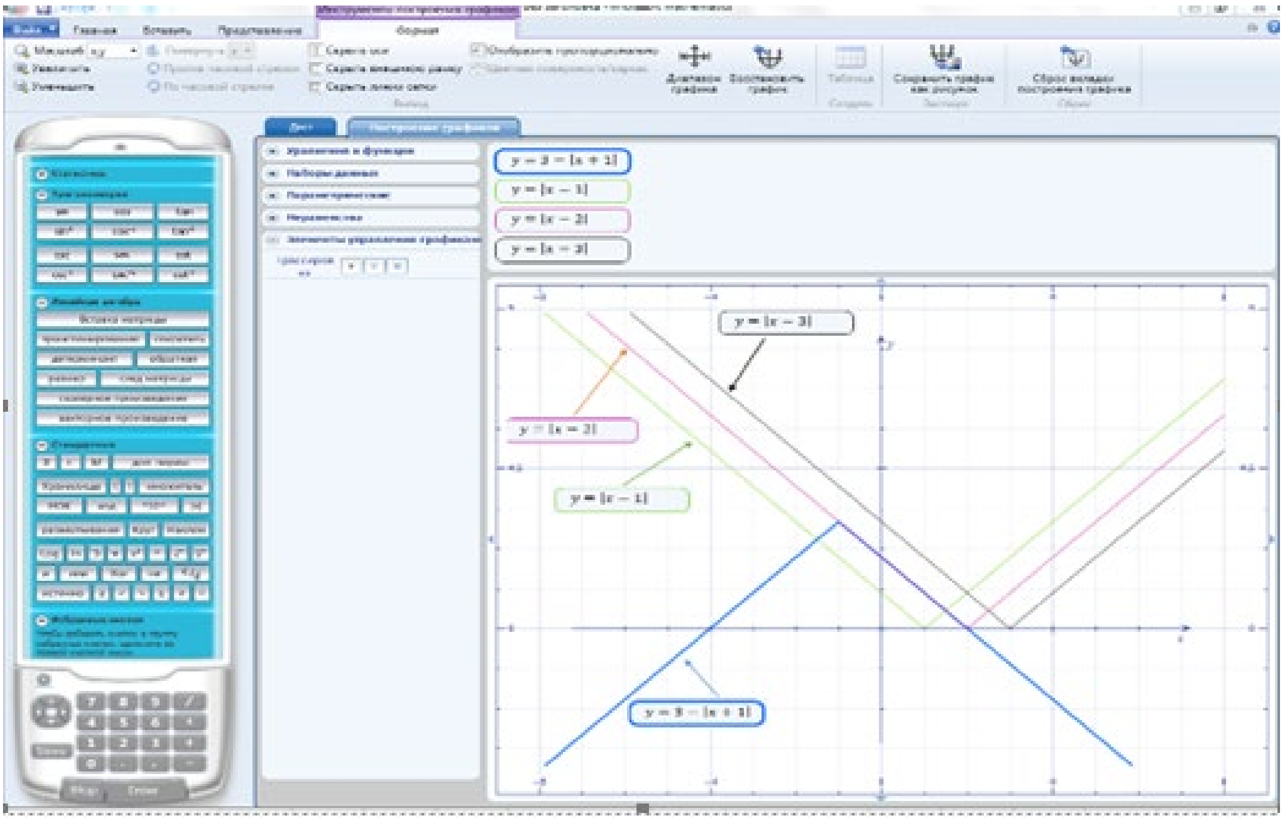

Рисунок 18

Ось так виглядає сам інтерфейс програми. Розглянемо декілька прикладів та побудуємо графіки функцій в даній програмі.

Приклад 24. Визначити кількість розв’язків в рівнянні $|x^2 - 2x - 3| = a$, для кожного параметра a.

Розв’язання

Спершу потрібно побудувати графіки функцій даного рівняння $y=|x^2-2x-3|$ та $y=a$.

На рисунку наглядно можна побачити множину паралельних прямих $y=a; a\in(-\infty;+\infty)$, де кількість точок перетину різна.

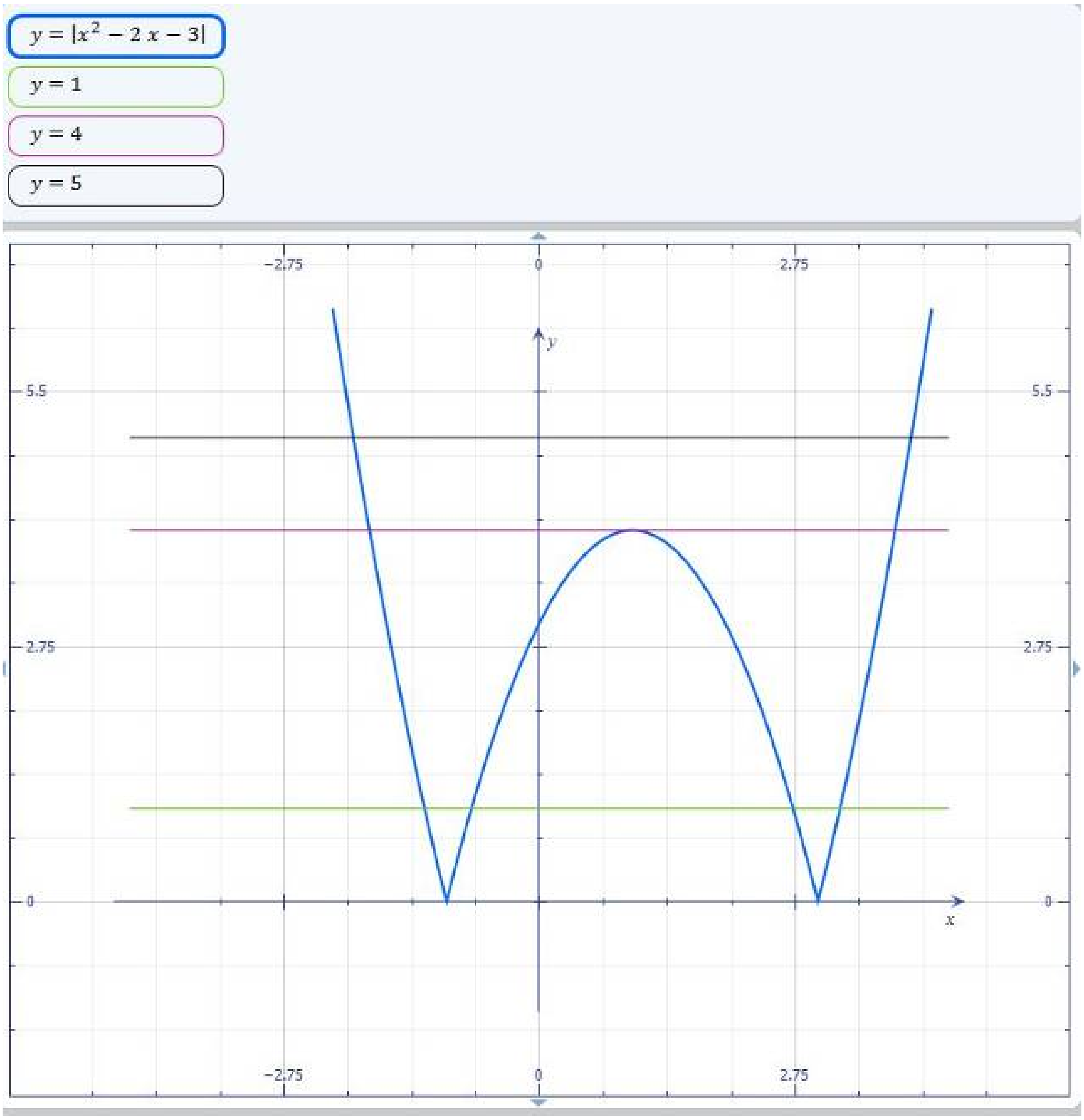

Рисунок 19

Можна чітко побачити, що при $a < 0$ -- розв'язки відсутні, при $a = 0$ – можна побачити два розв'язки, при $0 < a < 4$ – чотири розв'язки, при $a = 4$ – три розв'язки та при $a > 4$ – два розв'язки.

Ця програма надає змогу знайти корені в типових проміжках параметра a, при цьому задавати значення для параметра і розв'язуючи рівняння $|x^2 - 2x - 3| = a$.

Також ця програма показую хід дій при розв'язуванні рівняння, які і показують всі корені.

Ввод	solve($\|x^2 - 2x - 3\| = a, x$)
Решение 1	$x = -\frac{\sqrt{4a+16}}{2} + 1, a \geq 0$
Решение 2	$x = \frac{\sqrt{4a+16}}{2} + 1, a \geq 0$
Решение 3	$x = -\frac{\sqrt{16-4a}}{2} + 1, a \leq 4$ and $a \geq 0$
Решение 4	$x = \frac{\sqrt{16-4a}}{2} + 1, a \leq 4$ and $a \geq 0$

Рисунок 20

Відповідь: при $a < 0$ – розв'язків немає,

при $a = 0$ – 2 розв'язки,

при $0 < a < 4$ – 4 розв'язки,

при $a = 4$ – 3 розв'язки,

при $a > 4$ – 2 розв'язки.

Приклад 25. Знайти кількість розв'язків рівняння $\sqrt{2|x| - x^2} = a$, для кожного значення параметра a. [7]

Розв'язання.

1. За допомогою програми Microsoft Mathematics 4.0 отримуємо розв'язок рівняння з параметром $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

Проаналізувавши розв'язки рівняння, можна побачити, що параметр a знаходиться в проміжку $-1 \leq a \leq 1$. На даному проміжку рівняння має всього чотири розв'язки.

Ввод	$\text{solve}\left(\sqrt{2\,|x| - x^2} = a, x\right)$
Решение 1	$x = \sqrt{1 - a^2} + 1, a \leq 1 \text{ and } a \geq -1$
Решение 2	$x = -\sqrt{1 - a^2} + 1, a \leq 1 \text{ and } a \geq -1$
Решение 3	$\emptyset, a < -1 \text{ or } a > 1$
Решение 4	$x = -\sqrt{1 - a^2} - 1, a \leq 1 \text{ and } a \geq -1$
Решение 5	$x = \sqrt{1 - a^2} - 1, a \leq 1 \text{ and } a \geq -1$

Рисунок 21

Отже, відповідь буде наступна:

при $a < -1$ та $a > 1$ – розв'язків не має,

при $a = \pm 1$ – 2 розв'язки,

при $-1 < a < 1$ – 4 розв'язки.

1. Побудуємо графік функції $y = +\sqrt{2|x| - x^2}$ та $y = -\sqrt{2|x| - x^2}$. При побудові графіків потрібно врахувати ОДЗ функції під коренем

$2|x| - x^2 \geq 0$, тобто $x \in [-2; 2]$.

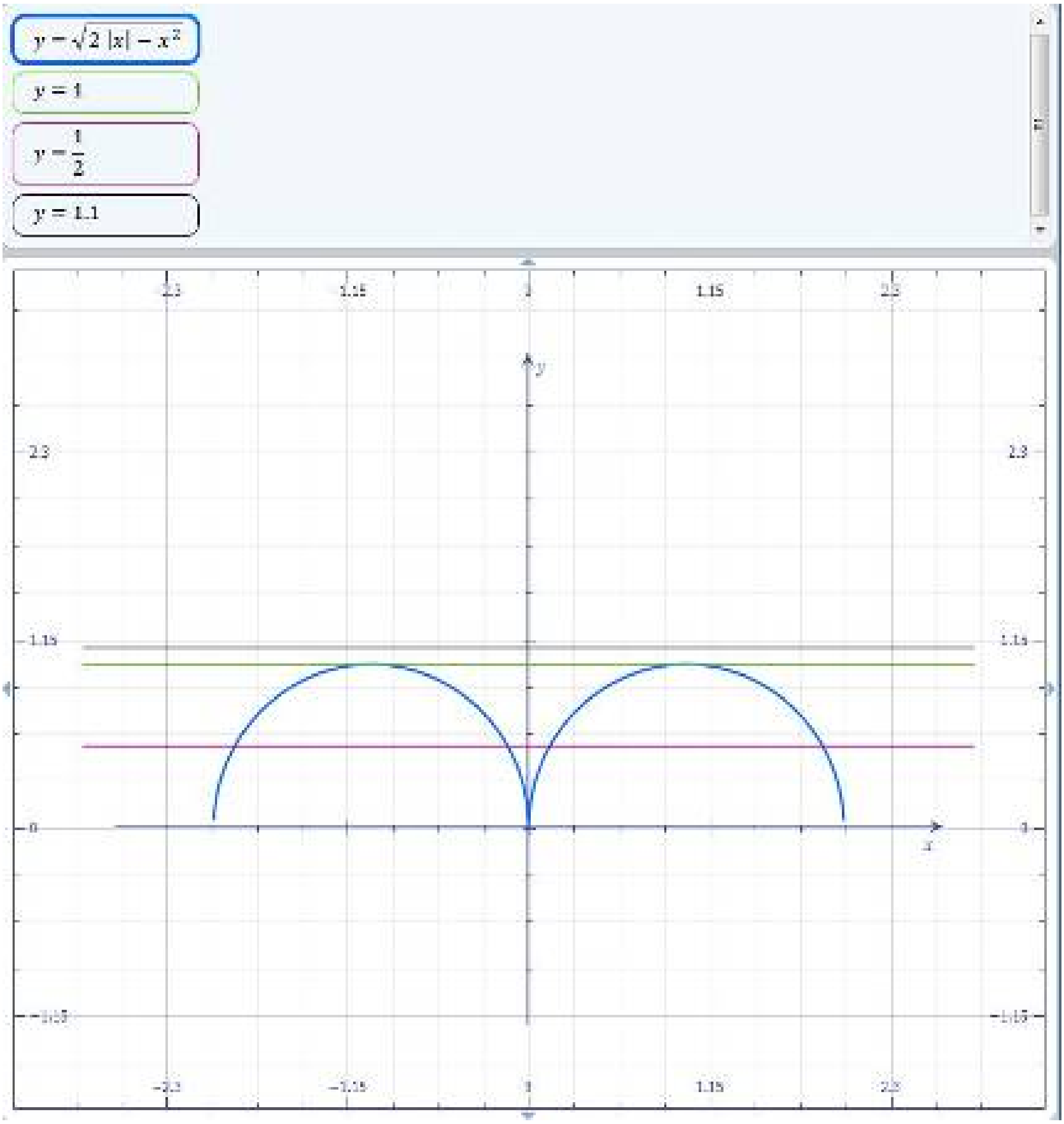

Рисунок 22

Графік функції $y = +\sqrt{2|x| - x^2}$.

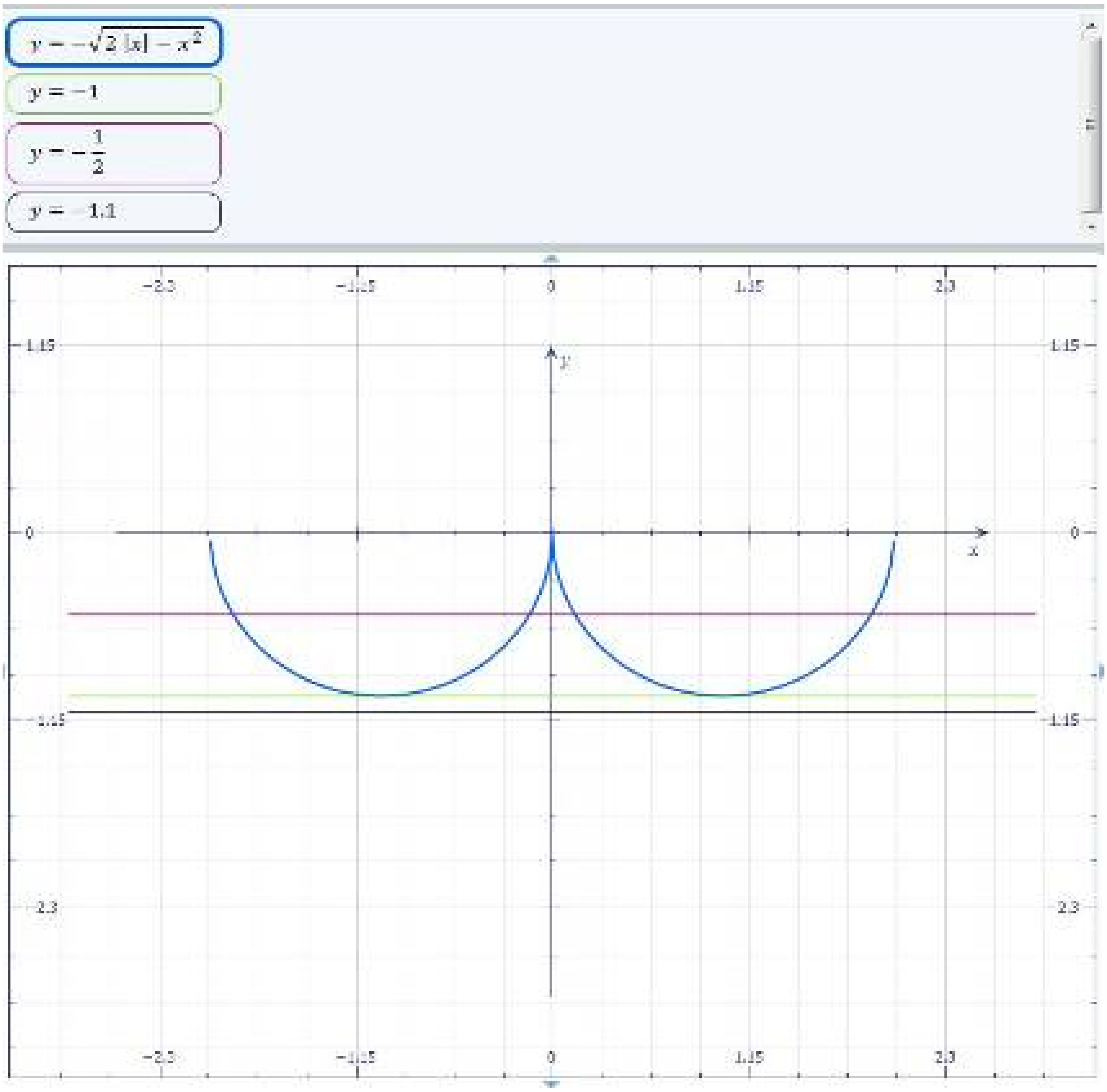

Рисунок 23

Графік функції $y = -\sqrt{2|x| - x^2}$.

Отже, проаналізувавши графіки функцій, можна зробити такі висновки:

при $a < -1$ та $a > 1$ – розв’язків не має,

при $a = \pm 1$ – 2 розв’язки,

при $-1 < a < 1$ – 4 розв’язки.

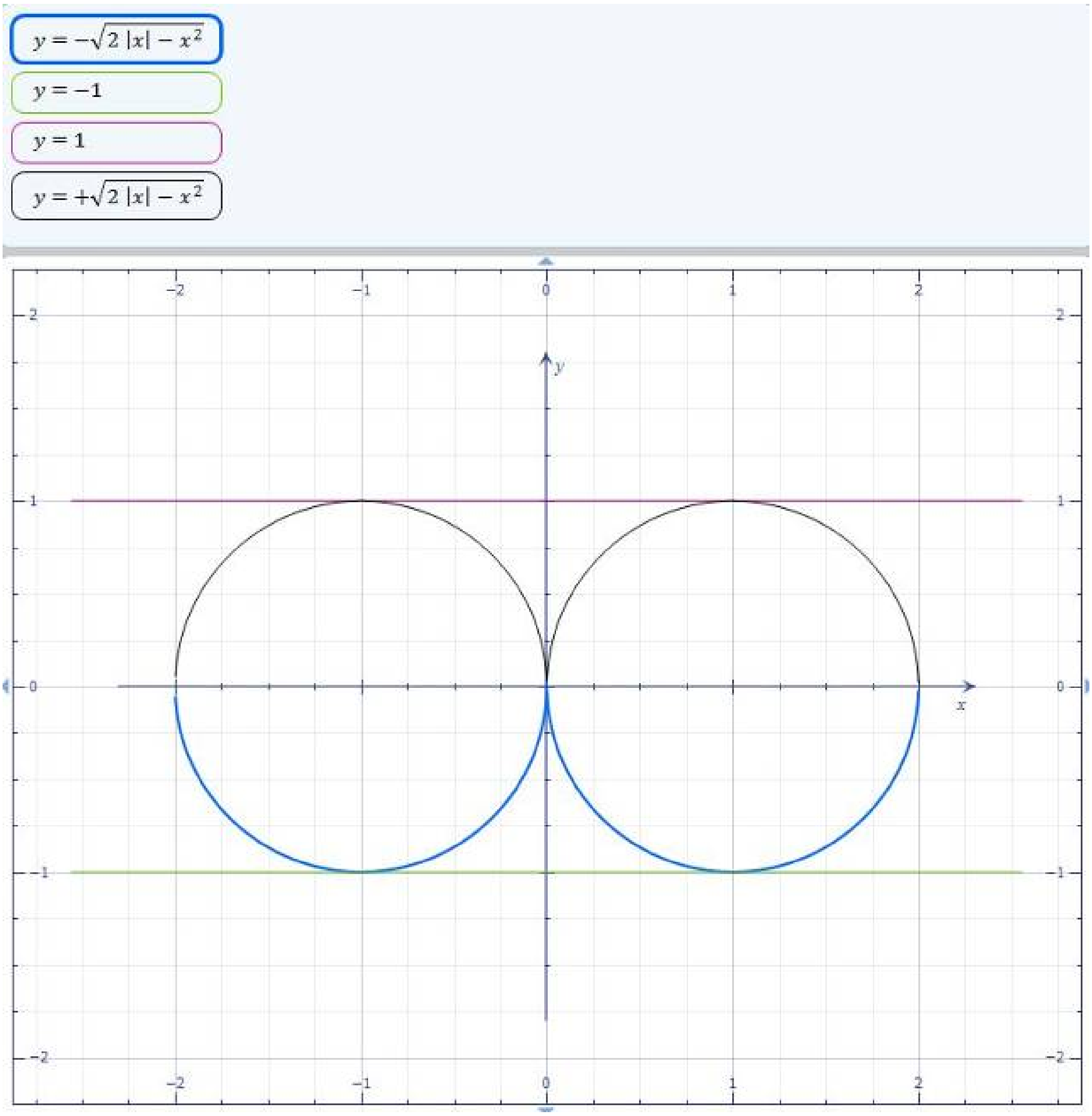

Рисунок 24

Графік функції $y = \pm\sqrt{2|x| - x^2}$

Відповідь: при $a < -1$ та $a > 1$ – розв'язків не має, при $a = \pm 1$ – 2 розв'язки, при $-1 < a < 1$ – 4 розв'язки.

Приклад 26. Скільки розв'язків має система рівнянь ($a > 0$)

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

Розв'язання.

Першим кроком будемо будувати графіки функцій $|x| + |y| = 1$ та $x^2 + y^2 = a^2$ в програмі Microsoft Matematics. Графіком цієї функції $x^2 + y^2 = a^2$ буде коло з центром гомотетії (0;0)

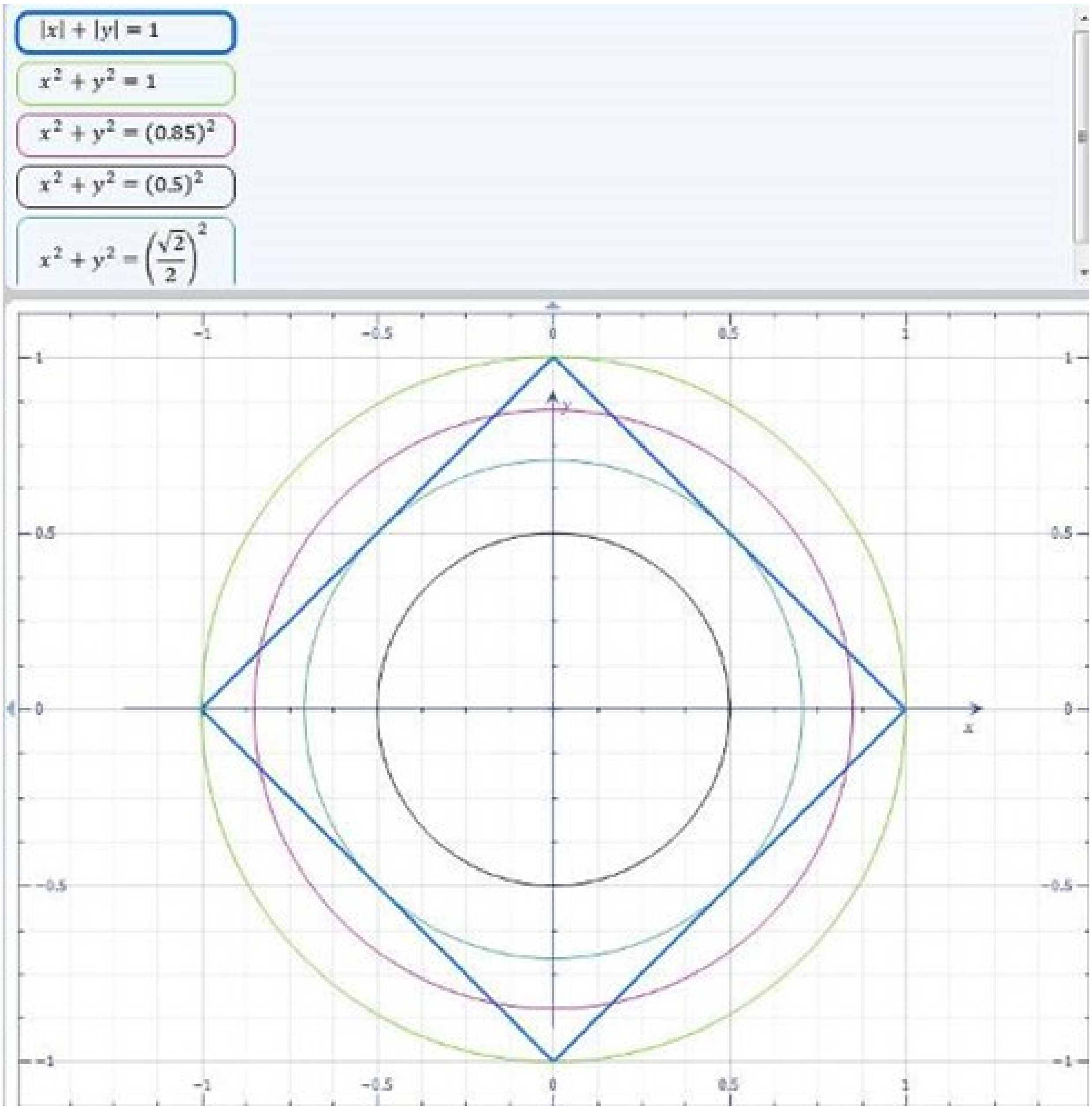

Рисунок 25

Дивимось на графік, і якщо коло буде лежати всередині квадрата, то розв’язків не буде.

Проте, якщо коло буде вписане в квадрат, то розв’язки з’являться.

За допомогою теореми Піфагора: $a=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. При $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ система не має розв’язків, при $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ система має 4 розв’язки.

При $a=1$ квадрат буде вписаний в коло, тоді будемо мати 4 розв’язки. При $a>1$ розв’язків немає.

Відповідь: при $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ розв’язків не має, при $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ – 4 розв’язки, при $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$ – 8 розв’язків, при $a=1$ – 4 розв’язки, при $a>1$ розв’язків не має.

Приклад 27. Графічно розв’язати рівняння та знайти кількість розв’язків $\sqrt{4x-x^2}=a+1$.

Розв’язання

Розв’яжемо дане рівняння за допомогою програми Microsoft Matematics.

Побудуємо графіки функцій $y=\sqrt{4x-x^2}$; та $y=a+1$ та проаналізуємо розв’язки даного рівняння.

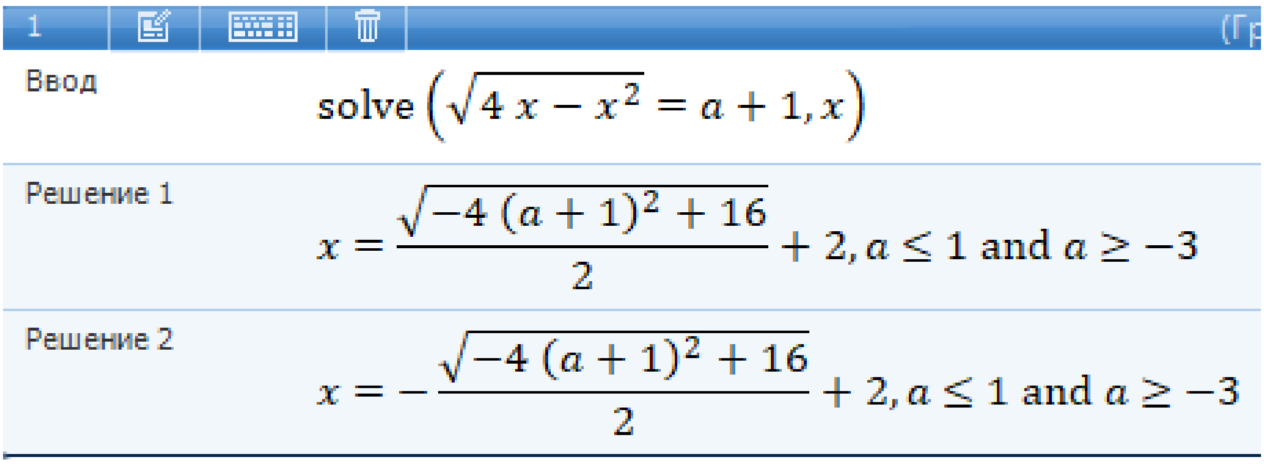

Рисунок 26

Отже, розв’язки рівняння:

При $a\leq 1$ i $a\geq -3$, буде $x=\frac{\sqrt{-4(a+1)^2+16}}{2}+2$

При $a \leq 1$ $і$ $a \geq -3$, $x = -\frac{\sqrt{-4(a+1)^2+16}}{2} + 2$.

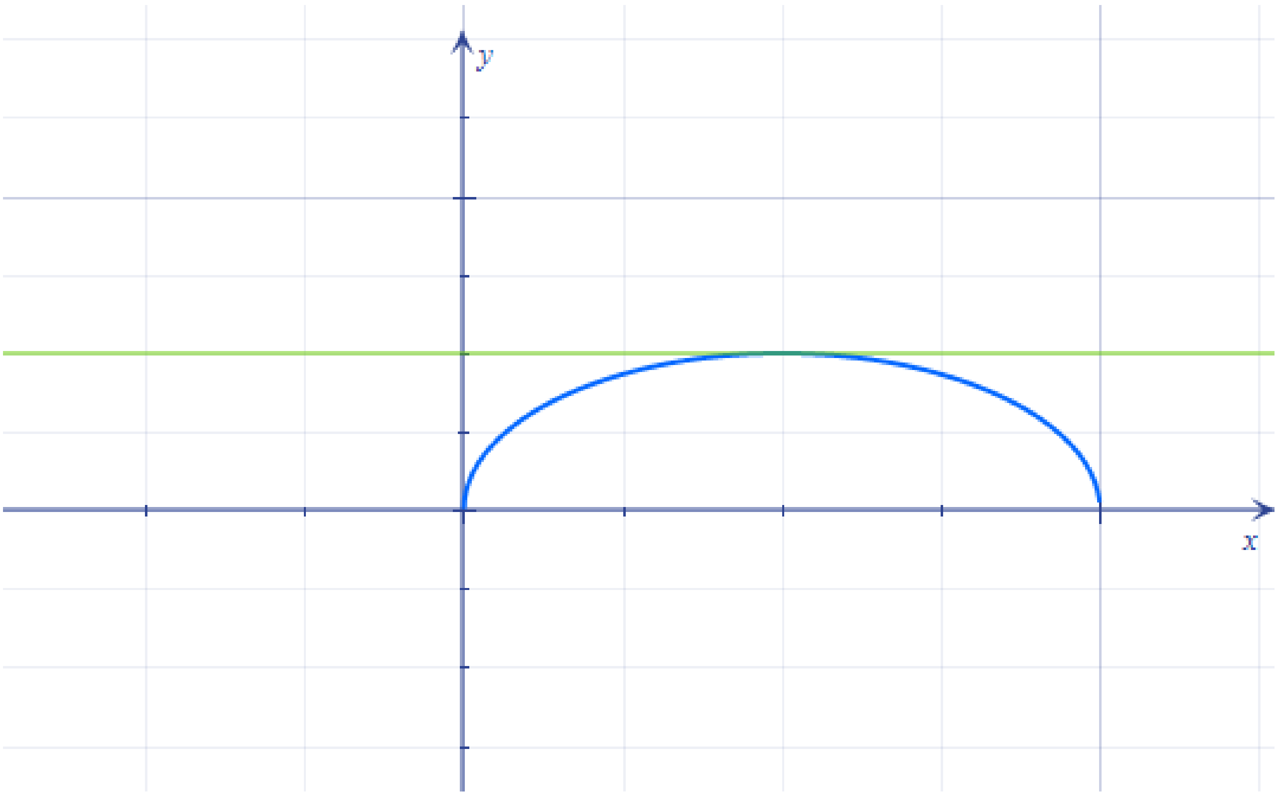

Рисунок 27

Відповідь: при $a \leq 1$ $і$ $a \geq -3$ рівняння буде мати два розв'язки.

Приклад 28. Знайти при яких значеннях параметра b рівняння $(b^2 - 2b)x = b^2 - 4$ має безліч коренів.

Скористаємось комп'ютерною програмою. Спершу поділимо обидві частини рівняння на $(b^2 - 2b)$. Ми отримаємо $x = \frac{b^2-4}{(b^2-2b)}$. Виконавши деякі перетворення отримаємо: $x = \frac{b+2}{b}$.

Ввод $\mathrm{solve}\left((b^2 - 2\,b)\,x = b^2 - 4, x\right)$

Шаги решения

Разделить обе части уравнения на $(-2)\,b + b^2$.

$$\frac{(b^2 - 2\,b)\,x}{b^2 - 2\,b} = \frac{b^2 - 4}{b^2 - 2\,b}$$

Отменить умножение.

Деление на $(-2)\,b + b^2$ отменяет умножение на $(-2)\,b + b^2$.

$$x = \frac{b^2 - 4}{b^2 - 2\,b}$$

Разделить.

Разделить $-4 + b^2$ на $(-2)\,b + b^2$.

$$x = \frac{b + 2}{b}$$

Примечание. Эти шаги решения относятся к общему случаю, когда $b \neq 0$ and $b \neq 2$.

Решение $x = \dfrac{b + 2}{b},\ b \neq 0 \text{ and } b \neq 2$

Рисунок 28

Побудуємо графік функцій.

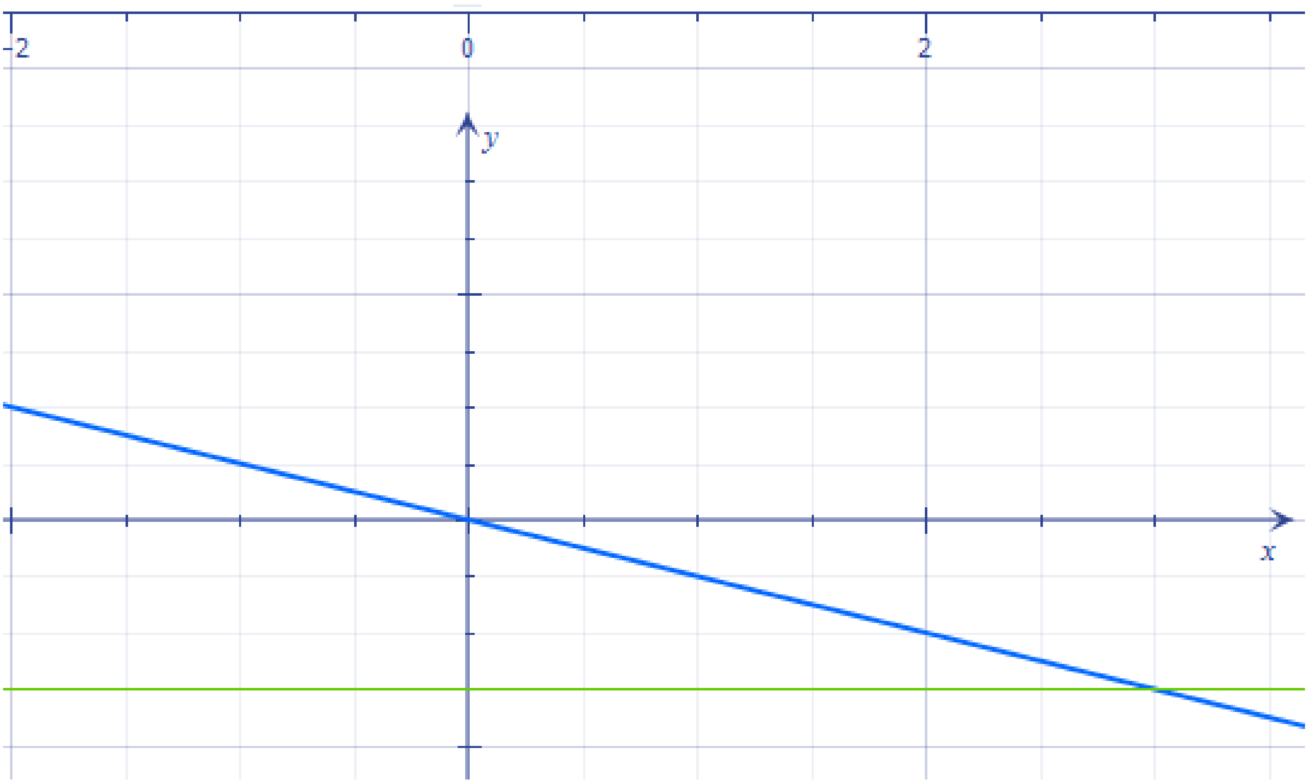

Рисунок 29

Приклад. За допомогою програми розв'язати нерівність $x^2 - 6x - a > 0$ та побудувати графік.

Розв'язання

$$\mathrm{solveIneq}(x^2 - 6\,x - a > 0, x)$$

$$\begin{cases} x < -\dfrac{\sqrt{4\,a+36}}{2} + 3 \text{ or } x > \dfrac{\sqrt{4\,a+36}}{2} + 3, & a > -9 \\ x \in \mathbb{R}, & a < -9 \\ x \neq 3, & a = -9 \end{cases}$$

Рисунок 30

Знайдемо дискримінант рівняння:

$D = 36 - 4 * 1 * (-a) = 36 + 4a,$

$\sqrt{D} = \sqrt{36 + 4a} = 2\sqrt{9 + a},$

$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{9+a}}{2} = 3 - 2\sqrt{9 + a},$

$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{9+a}}{2} = 3 + 2\sqrt{9 + a}.$

Отже, розв'язками нерівності будуть:

$$\begin{cases} x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{9 + a}, & \text{при } a > -9 \\ x \in R, & \text{при } a < -9 \\ x \neq 3, & \text{при } a = -9 \end{cases}.$$

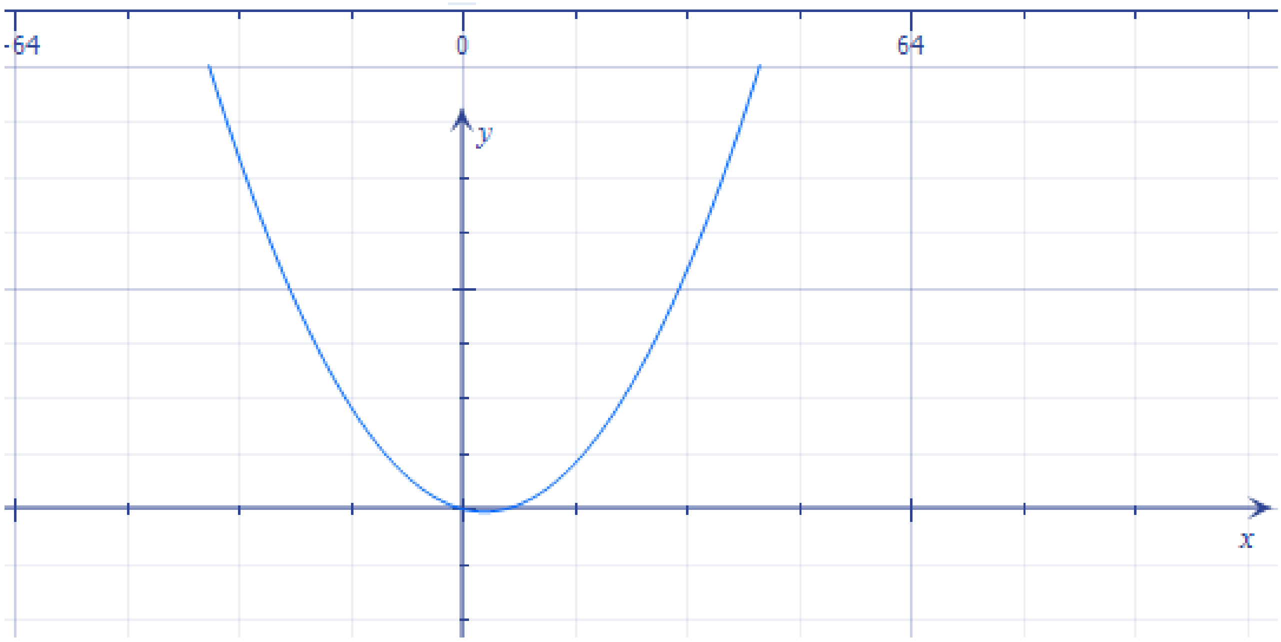

Рисунок 31

Висновки

В даній роботі розглядаються різні методи розв'язування задач з параметрами. Основна увага в роботі приділялась найбільш поширеним методам, це аналітичний та графічний. В роботі з'ясовується, чому графічний часто буває зручнішим, ніж аналітичний. Розглядаються деякі алгоритми розв'язування задач з параметрами та застосування їх в приміненні для розв'язування конкретних прикладів.

При розв'язуванні математичних задач, зокрема задач з параметрами, в учнів формується особливий тип мислення, лаконічне вираження своїх думок, а також вони можуть складати логічні схеми. Учні стають дослідниками, коли розв'язують задачі з параметрами, їм необхідно проаналізувати всі можливі випадки даної задачі і в результаті прийти до правильної відповіді. Інколи в задачі необхідно просто спростити її і зробити більш красивою, це і полегшить розв'язок.

У шкільній програмі з математики розв'язання задач з параметрами займає почесне місце. Рівняння, нерівності та текстові задачі, що містять параметр дуже широко представлені у завданнях державної підсумкової атестації, зовнішньому незалежному оцінюванні, а також в олімпіадних завданнях.

В даній роботі систематизовані відомості про розв'язування рівнянь з параметрами та методи розв'язування задач з параметрами;

Результати даної роботи можуть бути корисними для вчителів та учнів старших класів.

Для того щоб оволодіти та правильно використовувати різні методи до різних завдань, необхідно розв'язати низку задач з параметрами і таким чином систематизувати та узагальнити знання по цій темі.

Результати роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2021 рік.

Список використаної літератури

1. Апостолова Галина, Ясінський Василь. Перші зустрічі з параметром. – К.: Факт, 2004. 316 с.; іл. URL:http://matematuka.inf.ua/rizne/apostolova_parametru/param.html

2. Горнштейн П.И., Полонский В. Б., Якір М. С. Задачи с параметрами. – К.: РИА »Текст»; МП»ОКЛ», 1992. 290с.

3. Єфімов Є. А., Коломієць Л. В, Задачі з параметрами, навчальний посібник для факультету довузівської підготовки, Самара. 2006

4. Захарченко Н. Параметри та графіки: навч.-метод. посіб. / [відп. за вип. О. Лісовий]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2012. 56

5. Заріцька Я. В. Аналітичні та графічні прийоми розв’язування задач з параметрами: маг.роб.:Житомир. 2014

6. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 11 кл./ О. С. Істер, О. І. Глобін, І. Є. Панкратова. - К.: Центр навч.-метод. л-ри. 2012.

7. Істер О.С., ЄргінаО. В. Алгебра і початки аналізу: (проф. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. Серед. Освіти. К. : Генеза, 2018. 448 с.

8. Істер О. С. Методи розв’язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 1. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. 480 с.

9. Крамор В.С. Задачі з параметрами і методи їх розв'язання. Тернопіль : Навчальна книга «Богдан», 2012. 416 с.

10. Концепція профільного навчання в старшій школі // Математика в сучасній школі. – 2013. № 12.

11. Лукавецкий В. И., Маланюк М. П., Литвиненко Г. Н. Задания по 52 алгебре для 7 класса: Учебно-методическое пособие. - К.: Рад. школа, 1982.- 72 с.

12. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на погл. рівні з 8 кл. проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 312 с.

13. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2018. 256 с.: іл.

14. Мерзляк А. Г., Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: профільний рівень. Х.: Гімназія, 2010. 416 с.

15. Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. М. :Экзамен, 2009. 286 с.

16. Навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів профільний рівень.

17. Навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів академічний рівень.

18. Навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів рівень стандарт

19. Навчальні програми з математики для учнів 5-9 класів профільний рівень

20. Олімпіадні задачі з математики з розв’язками для учнів середньої школи URL: https://boykoandrey.ucoz.com/_ld/0/25____.pdf

21. Олімпіадні задачі з математики з розв’язками для учнів старшої школи URL: http://www.slavdpu.dn.ua/fmk/publications/manuals/manual_10.pdf

22. Пирковська О. В. Задачі з параметрами // XIV Всеукраїнська студентська наукова конференція “Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання” 5-6 грудня 2018 року: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2018. – С. 149 – 150.

23. Пирковська О.В., Чорненька О.В. Задачі, що містять параметр, в шкільній програмі з алгебри // Сучасний рух науки: тези доп. V міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, 7-8 лютого 2019 р. – Дніпро, 2019. – С. 549 – 552.

24. Пирковська О.В. Задачі алгебри, що містять параметр // Матеріали II Всеукраїнської студентської наукової Інтернет - конференції «Новітні

інформаційні технології в освіті і науці» (10-12 квітня 2019 р.) – Переяслав-Хмельницький: ПХДПУ, 2019. – С. 68 – 71.

25. Пирковська О. В. Задачі з параметром у сертифікаційних роботах з математики // Вісник студентського наукового товариства : збірник наукових праць студентів / за заг. ред. О. В. Мельничука. – Вип. 21. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2019. – С. 32-37.

26. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики : навчально-методичний посібник. Житомир : Вид-во «Рута», 2016. 468 с.

27. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2014. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с. URL:http://ru.osvita.ua/doc/files/news/415/41573/1_math_2014_zadanie.pdf

28. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2015. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с. URL:http://ru.osvita.ua/doc/files/news/471/47111/1_ZNO_2015_math.pdf

29. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2017. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с. URL: ttp://osvita.ua/doc/files/news/558/55886/mathem_test_2017.pdf

30. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2018. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с. URL: http://osvita.ua/doc/files/news/608/60848/MatematykaOsnovne-ZNO_2018-Zoshyt_1.pdf 552

31. Сертифікаційна робота з математики. Пробне зовнішнє незалежне оцінювання 2019. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с.

32. Титаренко О. М. 5770 задач з математики. 2-ге вид., випр. – Харків: Торсінг, 2004. 336с.

33. Філон Л. Г., Дремова І. А. Формування готовності майбутнього вчителя математики до навчання учнів розв'язування задач з параметрами. УДК 378:373.5.091.12.011.3-051:51,Чернігів. 2018.

34. Янковська Н.Т. Методи розв’язування раціональних та ірраціональних рівнянь. Досвід роботи.: Огульці, 2014. 24 с.

35. Якушев А. В. Задачі з параметром. /власний досвід. Дніпро, 2010. 23 с.