Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

Застосування тригонометричних та гіперболічних функцій до розв’язування звичайних диференціальних рівнянь

Виконала: студентка II курсу магістратури
групи М-М-21
спеціальності: 014 Середня освіта
(Математика)
Дикун Тетяна Володимирівна

Керівник: доктор технічних наук, професор
Бичков О.С.

Рецензент: доктор технічних наук,
професор, завідувач кафедри прикладної
математики НУВГП
Матринюк П.М.

Рівне – 2021 року

Зміст

Розділ 1. Методи знаходження розв’язку звичайних диференціальних рівнянь 5

1.1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь 5

1.2. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь Бесселя 9

1.3. Зведення диференціальних рівнянь вищих порядків до рівнянь Бесселя 20

Розділ 2. Застосування тригонометричних та гіперболічних функцій до розв’язування звичайних диференціальних рівнянь 26

2.1. Застосування гіперболічних функцій до розв’язування звичайних диференціальних рівнянь 26

2.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів 39

2.3. Застосування степеневих рядів до розвязування рівняня Бесселя……………………………………………………………………………….....43

3.1. Відношення між тригонометричними і гіперболічними функціями... 52

3.2. Використання гіперболічних функцій для розв’язування диференціальних рівнянь 56

3.3. Використання рядів для розв’язування диференціальних рівнянь…………………………………………………………………………….....61

Висновки 66

Список використаних джерел.. 67

Вступ

Актуальність теми. Сучасна теорія диференціальних рівнянь відіграє важливу роль серед інших математичних дисциплін. Біологія, механіка, машинобудування, фізика, радіоелектроніка, хімія – це далеко не весь список наук, в яких досить часто використовуються диференціальні рівняння. Чітке та зрозуміле поєднання суто математичного й прикладного аспектів, робить її так самою цікавою як для теоретиків, так і для тих, хто використовує математику в різноманітних галузях наук.

При дослідженні явищ природи, розв’язків багатьох задач фізики та техніки, хімії та біології, інших наук – не завжди вдається безпосередньо встановити пряму залежність між величинами, що описують той чи інший еволюційний процес

Однак в більшості випадків можна встановити зв'язок між величинами (функціями) і швидкостями їх зміни відносно інших (незалежних) змінних величин, тобто знайти рівняння в яких невідомі функції містяться під знаком похідної. Такі рівняння називають диференціальними.

Своєрідність предмету теорії диференціальних рівнянь полягає в тісному зв’язку з теорією границь, теорією функцій, інтегральними та диференціальними обчисленнями, теорією рядів, та іншими розділами математики, що визначає відповідну специфіку її методу. Суть даної специфіки полягає в тому, що метод теорії диференціальних рівнянь є методом математичного аналізу[4]..

У зв’язку з цим, теорію диференціальних рівнянь не без підстав вважають подальшим узагальненням і розвитком математичного аналізу на клас неявних функцій, заданих рівняннями, що містять незалежну зміну, функцію і її похідні.

Серед багатьох підходів до розв’язування звичайних диференціальних рівнянь особливе місце займають тригонометричні та гіперболічні функції. Застосування даних функції полегшує процес розв’язування звичайних диференціальних рівнянь, сприяє розширенню знань про різні методи пошуку коренів даних рівнянь та застосування їх на практиці.

Саме тому застосування тригонометричних та гіперболічних функцій є досить доречним для даного виду рівнянь і дає можливість полегшити процес їх розв'язування, а дослідження методу є актуальним.

Метою даної роботи є детально розглянути тригонометричні, гіперболічні функції та їх застосування до знаходження розв'язку звичайних диференціальних рівнянь.

З даною метою поставлені наступні **завдання** дослідження:

- ✓ проаналізувати наявну наукову та методичну літературу з теми;
- ✓ дослідити методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь;
- ✓ дослідити інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів;
- ✓ узагальнити та систематизувати відомості про тригонометричні та гіперболічні функції;
- ✓ розробити методичні рекомендації до проведення практичних занять.

Об'єкт дослідження: звичайні диференціальні рівняння.

Предмет дослідження: застосування тригонометричних та гіперболічних функцій до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

Розділ 1. Методи знаходження розв'язку звичайних диференціальних рівнянь

1.1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь

Розв'язування різних задач з математики, фізики, хімії і інших наук часто призводять до рівнянь, що пов'язують незалежну змінну, шукану функцію та її похідні. Дані рівняння називають диференціальними.

Розв'язком диференціального рівняння (ДР) називається функція, яка при підстановці в рівняння перетворює його на тотожність. Найбільший порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається порядком цього рівняння [11]..

Наприклад, диференціальне рівняння $x^2y''' = (y'')^2$ має третій порядок, а рівняння $x^2(y - xy') = y(y')^2$ - перший порядок.

Процес пошуку розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням, графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою.

Розглянемо завдання, розв'язок якого приводить до диференціального рівняння: знайти криву, що проходить через точку (3;1), у якої відрізок будь-який її дотичної, розміщений між осями координат, ділиться навпіл у точці дотику.

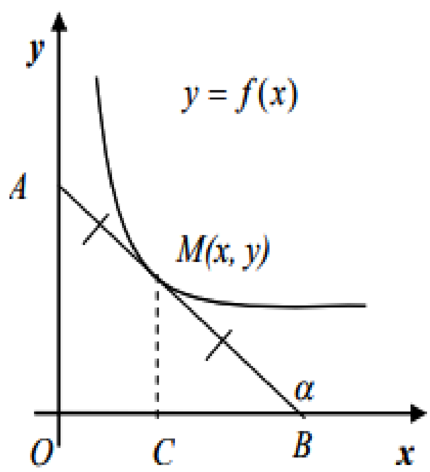

Рис. 1.1

Нехай $y = f(x)$ – рівняння шуканої кривої; $M(x; y)$ – довільна точка цієї кривої (рис. 1.1). Оскільки за умовою задачі *AM=BM* , то *OC=CB=x.* З ΔCBM: $tg\angle MBC = \frac{MC}{CB} = \frac{y}{x}$. Оскільки : $tg\angle MBC = tg(180^{\circ} - \alpha) = -tg\alpha$, то $-tg\alpha = \frac{y}{x}$. Але $tg\alpha$ - це кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в точці *M(x,y),* тобто $tg\alpha = y'(x)$. Таким чином, отримаємо $y' = -\frac{y}{x}$. Дане рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку відносно невідомої функції *y(x).* Його розв'язком є функція *y (x)*= $\frac{3}{x}$ [6].

Розглянемо більш детально диференціальне рівняння першого порядку виду:

$$F\,(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

де x – незалежна змінна; $y = y(x\,)$ – шукана функція; y' - її похідна. Іноді рівняння (1.1) можна розв'язати відносно y':

$$y' = f(x; y), \tag{1.2}$$

Рівняння (1.2) можемо записати у диференціальній формі, замінивши y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{1.3}$$

Наприклад, рівняння $y' = \frac{x^2}{y}$ можна записати у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$ або $x^2dx - ydy = 0$.

Диференціальне рівняння в загальному вигляді має безліч розв'язків. Розв'язком рівняння $y' = \cos x$ є функція *y=sin x* , а також функції *y = sin x-3, y= sin x +1,5,* і взагалі *y = sin x + c* , де *c – const* .

Щоб отримати один розв'язок диференціального рівняння, необхідно до нього застосувати деякі додаткові умови.

Умову, що функція $y(x)$ повинна бути рівна певному значенню y_0, при $x = x_0$, називається початковою умовою. Початкову умову записують у вигляді:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{або} \quad y|_{x=x_0} = y_0 \qquad (1.4)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x; y)$, що містить одну довільну сталу, яку задовольняють умови:

- функція $\varphi(x; y)$ є розв'язком диференціального рівняння при будь якому конкретному значенні сталої c ;

- яка б не була допустима початкова умова (1.4), можна знайти таке значення сталої c=c_0, що функція $y = \varphi(x; c_0)$ задовольняє даній початковій умові [19].

Частковим розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається будь-яка функція $y = \varphi(x; c_0)$, отримана із загального розв'язку $y = \varphi(x; c)$ при конкретному значенні сталої c=c_0.

З геометричної точки зору, загальний розв'язок диференціального рівняння є сімейством інтегральних кривих на площині *XOY*; частковий розв'язок – одна інтегральна крива даного сімейства, що проходить через задану точку $(x_0; \ y_0)$.

Задача відшукання часткового розв'язку диференціального рівняння першого порядку (1.2), що задовольняє початкову умову (1.4), називається задачею Коші [1].

Теорема 1.1 (існування і єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо в рівнянні $y' = f(x; y)$ функція $f(x; y)$ і її частинна похідна $f'_y(x; y)$ неперервні у деякій області, яка містить точку $(x_0; \ y_0)$., то в цій області існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, що задовольняє початковій умові $y\ (x_0) = y_0$.

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що існує єдина інтегральна крива диференціального рівняння, що проходить через точку $(x_0;\ y_0)$, якщо виконуються умови теореми.

В процесі розв'язування диференціального рівняння ми часто приходимо до співвідношення виду $\Phi\,(x, y, c) = 0$, яке неявно визначає шукану функцію $y(x)$. Така рівність називається загальним інтегралом диференціального рівняння, а рівність $\Phi\,(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{c}_0) = 0$ називається частковим інтегралом рівняння [23].

Розглянемо ще диференціальне рівняння другого порядку, яке записується у вигляді:

$$F\,(x, y, y', y'') = 0, \tag{1.5}$$

або, якщо це можливо, у вигляді, розв'язаному відносно другої похідної

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1.6}$$

Наприклад, рівняння $y'' = 6x$ є простим рівнянням другого порядку. Проінтегрувавши, отримаємо $y' = 3x^2 + c_1$. Ще раз проінтегруємо $y = x^3 + c_1 x + c_2$ – загальний розв'язок. Для відшукання констант c_1, c_2 потрібно дві умови. Їх задають у вигляді $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ і називають початковими умовами.

Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку називається функція $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, де c_1, c_2 - довільні сталі, що задовольняють умови:

- функція $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ є розв'язком диференціального рівняння при будь яких значеннях сталих c_1, c_2;
- які б не були допустимі початкові умови

$$y\,(x_0) = y_0, \qquad y'\,(x_0) = y'_0 \tag{1.7}$$

можна знайти такі єдині значення сталих c_1^0 і c_2^0, що функція $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ задовольняється даною початковою умовою.

Частковим розв'язком диференціального рівняння другого порядку називається будь-яка функція, отримана з загального розв'язку при конкретних значеннях сталих c_1, c_2.

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (1.5), що задовольняє початкові умови (1.7), називається задачею Коші [12].

Теорема 1.2 (існування і єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо в рівнянні $y'' = f(x, y, y')$ функція $f(x; y; y')$ і її частині похідні f'_y і $f'_{y'}$ неперервні у деякій області, яка містить точку $(x_0; y_0; y_0')$, то в цій області існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y'' = f(x, y, y')$, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Аналогічні поняття і визначення є для диференціальних рівнянь n-го порядку [30].

1.2. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь Бесселя

Надзвичайно цікавими для практичних досліджень є лінійні диференціальні рівняння другого порядку, які можуть бути зведені до рівняння Бесселя шляхом деяких замін з використанням аналітичних функцій.

Історично склалося так, що питання зведення тих чи інших диференціальних рівнянь до рівняння Бесселя розв'язувалися різними математиками в різний час для конкретних досліджуваних ними завдань і математичних моделей. Тому аспекти застосування нагадують зведення тих чи інших цікавих практичних результатів і деяких узагальнених окремих випадків, що приводяться до рівнянь Бесселя.

До деяких однорідних та неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку можуть приводити як математичні моделі одновимірних фізичних процесів, так і застосування метода відокремлення змінних у рівняннях математичної фізики з частинними похідними. Загальний вигляд таких диференціальних рівнянь у більшості випадків не свідчить про те, що вони можуть (або не можуть) зводитись до добре вивченого випадку – рівняння Бесселя, і мати розв'язок, що виражається через елементарні і циліндричні функції. Тому було зроблено узагальнення критерій застосування однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до рівняння Бесселя [37].

Розглянемо загальний випадок зведення двох лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Теорема 1.2 (Критерій звідності). Однорідне диференціальні рівняння виду:

$$F_2(x)z''(x) + F_1(x)z'(x) + F_0(x)z(x) = 0 \tag{1.8}$$

можна звести до рівняння виду:

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0 \tag{1.9}$$

з використанням аналітичних замін виду:

$$u(x) = exp\,(\int^x U(\xi)d\xi)z(x) \tag{1.10}$$

де

$$U(x) = (E(x) - Q(x))/2, \tag{1.11}$$

$$E(x) = F_1(x)/F_2(x) \quad \text{і} \quad H(x) = F_0(x)/F_2(x),$$

якщо виконується умова:

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = H(x) - G(x). \tag{1.12}$$

Доведення

Рівняння Бесселя є окремим випадком більш загального випадку, що розглядається.

Розглянемо диференціальне рівняння (1.8). Поділивши його праву частину на невироджений потенціал при другій похідній, зведемо це рівняння до більш зручного вигляду:

$$z''(x) + E(x)z'(x) + H(x)z(x) = 0 \tag{1.13}$$

Припустимо, що аналітична заміна, що пов'язує розв'язок рівняння (1.13) та рівняння (1.9), існує і може бути подана у вигляді:

$$u(x) = A(x)z(x). \tag{1.14}$$

Підставимо заміну в рівняння (1.9):

$$0 = A(x)z''(x) + \ 2A'(x)z'(x) + \ A''(x)z(x) +$$

$$+Q(x)\big(A'(x)z(x) + A(x)z'(x)\big) + G(x)A(x)z(x).$$

Помножимо рівняння (1.13) на *P(x)*:

$$0 = A(x)z''(x) + E(x)A(x)z'(x) + H(x)A(x)z(x).$$

Тотожна рівність отриманих рівнянь забезпечується тотожною рівністю потенціалів при кожній похідній:

$$\begin{array}{r|c} z''(x) & A(x) = A(x) \\ z'(x) & E(x)A(x) = 2A'(x) + Q(x)A(x) \\ z(x) & H(x)A(x) = A''(x) + Q(x)A'(x) + G(x)A(x) \end{array} \tag{1.15}$$

Елементарне диференціальне рівняння першого порядку при першій похідній функції дозволяє відразу записати загальний вигляд для заміни:

$$A'(x)\ /A(x) = \big(\ E(x) - Q(x)\big)\ /2. \tag{1.16}$$

Проінтегрувавши отриманий вираз та ввівши для зручності нове позначення (1.11), ми отримаємо потенціал для загального виду заміни (1.10)

$$A(x) = e^{\int^{x}\frac{E(\xi)-Q(\xi)}{2}d\xi} \ = e^{\int^{x} U(\xi)d\xi}.$$

Отримана із (1.15) тотожність при нульовій похідній функції дає можливість точно описати умови і отримати чіткі критерії, при яких перетворення одного диференціального рівняння другого порядку в інше можливо. Скористаємося тим, що

$$A'(x) = U(x)A(x) \quad \text{та} \quad A''(x) = \big(U'(x) + U^2(x)\big)A(x).$$

Підставимо значення потенціалу заміни (1.11) і його похідних в друге рівняння і спростимо:

$$H(x) = U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) + G(x).$$

Таким чином, отримали необхідні умови існування заміни [16].

Наслідок 1. Звичайне рівняння Бесселя

$$x^2z''(x) + xz'(x) + (x^2 - \nu^2)z(x) = 0$$

зводиться до рівняння Штурма-Ліувілля виду

$$y''(x)-\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{x^2}y(x)=-y(x) \qquad (1.17)$$

за допомогою заміни: $y(x)=x^{\frac{1}{2}}\,z(x)$

Доведення

У теоремі, наведеній вище, операції проводяться над деякими абстрактними функціями. В конкретних прикладах можуть бути відомі деякі потенціали одного чи двох диференціальних рівнянь. У даному випадку нам відомо значення наступних потенціалів (в позначеннях теореми):

$$Q(x)=0 \text{ в рівнянні (1.10) Штурма} - \text{Ліувілля,}$$

$$E(x)=\frac{1}{x}\ \text{ і } H(x)=(x^2-\nu^2)/x^2\ \text{ для (1.18).}$$

Потенціал та загальний вигляд заміни, відповідно до співвідношень (1.17) та (1.18), можна отримати за формулами:

$$U(x)=\frac{E(x)-Q(x)}{2}=\frac{1}{2}x,$$

$$y(x)=z(x)\,e^{\int^x U(\xi)d\xi}=x^{\frac{1}{2}}z(x).$$

Встановимо значення потенціалу при нульовій похідній для рівняння Штурма-Ліувілля, скориставшись співвідношенням (1.12) для рівняння

$$y''(x)+G(x)y(x)=0.$$

Звідси $G(x)=-U'(x)-U^2(x)-Q(x)U(x)+H(x)$ або $G(x)=1-\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{x^2}$.

Таким чином, доведено існування заміни між двома розглянутими рівняннями.

Наслідок 2. До класичного рівняння Бесселя

$$x^2z''(x)+xz'(x)+(x^2-\nu^2)z(x)=0$$

зводиться диференціальне рівняння виду:

$$u''(x)+Q(x)u'(x)+G(x)u(x)=0$$

з використанням аналітичної заміни виду:

$$u(x)=z(x)e^{\int^x U(\xi)d\xi},$$

де

$$U(x) = \frac{\frac{1}{x} - Q(x)}{2} \tag{1.19}$$

і існує така константа $\nu \geq 0$ (індекс), що тотожно виконується умова:

$$U'(x) + U^2(x) + Q(x)U(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2} - G(x). \tag{1.20}$$

Для отримання цього наслідку ми замінили абстрактне рівняння (1.8) на конкретне класичне рівняння Бесселя в позначеннях теореми 1.2.

Наслідок 2 надає критерії, за якими виконується перевірка звідності деякого лінійного диференціального рівняння другого порядку (1.9) до рівняння Бесселя. Необхідно отримати потенціал (1.19), підставити у рівняння (1.9) цей потенціал і потенціали рівняння, що перевіряється. Якщо вдасться підібрати таку константу ν, при якій умова (1.20) тотожно виконується, це означає, що рівняння яке перевіряється можна відразу звести до рівняння Бесселя за допомогою аналітичної заміни [25]..

Наслідок 3. Якщо два диференціальних рівняння можна звести до одного й того самого третього диференціального рівняння, використовуючи зведення теореми 1.2, це означає, що ці два рівняння можна звести одне до одного і заміна (1.10) існує.

Доведення є природним наслідком критерія лінійності (1.12) та інших властивостей перетворень, що застосовувались у теоремі 1.2. В деяких випадках використання цього наслідку може бути зручним.

У загальному випадку, який є наслідком теореми 1.2, можна сформулювати наступне: якщо для двох диференціальних рівнянь виду (1.9) і (1.13) існує пара таких змінних, які дозволяють звести ці два диференціальні рівняння до одного й того ж самого однорідного диференціального рівняння другого порядку, це означає, що два рівняння можуть бути зведені одне до одного із застосуванням заміни теореми. Даний критерій може полегшити дослідження деяких класів диференціальних рівнянь.

Наслідок 4. Будь яке не вироджене диференціальне рівняння другого порядку виду:

$$u''(x) + \; Q(x)u'(x) + \; G(x)u(x) = 0$$

може бути зведено до рівняння виду:

$$\varphi''(x) + \; q(x)\varphi(x) = 0 \tag{1.21}$$

за допомогою заміни виду:

$$u(x) = \varphi(x)e^{-\int^{x}\frac{Q(\xi)}{2}d\xi}\,, \tag{1.22}$$

де

$$q(x) = G(x) - \frac{Q'(x)}{2} - \frac{Q^2(x)}{4}. \tag{1.23}$$

Будь-яке невироджене однорідне диференціальне рівняння другого порядку може бути єдиними чином зведено до рівняння з нульовим потенціалом при першій похідній з точністю до константи (через однорідність).

При побудові рекурентних співвідношень і асимптотичних наближень ми скористалися зведенням рівняння Бесселя до деяких рівнянь виду (1.21) з нульовим потенціалом при першій похідній і потенціалом

$$q(x) = \frac{\frac{1}{4} - \nu^2 + x^2}{x^2}. \tag{1.24}$$

Якщо однорідне диференціальне рівняння також може бути зведене до того ж самого рівняння, це означає, що воно зводиться і до рівняння Бесселя.

В ряді практичних прикладів застосування двох рівнянь теореми 1.2 може виявитися недостатньо. Дуже популярним та практичним методом є метод заміни змінних в тому рівнянні, розв’язок якого завчасно відомий (для отримання більш складних розв’язків) або в рівнянні, котре потрібно звести до більш тривіального [22]..

Теорема 1.3 (Заміна змінних). Однорідне диференціальне рівняння другого порядку виду :

$$z''(x) + \; E(x)z'(x) + \; H(x)z(x) = 0$$

може бути зведено до рівняння виду:

$$\omega''(\zeta) + \; P(\zeta)\omega'(\zeta) + \; S(\zeta)\omega(\zeta) = 0$$

за допомогою заміни змінних виду:

$$x = \psi(\zeta), \qquad z(x) = z\big(\psi(\zeta)\big) = \omega(\zeta), \tag{1.25}$$

$$P(\zeta) = E\big(\psi(\zeta)\big)\psi'(\zeta) - \frac{\psi''(\zeta)}{\psi'(\zeta)}, \tag{1.26}$$

$$S(\zeta) = H\big(\psi(\zeta)\big)(\psi'(\zeta))^2. \tag{1.27}$$

Доведення

Поетапно виконаємо заміну змінних і розрахунок нових диференціалів, після чого підставимо отримані дані у друге рівняння і отримаємо значення потенціалів.

$$z(x) = z\big(\psi(\zeta)\big) = \omega(\zeta),$$

$$z'(x) = \frac{dz(x)}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} \cdot \frac{dz\big(\psi(\zeta)\big)}{d\zeta} = \frac{\omega'(\zeta)}{\psi'(\zeta)},$$

$$z''(x) = \frac{dz'(x)}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} \cdot \frac{d}{d\zeta} \cdot \left(\frac{\omega'(\zeta)}{\psi'(\zeta)}\right) = \frac{\omega''(\zeta)\psi'(\zeta) - \omega'(\zeta)\psi''(\zeta)}{\big(\psi'(\zeta)\big)^3}.$$

Підставимо отримане відношення в рівняння (1.13).

Теорему доведено.

При використанні теореми 1.3 і її формул необхідно пам’ятати, що перед проведенням будь-яких розрахунків пару диференціальних рівнянь зводять до наступного вигляду – потенціал при другій похідній в двох рівняннях повинен бути тотожно рівний одиниці.

Окремий інтерес представляє детальний розгляд класичного рівняння Бесселя, для якого потенціали набувають таких значень:

$$E(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{і} \qquad H(x) = \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}.$$

Наслідок 1. Диференцільне рівняння виду

$$\zeta^2\omega''(\zeta) + \zeta\omega'(\zeta) + (a^2\zeta^2 - \nu^2)\omega(\zeta) = 0 \tag{1.28}$$

може бути зведено до класичного рівняння Бесселя з використанням заміни змінних:

$$x^2 z''(x) + xz'(x) + (x^2 - \nu^2)z(x) = 0,$$

$$x = a\zeta,$$

де a - деяка дійсна, уявна або комплексна константа і функція $\omega(\zeta) = z(a\zeta) -$ розв’язок рівняння (1.28).

Доведення цього простого твердження проводиться підстановкою розглянутої лінійної заміни в рівняння Бесселя або користуючись теоремою 1.3.

При використанні дійсної константи хвильові властивості фундаментальних розв'язків рівняння Бесселя зберігаються, при використанні суто уявної константи – зникають, фундаментальний розв'язок модифікованого рівняння Бесселя існують, мають дійсні значення та є монотонними [32]..

Наслідок 1 є досить поширеним та зручним у використанні, завжди звідним до рівняння Бесселя окремим випадком теореми 1.3.

Найбільш поширеним методом практичного зведення рівнянь одного виду до рівнянь другого виду – зокрема, зведення до класичного рівняння Бесселя, є комбінація двох методів – метода зведення для базового рівняння і методу заміни змінних для рівняння Бесселя.

Ціль такого дослідження – отримати розв'язок деякого рівняння з використанням фундаментальних розв'язків рівняння Бесселя – функцій Бесселя, Неймана та інших добре відомих окремих випадків.

Зведення до розв'язку, вираженого за допомогою фундаментальних розв'язків рівняння Бесселя, здійснюється у два етапи – через перехід до іншого рівняння і заміни змінних. Зауважимо, що якщо заміна змінних, яку потрібно здійснити, дуже складна і неочевидна, то практична цінність такого зведення до рівняння Бесселя чи іншого рівняння невелика [29].

Зазвичай у задачах про зведення одного диференціального рівняння до іншого відомі всі потенціали рівняння – як початкового, так і бажаного результуючого (можливо, з точністю до числових коефіцієнтів, що містяться у потенціалах). Найбільш важким є визначення загального виду функцій, що входять у співвідношення замін, які зводять одне рівняння до іншого.

Наведемо приклад, яким чином можна комбінувати застосування висновків двох теорем.

Найпростішим випадком застосування, розглянутим в літературі, є диференціальне рівняння виду:

$$u''(x) - c^2 u(x) = u(x)\left(\frac{p(p+1)}{x^2}\right), \tag{1.29}$$

де с, р – деякі константи.

В позначеннях теореми 1.2, яка застосовується на першому етапі, потенціали рівняння мають вигляд:

$$Q(x) = 0 \quad \text{і} \quad G(x) = -c^2 - \frac{p(p+1)}{x^2}. \tag{1.30}$$

Звідси $U(x) = \frac{1}{2}x$ та $u(x) = x^{\frac{1}{2}} z(x)$. Не застосовуючи другу умову теореми 1.2, відразу розглянемо отримане рівняння і застосуємо теорему 1.3 до проміжного результату. Підставимо заміну змінних в отримане рівняння:

$$x^2 z''(x) + xz'(x) - \left(\mathrm{c}^2 x^2 + \left(p + \frac{1}{2}\right)^2\right) z(x) = 0$$

або перепишемо його, ввівши уявну одиницю:

$$x^2 z''(x) + xz'(x) - \left((ic)^2 x^2 + \left(p + \frac{1}{2}\right)^2\right) z(x) = 0.$$

Дане рівняння не є класичним рівнянням Бесселя, але дуже близьке до нього. Якщо застосувати лінійну заміну змінних, використовуючи комплексні числа та уявну одиницю, позначивши нову змінну

$$\chi = icx$$

і поклавши

$$\nu = p + \tfrac{1}{2},$$

отримаємо класичне рівняння Бесселя.

Загальний розв’язок рівняння (1.22) має вид:

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} Z_\nu(icx), \quad \text{де } \nu = p + \frac{1}{2}. \tag{1.31}$$

На розглянутому прикладі було показано, що для зведення деякого рівняння до рівняння Бесселя використання одних формул теореми 1.2 і її другого наслідку може виявитися недостатньо. Але теорема 1.2 і її наслідок 2 дозволяють відразу отримати загальний вигляд заміни, яка може виявитися неочевидною.

Заміна (1.17) може звести розглянуте рівняння (1.9) до рівняння Бесселя (достатня умова), але не забезпечує необхідними умовами існування такого переходу (вона описує тільки один із можливих критеріїв). Однак у деяких випадках заміна (1.17) забезпечує перехід до рівняння, яке методом заміни змінних зводиться до класичного рівняння Бесселя, розв'язок якого може бути виражено через циліндричні функції.

В розглянутому прикладі (1.29) було зроблено перехід від дійсної змінної до суто уявної. Відомо, що ці функції мають дійсне значення при суто уявних значеннях змінної і не проявляють ніяких хвильових властивостей. Вони поводять себе особливим чином [2].

В якості ще одного прикладу зведення диференціальних рівнянь до рівняння Бесселя розглянемо рівняння, які детально вивчались Ломмелем.

Ломмелем був отриманий загальний клас рівнянь, розв'язки якого можуть бути виражені через функції Бесселя, в якості параметрів яких використовуються деякі інші функції. Розв'язок було отримано в два етапи з використанням заміни змінних в деякому рівнянні, яке було зведено до рівняння Бесселя і розв'язок якого виражається через функції Бесселя.

Ломмель показав, що загальним розв'язком класу диференціальних рівнянь

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0,$$

де

$$Q(x) = \frac{2\alpha - 2\beta\nu + 1}{x} \quad \text{і} \quad G(x) = \frac{(\beta^2\gamma^2x^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\beta\nu))}{x^2}$$

буде $u(x) = x^{\beta\nu-\alpha}Z_\nu(\gamma x^\beta)$.

В наведеному прикладі Ломмелем було здійснено не тільки перехід від одного диференціального рівняння до іншого, але і виконана аналітична заміна змінних в рівнянні Бесселя. Ломмелем було досліджено цілий клас рівнянь з важкими потенціалами, звідних до рівнянь Бесселя [7].

Ломмелю належать детальні результати дослідження, які описують певний клас диференціальних рівнянь.

Він встановив, що якщо $Z_\nu(x)$ – деякі розв'язки рівняння Бесселя, то наступна функція:

$$u(x) = \chi(x)\big(\psi(x)\big)^{\nu} Z_\nu\big(\psi(x)\big) \tag{1.32}$$

є розв'язком рівняння виду

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0, \tag{1.33}$$

де

$$Q(x) = -\left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} + \frac{(2\nu-1)\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{2\chi'(x)}{\chi(x)}\right),$$

$$G(x) = \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} + \frac{(2\nu-1)\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{2\chi'(x)}{\chi(x)}\right)\frac{\chi'(x)}{\chi(x)} - \frac{\chi''(x)}{\chi(x)} + (\psi'(x))^2.$$

Ломмель вивчив цікавий окремий випадок застосування вузького, але часто застосовуваного на практиці класу диференціальних рівнянь другого порядку, звідних до рівнянь Бесселя. Виведення цих складних формул досить очевидне.

Для того, щоб отримати ці узагальнені рівняння, Ломмель розглянув більш просте рівняння виду:

$$\omega''(\psi) - \frac{2p\omega'(\psi)}{\psi} - c^2\omega(\psi) = 0.$$

Його розв'язок

$$\omega(\psi) = \psi^{p+\frac{1}{2}} Z_{p+\frac{1}{2}}(ic\psi),\ \ 2p = 2\nu - 1\,,$$

де $2p = 2\nu - 1$ – значення індексу, $\omega = \frac{u(\psi)}{\chi(\psi)}$ і $\psi = \psi(x)$ – використовувані заміни.

Прямою підстановкою наведених замін були отримані узагальнені формули Ломмеля (1.32) і (1.33).

Основна складність цієї задачі полягає в тому, щоб визначити чи задовольняє деяке аналізоване диференціальне рівняння умовам Ломмеля і чи може воно бути зведене до рівняння Бесселя за допомогою заміни (1.32), коли ні загальний вид функції (1.33), ні значення індексу ν для нього невідомі.

На сьогоднішній день це найбільш повний та практично цікавий результат зведення рівняння Бесселя до деякого класу диференціальних рівнянь. Існують таблиці зведених функцій та замін.

Перетворення Ломмеля дозволяє за допомогою зручних для практичного застосування функцій представити достатньо широкий клас розв'язків практичних задач з використанням функцій Бесселя [35].

Дослідження можливостей зведення деякого диференціального рівняння другого порядку до рівняння Бесселя проводиться з двох сторін, використовуючи проміжне диференціальне рівняння:

- використовується заміна змінних і теорема 1.3 для зведення рівняння Бесселя до деякого рівняння, розв'язок якого виражається через функції Бесселя;
- застосовується теорема 1.2, що зводить отримане проміжне рівняння до того рівняння, дослідження якого ми робимо, і оцінюються критерії існування такої заміни [21]..

1.3. Зведення диференціальних рівнянь вищих порядків до рівнянь Бесселя

Розглянемо узагальнений диференціальний оператор:

$$\mathcal{D}f(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)f(x). \tag{1.34}$$

Тоді розглянуте у підрозділі 1.2 диференціальне рівняння

$$u''(x) + Q(x)u'(x) + G(x)u(x) = 0,$$

яке зводиться до рівняння Бесселя, з використанням оператора (1.34) може бути записане у вигляді:

$$(\mathcal{D} + \alpha)(\mathcal{D} + \alpha - 2\beta\nu)u(x) + \beta^2\gamma^2x^{2\beta}u(x) = 0.$$

Його розв'язок

$$u(x) = x^{\beta\nu-\alpha}Z_\nu\left(\gamma x^\beta\right).$$

Ломмель і Ватсон узагальнили отримане рівняння, отримавши розв'язок цілого класу диференціальних рівнянь вищих порядків:

$$\prod_{k=0}^{n-1}((\mathcal{D}+\alpha-2\beta k)(\mathcal{D}+\alpha-2\beta k-2\beta\nu)u(x)=(-1)^n\beta^{2n}\gamma^{2n}x^{2n\beta}u(x). \quad (1.35)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$u(x)=x^{\beta\nu-\alpha}Z_\nu(\gamma x^\beta), \quad (1.36)$$

де

$$\gamma=ce^{\frac{ik\pi}{n}}$$

для $k=1\dots n$.

Отримані розв'язки утворюють фундаментальну систему. Ми можемо отримати окремі випадки – наприклад диференціальне рівняння четвертого і більш високого парного порядку.

До диференціальних рівнянь вищих порядків часто приводить метод відокремлення змінних в прикладних задачах математичної фізики. Розглянемо диференціальне рівняння четвертого порядку, яке описує поперечні коливання конічного стрижня:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\zeta^4\frac{d^2u}{d\zeta^2}\right)=\zeta^2u(\zeta). \quad (1.37)$$

Якщо виконати заміну змінних $x=2\zeta^{\frac{1}{2}}$ і позначити $\xi^2u(\xi)=z(x)$, то рівняння четвертого порядку (1.37) може бути зведене до системи двох рівнянь Бесселя:

$$z''(x)+\frac{1}{x}z'(x)\pm z(x)-\frac{4}{x^2}z(x)=0. \quad (1.38)$$

Розглянемо найбільш загальний випадок зведення лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків до рівняння Бесселя, скориставшись результатами, отриманих в попередньому підрозділі. Очевидно, що до рівняння Бесселя можуть зводитися диференціальні рівняння старшого порядку з парною старшою похідною [20].

Для цього розглянемо узагальнений диференціальний оператор (1.34) і вивчимо його властивості більш детально. Розглянемо зведення різних диференціальних рівнянь до загального виду з використанням оператора (1.34).

Щоб розглянути узагальнений диференціальний оператор вищих порядків, запишемо наступне:

$$\prod_{k=1}^{n}(\mathcal{D}+\alpha_k)=\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}^k S_{n-k}, \tag{1.39}$$

де

$$S_0=1\,,\quad S_1=a_1+\cdots+a_n,\quad S_n=a_1\ldots a_n,$$

$$S_k=\sum_{0}^{n-k}a_{i1}\ldots a_{ik}$$

для всіх індексів $ip\neq il$.

Розглянемо узагальнений диференціальний оператор другого порядку і отримаємо вираз в явному записі:

$$(\mathcal{D}+a_1)(\mathcal{D}+a_2)=\left(x\frac{d}{dx}+a_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+a_2\right)=x^2\frac{d^2}{dx^2}+x(a_1+a_2+1)\frac{d}{dx}\ +a_1a_2. \tag{1.40}$$

Звідси можемо отримати окремий випадок:

$$(\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)=x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}-\nu^2. \tag{1.41}$$

Рівняння Бесселя можна представити у вигляді:

$$(\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)z(x)+x^2z(x)=0. \tag{1.42}$$

Диференціальне рівняння вищого порядку, яке може бути зведене до рівняння Бесселя, повинно бути зведене до наступного виду:

$$\prod_{k=1}^{n}((\mathcal{D}+\nu_k)(\mathcal{D}-\nu_k)+x^2)z(x)=0. \tag{1.43}$$

Фундаментальною системою розв’язків рівняння виду (1.43) є лінійно-незалежні функції $z_{\pm k}(x)$.

Це справедливо, оскільки виконується тотожність:

$$((\mathcal{D}+\nu_k)(\mathcal{D}-\nu_k)+x^2)z_{\pm k}(x)=0 \tag{1.44}$$

для кожного значення параметра $k=1\ldots n$.

Для того, щоб лінійні диференціальні рівняння вищого порядку дослідити на звідність до класичного рівняння Бесселя, ці рівняння необхідно звести до виду (1.43).

Далі необхідно виділити пари лінійних операторів, добутки яких зводять до класичного рівняння Бесселя (1.44).

Наприклад, диференціальне рівняння четвертого порядку може бути зведено до двох незалежних рівнянь Бесселя, шостого порядку – до трьох рівнянь.

Таким чином, загальний розв’язок диференціального рівняння вищого порядку може бути представлено лінійною комбінацією часткових розв’язків рівняння Бесселя, до яких було зведено диференціальне рівняння.

Диференціальні рівняння другого порядку достатньо часто зустрічаються в прикладних задачах математичної фізики.

Питання зведення лінійних диференціальних рівнянь другого порядку до рівняння Бесселя вже розглядалися і вже представляли певну складність. Зведення рівнянь вищого порядку – ще більш важкий та копіткий процес [27].

В задачах математичної фізики можуть зустрічатися лінійні диференціальні рівняння четвертого порядку – наприклад, вони задають опис характеристик міцності, складні коливання і т.д. Заходження аналітичних розв’язків таких рівнянь є достатньо важким.

Отримання аналітичних розв’язки диференціальних рівнянь шостого порядку і вище на практиці виявляється вкрай складним – або розглянуті рівняння аналітично зводяться до рівняння меншого порядку, або для їх розв’язування використовуються чисельні методи і комп’ютерні обчислення.

Загальний розв’язок диференціальних рівнянь вищих порядків можна аналогічно шукати в загальному виді:

$$u(\zeta) = A(\xi) \sum_{k=1}^{n} c_{k1} z_k\big(\psi(\xi)\big) + c_{k2} z_{-k}\,\big(\psi(\xi)\big), \qquad (1.45)$$

де $z_{\pm k}(x)$ – пари лінійно-незалежних розв’язків рівняння Бесселя з індексами ν_k.

Розглянемо окремий випадок диференціальних рівнянь – рівняння четвертого порядку, загальний розв’язок якого можна представити через дві пари лінійно-незалежних розв'язків рівняння Бесселя дійної і суто уявної змінної одного індексу.

$$((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)+x^2)z(x)=0,$$
$$((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)-x^2)z(x)=0, \tag{1.46}$$
$$z(x)=c_1J_\nu(x)+c_2N_\nu(x)+c_3I_\nu(x)+c_4K_\nu(x).$$

Диференціальне рівняння четвертого порядку, розв'язок якого може бути представлено таким чином, згідно (1.43) записується у вигляді:

$$\big((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)+x^2\big)\big((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)-x^2\big)z(x)=0,$$
$$(\mathcal{D}^4-2\nu^2\mathcal{D}^2+\nu^4-x^4)z(x)=0. \tag{1.47}$$

Випишемо степені диференціального оператора:

$$\mathcal{D}^2=x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}, \tag{1.48}$$

$$\mathcal{D}^3=x^3\frac{d^3}{dx^3}+3x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}, \tag{1.49}$$

$$\mathcal{D}^4=x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+7x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}. \tag{1.50}$$

Після зведення отримаємо наступне диференціальне рівняння достатньо складного вигляду:

$$x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+x^2(7-2\nu^2)\frac{d^2}{dx^2}+x(1-2\nu^2)\frac{d}{dx}+\nu^4-x^4)z(x)=0.[31]$$

Аналогічно можна розглянути випадок, коли індекс одного рівняння Бесселя, що відповідає дійсній змінній, не рівний індексу другого рівняння Бесселя, що відповідає суто уявній змінній:

$$z(x)=c_1J_{\nu1}(x)+c_2N_{\nu1}(x)+c_3I_{\nu2}(x)+c_4K_{\nu2}(x),$$
$$\big((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)+x^2\big)\big((\mathcal{D}+\nu)(\mathcal{D}-\nu)-x^2\big)z(x)=0,$$
$$(\mathcal{D}^4-(\nu_1^2+\nu_2^2)\mathcal{D}^2+\nu_1^2\nu_2^2+x^2(\nu_1^2-\nu_2^2)-x^4)z(x)=0. \tag{1.51}$$

Після зведення отримаємо наступне диференціальне рівняння достатньо складного виду:

$$x^4\frac{d^4}{dx^4}+6x^3\frac{d^3}{dx^3}+x^2\big(7-(\nu_1^2+\nu_2^2)\big)\frac{d^2}{dx^2}+x\big(1-(\nu_1^2+\nu_2^2)\big)\frac{d}{dx}+\nu_1^2\cdot$$
$$\cdot\,\nu_2^2+x^2(\nu_1^2-\nu_2^2)-x^4)z(x)=0.$$

Його можна переписати у вигляді:

$$\left(\frac{d^4}{dx^4}+\frac{6}{x}\frac{d^3}{dx^3}+\frac{7-\left(\nu_1^2+\nu_2^2\right)}{x^2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1-\left(\nu_1^2+\nu_2^2\right)}{x^2}\frac{d}{dx}+\frac{\nu_1^2\nu_2^2}{x^4}+\frac{\nu_1^2-\nu_2^2}{x^2}-1\right)z(x)=0.$$

Варіант, коли розв'язок рівняння четвертого порядку може бути представлений тільки через функції дійсної або суто уявної змінної, розглядається аналогічно. Однак, в практичних задачах математичної фізики випадки (1.47) та (1.51) зустрічаються частіше [35].

Розділ 2. Застосування тригонометричних та гіперболічних функцій до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь

2.1. Застосування гіперболічних функцій до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь

Гіперболічні функції – це сімейство елементарних функцій, які виражаються через експоненту і тісно пов'язані з тригонометричними функціями.

Функції $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ і $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ називаються відповідно гіперболічним косинусом або гіперболічним синусом і позначаються символами $ch\,x$ та $sh\,x$:

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Гіперболічний тангенс та гіперболічний котангенс визначаються відповідно формулами

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \;.$$

Із визначення гіперболічних функцій слідує, що гіперболічний косинус, гіперболічний синус, гіперболічний тангенс задані всій числовій осі, а гіперболічний котангенс визначений всюди на числовій осі, за винятком точки $x = 0$.

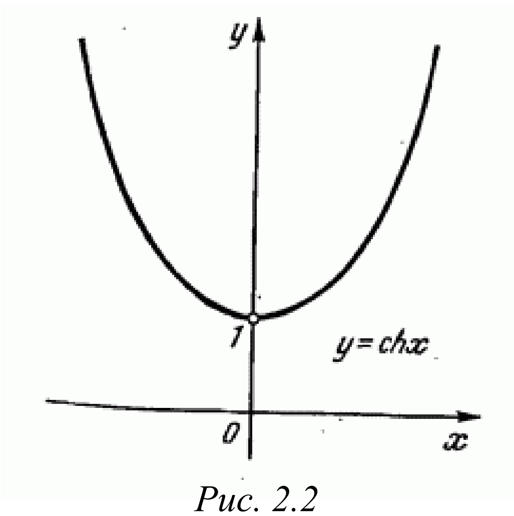

Рис. 2.2

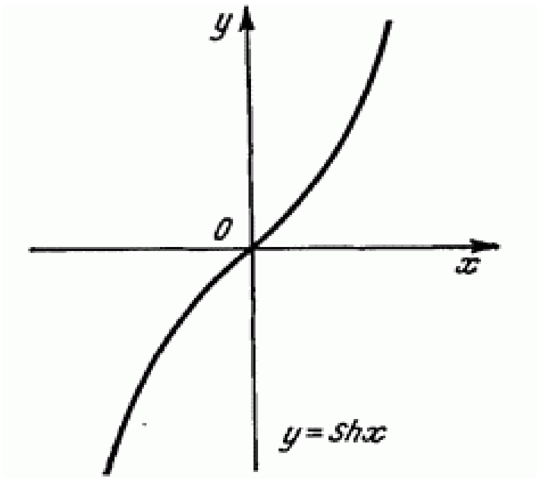

Рис. 2.3

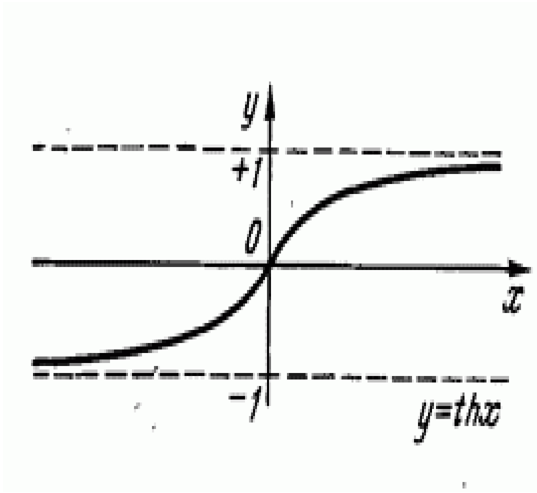

Рис. 2.4

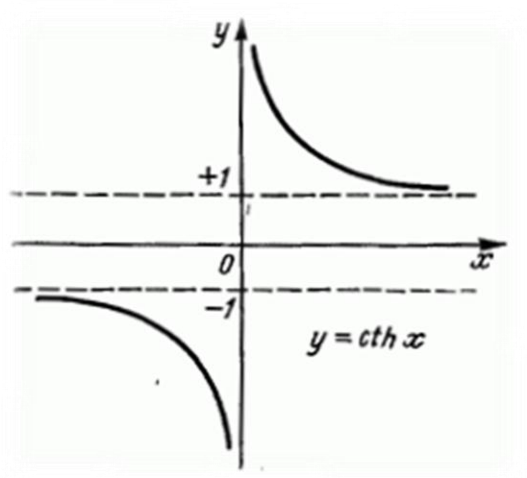

Рис. 2.5

Гіперболічні функції неперервні у кожній точці області їх визначення. Гіперболічні функції мають ряд властивостей, аналогічних властивостям тригонометричних функцій:

$$sh(x+y) = sh\, x \cdot ch\, y + ch\, x \cdot sh\, y,$$

$$ch(x+y) = ch\, x \cdot ch\, y + sh\, x \cdot sh\, y.$$

Безпосередньо також перевіряють формули

$$sh2x = 2sh\, x \cdot ch\, x,$$

$$ch^2\, x - sh^2\, x = 1.$$

Епітет, що пов'язаний зі словом «гіперболічні» пов'язано з тією обставиною, що рівності $x = a \cdot ch\, t,\ y = a \cdot sh\, t$ задають гіперболу, подібно тому, як рівності $x = a \cdot cos\, t,\ y = a \cdot \sin t$ задають коло. Дійсно, в першому випадку очевидно, що ми отримаємо $x^2 - y^2 = a^2$, тобто ріння гіперболи, $x^2 + y^2 = a^2$ – рівняння кола $[36, \text{ст.} 152 - 154]$.

Гіперболічні функції також знаходять застосування і при інтегруванні деяких диференціальних рівнянь. В процесі інтегрування рівнянь можна отримати квадратури, які порівняно легко обраховуються за допомогою гіперболічних підстановок, розв'язок багатьох диференціальних рівнянь, зокрема лінійних, зручно виразити через гіперболічні функції. При цьому значно скорочуються викладки і самі розв'язки отримуються в більш компактній формі. Крім того, гіперболічні підстановки дають можливість іноді спростити диференціальні рівняння, зводячи їх до легко інтегрованих видів [9].

Розглянемо декілька прикладів на відшукання розв'язків диференціального рівняння, в першу чергу лінійно однорідні та неоднорідні рівняння 2-го та 4-го порядку зі сталими коефіцієнтами, які найбільш часто зустрічаються на практиці.

Приклад 1. $y'' - a^2 y = 0.$

Це однорідне лінійне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $r^2 - a^2 = 0$ має корені $r_1 = a$ і $r_2 = -a$. Тому частковими розв'язками будуть показникові функції e^{ax} і e^{-ax}, а також їх лінійні комбінації. Приймемо в якості часткових розв'язків півсуми і піврізниці показникових функцій $y_1 = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2} = ch\, ax$ та $y_2 = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} = sh\, ax.$ Легко впевнитися в лінійній незалежності цих часткових розв'язків. Для цього складемо і обчислимо визначник Вронського:

$$W[y] = \begin{vmatrix} ch\, ax & sh\, ax \\ a\, sh\, ax & a\, ch\, ax \end{vmatrix} = a(ch^2 ax - sh^2 ax) = a \neq 0.$$

Так як $W[y] \neq 0$, то наші часткові розв'язки утворюють фундаментальну систему і загальний розв'язок можемо записати у виді:

$$y = C_1\, ch\, ax + C_2\, sh\, ax.$$

Якщо встановити початкові умови $y = 1$ і $y' = 0$ при $x = 0$, то, підставивши спочатку значення x і y в загальний розв'язок, отримаємо $C_1 = 1$, а знайшовши похідну $y' = a\, C_1 sh\, ax + a\, C_2 ch\, ax$ і підставивши в неї значення x і y', отримаємо $C_2 = 0$, і, таким чином, частковий розв'язок виражається через гіперболічний косинус $y = ch\, ax$.

Якщо змінити початкові умови, припустивши $y = 0$ і $y' = 1$ при $x = 0$, то в якості часткового розв'язку отримаємо гіперболічний синус $y = sh\, ax$.

Приклад 2. $y'' + a^2 y = f(x)$.

Це неоднорідне лінійне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Для відшукання його загального розв'язку застосуємо метод варіації сталих. З цією цілю знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (приклад 1):

$$y = C_1 ch\, ax + C_2 sh\, ax$$

і, вважаючи, що $C_1 = C_1(x)$ і $C_2 = C_2(x)$, підберемо ці функції таким чином, щоб функція $y = C_1(x) ch\, ax + C_2(x) sh\, ax$, задовольняла нашому неоднорідному рівнянню. Оскільки ми варіюємо обидві довільні сталі, а накладаємо тільки одну цю умову, то можемо ввести ще одну умову, наприклад зажадати, щоб вираз першої похідної, обчислений при змінних $C_1(x)$ і $C_2(x)$ мав такий ж вигляд, як і при сталих C_1 і C_2. Так як

$$y' = aC_1(x) sh\, ax + aC_2(x) ch\, ax + C_1'(x) ch\, ax + C_2'(x) sh\, ax,$$

то ця умова зводиться до наступного рівняння відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) ch\, ax + C_2'(x) sh\, ax = 0$$

і, таким чином,

$$y' = aC_1(x)sh\,ax + aC_2(x)ch\,ax.$$

Знайдемо другу похідну:

$$y'' = a^2C_1(x)ch\,ax + a^2C_2(x)sh\,ax + aC_1'(x)sh\,ax + aC_2'(x)ch\,ax.$$

Вираз функції y і похідної y'' через x підставимо в початкове рівняння. Після нескладних алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$C_2'(x)sh\,ax + C_2'(x)ch\,ax = \frac{f(x)}{a}.$$

Отже, ми маємо систему з двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)ch\,ax + C_2'(x)sh\,ax = 0, \\ C_2'(x)sh\,ax + C_2'(x)ch\,ax = \dfrac{f(x)}{a}. \end{cases}$$

Система сумісна і має єдиний розв'язок, так як визначник системи Δ відмінний від нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ch\,ax & sh\,ax \\ sh\,ax & ch\,ax \end{vmatrix} = ch^2ax - sh^2ax = 1 \neq 0.$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо вирази для похідних шуканих довільних «сталих»:

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & sh\,ax \\ \dfrac{f(x)}{a} & ch\,ax \end{vmatrix} = -\frac{1}{a}f(x)sh\,ax,$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} ch\,ax & 0 \\ sh\,ax & \dfrac{f(x)}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}f(x)ch\,ax,$$

а за допомогою квадратур запишемо і самі довільні «сталі»:

$$C_1(x) = -\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)\,sh\,at\ dt + \overline{C_1},$$

$$C_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)\,ch\,at\ dt + \overline{C_2}.$$

Тут x_0 – будь яка стала, $\overline{C_1}$ і $\overline{C_2}$ – нові довільні сталі, а змінна інтегрування, щоб уникнути плутанини в подальшому позначається через t.

Підставивши вирази для $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у функцію $y = C_1(x) ch\, ax + C_2(x) sh\, ax$, отримаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y'' - a^2 y = f(x)$ у виді

$$y = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)(\, sh\, ax\, ch\, at - ch\, ax\, sh\, at)\, dt + \overline{C_1}\, ch\, ax + \overline{C_2}\, sh\, ax,$$

або в остаточній компактній формі

$$y = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)\, sh\, a\,(x-t)\, dt + \overline{C_1}\, ch\, ax + \overline{C_2}\, sh\, ax.$$

Зауважимо, що сума останніх двох членів повністю відповідає загальному розв'язку однорідного рівняння $y'' - a^2 y = 0$; що ж стосується першого члена, то він представляє собою частковий розв'язок неоднорідного рівняння, який в сумі з загальним розв'язком однорідного рівняння складає, відповідно до теорії лінійних рівнянь, загальний розв'язок неоднорідного рівняння [24]. Якщо дано зокрема, $f(x) = \frac{A}{sh\, ax}$, де $A - const$, то частковий розв'язок цього конкретного неоднорідного рівняння $x_0 > 0$

$$y_1 = \frac{A}{a}\int_{x_0}^{x} \frac{sh\, a\,(x-t)}{sh\, at} dt = \frac{A}{a}\int_{x_0}^{x} (\, sh\, ax\, cth\, at - ch\, ax)\, dt =$$

$$= \frac{A}{a}\left[\frac{1}{a} sh\, ax\, ln|sh\, at| - t\, ch\, ax\right]_{x_0}^{x} =$$

$$= \frac{A}{a^2} sh\, ax\, ln\left|\frac{sh\, ax}{sh\, ax_0}\right| - \frac{A}{a}(x - x_0) ch\, ax;$$

відповідно, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = \frac{A}{a^2} sh\, ax\, ln\left|\frac{sh\, ax}{sh\, ax_0}\right| - \frac{A}{a}(x - x_0) ch\, ax + C_1 ch\, ax + C_2 sh\, ax.$$

Приклад 3. $y'' + py' + qy = 0.$

Це однорідне лінійне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння має корні

$$r_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Розглянемо тільки випадок

$$\frac{p^2}{4} - q > 0.$$

Покладемо $\frac{p}{2} = \alpha$, $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \beta$. Тоді $r_{1;2} = -\alpha \pm \beta$ і частковими розв'язками рівняння будуть функції $e^{(-\alpha+\beta)x}$ і $e^{(-\alpha-\beta)x}$, а також їх лінійні комбінації. Приймемо в якості часткових розв'язків півсуму і піврізницю цих функцій:

$$y_1 = \frac{e^{-ax}\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)}{2} = e^{-ax} ch\, \beta x,$$

$$y_2 = \frac{e^{-ax}\left(e^{\beta x} - e^{-\beta x}\right)}{2} = e^{-ax} sh\, \beta x.$$

Легко впевнитися у тому, що ці розв'язки утворюють фундаментальну систему, і отже, загальний розв'язок рівняння має вид:

$$y = e^{-ax}(C_1 ch\, \beta x + C_2 sh\, \beta x).$$

Приклад 4. $y'' + py' + qy = f(x)$.

Це неоднорідне лінійне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Його загальний розв'язок будемо шукати, як у прикладі 2, методом варіації сталих, що містяться в загальному розв'язку відповідного однорідного рівняння (див. приклад 3), причому, як і в прикладі 3, обмежимося випадком, коли $\beta^2 = \frac{p^4}{4} - q > 0$.

Маємо

$$y = e^{-ax}[C_1(x)\text{ch}\,\beta x + C_2(x)sh\,\beta x],$$

$$y' = -ae^{-ax}[C_1(x)\text{ch}\,\beta x + C_2(x)sh\,\beta x] + e^{-ax}[\beta C_1(x)sh\,\beta x + \beta C_2(x)ch\,\beta x] +$$

$$+e^{-ax}[C_1'(x)ch\,\beta x + C_2'(x)sh\,\beta x].$$

Як у прикладі 2, будемо вимагати, щоб вираз, який знаходиться в останніх квадратних дужках, дорівнював 0. Це дає нам перше рівняння відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1'(x)ch\,\beta x + C_2'(x)sh\,\beta x = 0.$$

Запишемо першу похідну у вигляді:

$$y' = e^{-ax}[(\beta\,sh\,\beta x - \alpha\,ch\,\beta x)C_1(x) + (\beta\,ch\,\beta x - \alpha\,sh\,\beta x)C_2(x)]$$

і знайдемо другу похідну

$$y'' = -\alpha e^{-ax}[(\beta\,sh\,\beta x - \alpha\,ch\,\beta x)C_1(x) + (\beta\,ch\,\beta x - \alpha\,sh\,\beta x)C_2(x)] +$$

$$+e^{-ax}[(\beta^2\,ch\,\beta x - \alpha\beta\,sh\,\beta x)C_1(x) + (\beta^2\,sh\,\beta x - \alpha\beta\,ch\,\beta x)C_2(x)] +$$

$$+e^{-ax}[(\beta\,sh\,\beta x - \alpha\,ch\,\beta x)C_1'(x) + (\beta\,ch\,\beta x - \alpha\,sh\,\beta x)C_2'(x)].$$

Тепер помножимо y на q, y' на p і підставимо ці вирази разом з y'' в початкове рівняння. Після зведення подібних членів отримаємо:

$$e^{-ax}\{[(q - p\alpha + \alpha^2 + \beta^2)ch\,\beta x + (p\beta - 2\alpha\beta)sh\,\beta x]C_1(x) +$$

$$+[(p\beta - 2\alpha\beta)ch\,\beta x + (q - p\alpha + \alpha^2 + \beta^2)sh\,\beta x]C_2(x)\} +$$

$$+e^{-ax}[(\beta\,sh\,\beta x - \alpha\,ch\,\beta x)C_1'(x) + (\beta\,ch\,\beta x - \alpha\,sh\,\beta x)C_2'(x)] = f(x).$$

Так як $\alpha = \frac{\beta}{2}$, а $\beta = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, то вираз, що знаходиться у фігурних дужках, перетворюється в нуль, та ми приходимо до другого рівняння відносно $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$:

$$(\beta\,sh\,\beta x - \alpha\,ch\,\beta x)C_1'(x) + (\beta\,ch\,\beta x - \alpha\,sh\,\beta x)C_2'(x) = e^{ax}f(x),$$

яке разом з першим рівнянням утворює систему з двох алгебраїчний лінійних рівнянь з невідомими $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Складемо визначник системи Δ і обрахуємо його:

$$\Delta= \begin{vmatrix} ch\,\beta x & sh\,\beta x \\ \beta\, sh\,\beta x - \alpha\, ch\,\beta x & \beta\, ch\,\beta x - \alpha\, sh\,\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= \beta ch^2\beta x - \alpha\, ch\,\beta x\, sh\,\beta x - \beta\, sh^2\beta x + \alpha\, sh\,\beta x ch\,\beta x = \beta \neq 0.$$

Отже, система сумісна і має єдиний розв'язок. Її розв'язок дає похідні шуканих довільних «сталих»:

$$C_1'(x) = \frac{1}{\beta}\begin{vmatrix} 0 & sh\,\beta x \\ e^{ax} f(x) & \beta\, ch\,\beta x - \alpha\, sh\,\beta x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\beta} f(x) e^{ax} sh\,\beta x,$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\beta}\begin{vmatrix} ch\,\beta x & 0 \\ \beta\, sh\,\beta x - \alpha\, ch\,\beta x & e^{ax} f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta} f(x) e^{ax} ch\,\beta x.$$

За допомогою квадратур запишемо і самі довільні «сталі»:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{at}\, sh\,\beta t\, dt + \overline{C_1},$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{at}\, ch\,\beta t\, dt + \overline{C_2}.$$

Тут, як і у прикладі 2, $x_0 -$ будь яка стала, $\overline{C_1}$ і $\overline{C_2}$ - нові довільні сталі, а t – зміна інтегрування.

Підставляючи функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у вираз

$$y = e^{-ax}[C_1(x) ch\,\beta x + C_2(x) sh\,\beta x],$$

отримаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

у вигляді

$$y = \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{a(t-x)}\, sh\,\beta(x-t)\, dt + e^{-ax}(\overline{C_1} ch\,\beta x + \overline{C_2} sh\,\beta x).$$

Як і в прикладі 2, перший член представляє частковий розв'язок y_1 неоднорідного рівняння, а другий – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Зауважимо, що у випадку $\frac{p^2}{4} - q < 0$ частковий розв'язок

$$y_1 = \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{\frac{p}{2}(t-x)}\, sin\, \beta(x-t)dt,$$

де $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, а у випадку $\frac{p^2}{4} - q = 0$ частковий розв'язок

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)e^{\frac{p}{2}(t-x)}dt.$$

Приклад 5. $y^{\mathrm{IV}} - a^4 y = 0.$

Це однорідне лінійне рівняння 4-го порядку зі сталими коефіцієнтам. Його характеристичне рівняння $r^4 - a^4 = 0$ має корені $r_{1,2} = \pm a,\ r_{3,4} = \pm ia$, де $i = \sqrt{-1}$. Загальний розв'язок

$$y = C_1^* e^{ax} + C_2^* e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax\,.$$

Якщо замінити e^{ax} через $ch\,\alpha x + sh\,\alpha x$, а e^{-ax} через $ch\,\alpha x - h\,\alpha x$, то отримаємо:

$$y = C_1 ch\,ax + C_2 sh\,ax + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax\,,$$

де покладено $C_1^* + C_2^* = C_1$ і $C_1^* - C_2^* = C_2$.

Приклад 6. $y^{\mathrm{IV}} + a^4 y = 0.$

Це також однорідне лінійне рівняння 4-го порядку зі сталими коефіцієнтам. Його характеристичне рівняння $r^4 + 4a^4 = 0$. Для знаходження його коренів розкладемо ліву частину на множники наступним чином:

$$r^4 + 4a^4 = (r^4 + 4a^2r^2 + 4a^4) - 4a^2r^2 = (r^2 + 2a^2)^2 - 4a^2r^2 =$$

$$= (r^2 - 2ar + 2a^2)(r^2 + 2ar + 2a^2).$$

Прирівнюючи до нуля, вирази що містяться в дужках, отримаємо два квадратних рівняння. Розв'язуючи їх, отримаємо корені характеристичного рівняння $r_{1,2} = a \pm ai$, $r_{3,4} = -a \pm ai$. Тому загальним розв'язком буде функція

$$y = e^{ax}(C_1 \cos ax + C_2 \sin ax\,) + e^{-ax}(C_3 \cos ax + C_4 \sin ax\,).$$

Якщо, як і в попередньому прикладі, виконати заміну $e^{\alpha x} = ch\,\alpha x + sh\,\alpha x$, $e^{-\alpha x} = ch\,\alpha x - sh\,\alpha x$, то після нескладних алгебраїчних перетворень отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$y = C_1^* \cos ax\, ch\, ax + C_2^* \cos ax\, sh\, ax + C_3^* \sin ax\, ch\, ax + C_4^* \sin ax\, sh\, ax,$$

де покладено $C_1 + C_3 = C_1^*$, $C_1 - C_3 = C_2^*$, $C_2 + C_4 = C_3^*$, $C_2 - C_4 = C_4^*$

Приклад 7. $yy'' = 1 + y'^2$.

Це нелінійне рівняння другого порядку, яке підстановкою $y' = p$ і відповідно $y'' = p\frac{dp}{dy}$ зводиться до рівняння 1-го порядку

$$yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2.$$

Після відокремлення змінних отримаємо

$$\frac{pdp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y},$$

звідки, інтегруючи, прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{2}\ln(1 + p^2) = \ln y - \ln C_1\,,$$

потенціюючи яке отримаємо

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{y}{C_1} \text{ або } \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2}} = \pm dx.$$

Піднесемо до квадрату і отримаємо

$$C_1 Arch\frac{y}{C_1} = \pm(x + C_2),$$

звідки

$$y = C_1 ch\,\frac{x + C_2}{C_1}$$

(знак мінуса перед аргументом під знаком гіперболічного косинуса опускаємо, бо косинус є парною функцією).

У всіх розібраних прикладах гіперболічні функції виникали в процесі інтегрування рівнянь. Розглянемо декілька прикладів на застосування гіперболічних підстановок для спрощення диференціальних рівнянь до їх інтегрування.

*Приклад 8***.** $y = a\sqrt{1 + y'^2}$.

Замінимо $y' = sh\, z$. Тоді рівняння перетворюється до вигляду

$$y = a\, ch\, z,$$

звідки диференціюванням знаходимо, що

$$y' = a\, z'\, sh\, z,$$

або, замінюючи y' через $sh\, z$, $sh\, z = a\, z'\, sh\, z$. Скоротивши на $sh\, z$, отримаємо $z' = \frac{1}{a}$, звідки $z = \frac{x+C}{a}$, а відповідно

$$y = a\, ch\,\frac{x + C}{a}.$$

Приклад 9 **.** $y' = \frac{y}{x} + a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}$.

Замінимо $y = x\,sh\,z$. Знайдемо y' і перейдемо до змінних x і z, перетворивши рівняння до виду

$$z' = \frac{a}{x^2},$$

звідки $z = -\frac{a}{x} - C$, і відповідно

$$y = -x\,sh\left(\frac{a}{x} + C\right).$$

Розглянемо більш складний приклад інтегрування диференціального рівняння, що містить гіперболічні функції.

Приклад 10. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2th\,2x\frac{dy}{dx} + \frac{n^2}{ch^2 2x}y = 0.$

Це лінійне рівняння 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами. Перетворимо його до більш простого вигляду. Для цього підберемо відповідну функцію $\varphi(t)$ і зробимо заміну змінної, замінивши $x = \varphi(t)$. Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}\frac{d^2x}{dt^2},$$

відповідно,

$$\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - \frac{dy}{dt}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - 2th\,2x\right]\frac{1}{\frac{dx}{dt}} + \frac{n^2}{ch^2 2x}y = 0.$$

Виберемо функцію $x = \varphi(t)$ так, щоб вираз, який міститься в квадратних дужках, дорівнював нулю , тобто

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - 2th\,2x = 0.$$

Це нелінійне диференціальне рівняння, що допускає пониження степеня, так як в ньому відсутній аргумент t. Щоб проінтегрувати його, замінимо $\frac{dx}{dt} = p$, тоді $\frac{d^2x}{dt^2} = p\frac{dp}{dx}$ і рівняння набуває вигляду

$$\frac{p\frac{dp}{dx}}{p^2} - 2\,th\,2x = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dp}{p} - 2th\,2x = 0$$

Проінтегрувавши, отримаємо:

$$\ln p - \ln ch\,2x = \ln 1\,, \qquad p = ch\,2x, \qquad \frac{dx}{ch2x} = dt$$

(тут $C = 0 = \ln 1$, бо нам достатньо мати одну яку-небудь функцію. Піднісши до квадрату в останньому рівнянні, отримаємо:

$$t = arctg\,e^{2x} \qquad \text{або} \qquad e^{2x} = tg\,t.$$

Вибравши $\varphi(t) = \frac{1}{2}\ln tg\,t$, перетворимо початкове рівняння до вигляду

$$\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{ch^2 2x} + \frac{n^2}{ch^2 2x}y = 0 \qquad \text{або} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Загальний розв’язок цього рівняння $y = C_1\cos nt + C_2\sin nt$, і остаточно

$$y = C_1\cos(n\,arctg\,e^{2x}) + C_2\sin(n\,arctg\,e^{2x}) \;\; [33, \text{ст.} 72-76].$$

2.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

Розв’язки лінійного диференціального рівняння вище першого порядку зі змінними коефіцієнтами не завжди виражаються через елементарні функції, і інтегрування такого рівняння рідко зводиться до квадратур [10].

Найбільш поширеним методом інтегрування вказаних рівнянь є представлення шуканого розв'язку у виді степеневого ряду. Розглянемо рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2.1}$$

Припустимо, що коефіцієнти $p(x)$ і $q(x)$ рівняння (2.1) є аналітичними функціями на інтервалі $|x - x_0| < a$, тобто розкладаються в степеневі ряди

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k\,, \tag{2.2}$$

Які збігаються при $|x - x_0| < a$.

Теорема. Якщо функції $p(x)$ і $q(x)$ - аналітичні при $|x - x_0| < a$, то будь який розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2.1) є аналітичним при $|x - x_0| < a$, тобто розкладається в степеневий ряд

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

Який збігається при $|x - x_0| < a$.

Ця теорема дає можливість проінтегрувати рівняння (2.1), тобто побудувати розв'язок даного рівняння у вигляді степеневого ряду. Алгоритм такої побудуви полягає в наступному. Для спрощення покладемо $x_0 = 0$. Будемо шукати розв'язок рівняння (2.1) у виді ряду по степенях x із невизначеними коефіцієнтами:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{2.3}$$

Підставляючи (2.3) в рівняння (2.1), маємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при відповідних степенях $x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots$, одержимо рекурентну систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $c_0, c_1, c_2, \ldots$,

$$q_0 c_0 + p_0 c_1 + 1 \cdot 2 c_2 = 0,$$

$$q_1 c_0 + (q_0 + p_1) c_1 + 2 p_0 c_2 + 2 \cdot 3 c_0 = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{k} [q_{k-i} c_i + (i+1)\, p_{k-i} c_{i+1}] + (k+1)(k+2)\, c_{k+2} = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Коефіцієнти c_0 і c_1 можна задати довільно (хоча б один із них повинен бути відмінний від нуля, інакше отримаємо розв'язок $y = 0$). Зафіксувавши c_0 і c_1, шукаємо розв'язок рівняння (2.1), задовольняючи початковим умовам $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$. З першого рівняння знайдемо c_2, з другого c_3 і т.д.

Якщо в рівняння (2.1) функції $p(x)$ і $q(x)$ – раціональні, тобто

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \qquad q(x) = \frac{q_1(x)}{q_0(x)},$$

де $p_0(x), p_1(x), q_0(x), q_1(x)$ – многочлени, то точки в яких $p_0(x) = 0$, або $q_0(x) = 0$, називаються особливими точками рівняння (2.1) [13].

Для рівняння другого порядку

$$x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0 \tag{2.5}$$

в якому $p(x)$ і $q(x)$ – аналітичні функції в проміжку $|x| < a$, точка $x = 0$ є особливою точкою, тільки коли один з коефіцієнтів p_0 або q_0 в розкладі функції $p(x)$ і $q(x)$ в степеневий ряд відмінний від нуля. Це приклад найпростішої особливої точки, так званої регулярної особливої точки (або особливої точки першого роду).

В околі особливої точки $x_0 = 0$ розв'язок у вигляді степеневого ряду може не існувати, в цьому випадку розв'язок потрібно шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду:

$$y = (x - x_0)^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k \tag{2.6}$$

де λ і $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, (c_0 \neq 0)$ підлягають визначенню.

Розглянемо рівняння (2.5) при $x > 0$. Підставивши в це рівняння вираз (2.6) при $x_0 = 0$, маємо:

$$[\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0]c_0 + \{[\lambda(\lambda + 1) + p_0(\lambda + 1) + q_0]c_1 + (\lambda p_0 + q_0)c_0\}x + \cdots$$

$$+\{[(\lambda + n)(\lambda + n - 1) + \cdots + p_0(\lambda + n) + q_0]c_k + \cdots + (\lambda p_0 + q_0)c_0\}x^k + \cdots = 0$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при степенях x, отримаємо рекурентну систему рівнянь:

$$f_0(\lambda)c_0 = 0,$$

$$f_0(\lambda + 1)c_1 + f_1(\lambda)c_0 = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$f_0(\lambda + k)c_k + f_1(\lambda + k - 1)c_{k-1} + f_2(\lambda + k - 2)c_{k-2} + \cdots + f_k(\lambda)c_0 = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

де позначено

$$f_0(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0,$$

$$f_m(\lambda) = \lambda p_m + q_m, \quad m \geq 1.$$

Оскільки $c_0 \neq 0,$ то λ повинна задовольняти рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0$$

яке називається визначальним рівнянням. Нехай λ_1, λ_2 - розв'язки цього рівняння. Якщо різниця $\lambda_1 - \lambda_2$ не дорівнює цілому числу, то $f_0(\lambda_1 + k) \neq 0,$

$f_0(\lambda_2 + k) \neq 0$, ні при якому цілому $k > 0$, це означає, що вказаним методом можна побудувати два лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.1):

$$y_1 = x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k \qquad \text{і} \qquad y_2 = x^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k.$$

Якщо ж різниця $\lambda_1 - \lambda_2$ є цілим числом, то вказаним вище методом можна побудувати один розв'язок у вигляді загального ряду $y_1(x)$. Знаючи цей розв'язок, за допомогою формули Ліувілля-Остроградського можна знайти другий лінійно незалежний з $y_1(x)$ розв'язок:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y^{\frac{1}{2}}(x)} dx.$$

З цієї формули випливає, що розв'язок $y_2(x)$ можна шукати у вигляді

$$y_2(x) = A y_1(x) \ln(x) + x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

(число A може бути рівним нулю) $[8, \text{ст.} 224 - 227]$.

2.3. Застосування степеневих рядів до розвязування рівняня Бесселя

Рівнянням Бесселя називається диференціальне рівняння виду

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad (p = const). \qquad (2.27)$$

Розв'язок цього рівняння, як і деяких рівнянь із змінними коефіцієнтами, слід шукати не у формі степеневого ряду, а у вигляді добутку деякого степеня x на степеневий ряд:

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \qquad (2.28)$$

Коефіцієнт a_0 ми можемо вважати відмінним від нуля через невизначеність показника r.

Перепишемо вираз (2.28) у вигляді

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$$

і знайдемо його похідні:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2}.$$

Підставимо ці вирази у рівняння (2.27):

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1} +$$

$$+ (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при x в степені $r, r+1, r+2, \dots, r+k$, отримаємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{c} [r(r-1) + r - p^2]\, a_0 = 0, \text{ або } (r^2 - p^2)\, a_0 = 0 \\ [(r+1)r + (r+1) - p^2]\, a_1 = 0, \text{ або } [(r+1)^2 - p^2]\, a_1 = 0 \\ [(r+2)(r+1) + (r+2) - p^2]\, a_2 + a_0 = 0, \text{ або } [(r+2)^2 - p^2]\, a_2 + a_0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ [(r+k)(r+k-1) + (r+k) - p^2] a_k + a_{k-2} = 0, \quad [(r+k)^2 - p^2]\, a_k + a_{k-2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Розглянемо рівність

$$[(r+k)^2 - p^2] a_k + a_{k-2} = 0.$$

Дану рівність можна переписати у наступному вигляді:

$$[(r+k-p)(r+k+p)] a_k + a_{k-2} = 0.$$

За умовою $a_0 \neq 0$; відповідно

$$r^2 - p^2 = 0,$$

тому $r_1 = p$ або $r_2 = -p$.

Розглянемо спочатку розв’язок у випадку $r_1 = p > 0$. Із системи рівнянь (2.9) послідовно визначаються всі коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots$; a_0 залишається довільним. Покладемо, наприклад, $a_0 = 1$. Тоді

$$a^k = -\frac{a_{k-2}}{k(2p+k)}.$$

Задаючи різні значення k, знайдемо

$$a_1 = 0, \qquad a_3 = 0, \qquad \text{і взагалі} \quad a_{2m+1} = 0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2(2p+2)}, \qquad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)}, \ldots,$$

$$a_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2\nu(2p+2)(2p+4)\ldots(2p+2\nu)}, \ldots$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у формулу (2.8), отримаємо

$$y_1 = x^p \left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \cdots\right] \qquad (2.10)$$

Всі коефіцієнти $a_{2\nu}$ визначаться, оскільки при будь якому k коефіцієнт при a_k в рівнянні (2.9)

$$(r_1 + k)^2 - p^2$$

буде відмінний від нуля.

Таким чином, y_1 є частковим розв’язком рівняння (2.7). Задамо умови, при яких і при другому корені $r_2 = -p$ визначаться всі коефіцієнти a_k. Це буде, якщо при будь якому парному додатному k виконуються нерівності

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0, \qquad (2.11)$$

або

$$r_2 + k \neq p.$$

Але $p = r_1$, відповідно

$$r_2 + k \neq r_1.$$

Таким чином, умова (2.11) в цьому випадку еквівалентна наступному:

$$r_1 - r_2 \neq k,$$

де k- ціле парне додатне число. Але

$$r_1 = p, \quad r_2 = -p,$$

відповідно

$$r_1 - r_2 = 2p.$$

Таким чином, якщо p не дорівнює цілому числу, то можна написати другий частковий розв'язок, який отримаємо з виразу (2.10) замінною p на $-p$:

$$y_2 = x^{-p}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \cdots\right] \qquad (2.12)$$

Степеневі ряди (2.10) і (2.12) збігаються при всіх значеннях x, що легко виявити на підставі ознаки Даламбера. Також очевидно, що y_1 і y_2 лінійно незалежні.

Розв'язок y_1, помножений на деяку сталу, називається функцією Бесселя першого роду p-го порядку і позначається символом J_p. Розв'язок y_2 позначають символом J_{-p}.

Таким чином, при p, що не дорівнює цілому числу, загальний розв'язок рівняння (2.7)

$$y = C_1 J_p + C_2\, J_{-p}.$$

Так, наприклад, при $p = \frac{1}{2}$ ряд (2.10) буде мати вигляд

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right] = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right].$$

Цей розв'язок, помножений на сталий множник $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, називається бесселєвою функцією $J_{\frac{1}{2}}$; зауважимо, що в дужках міститься ряд, сума якого рівна $\sin x$. Відповідно,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Так само, користуючись формулою (2.12), отримаємо

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Загальний інтеграл рівняння (2.7) при $p = \frac{1}{2}$ буде

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Нехай, далі p є ціле число, яке позначимо через n $(n \geq 0)$. Розв'язок (2.10) в цьому випадку буде мати зміст і є першим частковим розв'язком рівняння (2.7).

Але розв'язок (2.12) не буде мати зміст, оскільки один із множників знаменника при розкладанні перетвориться в нуль.

При цілому додатному $p = n$ бесселєва функція J_n визначається рядом (2.10), помноженим на сталий множник $\frac{1}{2^n n!}$ (а при $n = 0$ помноженим на 1):

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \cdots\right]$$

або

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}. \qquad (2.13)$$

Можна показати, що другий частковий розв'язок в цьому випадку потрібно шукати у формі

$$K_n(x) = J_n(x)\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Підставивши цей вираз в рівняння (2.7) , визначимо коефіцієнти b_k.

Функція $K_n(x)$ з певними коефіцієнтами, помножена на деяку сталу, називаються функцією Бесселя другого роду n-го порядку.

Це є другий розв'язок рівняння (2.7), що утворює з першим лінійно незалежну систему.

Загальний інтеграл буде мати вигляд

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x). \qquad (2.14)$$

Зауважимо, що

$$\lim_{x\to 0} K_n(x) = \infty.$$

Відповідно, якщо потрібно розглянути скінченні розв'язки при $x = 0$, то в формулі (2.14) потрібно замінити $C_2 = 0$ $[17, \text{ст.}\, 295 - 299]$.

Приклад 1. Знайти розв'язок рівняння Бесселя при $p = 0$:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

який задовольняє початкові умови: при $x = 0,\ y' = 0,\ \ y = 2.$

На підставі формули (2.13) знайдемо один частковий розв'язок:

$$J_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots$$

Користуючись цим розв'язком, можемо записати розв'язок, що задовольняє даним початковим умовам, а саме: $y = 2\,J_0(x)$.

Слід зауважити, що, якщо потрібно знайти загальний інтеграл даного рівняння, то спочатку шукають другий частковий розв'язок у вигляді

$$K_0(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Не наводячи всіх обчислень, вкажемо, що другий частковий розв'язок, який ми позначимо $K_0(x)$, має вид

$$J_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots$$

Ця функція, помножена на деякий сталий множник, називається функцією Бесселя другого роду нульового порядку [26].

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $x^2y'' + xy' + 4\,(x^4 - 2)y = 0.$

Припустимо $x^2 = t$. Тоді

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt}2x\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot 4x^2 + 2\frac{dy}{dt} = 4t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

Підставивши ці розв'язки в початкову рівняння, маємо:

$$4t^2\frac{d^2y}{dt^2}+2t\frac{dy}{dt}+2t\frac{dy}{dt}+4(t^2-2)y=0$$

Або

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-2)y=0.$$

Це рівняння Бесселя з параметром $v=\sqrt{2}$. Його розв’язком є

$$y=C_1J_{\sqrt{2}}(t)+C_2J_{-\sqrt{2}}(t).$$

Таким чином, розв’язок вихідного рівняння є

$$y=C_1J_{\sqrt{2}}(x^2)+C_2J_{-\sqrt{2}}(x^2).$$

*Приклад 3***.** Доведіть, що функція

$$I(x)=J_v(x)\int_0^x\frac{dt}{t\,J_v^2(t)}$$

є розв’язком рівняння Бесселя.

Знайдемо першу похідну функції $I(x)$:

$$I'(x)=J_v'(x)\int_0^x\frac{dt}{t\,J_v^2(t)}+J_v(x)\frac{1}{x\;J_v^2(x)}=\frac{1}{J_v(x)}(J_v'(x)I(x)+\frac{1}{x}.$$

Звідси

$$J_v(x)\,I'(x)=I_v'(x)J(x)+\frac{1}{x}.$$

Диференціюючи дану рівність, отримаємо

$$J_v(x)\,I''(x)+J_v'(x)\,I'(x)=I''(x)J_v(x)+J_v'(x)\,I'(x)-\frac{1}{x^2}.$$

З отриманих рівностей, враховуючи, що

$$J_v''(x)+\frac{1}{x}J_v'(x)+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)J_v=0,$$

знайдемо

$$J_v(x)\left[I''(x)+\frac{1}{x}I'(x)+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)I(x)\right]=-J_v'(x)I'(x)+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)J_v(x)\cdot$$

$$\cdot I(x) + \frac{1}{x}J_v'(x)I(x) + \frac{1}{x^2} + I(x)\left[-\frac{1}{x}J_v'(x) - \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)J_v(x)\right] + J_v'(x)I'(x) - \frac{1}{x^2} = 0$$

Звідси $I''(x) + \frac{1}{x}I(x) + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)I(x) = 0$, тобто функція $I(x)$ задовольняє рівняння Бесселя [3].

Розділ 3. Методичні рекомендації до проведення практичних занять

3.1. Відношення між тригонометричними і гіперболічними функціями

Практичні заняття мають тісний зв'язок із іншими організаційними формами навчання і доповнюють їх, складаючи єдине ціле. У цьому поєднанні теоретичні знання які отримують студенти під час лекції, засвоюється краще, тоді практичні завдання виконуються легше.

У даному розділі ми розглянемо окремі випадки розв’язків звичайних диференціальних рівнянь, та розв’язування даних рівнянь за допомогою рядів.

Поряд з відомим в комплексній області зв’язком між тригонометричними і показниковою функцією (формули Ейлера)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{3.1}$$

$$i \quad sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \tag{3.2}$$

в комплексній області є також дуже простий зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями [5].

Нагадаємо, що, за означенням:

$$ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \tag{3.3}$$

$$sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \tag{3.4}$$

Якщо в тотожності (3.3) зробити заміну z на iz, то в правій частині тотожності (3.1), звідки випливає рівність лівих частин. Те саме має місце для тотожностей (3.4) та (3.2).

Отже,

$$\cos z = ch\, iz, \tag{3.5}$$

$$i\, sin\, z = sh\, iz. \tag{3.6}$$

Шляхом ділення обох частин тотожності (3.6) на відповідні частини тотожності (3.5), і навпаки, (3.5) на (3.6) отримаємо:

$$i\, tg\, z = th\, iz, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{i}\, ctg\, z = cth\, iz. \tag{3.8}$$

Аналогічна заміна в тотожностях (3.1) та (3.2) і порівняння з тотожностями (3.3) та (3.4) дають:

$$ch\, z = \cos iz, \tag{3.9}$$

$$i\, sh\, z = \sin iz. \tag{3.10}$$

Нарешті, із тотожностей (3.9) та (3.10) знайдемо:

$$i\, th\, z = tg\, iz, \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{i}\, cth\, z = ctg\, iz. \tag{3.12}$$

Якщо в тотожностях (3.5) – (3.12) замінимо $z = ix,$ де x - дійсне число, тобто вважаючи аргумент суто уявним, то отримаємо ще вісім тотожностей між тригонометричними функціями суто уявного аргументу і відповідним гіперболічними функціями дійсного аргументу, а також між гіперболічними функціями суто уявного аргументу і відповідними тригонометричними функціями дійсного аргументу:

$$\cos ix = ch\, x,$$

$$\sin ix = i\, sh\, x,$$

$$\mathrm{tg}\, ix = i\, th\, x,$$

$$\mathrm{ctg}\, ix = -\, i\, cth\, x,$$

$$ch\, ix = \cos x,$$

$$sh\, ix = i \sin x,$$

$$th\, ix = i\,\mathrm{tg}\, x,$$

$$cth\, ix = -i\,\mathrm{ctg}\, x.$$

Отриманні співвідношення дають можливість переходити від тригонометричних функцій до гіперболічних і від гіперболічних до тригонометричних функцій з заміною уявного аргументу дійсним. Вони можуть бути сформульовані у вигляді наступного правила:

для переходу від тригонометричних функцій уявного аргументу до гіперболічних, або навпаки, від гіперболічних функцій уявного аргументу до тригонометричних слід у синуса і тангенса уявну одиницю i винести за знак функції, а у косинуса відкинути її взагалі $[15]$.

Встановлений зв'язок є чудовим, зокрема тим, що дозволяє отримати всі співвідношення між гіперболічними функціями із відомих співвідношень між тригонометричними функціями шляхом заміни останніх гіперболічними функціями.

Покажемо, як це виконується.

Візьмемо, для прикладу, основну тригонометричну тотожність:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

і покладемо в ній $z = ix$, де $x -$ дійсне число. Отримаємо:

$$\sin^2 ix + \cos^2 ix = 1.$$

Якщо в цій тотожності замінити синус і косинус гіперболічними синусом і косинусом за формулами $sin\, ix = i\, sh\, x$ і $cos\, ix = ch\, x$, то отримаємо

$$(i\, sh\, x)^2 + ch^2 x = 1, \qquad \text{або} \qquad ch^2 x - sh^2 x = 1,$$

а це і є основна тотожність між sh і ch, доведена раніше іншим шляхом.

Аналогічним чином можна довести всі інші формули, в тому числі формули для гіперболічних функцій суми та різниці аргументів, подвійного та половинного аргументу і т.д., таким чином із звичайної тригонометрії отримати «гіперболічну тригонометрію» $[34, \text{ст.}\, 37-41]$.

Якщо покладемо $z = x + iy$, де x і y - дійсні числа, то застосовуючи формули для тригонометричних та гіперболічних функцій суми аргументів, отримаємо наступні співвідношення:

$$\sin(x+iy) = \sin x\, ch\, y + i cos\, x\, sh\, y,$$

$$\cos(x+iy) = \cos x\, ch\, y - i\, sin\, x\, sh\, y,$$

$$tg(x+iy) = \frac{\sin 2x + ish2y}{\cos 2x + ch\, 2y},$$

$$ctg(x+iy) = \frac{\sin 2x - ish2y}{-\cos 2x + ch\, 2y},$$

$$sh(x+iy) = sh\, x \cos y + ichx \sin y,$$

$$ch(x+iy) = ch\, x \cos y + ishx \sin y\,,$$

$$th(x+iy) = \frac{\mathrm{sh}\, 2x + isin2y}{\mathrm{ch}\, 2x + cos\, 2y},$$

$$cth(x+iy) = \frac{\mathrm{sh}\, 2x - isin2y}{\mathrm{ch}\, 2x - cos\, 2y}.$$

Шляхом заміни останніх восьми формул y на $-y$ можемо отримати ще вісім формул:

$$\sin(x-iy) = \sin x\, ch\, y - i cos\, x\, sh\, y,$$

$$\cos(x-iy) = \cos x\, ch\, y + i\, sin\, x\, sh\, y,$$

$$tg(x-iy) = \frac{\sin 2x - ish2y}{\cos 2x + ch\, 2y},$$

$$ctg(x-iy) = \frac{\sin 2x + ish2y}{-\cos 2x + ch\, 2y},$$

$$sh(x-iy) = sh\, x \cos y - ichx \sin y,$$

$$ch(x-iy) = ch\, x \cos y - ishx \sin y\,,$$

$$th(x-iy) = \frac{\mathrm{sh}\, 2x - isin2y}{\mathrm{ch}\, 2x + cos\, 2y},$$

$$cth(x-iy) = \frac{\mathrm{sh}\, 2x + isin2y}{\mathrm{ch}\, 2x - cos\, 2y}.$$

Завдання для самостійного опрацювання:

1. Обчислити:

$a)\ ctg\ i$;

$b)\ \ tg\ i$;

$c)\ \ \sin i.$

2. Знайти:

   a) $\sin(1+2i)$

   b) $tg\ (2-i)$

   c) $sh(-2+i)$

3. Обчисліть дійсну і уявну частини виразу:

$$\cos(2+5i)\,x+\sin(3-4i)\,x$$

4. Доведіть, що показникову функцію e^z можна виразити через тригонометричні функції формулою

$$e^z=\cos iz-\sin iz$$

5. Показати, що з рівності $x+iy=ch(u+iv)$ випливає, що

$$\frac{x^2}{ch^2u}+\frac{y^2}{sh^2u}=1, \qquad \frac{x^2}{cos^2v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=1.$$

6. Показати, що функція $cos\,z$ при суто уявному z дійсна і може набувати як завгодно великих значень.

3.2. Використання гіперболічних функцій для розв'язування диференціальних рівнянь

Розглянемо застосування гіперболічних функцій до розв'язування диференціальних рівнянь та приклад на інтегрування диференціального рівняння в частинних похідних.

*Приклад 1***.** Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння Лапласа

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{d^2\Phi}{dy^2}=0,$$

що задовольняє крайовим умовам:

$$\Phi(x;y)|_{y=0} = a\cos\ (mx - nt), \qquad \left.\frac{d\Phi}{dy}\right|_{y=-h} = 0\ ,$$

де a, m, n, t −параметри.

Використовуючи першу крайову умову, будемо шукати частковий розв'язок у вигляді добутку

$$\Phi(x;y) = \cos\ (mx - nt)Y(y),$$

де $Y(y)$ – невідома функція, що залежить тільки від y і перетворюється в a при y=0; $Y(0) = a$.

Знайшовши частинні похідні 2-го порядку

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -m^2\cos(mx - nt)\,Y(y),$$

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} = \cos(mx - nt)\,Y''(y)$$

і підставивши їх в рівняння Лапласа, отримаємо тотожність

$$\cos(mx - nt)[Y''(y) - m^2Y(y)] = 0,$$

так як $\cos(mx - nt) \neq 0$, маємо звичайне лінійне однорідне диференціальне рівняння з сталими коефіцієнтами

$$Y'' - m^2Y = 0.$$

Його загальний розв'язок $Y(y) = C_1\, ch\, my + C_2 sh\, my$. Для знаходження часткового розв'язку, що задовольняє умову $Y(0) = a$, підставимо в загальний розв'язок a замість Y і 0 замість y, звідси $C_1 = a$, і відповідно $Y(y) = a\, ch\, my + C_2 sh\, my$. Тому

$$\Phi(x;y) = \cos(mx - nt)\,(a\, ch\, my + C_2 sh\, my).$$

Використаємо другу крайову умову. Знайдемо $\frac{d\Phi}{dy}$ і підставимо 0 замість $\frac{d\Phi}{dy}$ і – h замість y. Маємо:

$$\frac{d\Phi}{dy} = m\cos(mx - nt)(a\, sh\, my + C_2 ch\, my),$$

а після підстановки

$$m\cos(mx - nt)(-a\, sh\, mh + C_2 ch\, mh) = 0.$$

Оскільки $cos(mx - nt) \neq 0,$

$$-a\, sh\, mh + C_2 ch\, mh = 0.$$

Із цього рівняння знаходимо відношення

$$\frac{c_2}{a} = \frac{sh\, mh}{ch\, mh}$$

і підставимо його в $\Phi(x;y) = \cos(mx - nt)\,(a\, ch\, my + C_2 sh\, my)$. Отримаємо:

$$\Phi(x;y) = a\cos(mx - nt)\left(ch\, my + \frac{sh\, mh}{ch\, mh} sh\, my\right),$$

або, зауваживши, що

$$ch\, my\, ch\, mh + sh\, my\, sh\, mh = ch\,(y + h),$$

отримаємо:

$$\Phi(x;y) = c\cos\,(mx - nt) ch\,(y + h),$$

де покладено $\frac{a}{ch\, mh} = c.$

Ця задача зустрічається в гідродинаміці при відшукання потенціалу швидкостей хвиль на глибині h з вертикальними стінками.

Розглянемо приклад розв'язування функціонального рівняння, тобто рівняння з якого потрібно визначити загальний вигляд функції [28].

Приклад 2. Знайти таку двічі диференційовану функцію $\varphi(u)$, щоб відношення

$$\varphi(x + y)\varphi(x - y) = \varphi^2(x) - \varphi^2(y)$$

залишалось справедливим для всіх значень x і y.

Продиференціюємо задане рівняння по $x,$ а потім по y; отримаємо:

$$\varphi'(x+y)\varphi(x-y)+\varphi'(x-y)\varphi(x+y)=2\varphi(x)\varphi'(x),$$

$$\varphi''(x+y)\varphi(x-y)-\varphi''(x-y)\varphi(x+y)=0.$$

Другу рівність перепишемо так:

$$\frac{\varphi''(x+y)}{\varphi(x+y)}=\frac{\varphi''(x-y)}{\varphi(x-y)}.$$

Звідси випливає, що функція $\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}$ не повинна змінюватися від заміни $u=x+y$ на $u=x-y$. Так як $x+y$ і $x+y$ мажуть мати будь-яке значення і не залежати одне від одного, то

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}=k,$$

де $k=const$.

Розглянемо два випадки:

1) $k=n^2$ $(k>0)$. Отримаємо диференціальне рівняння

$$\varphi''(u)-n^2\varphi(u)=0.$$

Його загальний розв’язок

$$\varphi(u)=C_1 ch\, nu+C_2 sh\, nu.$$

Якщо в початковому рівнянні замінимо $y=x$, то отримаємо:

$$\varphi(2x)\varphi(0)=\varphi^2(x)-\varphi^2(x)=0.$$

Оскільки $\varphi(2x)\neq 0$, то маємо умову $\varphi(0)=0$, яка дає можливість визначити одну з довільних сталих. Для цього підставимо значення $u=0$ в загальний розв’язок:

$$\varphi(0)=C_1 ch\, 0+C_2 sh\, 0,$$

звідки $C_1=0$, і відповідно $\varphi(u)=C\ sh\, nu$, де замість C_2 замінили на C.

2) $k=-n^2$ $(k<0)$. Отримаємо диференціальне рівняння

$$\varphi''(u)+n^2\varphi(u)=0.$$

Його загальний розв’язок $\varphi(u)=C_1 cos\, nu+C_2 sin\, nu.$

Додатковою умовою $\varphi(0) = 0$ зводиться до відношення $C_1 cos\, 0 + C_2 sin\, 0 = 0$, звідси $C_1 = 0$, і відповідно $\varphi(u) = C_1 cos\, nu$, де як і в попередньому випадку, виконана заміна C_2 на C.

Приклад 3. Знайти криву, у якої величина відрізка, що перетинає дотичну в будь якій точці кривої на осі *Oy*, пропорційна секансу кута φ, утвореного радіус-вектором цієї точки з віссю *Ox*.

Величина відрізка, що перетинає дотичну на осі *Oy*, рівна $y - xy'$. Так як $tg\, \varphi = \frac{y}{x}$, то $\sec\varphi = \sqrt{1 + tg^2\varphi} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

Складемо диференціальне рівняння

$$y - xy' = a\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

і перетворимо його до вигляду

$$y' = \frac{y}{x} - a\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2}.$$

Його загальним розв'язком є

$$y = x\, sh\, \left(\frac{a}{x} + C\right)$$

(знак «мінус» в правій частині відсутній тому, що в нашому рівняння у коефіцієнт a входить із знаком «мінус», який можна винести за знак гіперболічного синуса як непарної функції) [14].

Завдання для самостійного опрацювання:

1. Знайти загальний розв'язок наступних диференціальних рівнянь:
   a) $y' + a^2y^2 - b^2 = 0$,
   b) $y'(1 + sh\, x)sh\, y + ch\, x\, (chy - 1) = 0$,
   c) $y'(x\, ch\, y + sh\, x) + \ y\, ch\, x + sh\, y = 0$.
2. Знайти загальний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами:
   a) $y'' + y' - \frac{y}{4} = 0$,
   b) $y^v - 5y'' + 15y = 0$,

c) $y'' + y = ch\, x$,

d) $y'' - b^2 y = c\, sh\, bx$,

e) $y''' - 2y'' - a^2 y' + 2a^2 y = sh\, x$.

3. Знайти частковий розв'язок рівняння $y'' - 4y = e^{2x}$, що задовольняє початковим умовам $y = y_0, y' = y_0'$, при $x = 0$.

3.3 . Використання рядів для розв'язування диференціальних рівнянь

Розв'язки багатьох диференціальних рівнянь не виражаються в елементарних функціях. В цих випадках користуються наближеними методами інтегрування диференціальних рівнянь. Одним з таких методів є представлення розв'язку рівняння у виді степеневого ряду; сума скінченного числа членів цього ряду буде наближено рівна шуканому розв'язку. Вказаний степеневий ряд знаходять способом невизначених коефіцієнтів або способом, що ґрунтується на застосуванні ряду Тейлора (Маклорена).

Спосіб невизначених коефіцієнтів особливо зручний у застосуванні до лінійних рівнянь, тобто рівнянь виду

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x),$$

і полягає в наступному. Якщо всі коефіцієнти $p_k(x)$, $(k = 1,2, \dots, n)$ це рівняння і вільний член $f(x)$ розкладається в ряди по степенях $(x - a)$, що збігаються на інтервалі $(a - h, a + h)$, то шуканий розв'язок $y = f(x)$ також представляється степеневим рядом

$$y(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \cdots + C_n(x - a)^n + \cdots,$$

що збігаються в цьому ж інтервалі. Підставляючи в рівняння функцію $y(x)$ і її похідні, прирівнюючи її коефіцієнти при однакових степеня $(x - a)$. Із отриманих при цьому рівнянь і заданих початкових умов шукаємо коефіцієнти $C_0, C_1, C_2, \dots$

Спосіб заснований на застосуванні ряду Тейлора (Маклорена), полягає в послідовному диференціюванні даного рівняння. Це дає можливість знайти значення похідних, що містяться у виразах для коефіцієнтів ряду

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-n)^n + \cdots,$$

є розв'язком рівняння [14].

*Приклад 4***.** Знайти перші п'ять членів розкладу в ряд розв'язку рівняння $y' = x^2 + y^2$, що задовольняє умову $y = \frac{1}{2}$ при $x = 0$.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{('v)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

Знайдемо вираз для трьох наступних похідних, диференціюючи дане рівняння $y' = x^2 + y^2$:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'', \quad y^{(IV)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy'''.$$

Обчислимо значення цих похідних при $x = 0$, приймаючи до уваги початкові умови $y(0) = \frac{1}{2}$:

$$y'(0) = 0 + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \qquad y''(0) = 2 \cdot 0 + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y'''(0) = 2 + 2\frac{1}{16} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{8}, \qquad y^{(IV)}(0) = \frac{11}{4}.$$

Підставляючи ці значення в початковий запис даного прикладу, отримаємо:

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \frac{11}{96}x^4 + \cdots.$$

*Приклад 5***.** За допомогою степеневого ряду проінтегрувати рівняння

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2\,.$$

Нехай

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots,$$

тоді

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots,$$

$$y'' = 2C_2 + 2\cdot 3C_3x + 3\cdot 4C_4x^2 + 4\cdot 5C_5x^3 + \cdots$$

Підставляючи вираз для y, y', y'' в дане рівняння, отримаємо

$$(1-x)(2C_2 + 2\cdot 3C_3x + 3\cdot 4C_4x^2 + 4\cdot 5C_5x^3 + \cdots) + x(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 +$$
$$+4C4x3+5C5x4+\ldots-(C0+C1x+C2x2+C3x3+C4x4+C5x5+\ldots)=$$
$$= x^2 - 2x + 2$$

або

$$(2C_2 - C_0) + (2\cdot 3C_3 - 2C_2 + C_1 - C_1)x + (3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + 2C_2 - C_2)x^2 +$$
$$+(4\cdot 5C_5 - 3\cdot 4C_4 + 3C_3 - C_3)x^3 + (5\cdot 6C_6 - 4\cdot 5C_5 + 4C_4 - C_4)x^4 + \cdots =$$
$$= x^2 - 2x + 2.$$

Так як y – розв'язок рівняння, то остання рівність виконується тотожністю; коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівностей рівні між собою:

$$\begin{array}{c|c}
x^0 & 2C_2 - C_0 = 2 \\
x^1 & 2\cdot 3C_3 - 2C_2 = -2 \\
x^2 & 3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + C_2 = 1 \\
x^3 & 4\cdot 5C_5 - 3\cdot 4C_4 + 2C_3 = 0 \\
x^4 & 5\cdot 6C_6 - 4\cdot 5C_5 + 3C_4 = 0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^n & (n+1)(n+2)C_{n+2} - n(n+1)C_{n+1} + (n+1)C_n = 0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Розв'язуючи дану систему отримаємо

$$C_2 = \frac{2 + C_0}{2} = 1 + \frac{C_0}{2}, \qquad C_3 = \frac{C_0}{3!}, \quad C_4 = \frac{C_0}{4!}, \quad C_5 = \frac{C_0}{5!}, \; C_6 = \frac{C_0}{6!}, \ldots$$

Таким чином, всі коефіцієнти починаючи з C_2, виражені через коефіцієнт C_0, котрий залишається довільним; залишається довільним і C_1 (цей коефіцієнт не входить в отриману систему). Відповідно, шуканий розв'язок представлено рядом

$$y = C_0 + C_1x + \left(1 + \frac{C_0}{2}\right)x^2 + \frac{C_0}{3!}x^3 + \frac{C_0}{4!}x^4 + \frac{C_0}{5!}x^5 + \frac{C_0}{6!}x^6 + \cdots,$$

що збігається при всіх x. Це й розв'язок є загальним:

$$y = C_0\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + (C_1 - C_0)x + x^2,$$

$$y = C_0e^x + C'x + x^2$$

де $C_1 - C_0 = C'$ - довільна стала $[18, \text{ст.} 511 - 514]$.

*Приклад 6***.** Знайти перші п'ять членів розкладу у ряд часткового розв'язку рівняння $y'' - 2y' + y = e^x$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Нехай шуканий розв'язок представляється зведеним степеневим рядом

$$y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots.$$

Двічі диференціюючи цей ряд в його інтервалі збіжності, отримаємо

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots,$$

$$y'' = 2C_2 + 2\cdot 3C_3x + 3\cdot 4C_4x^2 + 4\cdot 5C_5x^3 + \cdots$$

При $x = 0$ отримаємо $y(0) = C_0, y'(0) = C_1$; беручи до уваги початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = 1.$, знайдемо перші дві коефіцієнта розкладу для $y(x)$: $C_0 = 0, C_1 = 1$. Підставив в дане диференціальне рівняння вираз для $y(x), y'(x), y''(x)$ і розклад в ряд функції e^x, отримаємо

$$2C_2 + 2\cdot 3C_3x + 3\cdot 4C_4x^2 + 4\cdot 5C_5x^3 + \cdots - 2(1 + 2C_2x + 3C_3x^2 +$$

$$+4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots) + x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

або

$$(2C_2 - 2) + (2\cdot 3C_3 - 4C_2 + 1)x + (3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + C_2)x^2 +$$

$$+(4\cdot 5C_5 - 2\cdot 4C_4 + C_3)x^3 + (5\cdot 6C_6 - 2\cdot 5C_5 + C_4)x^4 + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах цієї рівності, отримуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $C_2, C_3, C_4, \ldots$:

$$2C_2 - 2 = 1, \qquad 2\cdot 3C_3 - 4C_2 + 1 = 1,$$

$$3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + C_2 = \frac{1}{2}, \qquad 4\cdot 5C_5 - 2\cdot 4C_4 + C_3 = \frac{1}{3},$$

$$5\cdot 6C_6 - 2\cdot 5C_5 + C_4 = \frac{1}{4}, \ldots$$

Розв'язавши, отримаємо $C_2 = \frac{3}{2}, C_3 = 1, C_4 = \frac{5}{12}, C_5 = \frac{1}{8}$, ... Таким чином, частковий розв'язок можна виразити формулою

$$y = x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{8}x^5.$$

Завдання для самостійного опрацювання:

1. Проінтегруйте рівняння методом степеневих рядів:
   a) $y'' + xy' + y = 0,$
   b) $y'' = ye^x$
2. Проінтегруйте рівняння методом узагальнених степеневих рядів:
   a) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$
   b) $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0$
   c) $x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0$
   d) $x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$
   e) $x^2y'' - 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0$
   f) $xy'' + y\, ln(1-x) = 0$
3. Знайти перші п'ять членів розкладу у ряд часткового розв'язку рівняння $y'' - 5y' + y = e^x$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = 2.$
4. Знайти перші п'ять членів розкладу в ряд розв'язком рівняння

$$y' = x^2 - y^2$$

що задовольняє умову $y = 3$ при $x = 0.$

Висновки

Під час написання магістерської роботи було проаналізовано великий обсяг наукової та методичної літератури та досліджено різні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

Досліджено інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів; розглянуто в чому полягає даний метод розв'язування, можливі виникнення труднощів під час виконання певних завдань та шляхи їх подолання.

Систематизовано основні відомості про гіперболічні функції та тригонометричні функції, застосування даних функцій для знаходження розв'язку звичайних диференціальних рівнянь.

Одним із загальних методів якісного та лаконічного розв'язування для даного виду рівнянь є застосування степеневих рядів.

Розглянуто методику та послідовність зведення диференціальних рівнянь другого порядку (та вищих порядків) до рівнянь Бесселя. Проведено дослідження застосування степеневих рядів до рівняння Бесселя, також було розроблено методичні рекомендації до проведення практичних занять з даної теми.

Матеріал даної магістерської роботи може бути використаний при викладанні дисципліни «Диференціальні рівняння» у вищому навчальному закладі. Висновки, наукові положення і рекомендації, сформульовані в даній роботі є достовірними і всебічно обгрунтованими, що підтверджується використанням широкого спектру сучасних методів досліджень, повнотою джерел використаної інформації.

Список використаних джерел

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособ. Изд. 7-е, испр. Москва : Изд-во МГУ, 1984. 296с.

2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний : Гос. изд-во физико-мат. лит. Москва, 1958. 408 с.

3. Вибрации в технике : Справочник. Т. 2. Москва : Машиностроение, 1979. 351 с.

4. Найфэ А.Х. Методы возмущений. Москва : Мир, 1996. 456 с.

5. Пономарев В.М., Литвинов А.П. Основы автоматического регулирования и управления. Лекции : учеб. пособ. Москва, 1974. 440 с.

6. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений : учебник. Москва : КомКнига, 207. 204 с

7. Клочко Т.В., Кондратьєв Б.В., Лесік Н.І. Дослідження особливих розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку : навч.-метод. посіб. Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2012. 44 с.

8. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения : примеры и задачи : учеб. пособ. Москва : Высш. шк., 1989. 383 с.

9. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособ. Москва : Мир, 1986. 463 с.

10. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладних задачах : учеб. изд. Москва : Наука, 1986. 256 с.

11. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: уч.-изд. Москва : Наука 1978. 304 с.

12. Айнс Э.Л. Обыкновенны дифференциальные уравнения. пер. з англ. под..ред. А.М. Эфроса. Харьков, 1939. 719 с.

13. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений: пер. з немец. Макарова Н.П. Москва, 1974. 319 с.

14. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. пер. з англ. Жукова А.Ф. под.ред. С.И. Похожаева. Москва : Наука, 1988, 304 с.

15. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости : Иследование резонансних многочастотных систем: учеб. пособ. Москва : Наука, 1986. 192 с.

16. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учеб. пособ. Москва, 1967. 471 с.

17. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Москва : Наука, 1985. 561 с

18. Справочникпо высшей математики/ А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. Мн. : ТетраСистемс, 1999. 640 с.

19. Хартман Ф. Обыкновенны дифференциальные уравнения. пер. з англ.Сабитова И.Х. и Егорова В.Ю. под. ред. В.М. Алексеева. Москва : Мир, 1970. 719 с.

20. Калякин Л.А. Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности. Уфимский математический журнал. 2009. №2 с.29-52.

21. Щербаков В.С. Теория автоматического управления. Линейные непрерывные системы : учеб. пособ. Омск : СиБаДи, 2019. 142 с.

22. Егоров В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Изд. 2-е. Москва : ФИЗМАЛИТ, 2005. 384 с.

23. Понтрягин Л.С. Обыкновенное дифференциальные уравнения. Изд. 4-е. Москва : Наука, 1974. 331 с.

24. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. Киев : Либидь, 1992. 188 с.

25. Гутер Р.С. Янпольський А.Р. Диференціальні рівняння. Львів : Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 1976. 304 с.

26. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ю.К. Рудавський та ін. Львів : Вища школа, 2001. 244 с.

27. Жегалов В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения в научных теориях. Казань : Казанское математическое сообщество, 2003. 100 с.

28. Головатий Ю.Д., Кирилич В.М., Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь : навч. посіб. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. 470 с.

29. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні та інтегральні рівняння : навч. посіб. Вид. 2-ге, випр. та доп. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. 360 с.

30. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння : навч. посіб. Київ : Техніка, 2003. 368 с.

31. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф.С. Гудименко та ін. Київ : Вища школа,1972. 154 с.

32. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Минск : Высшая школа, 1979. 136 с.

33. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб.пособ. Изд. 6-е. Москва : УРСС, 2003. 272 с.

34. Янпольський А.Р. Гиперболические функции. Москва : ФИЗМАЛИТ, 1960. 197 с.

35. Кафтанова Ю.В. Специальные функции математической физики. Научно-популярное издания. Х. : ЧП «Новое слово». 2009. 596с.

36. Боголюбов Н.Н., Садовников Б.И. Об одномварианте метода усреднения. Вестник МГУ.1961. №3. с.24-34.

37. . Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальний курс. М. : Изд-во МГУ, 1985. — 662 с.