

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ОЧИЩЕННЯ ВОДИ
ВІД ОРГАНІЧНИХ ЗАБРУДНЕНЬ НА
КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ**

Виконала: студентка 2-го курсу магістратури,

групи М-М-21

спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)

Козак Юлія Олегівна

Керівник: *к.т.н., доц. Присяжнюк І. М.*

Рецензент: *д.т.н. проф. Сафоник А. П.*

Рівне – 2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ I. ОЧИСТКА ВОДИ З ВИКОРИСТАННЯМ ФІЛЬТРІВ.....	8
1.1 ФІЛЬТРУВАННЯ ВОДИ. ВИДИ ФІЛЬТРУВАННЯ	8
1.2 ФІЗИЧНА СХЕМА ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРУВАННЯ	12
1.3 КЛАСИФІКАЦІЯ ФІЛЬТРІВ	20
1.4 ПОКРАЩЕННЯ РОБОТИ ФІЛЬТРІВ	23
1.6 ФІЗИЧНІ СПОСОБИ ОЧИЩЕННЯ РІДИН	32
РОЗДІЛ II. ДЕЯКІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО- ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ	36
2.1 ФІЛЬТРАЦІЯ ВОДИ НА ДВОШАРОВОМУ КАРКАСНО-ЗАСИПНОМУ ФІЛЬТРІ ІЗ УРАХУВАННЯМ ДИФУЗІЇ.....	36
2.2 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО- ЗАСИПНОМУ ФІЛЬТРІ З УРАХУВАННЯМ ЗВОРОТНЬОГО ВПЛИВУ ...	41
2.3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ВОДИ ІЗ ЗАВИСЛИМИ ЧАСТИНКАМИ БЕЗ УРАХУВАННЯ ДИФУЗІЇ	50
2.4 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ДВОШАРОВОГО КАРКАСНО-ЗАСИПНОГО ФІЛЬТРУ.....	59
РОЗДІЛ III. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ВИКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ОЧИСТКИ ВОДИ ВІД ОРГАНІЧНИХ ЗАБРУДНЕНЬ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ В РАМКАХ РОБОТИ У КЛАСАХ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ.....	68
3.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ. ОДНОРІДНЕ ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ	69

3.2 ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	73
3.3 ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	75
3.4 СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ У ПРОЦЕСІ ФІЛЬТРУВАННЯ В ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ. АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ.	77
ВИСНОВКИ.....	88
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	89

ВСТУП

Як говорить народна мудрість: «Без води і ні туди, і ні сюди». Ми знаємо, що вода породила все. Звичайно, адже вона є фундаментом, головною сировиною людської діяльності.

Грецькі жреці безсумнівно були впевнені про те, що вода містить цілющу силу. Вони навіть будували храми Ескулапа поблизу джерел й охороняли їх. Від часів Римської імперії й до нині збереглися плити, на котрих чітко видно написи, які давали вказівки на напрямок доріг, що вели до «священних вод Геркулеса».

Вода бере участь практично у всіх хімічних процесах.

Ще зі школи нам усім знайомий той факт, що поверхня Земної кулі, а саме 70,8 % вкрита водою, тоді все, що залишається, а це 29,2 % – сушею. Основна маса води 97% - солоня, решта 3% – прісна, тобто та, котру ми споживаємо. Правда ж є над чим поміркувати. Навіть ходять чутки, що до 2035 року кількість дефіциту прісної, питної води дійде до 41 %.

Актуальність теми. В даний час, проблеми, які пов'язані із забрудненням води, значно погіршилися. Обробка осаду, котрий утворюється при очистці майже будь-якої стічної води, є однією з найбільш важких та дорогих «задоволень» [14].

Цей процес включає в себе:

- ✓ кондиціонування осадів;
- ✓ зневоднення осадів;
- ✓ підготовка їх до подальшої переробки (зnezараження, сушка та ін.);
- ✓ власне переробка (утилізація, знищення, накопичення та ін.);
- ✓ кондиціонування і використання води, котра вийшла і т. д..

Водовідвідна система будь-якого промислового виробництва призначена для відведення води, але через те, що стає все більше технологічних та виробничих викидів, ця вода стала стічною, яку просто необхідно очищати

перед тим, як вона буде ще раз використовуватись чи ж скидатись за рамки підприємства. Коли ж вода використовується у певних виробничих цілях – вона стає брудною чи ж нагрівається, а це в свою чергу змінює її властивості, котрі вона мала спочатку. Внаслідок ось такого процесу воду стає неможливо використовувати в подальшому, тобто вона вже стає виробничо-стічною, або ж як її називають промисловим стоком.

На даний час будь-яке промислове підприємство у своєму складі містить інженерні мережі, які включають в себе і комплекс споруд, що мають водовідвідну систему, яка допомагає здійснювати відведення цієї ж використаної води з території даного підприємства (при умові, що їх подальше застосування неможливе тому, що не відповідає технічним умовам чи техніко-економічним показникам) [29]. У цьому складі також є чи малко споруд, набір пристроїв і механізмів для очистки води від різних домішок.

Природна вода повинна пройти певний шлях, перш ніж її можна буде використовувати на господарські потреби або потреби деяких промислових підприємств. Вода повинна відповідати всім фізико-хімічним показникам для подальшого використання споживачами. Для цього використовують різні технологічні схеми. Фільтри із дрібнодисперсними наповнювачами є одними із основних елементів цих схем і, мабуть, найголовнішим. Їх функція – утримувати найдрібніші частинки, що містяться у воді, та зробити її придатною для споживання.

В наш час є безліч різних конструкцій фільтрів, котрі містять в своєму складі: різні технологічні якісь показники, різноманітне обладнання, матеріали, тощо.

Сама споруда для очищення води, яка виконує процес фільтрування, називається фільтром. В даній роботі буде розглядатися **каркасно-засипний фільтр (КЗФ)**, котрий є різновидом фільтрів, у яких використовується принцип фільтрації в напрямку зменшення розміру завантажених частинок, а саме процес (математична модель) очистки води з допомогою фільтра.

При вивченні явищ природи, вирішенні більшості задач із фізики чи техніки, хімії чи біології, або ж інших наук нам не завжди вдається знайти пряму якусь залежність між величинами, котрі описують той чи інший еволюційний процес. Проте у більшості випадків все таки можливо встановити зв'язок між невідомими характеристиками досліджуваного явища (а саме функціями) та швидкостями їхньої зміни щодо інших змінних, тобто знайти рівняння, до яких входять похідні невідомих функцій. Такі рівняння називають диференціальними.

Але, учням шкіл не достатньо того матеріалу, котрий подається в школі. Для того, щоб він зумів вирішити математичну модель, котра містить диференціальні рівняння в часткових похідних, потрібно опанувати додатково теоретичний матеріал.

Мета роботи — огляд математичної моделі нелінійних процесів очистки води від органічних забруднень на каркасно-засипному фільтрі та створення матеріалу для підготовки учнів до наукової діяльності.

Відповідно до мети було поставлено такі **завдання дослідження**:

- ✓ дослідити основну теорію та методи очистки води за допомогою фільтрів;
- ✓ розглянути деякі, вже готові моделі процесу очистки води на каркасно-засипних фільтрах;
- ✓ розглянути математичну модель процесу очистки води на каркасно-засипному фільтрі з використанням промивки;
- ✓ розробити матеріали факультативного курсу, для підготовки учнів до наукової діяльності.

Об'єктом дослідження є процес очищення води від органічних забруднень на каркасно-засипному фільтрі та його застосування у шкільному курсі математики.

Предмет дослідження — математична модель нелінійного процесу очистки води від органічних забруднень на каркасно-засипному фільтрі.

У роботі застосовувалися наступні **методи дослідження**: аналіз та синтез основної літератури з теми дипломного проекту; метод порівняння та аналогій; систематизація та класифікація основних термінів та понять; математичне моделювання процесу очистки води при фільтруванні, використання чисельного та аналітичного методів розв'язку окремих задач, використання спеціальних методик та різних підходів обробки вже існуючих дослідних даних при визначення констант та коефіцієнтів, методи сучасних комп'ютерних технологій обробки інформації, зокрема, пакет прикладних програм MathCad; графіко-аналітичний аналіз.

Обґрунтованість і вірогідність отриманих у роботі результатів власне забезпечується математичною строгістю постановок задач, застосуванням надійних і обґрунтованих числових методів їхнього розв'язування, фізичною несуперечністю отриманих числових результатів та їх узгодженням в окремих випадках із відомими у науковій літературі.

РОЗДІЛ І. ОЧИСТКА ВОДИ З ВИКОРИСТАННЯМ ФІЛЬТРІВ

1.1 ФІЛЬТРУВАННЯ ВОДИ. ВИДИ ФІЛЬТРУВАННЯ

Де Сент-Екзюпері для води присвятив такі чудові слова: «Вода! У тебе немає ні смаку, ані кольору, ні запаху, тебе неможливо описати, тобою можна і треба насолоджуватися, не знаючи що ти таке. Не можливо сказати, що ти необхідна для життя, ти – саме життя ти – найбільше багатство на світі...».

Ми з впевненістю можемо сказати, що чиста вода – це гарантія нашого чудового самопочуття та здоров'я. Однак через застарілу комунікацію, несприятливі обставини зовнішнього середовища, забруднення підземних вод водопровідну воду використовувати не можна.

Якщо на промислових підприємствах не здійснювати якісну очистку стічної води, то забруднене навколишнє середовище призведе до ряду проблем. Наприклад:

- На молочних чи м'ясопереробних підприємствах, стічна вода наявна на різні органічні забруднення, такі як: запортки глистюків, хвороботворні мікроорганізми. При контакті з питною водою, органічні речовини тваринного походження можуть викликати у людей різноманітні інфекційні захворювання.
- Стічна вода індустріальних підприємств, яка є неочищеною впливає на присмак, зовнішній вид і аромат води, розбиває кислотно-лужну рівновагу середовища. При потраплянні нафтопродуктів, жирів з рослин чи тварин у річки й озера , як наслідок поверсі водойм з'являється плівка, яка не дає воді збагачуватися киснем. Все це значно понижує якісність води, або ж взагалі робить її непридатною для пиття, а також для побутових та рекреаційних потреб.
- Якщо мова йде про текстильну, хімічну чи металообробну галузі, то також неочищена стічна вода з даних підприємств, при потраплянні

у водойму здійснює викиди токсичних речовин, котрі в свою чергу є шкідливими для риб, тварин і особливо для людей.

Забруднена вода із різних індустріальних підприємств помітно поменшує масштаби води, котру ми власне і споживаємо. У цьому ж оточенні і розводиться риба, цією рідиною обробляють сільськогосподарські культури, годують тварин. Все вище перелічене є продуктами харчування, котрі в свою чергу дають не позитивний вплив на здоров'я та самопочуття людей.

В наш час є безліч різних технологій, які надають нам спроможність прочистити стічну воду і відповідно існує різна їх класифікація. Найпоширенішими способами очищення є:

- машинальний;
- фізико-хімічний;
- біологічний.

Кожен, з вище перерахованих способів передбачає цілу низку технік.

Для того, щоб використати той чи інший спосіб або техніку для очищення води, потрібно врахувати склад, концентрацію та в якому становищі (рідкому або твердому) містяться забруднюючі речовини.

Найбільш такою ефективною технікою для витягнення всіляких «вредних» домішок й речовин, що є забруднювачами – є використання фільтра для води.

Таку техніку як фільтрування зазвичай використовують, коли потрібно відділити від стічної води тонко- дисперсні тверді або рідкі сполуки. Вважаючи, що при відстоюванні даний процес зробити неможливо. Розподіл виконують з використанням пористих перегородок, які в свою чергу проштовхують рідину та утримують дисперсну фазу. Цей процес виконується під впливом гідростатичного натиску в місці, де знаходиться рідина, підвищеного натиску над перегородкою або вакууму після перегородки.

Для початку, щоб підготувати воду її звільняють від завислих речовин, або іншими словами це називається прояснення води – попередня обробка.

Доочищення води за допомогою фільтру це вже як правило завершальний етап при двоступінчастій і багатоступінчастій технологічній схемі очистки [22]. Якщо ж говорити про одноступінчасту схему водопідготовки, то там фільтрування використовується доволі рідко.

І так, дамо поняття фільтру. Простими словами, фільтр – це пристрій, функція якого розділення чогось від чогось. А в науковому сенсі, **фільтр** – пристрій для очистки неоднорідної системи пропусканням через пористу (фільтрувальну) перегородку [38, ст.62]. Ця перегородка в більшості створюється з перфорованих сіток із металу, яка в своєму складі має: сталь, що не ржавіє, алюміній, латунь та ін.. Також дана перегородка може бути і тканинною, яка виготовляється з таких матеріалів: азбест, бавовна, вовна та ін..

Однією з головних *функцій перегородки* є – затримка домішок, які чинять мінімальний гідравлічний опір та не мають змогу набухати або ж руйнуватися під час фільтрації, досить таки міцні за своєю структурою та мають чи не малу хімічну витримку.

Всі *фільтри* поділяються за різноманітними ознаками:

- за проходження процесу - регулярний чи безупинний;
- за ходом дій розподілу на ущільнення й висвітлення;
- за напором під час фільтрації:
 - при гідростатичному натиску в колоні де знаходиться рідина (до 50000 Па);
 - під вакуумом (до 85000 Па);
 - під тиском (від 300000 Па до 1500000 Па);
- за направленістю фільтрації:
 - вниз;
 - вправо;
 - вгору;
 - вліво;
- за характеристиками, що пов'язані з будовою;

- за технологією діставання осаду;
- за присутністю промивки або ж зневоднення осілих речовин;
- за конфігурацією і місцем поверх фільтрування.

Системи, які слугують для очистки стічних водойм в більшості застосовують фільтри регулярної дії:

- нутч фільтри – використовуються для фільтрування невибухонебезпечних рідин (в більшості це I-IV класи небезпеки) без нагрівання;
- листові фільтри – пристрій регулярної дії, котрий буде працювати лише під тиском, де напрямок сили тяжіння буде перпендикулярний до руху фільтрату.
- фільтр-преси – пристрій, який в більшості застосовують для збездоднення методом фільтрації малесеньких пульп, у котрих не можна визначити вміст твердих речовин.
- фільтри, котрі працюють безперервно – це барабанні, стрічкові та дискові.

Є кілька основних типів фільтрування:

— *проціджування* – зволікання частинок, котрі за розмірами менші аніж діаметр отворів перегородки;

— *плівкове фільтрування* – коли через певні умови та через певний період часу на вершечку фільтруючої рідини, формується плівка, яка власне і містить завислі речовини.

— *об'ємне фільтрування* – завислі шматочки, які мають змогу затримуватися у товщині елемента, котрий має пористу основу; звідси слідує те, що забрудненість такого фільтру може бути дуже великою.

Грязеємність фільтра – маса забруднених частин, яку в змозі втримати завантаження фільтра [38, ст.63]. Якщо ж дати більш конкретніше означення, то під грязеємністю фільтра мається на увазі та нечиста маса, котра

затримується на одиницю площі у фільтрі за час, коли саме здійснюється зміна тиску у фільтрі починаючи від початку до допустимої границі.

Варто знати, коли та за яких умов використовувати той чи інший фільтр. Якщо проводити фільтрування у тканинних фільтрах або у фільтрах в основі яких лежить кераміка з текстильних полотен фільтруючими елементами, то в такому разі використовують проціджування чи плівкове фільтрування; якщо ж мова йде про дрібнозернисті насипні фільтри – то застосовують лише плівкове фільтрування, а у велико-зернистих насипних фільтрах – тільки масивне фільтрування.

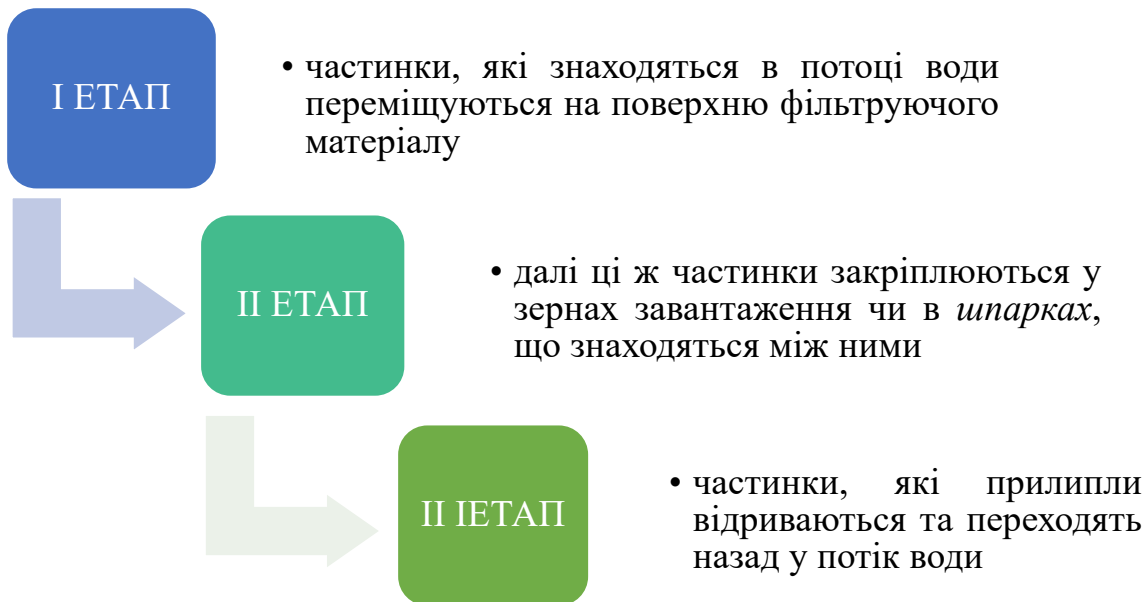
Спочатку стічна вода потрапляє у середину фільтра, де власне вона вже проштовхується через фільтруючий матеріал і дренаж та утилізується з фільтра. Коли фільтруючий матеріал забруднюється, то виконуються його промивання, подачею промивних вод, рухаючись знизу до гори. Саму дренажну установку створюють із бетонних плит, що складаються і є обов'язково пористими. Вже на готовий пристрій розкладають у кілька шарів фільтруючий матеріал (від 2 до 4 шарів), єдиної гранулометричної комплектації. Зазвичай висота одного шару сягає від 1,5м до 2 м, а швидкість здійснення процесу фільтрування задається такою, щоб сягала 13- 21 км/год.

1.2 ФІЗИЧНА СХЕМА ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРУВАННЯ

Вода, у котрій є вміст домішок, після проходження через зернисту наповненість прояснюється. Проте, тут виникає запитання, яка ж саме результативність такого ходу дій, і від чого вона буде залежати? Якщо тривалий час поміркувати, то можна прийти до такого висновку, що результативність буде залежати тільки від фізичних та хімічних характеристик частинок тих завантажень, котрі фільтруються та деяких гідродинамічних чинників. Певні місця, а якщо конкретніше то у товщині завантаження можна помітити скупчення бруду, а як результат такого процесу стають зменшується кількість вільних місць у порах, а гідравлічний супротив наповнених частинок

збільшується. Внаслідок такої дії всередині наповнення збільшується дефіцит натиску.

В загальному процес фільтрації можна описати в кілька етапів, поданих нижче у вигляді схеми.



Відлучення завислих часточок із води та власне фіксування їх на завантажених зернятках здійснюється під діяльністю явища адгезії. Осадок, котрий створюється на часточках завантаженого матеріалу, є не досить міцної структури, а тому під дією сил гідродинаміки має схильність до руйнування. В такому разі, деякі окремі частинки раніше затриманих часточок відокремлюються від завантажених зернят у вигляді малесеньких шматочків, схожих на пластівці й переміщуються далі по завантажених шарах, які залишилися (такий хід називається *суфозією*), де знову ж таки вони затримуються в дірках каналів.

З вище сказано можна стверджувати, що очищення води це власне наслідок таких процесів, як адгезія та суфозія. Даний хід, а саме прояснення на кожному шару, котрий містить зернятка завантаження буде виконуватися аж до тих пір, поки сила приставання речовин перевищуватиме інтенсивність їх відривання [23, 24].

Дивлячись наскільки насичені верхні шари, процес фільтрації переходить на нижчі шари. Тобто те місце, у якому здійснюється фільтрація, наче по сходинках спускається згідно із напрямом плину води, рухаючись від частини, де фільтруючий матеріал «нагодувався» брудом та там, де проходить дія суфозії, до місця власне свіжого завантаження.

Звісна ж річ, що такий процес не буде вічним, настане такий час, коли завантажений шар фільтра буде повністю насичений брудом через здійснення фільтрації води, і тоді вже той ступінь води, котрий необхідний не забезпечуватиметься. Вже на виході завантаження концентрація суспензії розпочне зростати.

Є таке поняття, як час захисної дії завантаження. Це час, на протязі якого відбувається освітлення води до вказаного ступеня. Коли процес досягне ось цього часу чи коли буде досягнуто певні граничні втрати напору, то очищаючий фільтр варто перевести в режим промивки, тоді завантаження промивається протилежним струменем води, а забруднюючі речовини скидаються в дренаж.

Щоб провести технологічні розрахунки фільтрів видатний професор, інженер, та доктор технологічних наук Даниїл Максимович Мінц використав умовну схему забруднення завантаження, подану нижче: у шарі фільтруючого матеріалу осад буде накопичуватися до тих пір, поки повністю не насичиться, потім він просто перестає затримувати забруднення. Коли роль першого шару зменшується, то значення інших шарів зростає, а товщина шару завантаження, котрий приймає участь у ході забруднень, посилюється. Зрештою це відбуватиметься, поки товщина діючого завантаження стає недостатньою і якість фільтрату значно гіршає.

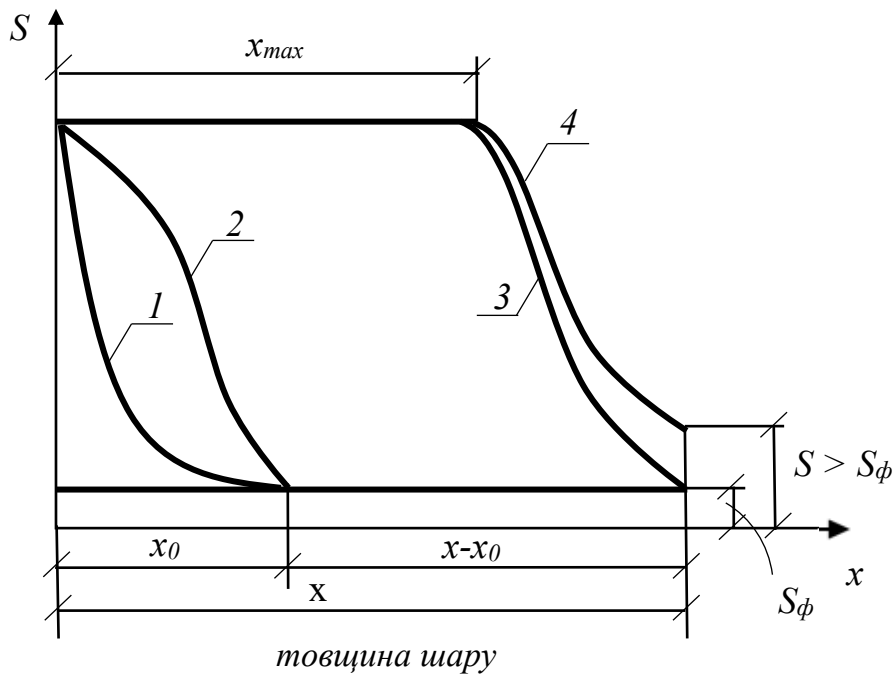


Рис. 1 Процес фільтрації води

На *рисунку 1* поданого нижче, зображено процес очистки води за допомогою фільтра, згідно вище описаної схеми.

Згідно вище поданого *рисунку* можна побачити, що кожна крива співвідноситься до певного моменту часу після запуску фільтра.

Розглянемо кожну криву окремо.

Крива 1 показує нам початок міцного процесу, а саме коли фільтрат потрібної якості фіксується на виході з ділянки, так звану найменшою захисною товщиною фільтрувального шару. За границею шару у воді містяться найбільш стійкі частинки, котрі прилипають значно гірше.

Крива 2 відповідає за момент виникнення місця межового насичення. З цієї миті ділянка починає зміщуватись у товщу завантаження.

Крива 3 показує тривалість захисного часу t_3 – тобто, коли фільтрат при виході з шару товщиною x не погіршується.

Далі йде *крива 4*, місце розташування котрої показує на скільки збільшився вміст суспензії у фільтраті з S_ϕ до $S > S_\phi$. Протягом захисного часу в повно-насиченому стані виражається шар товщиною x_{max} .

Дивлячись на рисунок, поданий нижче, можна побачити що фронт, котрий відповідає лініям 2–3 переміщається рівномірно, а самі лінії однакової форми.

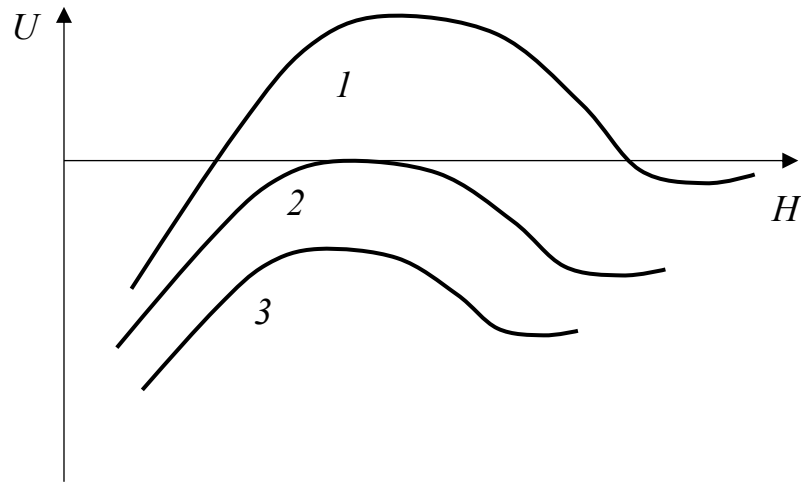


Рис. 2 Потенціальні криві, які характеризують енергію взаємодії частинок (U) у ліофобному золі у залежності від станів (H) між частинками: 1 – стійкий стан; 2 – порушення стійкості; 3 – швидка коагуляція.

Професор Вознесенський винайшов вираз, котрий відповідає для такої ж схеми й обчислює захисний час. Кажучи простіше, він знайшов формулу для обчислення часу де відбувається підвищення концентрації забруднення:

$$t_3 = Kx - t_0 \quad (1.1.1)$$

де K – коефіцієнт; x – товщина шару фільтрування; t_0 – час затримки дії фільтрування, протягом якого утворюється межа граничного насичення.

Вище подану формулу (1.1.1) запропонував професор Вознесенський щоб описати процес сорбції, але затверджена Даниїлом Мінцем так би мовити тимчасова схема роботи фільтра – дає здатність використовувати формулу (1.1.1), щоб описати процес фільтрації.

Є величезна кількість факторів, котрі мають вплив на відокремлення води від різних брудних часточок методом фільтрування. Сюди можна віднести якість фільтруючої води і фільтрату, густину шару, досить таки важливу суть дає ще й швидкість фільтрації та характеристики осаду який утворюється в

результаті фільтрування, а саме його здатність накопичуватись на зернах завантаження.

Зазначимо, що суттєвим є поєднання значень вказаних параметрів, бо лиш при такій умові буде забезпечуватись потрібний ступінь очистки води ну і тривалість часу, який в свою чергу тісно пов'язаний з між промивочним періодом роботи фільтру t_n .

Показники невідомої величини t_n беруться, враховуючи такі незалежні умови [38, ст. 66-67]:

✓ мусить виконуватися вимога, щодо допустимість чи неприпустимість погіршення якості фільтрату (тут власне береться до уваги коефіцієнт санітарної надійності);

✓ згідно деяких правил технічної експлуатації фільтрів вказується режим для їхньої промивки і відповідно час міжпромивного періоду. Наскільки забруднена вода при різних умовах залежить і від того, який темп фільтрації).

Варто наголосити, що графік, котрий показує цей взаємозв'язок дає максимум. Коли відбувається процес моделювання фільтрації, увага звертається на аналіз, у якому порівнюються залежності тривалого захисного часу і власне забрудненість завантаження. Найкраще було б, якби при швидкості, яка відноситься до значення t_z , забрудненість була близькою до максимуму. Якщо розподіл забруднень у завантаженому матеріалі буде рівномірніший, то грязеємність фільтрату буде значно більшою.

Є ряд факторів, котрі впливають на темп протікання води через фільтр: це і те, з чого зроблений фільтруючий матеріал; наскільки забруднена вода; її температура; яку товщину має шару, який фільтрує.

При чималих дослідженнях вчені встановили, що коли температура води піщаного фільтру змінюватиметься від 20 °C до 60 °C, то темп фільтрації можна збільшити аж в два рази, не змінюючи при цьому ефективність фільтрування.

Формула (1.1.2) для визначення темпу фільтрації піщаного фільтру v , м/год:

$$v = \frac{3600 \cdot c \cdot d^2 \cdot h}{l(0,7 + 0,03 \cdot T)} \quad (1.1.2)$$

де c – коефіцієнт близький до 40 в.о.; d – діаметр гранул піску, що фільтрує, м; l – грубість фільтруючого шару, м; h – дефіцит тиску при фільтрації, м; T – водна температура, °С.

Фільтр може працювати у двох режимах: робочому та форсованому. Форсований режим утворюється лиш тоді, коли включаються окремі секції для промивання чи ремонту фільтра. Саме при цьому режимі темп фільтрації зростає.

Здатність фільтру затримувати більш грубішу суспензію, залежить в більшості, від її ваги; а тоншу суспензію або ж колоїдні частинки – від сил, що діють поверхнево. Також чимале значення має заряд домішок тому, що колоїдні частки позитивного або ж негативного заряду не мають такої властивості, як об'єднання в конгломерати, зміцнюватись й перетворюватись в осад: заряд перешкоджає їх зближенню. Даний процес вирішується штучним коагулюванням. В більшості таке флокулювання здійснюється у відстійниках прояснювачах.

Є ще такий вид фільтрації, як плівковий. Його здебільшого використовують у звичайних очищаючих фільтрах. Об'ємне фільтрування в більшості здійснюється у двошарових фільтрах або ж у прояснювачах. На нижній шар фільтру кладуть кварцовий пісок, з величиною зерен 0,65-0,75 мм, а верхній шар заповнюють антрацитом величина зерен якого 1,0-1,25 мм. Плівка не буде утворюватися на поверхні верхнього шару, там домішки заходять в його пори і залишаються на поверхні зерен. Завислі речовини, котрі пройшли верхній шар, осідають у нижньому шарі, де знаходиться пісок [38, ст. 68].

Коли здійснюється промивання фільтру, два шари, засипані піском та антрацитом змішуватись не будуть. Ви запитаете чому? Та це ж очевидно, адже густина антрациту аж в два рази менша за густину кварцового піску.

Матеріали, котрі фільтрують також повинні мати ряд певних вимог, до яких входять: невисока вартість, наявність фракційного складу, загальнодоступність, вони мусять бути міцні та хімічно стійкими до води та її домішок. Для того, щоб охарактеризувати зерна, котрі завантажуються, беруть до уваги значення змінних, таких як: ефективна величина зерен та власне коефіцієнт неоднорідності, котрий визначається формулою (1.1.3):

$$K_n = \frac{d_{80}}{d_{10}} \quad (1.1.3)$$

В основному цей коефіцієнт приймає значення від 1,5 до 2,0 в.о.

Критерій завантаження, котрий показує вміст цих частинок, дорівнює діаметру зерен, мм:

$$d_{екв} = 10 \sum \frac{p_i}{d_i} \quad (1.1.4)$$

де p_i – вміст завантаженої речовини, d_i – середній діаметр зерен.

Матеріал за допомогою якого здійснюється фільтрація – різний за своєю величиною. В більшості його класифікують як:

- дрібнозернистий (розміром частинок якого 0,4 мм);
- середньозернисті (від 0,4 до 0,8 мм);
- грубозернисті (більші за 0,8 мм).

Фільтрування може здійснюватися як природними так і штучними матеріалами. До природних матеріалів можна віднести такі, як: пісок із кварцу, мармур, крихти із кераміки, антрацит у подробленому вигляді, магнетит, доломіт тощо. Щодо штучних, то це можуть бути поліпропілен, полімери, полістирол, пінополіуретан, тощо.

Для того, щоб фільтруючий матеріал не потрапив за межі фільтру, використовують спеціальні дренажні системи це можуть бути: пористі труби, ковпачки тощо або ж як варіант кладуть фільтруючі матеріали на підтримуючі

шари (гравій, щебінь тощо), розташовані один за одним у порядку збільшення крупності частинок [38, ст. 69-70].

Може бути й таке, що якість самого фільтрату в деякий момент погіршиться або ж збільшиться гідравлічний опір фільтру. То в такому випадку здійснюють прочистку фільтру.

1.3 КЛАСИФІКАЦІЯ ФІЛЬТРІВ

Не важко прийти до висновку, що зниження якості споживчої води слугувало для вироблення способу, котрий би з допомогою людини міг би підвищувати її якість. Такі країни, як: Греція, Єгипет та Стародавній Рим вперше стали використовувати очищення води. В якості фільтрів використовувалася матерія, котра утримувала деревний антрацит та інші якісь великі часточки. В такому фільтрі вода пропускала аж декілька разів, поки не досягне відмінної якості. З часом, люди стали помічати, що якщо вкинути у воду якусь річ з чистого срібла, то через певний період часу вода буде ставати світлішою, чистішою ну і певна річ кориснішою для організму людини або будь-якої живої істоти.

Проходив час, і звичайно що почалися зміни, і технології очищення води почали вдосконалюватися. На даний момент вчені люди досягнули чи немалих успіхів у очистці води. У кожному місці, де наявне централізоване водопостачання, зведено заводи чи станції з очистки води. Вони очищають воду у різні етапи: починаючи від механічного і закінчуючи біологічним, де використовують спеціально створені бактерії.

Крім вище сказаного, вченими розроблено низку індивідуальних приборів, котрі слугують для очистки води. Вони є досить таки компактними та вигідні за своєю самостійністю. Кожен тип очисного приладу слід використовувати залежно від рівня забруднення води.

Який же ш фільтр є кращим? Який фільтр варто прибрати (сконструювати) для очистки стічних вод?

Нижче подана класифікація фільтрів за низкою найважливіших характеристикних ознак [17, ст. 70]:

- ✓ за швидкістю фільтрування:
 - повільні (0,1-0,3 м/год);
 - швидкі (5-12 м/год);
 - надшвидкі (36-100 м/год);

Швидкісні фільтри можуть бути двох типів: одношарові і багатошарові. В одношарових фільтрах фільтруючий шар складається з того самого матеріалу, в багатошарових - із різних матеріалів.

- ✓ тиск, під яким працюють фільтри:
 - відкриті чи безнапірні;
 - напірні;
 - вакуумні;
- ✓ за кількістю фільтруючих шарів:
 - одношарові;
 - двошарові;
 - багатошарові;
- ✓ за технологічними умовами роботи:
 - з попереднім коагулюванням;
 - фільтри, яких коагулювання співпадає у часі з фільтруванням;
- ✓ за напрямком потоку:
 - з низхідним (зверху вниз) потоком;
 - з висхідним (знизу вгору) потоком;
 - з горизонтальним потоком;
- ✓ за величиною зерен фільтрувального матеріалу:
 - дрібнозернисті (0,2-0,4 мм);
 - середньозернисті (0,4-0,8 мм);
 - грубозернисті (0,8-1,8 мм);

- ✓ за видом фільтруючих матеріалів завантаження:
 - з інертними завантаженнями;
 - з активними (сорбентами, йонно-обмінними завантаженнями);
- ✓ за густиною фільтрувального матеріалу завантаження:
 - з важким (густина матеріалу зерен більше густини води) – це піщані фільтри, антрацитові, керамзитові, гранодіоритових, з горілих порід, з туфів тощо;
 - з плаваючим завантаженням;
 - полістирол, пінопласт, шлак тощо;
- ✓ способом регенерації:
 - з водоповітряним промиванням;
 - з водяним промиванням.

Особисто я вважаю, що найбільш активними і головне економними є багатошарові фільтри [30]. Родзинка їх у тому, що для результативності фільтрації матеріал, котрий завантажують беруть різноманітних розмірів і неоднакової густини. Зазвичай у верхній шар насипають легенький матеріал, але щоб частинки завантаження були великих розмірів, а вже у нижньому шарі важкий матеріал, і відповідно частинки завантаження малесенькі.

Коли власне виконується процес фільтрування рідини зверху у низ, або як його ще називають низхідний напрям, то у такому разі забруднені часточки, що є крупнішими за своїми розмірами затримуються у порах, котрі наявні у верхньому шарові завантажених часточок, а інші малесенькі, – у шарові, що знаходиться нижче. Як наслідок, загрузка виконує свою роботу в повному об'ємі. Ось саме такі фільтри будуть найдієвішими, коли мова йде про затримку часточок, котрі за розмірами є більшими аніж 9,9 мкм.

1.4 ПОКРАЩЕННЯ РОБОТИ ФІЛЬТРІВ

І так, що ж роблять фільтри? Якщо говорити про всі фільтри, або ж пристрої, котрі фільтрують, то вони надають безпосередньо можливість видалити із води:

- хлор;
- якісь бактерії;
- іржу;
- пісок;
- солі досить важких металів;
- різну органіку.

А саме найголовніше, якщо правильно підібрати необхідний фільтр, швидко можна побачити, що смак води стане кращим або ж можна так би сказати врятувати себе від придбання чергової сантехніки.

Якщо ж Ви вже є користувачем фільтра, то варто знати основні домінанти та методи для збільшення забрудненості часточок, що завантажуються:

1) фільтрування, котре здійснюється шляхом зменшення величин завантажених зерен. У такому випадку в перших прожилках, котрі мають дрібну та пористу основу, мул не збирається, а навпаки, пропихується всередину самого завантаження. Саме середні шари та ті, що знаходяться знизу, виконують функцію вилучення домішок, відповідно і забрудненість завантаження там підвищується.

Фільтрація за напрямком убування розміру зернят виконується, з використанням наступних технічних прийомів:

- фільтрація кількома шарами;
- висхідна фільтрація;
- фільтрація з багатьма сходинками;

- підвищення величини зерняток, котрі завантажуються, водночас із збільшенням повноти шару, з допомогою якого власне і здійснюється фільтрація;

2) зростання густини та кріпості частинок, що є осадом, котрі містяться в щілинах завантаження. Завдяки такому методу можна прибавити масу забруднення, наявного у фільтрі та значно зменшити супротив. Закріплення та ущільнення мулу можна досягнути нижче наведеними техніками:

- хід звільнення води від забруднених частинок з використанням коагулянту перед початком загрузки;
- хід звільнення води від забруднених частинок з використанням флокулянтів, які мають іон із позитивним зарядом (катіон);
- хід звільнення води від забруднених частинок з використанням коагулянтів разом із флокулянтами;
- хід звільнення води від забруднених частинок з використанням коагулювання із періодами;
- хід звільнення води від забруднених частинок без допоміжних реактивів;

3) використання спеціальних речовин для фільтрації, котрі мають високу пористу будову і розвинену питому поверхню, як приклад це можуть бути такі матеріали: керамзит (у вигляді піску, щебня чи гравія), вулканічні породи, різні шлаки та інші речовини;

4) здійснення фільтрації згідно такої технології, як убування темпу фільтрації, методом потоку води з метою її очищення – фільтрація води, котра здійснюється від осередку самої власне форми, котра завантажена і аж до радіального місця у фільтрі чи використання тільки тих фільтрів, які містять у своїй будові змінний переріз (на кшталт форми трапеції). В такому випадку, якщо пришвидшити темп, то перші шари так би мовити подвигають брудні

часточки всередину форми, де вони вже застрягають, адже під час такого процесу послаблюється гідродинамічна сила самого струменя води;

5) здійснення фільтрації із використанням напору – подовження циклу фільтрації з допомогою прибавки тривалості досягнення межових витрат натиску. Звідси слідує, що громіздкі дані про зникнення (зменшення) напору мають характерні властивості для фільтрів у яких застосовується напір.

Для того, щоб відбудувати швидкісні фільтри, котрі застосовуються у будівлях з водопроводом, або ж для вдосконалення їхньої працездатності, варто:

- відтворити початкову висоту згідно проекту, та не тільки, ще необхідно відновити зерновий склад, котрий засипається у шари фільтра, адже як наслідком багаторічного визискування частенько шустрим фільтрам властива недостатня величина шару, котрий містить в собі саме завантажені часточки, які укладаються із зернят вищої габаритності (розмірності);
- збільшити однакові частинки, котрі засипаються у фільтр;
- для фільтрації брати різноманітні матеріали, але обов'язково враховувати чи вони допускаються до використання МОЗ, здебільшого щоб поверхня була краще розвинута, аніж у піску. Як приклад, це може бути: роздрібнений керамзит, шунгіт, вулканічні відходи тощо;
- для того, щоб гравійні шари не зміщалися та не змішувалися із завантаженням на кшталт піску, адже це здебільшого приводить до відхилення, щодо визискування фільтра, варто застосовувати різноманітні за своєю будовою дренажні системи, котрі не містять гравій;
- постачати необхідну потужну силу для промивання фільтрів; заради покращення рівня та вимог праці «шустрих» фільтрів варто їх замінити на фільтри, котрі містять промивку лише водно-

повітряну. Крім того, що це буде чи немала економія води, то це ще й дасть можливість збільшити шанси довготривалої праці фільтруючих механізмів, дасть нам змогу підвищити висоту завантажених речовин, котрі фільтрують й покращити якість вже очищеної води.

1.5 ВИМОГИ СПОЖИВАЧІВ ДО ЯКОСТІ ВОДИ

Є певні вимоги до якості води, котрі залежать від її призначення: господарсько-питних цілей і харчової промисловості; сільськогосподарських цілей; охолодження; паросилового господарства; технологічних потреб у промисловості; заводнення нафтових пластів; користування в якості робочої рідини гідросистем машин [16, 2].

Вимоги до якості господарсько-питної води в Україні визначаються ДСанПіН 2.2.4-171-10 [40] «Гігієнічні вимоги до води питної, призначеної для споживання людиною» (див. табл. 1.1, 1.2 [38, ст. 13-14]). Дотримуючись всіх вимог, котрі подані у таблиці 1.1 та таблиці 1.2 та документі [40], тоді вода буде не отруйною для організмів та навколишнього середовища, вона буде безпечною за своїм складом і звичайно що матиме досить хороші органолептичні ознаки. Як приклад наведу такий, всі ми ознайомлені з тим фактом, що у воді міститься залізо, але ж має бути його конкретна норма, адже організм може отруїтися, правильно ж?

Ось для цього ми і мусимо знати гранично допустиму концентрацію рівень заліза, наприклад у питній воді – це до 0,2 мг/дм³.

Саме будова води, найголовніші її властивості під час потрапляння у водопровідну мережу вказують нам наскільки вона є чистою, якісною, та чи гідна вона для вживання.

Таблиця 1.1. Деякі санітарно-хімічні показники безпечності та якості питної води [38].

№ з/п	Найменування показників	Одиниця виміру	Нормативи для питної води		
			водопровідної	з колодязів та каптажів джерел	фасованої, з пунктів розливу та бюветів
1. Органолептичні показники					
1	Запах:	бали	до 2	до 3	0 (до 2)
	при 20° С				
	при 60° С		до 2	до 3	до 1 (2)
2	Забарвленість	градуси	до 20 (35)	до 35	до 10 (20)
3	Каламутність	нефелометрична одиниця каламутності (1 НОК=0,5 8мг/куб. дм)	до 1,0 (3,5) до 2,6 (3,5) - для підземного вододжерела	до 3,5	до 0,5 (1,0)
4	Смак та присмак	бали	до 2	до 3	0 (до 2)
2. Фізико-хімічні показники					
а) неорганічні компоненти					
5	Водневий показник	одиниці рН	6,5-8,5	6,5-8,5	6,5-8,5 (понад 4,5)

№ з/п	Найменування показників	Одиниця виміру	Нормативи для питної води		
			водопровідної	з колодязів та каптажів джерел	фасованої, з пунктів розливу та бюветів
6	Діоксид вуглецю	%	не визначається	не визначається	0,2 - 0,3 – для слабогазованої 0,31 - 0,4 – для середньогазованої 0,41 – 0,6 – для сильногазованої
7	Залізо загальне	мг/куб. дм	до 0,2 (1,0)	до 1,0	до 0,2
8	Загальна жорсткість	ммоль/куб. б. дм	до 7,0 (10,0)	до 10,0	до 7,0
9	Загальна лужність	ммоль/куб. б. дм	не визначається	не визначається	до 6,5
10	Йод	мкг/куб. дм	не визначається	не визначається	до 50
11	Кальцій	мг/куб. дм	не визначається	не визначається	до 130
12	Магній	мг/куб. дм	не визначається	не визначається	до 80
13	Марганець	мг/куб. дм	до 0,05 (0,5)	до 0,5	до 0,05
14	Мідь	мг/куб. дм	до 1,0	не визначається	до 1,0

15	Поліфосфати	мг/куб. дм	до 3,5	не визначається	до 0,6 (3,5)
16	Сульфати	мг/куб. дм	до 250 (500)	до 500	до 250
17	Сухий залишок	мг/куб. дм	до 1000 (1500)	до 1500	до 1000

Таблиця 1.2. Показники фізіологічної повноцінності мінерального складу питної води.

№ з/п	Найменування показників	Одиниці виміру	Нормативи
1	Загальна жорсткість	ммоль/куб. дм	1,5 – 7,0
2	Загальна лужність	ммоль/куб. дм	0,5 – 6,5
3	Йод	мкг/куб. дм	20 – 30
4	Калій	мг/куб. дм	2 – 20
5	Кальцій	мг/куб. дм	25 – 75
6	Магній	мг/куб. дм	10 – 50
7	Натрій	мг/куб. дм	2 – 20
8	Сухий залишок	мг/куб. дм	200 – 500
9	Фториди	мг/куб. дм	0,7 – 1,2

Нижче подана таблиця 1.3, яка власне розкриває всі вимоги, котрі мусить містити якісна вода в залежності від сфери, де вона застосовуватиметься [38, ст. 15].

Таблиця 1.3. Вимоги, що висуваються до якості технічної води

Показники якості	Галузь використання								
	Котли жаротрубні (0,5 – 1,5 МПа)	Котли високого тиску (5 – 10 МПа)	Прямоструминні котли (10 – 15 МПа) і прямоструминні надкритичного тиску (21,5 – 30 МПа)	Целюлозно – паперова промисловість, отримання			Виробництво хімічних волокон	Хімічна промисловість	Текстильна промисловість
				деревинної маси	сировини невідбіленої	целюлози невідбіленої			
Загальна твердість, моль/м ³	0,35	0,35	0,003	-	5	5	0,0 35	0,012– 0,05	<1,6
Лужність моль/м ³	-	-	-	-	-	-	5,5	-	-
Вміст, г/м ³									
оксиду силіцію (IV)	не норм	0,7	0,2	-	50	50	-	50	-
міді	0,5	0,05	0,005	-	-	-	-	-	-
мангану	-	-	-	-	-	-	0,0 3	0,1	0,1
заліза	1	0,05	0,01	0 , 3	1	0,1	0,0 5	0,1	0,1

кисню	1	0,3	0,01	-	-	-	-	-	
нітратів і нітритів	-	-	0,02	-	-	-	-	-	-
pH	8–10	8-10	7–8,5	6 – 1 0	6–10	6–10	7-8	6,2– 8,3	6,5– 8,5
Кольоровість, град	-	-	-	-	-	-	<5	20	<25
Окиснюваніс ть, гО ₂ /м ³	-	-	-	-	-	-	<4	-	-

Якщо говорити про воду, котру споживають задля технологічних потреб, то в залежності від призначення виділяють: воду, котру беруть для добування, очищення, гідротранспортування часточок, або ж для збільшування корисних копалин; воду, котра міститься у складі продуктів та притримує власне свої властивості, чи ж може вступати у хімічну реакцію. Якщо говорити про воду з першого випадку, то її варто лише очистити від грубодисперсних завислих речовин, а якщо вести мову про другий випадок, то вона має відповідати вимогам, які властиві для господарсько-питної води [16, ст. 87-88]. Гранично допустима концентрація заліза повинна сягати від 0,05 до 1,0 г/м³. Ця властивість залежить ще й від того, в якій саме галузі господарства буде використовуватися ця вода (табл. 1.3).

Та вода, котру отримують тварини чи птиці, повинна мати потужну якість, або ж вона має повністю відповідати всім вимогам, які потрібні у якихось господарський (питних) цілях. Ось для прикладу візьмемо воду, котра багата на мінеральні речовини, її зазвичай використовують у іригаційних

спорудженнях, для обробки сільськогосподарських угідь. У цій воді мінеральні речовини не можуть перевищувати за $1,5 \text{ г/дм}^3$, адже така велика мінералізація погіршить врожайність культур.

Давайте трішки представимо, що видобувають нафту. В процесі здійснюється заводнення пластів із нафти і та вода, котру використовують, у жодному разі не повинна, грубо таки кажучи, затикати поверхню отвора фільтра або ж зменшувати пористу основу активного пласта. Якщо ж це станеться (не буде вільного місця у порах), тоді у воді будуть збиратися завислі частинки, об'єм яких не перевищує за 1 мг/дм^3 , нафтової рідини – 1 мг/дм^3 і звичайно що заліза – $0,2 \text{ мг/дм}^3$.

Між усіма цими транспортними якимись несправностями, технологічних машин десь близько 15% припадає лише на несправність гідроприводів. Тут варто відмітити, що від 49% – 84% несправність гідроприводів взаємопов'язаних станом робочої рідини [8, ст. 55]. Важливим є вирішення питання щодо покращення якості вимірів робочої рідини (нехай для прикладу – водяної емульсії) при зменшенні її жорсткості та кількості іонів, котрі в ній розчинилися, що великою мірою дає вплив на обсяги корозії в гідросистемі [40, ст. 34-35]. Збільшення чистоти працюючої рідини гідросистеми від бруду дозволяє у 3-5 разів підвищити ресурс агрегатів гідросистем, та аж на 50-70 % знизити число несправностей у них [4, ст. 20-21].

1.6 ФІЗИЧНІ СПОСОБИ ОЧИЩЕННЯ РІДИН

Всі техніки, які застосовуються для очистки рідини різноманітних гідравлічних систем, розподіляються на два типи, як вже зазначалося вище: фізичні методи та хімічні методи.

Фізичні техніки, котрі дають нам можливість досліджувати рідину на наявність домішок реалізуються із використанням зовнішніх полів сили, без добавляння в якихось хімічних сполук.

Застосування ж різних хімічних технік, власне тісно поєднано із застосуванням реактивів або ж досить таки непростого за своєю будовою спорядження з величезними масогабаритними ознаками.

Нижче подано рисунок 3, на якому показано класифікацію фізичних технік для оброблення рідини.

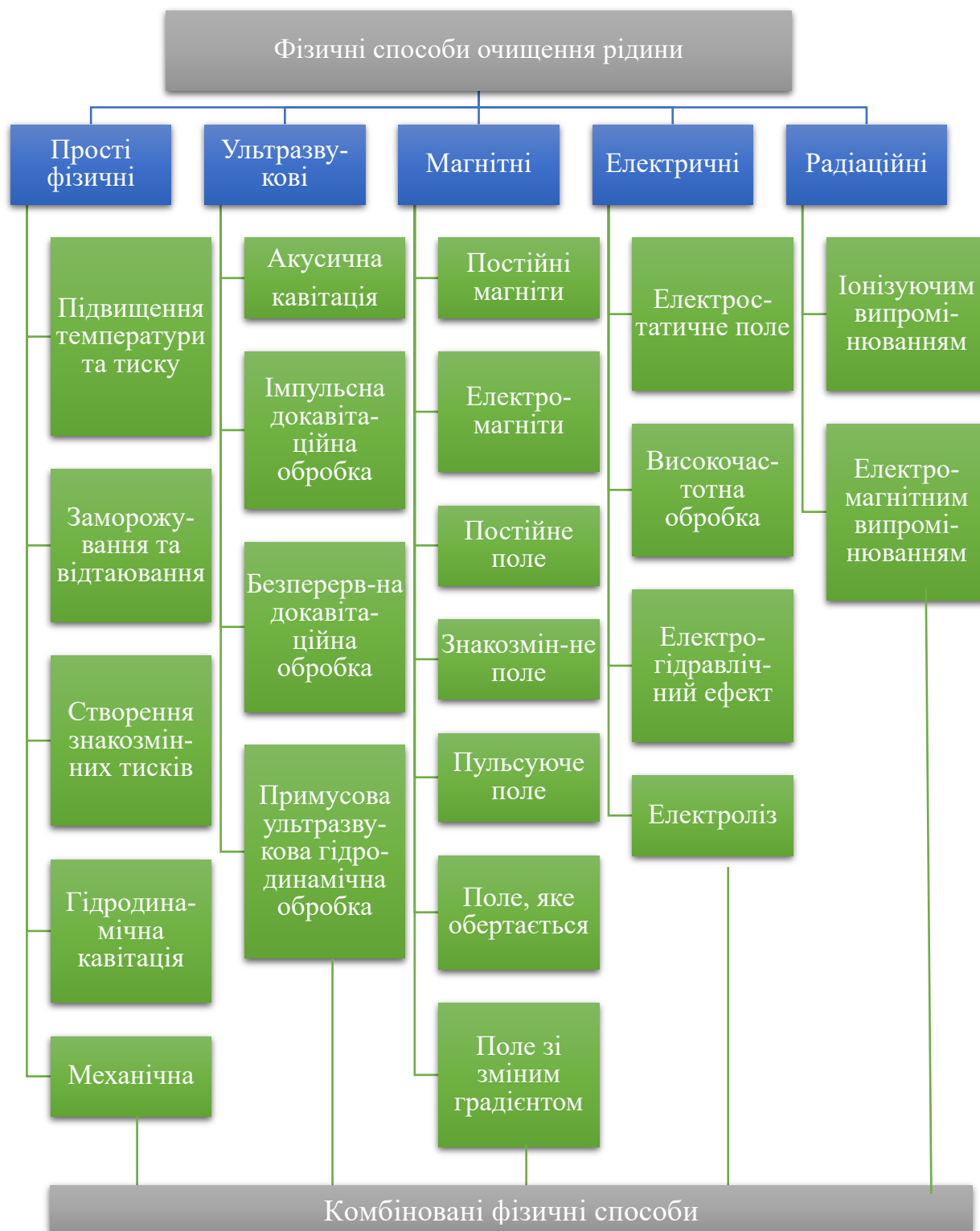


Рис. 3 Класифікація фізичних технік для оброблення рідини

Наведені на рис. 3 техніки оброблення середовища, котре є рідинним позначимо так, як подано нижче:

- 1 – збільшення температури й натиску;
- 2 – підморожування та розморожування;
- 3 – утворення знакозмінних натисків;
- 4 – гідродинамічне утворення порожнин (бульбашків);
- 5 – механічна техніка;
- 6 – стає територія;
- 7 – знакозмінне поле;
- 8 – місце території, яке пульсує;
- 9 – місце території, яке крутиться;
- 10 – територія, яка містить градієнт що змінюється;
- 11 – акустичне утворення бульбашок;
- 12 – поривне докавітаційне оброблення;
- 13 – безперервне докавітаційне оброблення;
- 14 – примусове інфразвукове гідродинамічне оброблення;
- 15 – територія з електричними зарядами;
- 16 – оброблення з допомогою високих частот;
- 17 – електрогідравлічна дія;
- 18 – електроліз;
- 19 – іонізуюча радіація;
- 20 – електромагнітна радіація.

Тоді, використовуючи всім відомий метод графів, відобразимо можливі сполучення використання вище перелічених технік для оброблення рідинного середовища, на котрих фізичні техніки оброблення позначено кільцями із відповідною їх нумерацією, а всі власне можливі методи сполучення цих технік наведено лініями, що з'єднуються.

Порахувавши всі можливі випадки обробки самого середовища із рідиною з використанням лише фізичних методів, ми отримаємо досить велике число – 1048575.

А число припустимих сполучень фізичних технік для оброблення середовища, котре складається з рідини без вживання одно-типових технік складає аж 2698.

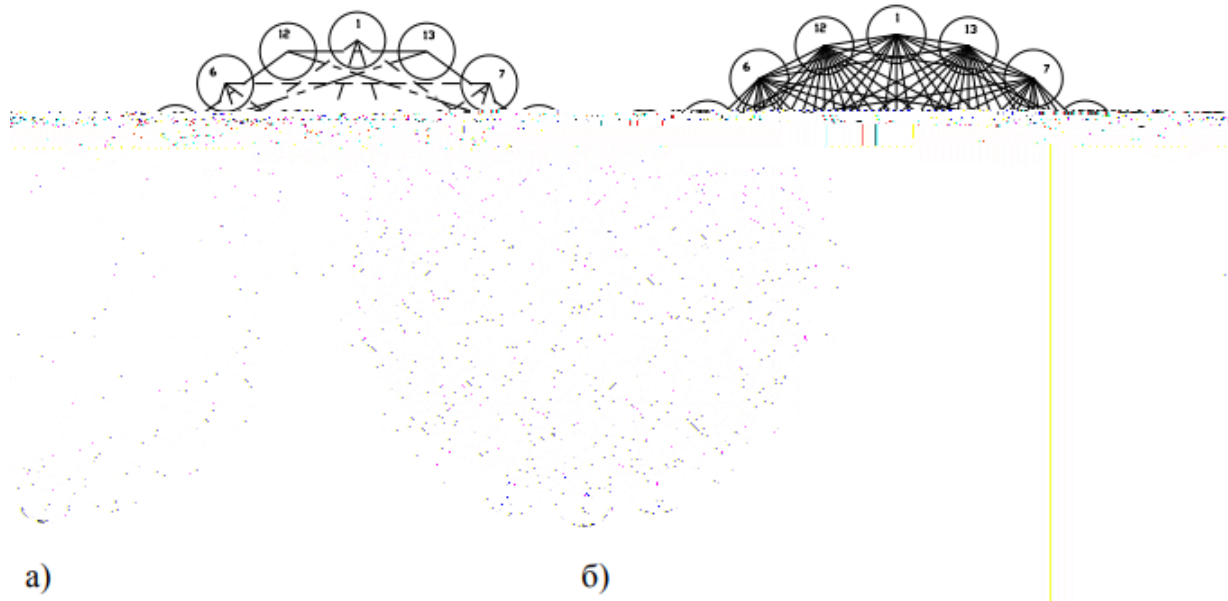


Рис. 4 Модель всіх існуючих сполучень використання фізичних технік оброблення середовища з рідиною: а) для технік, які містяться в одній підгрупі; б) без вживання більш як одної техніки з однієї підгрупи.

РОЗДІЛ II. ДЕЯКІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ

2.1 ФІЛЬТРАЦІЯ ВОДИ НА ДВОШАРОВОМУ КАРКАСНО- ЗАСИПНОМУ ФІЛЬТРИ ІЗ УРАХУВАННЯМ ДИФУЗІЇ

Вашій увазі пропонується переглянути нелінійний макет, який описує процес очищення рідини у каркасно-засипному фільтрі, при якому враховується процес дифузії, яка в свою чергу була створена на базі діючої моделі Мінца [12, 21, 26, 44].

Спершу переглянемо випадок, коли в нас є нескінченний фільтр. У такому разі початкова система рівнянь для фільтрування, на котру власне і накладаються певні умови матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \alpha \rho(x,t) + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} c|_{x=0} &= c_{bx}(t), \quad c|_{t=0} = c_{bx}(0) e^{-\frac{\beta x}{v}}, \quad \rho|_{t=0} = \rho_{bx}(x), \\ \rho|_{x=0} &= e^{-\alpha t} \left[\rho_{bx}(0) + \beta \int_0^t c_{bx}(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau \right], \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

де $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$, $c(x,t)$ – насиченість домішок у рідині, яка проходить фільтрацію, $\rho(x,t)$ – вміст мулу завантаженої речовини, $c_{bx}(x)$ – вміст затриманих часточок домішків при вході у фільтр; $\rho_{bx}(x)$ – початкове розділення мулу під час завантаження; β – показник частинок (а саме домішків), котрі затрималися у порах за певний період часу, α – показник вже відірваних за той самий час частинок мулу; v – темп фільтрації, D, D_* – показник дифузії, де $D = b\varepsilon$, $D_* = b_*\varepsilon$, $0 < b \leq 1$, $0 < b_* \leq 1$, ε – величина малості.

Початкове рівняння, котре власне називається *рівнянням балансу*, власне дає нам чіткий опис закону збереження маси та бере до уваги явище поздовжньої дифузії.

Наступне ж рівняння є рівнянням кінетики, котре показує факт того, що темп росту густини насичення завантаження осадам $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ рівний різниці мас частинок домішки, котрі прилипли за одиницю часу $-\beta c$ і відірваних частинок осаду, за той же самий час $-\alpha \rho$, а також дифузію утвореного осаду у завантаженій речовині.

Рішення системи (2.1.1), котра знаходиться вище, та враховуючи умову (2.1.2) будемо відшукувати, використовуючи такі асимптотичні розклади [25, 31, 32, 19]:

$$\begin{aligned} c(x,t) &= c_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x,t) + R_1(x,t,\varepsilon), \\ \rho(x,t) &= \rho_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x,t) + R_2(x,t,\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

де R_1, R_2 – належні залишкові елементи рядів (2.1.7), $c_i(x,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – елемент незмінної частини рівності, а точніше: c_0, ρ_0 – готове рішення відповідної виродженої умови, $c_1, \dots, c_n, \rho_1, \dots, \rho_n$ – виправлення, які враховуються у «вклад» процесу дифузії поздовж фільтру.

Коли ж ми підставимо (2.1.3) у систему (2.1.1) і скористаємося процедурою прирівнювання для того, аби відшукати значення функцій c_i і ρ_i ($i=\overline{0,n}$), то ми власне перейдемо до ось таких завдань:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + v \frac{\partial c_0}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_0 - \alpha \rho_0, \\ c_0|_{x=0} = c_{bx}(t), & c_0|_{t=0} = c_{bx}(0) e^{-\frac{\beta x}{v}}, \\ \rho_0|_{t=0} = \rho_{bx}(x), & \rho_0|_{x=0} = e^{-\alpha t} \left[\rho_{bx}(0) + \beta \int_0^t c_{bx}(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau \right], \end{cases} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} = \Psi_i, & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta c_i - \alpha \rho_i + \Phi_i, \\ c_i|_{x=0} = 0, c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{x=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\text{де } \Psi_i(x,t) = \frac{\partial^2 c_{i-1}(x,y)}{\partial x^2}, \Phi_i(x,t) = \frac{\partial^2 \rho_{i-1}(x,y)}{\partial x^2}, \quad i=1, 2, \dots$$

Під час розв'язування задачі (2.1.4) ми власне прийдемо до розв'язування рівнянь [37, 19]:

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_0}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad (2.1.6)$$

із деякими додатковими настановами (2.1.2).

Беручи до уваги умови (2.1.6), (2.1.2) й використавши досить відомий нам метод Рімана [26] ми власне і знайдемо $c_0(x,t)$ та $\rho_0(x,t)$:

$$\begin{aligned} c_0(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(c_{bx}(0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha \beta}{v} xt} \right) + \frac{\alpha}{v} \int_0^x I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha \beta}{v} (x-\xi)\tau} \right) \times \right. \\ &\times \rho_{bx}(\xi) e^{\frac{\beta \xi}{v}} d\xi + \int_0^t e^{\alpha \eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha \beta}{v} x(t-\eta)} \right) \left[\frac{dc_{bx}(\eta)}{d\eta} + \alpha c_{bx}(\eta) \right] d\eta \Bigg), \\ \rho_0(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(\rho_{bx}(0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha \beta}{v} xt} \right) + \frac{\beta}{v} \int_0^t e^{\alpha \eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha \beta x}{v} (t-\eta)} \right) \times \right. \\ &\times c_{bx}(\eta) d\eta + \int_0^x e^{\frac{\beta \xi}{v}} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha \beta t}{v} (x-\xi)} \right) \left[\frac{d\rho_{bx}(\xi)}{d\xi} + \frac{\beta}{v} \rho_{bx}(\xi) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Із системи під номером (2.1.5), точнісінько як до [27] матимемо задачі, з котрих власне і відшукаємо елементи $c_i(x,t)$, $\rho_i(x,t)$ $i=1, 2, \dots$

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_i}{\partial x} - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \alpha \Psi_i - \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_i}{\partial x} - \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\beta}{v} \Psi_i \right) = 0,$$

$$c_i|_{x=0} = 0, c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{x=0} = 0. \quad (2.1.7)$$

І так, здійснюючи розв'язання задачі (2.1.7) з використанням метода Рімана, ми одержуємо рекурентні формули, котрі власне і допоможуть нам відшукати $c_i(x,t)$ і $\rho_i(x,t)$:

$$c_i(x,t) = e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta \xi}{v} + \alpha \eta} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{\alpha \beta}{v}} (x-\xi)(t-\eta) \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial^3 c_{i-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 c_{i-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \rho_{i-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) d\eta d\xi, \\ \rho_i(x,t) = e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta \xi}{v} + \alpha \eta} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{\alpha \beta}{v}} (x-\xi)(t-\eta) \right) \times \left(\frac{\partial^3 \rho_{i-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial^2 c_{i-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right) d\eta d\xi.$$

Будемо вважати, що у нас наявний фільтр з довжиною L ($0 < x \leq L$), у такому разі ми мусимо накласти ще одну чи не найважливішу умову для швидкого виведення бруду $\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$, $\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$. Розв'язування функцій $c(x,t)$ і $\rho(x,t)$ поданої вище задачі (2.1.1), (2.1.2) із точністю до $O(\varepsilon^{n+1})$ знаходитимемо, користуючись такими асимптотичні рядами:

$$c(x,t) = c_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x,t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i(\xi, t) + R_1(x, t, \varepsilon), \quad (2.1.8)$$

$$\rho(x,t) = \rho_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x,t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} P_i(\mu, t) + R_2(x, t, \varepsilon), \quad (2.1.9)$$

де $R_1, R_2 \in$ залишковими елементами, $c_i(x,t)$, $\rho_i(x,t)$ ($i = \overline{0, n}$) – елементи незмінної частини рівності, крім цього: c_0, ρ_0 – готове рішення відповідної виродженої умови, $c_1, \dots, c_n, \rho_1, \dots, \rho_n$ – виправлення, які враховуються у «вклад» процесу дифузії поздовж фільтру, $P_i(\xi, t)$, $P_i(\mu, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – конкретні функції на кшталт пограншару, у котрих наявний вплив бічних основ забруднень в деякому околі точки $x=L$, $\xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні незмінні перетворення.

Переглянемо такі функції: $\Pi = \sum_{i=0}^{n+1} \Pi_i \varepsilon^i$ та $P = \sum_{i=0}^{n+1} P_i \varepsilon^{i/2}$. Вони вказують на виключення неузгодженостей, які при певних умов внесені створеними регулярними частинами $c(x,t) = \sum_{i=0}^n c_i \varepsilon^i$, $\rho(x,t) = \sum_{i=0}^n \rho_i \varepsilon^i$ в околі точки $x=L$. Іншими словами, мусять виконуватись ось такі умови: $(c + \Pi(c))|_{x=L} = c(L,t) + O(\varepsilon^{n+1})$, $(\rho + P)|_{x=L} = \rho(L,t) + O(\varepsilon^{n+1})$. А для того, щоб відшукати дані функції, маємо нижче подані задачі:

$$b\Pi_{i\xi\xi} + v\Pi_{i\xi} = I(i)P_{i-t} + I(i)\varepsilon^{i/2}P_{it} + I(i+1)P_{it}, \quad \Pi_i \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Pi_{i\xi}(L,t) = K_i(t);$$

$$b_*P_{i\mu\mu} - \alpha P_i - P_{it} = -\beta M(i)\Pi_{i-1}, \quad P_i \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad P_{i\mu}(L,t) = H_i(t);$$

$$I(a) = \begin{cases} 0, & a - \text{парне,} \\ 1, & a - \text{непарне,} \end{cases} \quad M(a) = \begin{cases} 1, & a - \text{парне,} \\ 0, & a - \text{непарне,} \end{cases}$$

$$K_i(t) = \begin{cases} 0, & i = n+1, \\ -c_{i\xi}(L,t), & i = 0, \dots, n, \end{cases} \quad H_i(t) = \begin{cases} 0, & i = n+1, \\ -\rho_{i\mu}(L,t), & i = 0, \dots, n. \end{cases}$$

Знаходячи розв'язання на умову задачі, котра зображена вище, а це є звичайні диференціальні рівняння другого порядку та параболічні рівності із незмінними коефіцієнтами, застосовуючи під час знаходження розв'язку числові способи. Відповідь звичайно, що подається у явно.

І тільки для того, щоб віднайти залишкові елементів, ми мусимо виконати задачу, котра містить порядок малості $O(\varepsilon^{n+1})$:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + v \frac{\partial R_1(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - b\varepsilon \frac{\partial^2 R_1(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} = \varepsilon^{n+1} b \frac{\partial^2 c_n}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial t} - \beta R_1(x,t,\varepsilon) + \alpha R_2(x,t,\varepsilon) - b_*\varepsilon \frac{\partial^2 R_2(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} = \varepsilon^{n+1} (\beta \Pi_{n+1} + b_* \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2}), \end{cases}$$

$$R_1(0,t,\varepsilon) = R_1(L,t,\varepsilon) = R_1(x,0,\varepsilon) = R_2(0,t,\varepsilon) = R_2(L,t,\varepsilon) = R_2(x,0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Вимагаючи погладшення висхідної умови та граничної, а також і коефіцієнтів рівнянь із системи під номером (2.1.1) та їх узгодженість в околі

деякої точки $x=L$, беручи до уваги сам принцип максимуму, ми у результаті прийдемо до істинності нижче наведеного твердження:

$$R_i(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}) \quad (i=1,2).$$

2.2 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ВОДИ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНОМУ ФІЛЬТРІ З УРАХУВАННЯМ ЗВОРОТНЬОГО ВПЛИВУ

В даному підрозділі ми детально зробимо огляд прототипу технології очистки води на каркасно-засипному фільтрі, застосовуючи метод «дифузійного збурення» та приймаючи за фундамент вже відому модель Мінца й обов'язково пояснюючи основні формули, котрі власне характеризують взаємовідношення насиченості бруду води у фільтрі.

На даний час залишається й досі цікаве питання, щодо підсумування створеної моделі Мінцом методом її дифузійного збурення для того, щоб більш конкретніше дослідити нелінійні процеси очистки води з допомогою каркасно-засипних фільтрів, беручи до уваги малу дифузію при часі із запізненням. Звертаючи на вище сказано увагу, я вам пропоную уважно переглянути чергову нижче подану модель – сингулярно збурену задачу дифузії з досить великим вмістом часточок із запізненням:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(b(c(x,t-\tau)) \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \alpha \rho(x,t) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(b_*(\rho(x,t-\tau)) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$c(0,t) = c_*(t), \rho(0,t) = \rho_*(t), \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, 0 < x \leq L, \quad (2.2.2)$$

$$c(x,\tilde{t}) = c_0^0(x,\tilde{t}), \tau \leq \tilde{t} \leq 0, \rho(x,\tilde{t}) = \rho_0^0(x,\tilde{t}), \tau \leq \tilde{t} \leq 0.$$

де $c_*(t)$ – насиченість часточок, котрі «прилипли» на початку входу в фільтр; $\rho_*(t)$ - насиченість осаду у завантаженні на початку входу в фільтр,

b, b_* - коефіцієнти дифузії, ε - параметр малості, $\tau > 0$ - спізнення, L - довжина фільтра. Функції $c_*(\cdot), \rho_*(\cdot), c_0^0(\cdot, \tilde{t}), \rho_0^0(\cdot, \tilde{t})$ гладкі та узгоджені в крайніх точках області $G = \{(x, t); 0 < x < L, 0 < t < \infty\}$. Попри це, ми вважаємо що функції $c_0^0(x, \tilde{t}), \rho_0^0(x, \tilde{t})$, коли $t = -\tau$ та $t = 0$ задовольняють умови, які в свою чергу забезпечують гладкість розв'язку $c(x, t), \rho(x, t)$, котрий в подальшому знадобиться, при $t = \tau n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Умови (2.2.1) - (2.2.2) із затримкою τ на конкретних проміжках часу $[(n-1)\tau, n\tau], n = 1, 2, \dots$ зведемо до умови взагалі без затримки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t^{[n]} + \nu c_x^{[n]} = \varepsilon b_{nr} c_{xx}^{[n]} + \varepsilon c_{x b_{nr} x}^{[n]}, \rho_t^{[n]} = \beta c^{[n]} - \alpha \rho^{[n]} + \varepsilon b_{*nr} \rho_{xx}^{[n]} + \varepsilon \rho_x^{[n]} b_{*nr x}, \\ c^{[n]}(0, t) = c_*(t), c^{[n]}(x, t - \tau) = c^{[n-1]}(x, t - \tau), \\ b_{nr}(x, t) = b(c^{[n]}(x, t - \tau)) = b(c^{[n-1]}(x, t - \tau)), c^{[0]}(x, 0) = c_0^0(x, 0), \\ \rho^{[n]}(0, t) = \rho_*(t), \rho^{[n]}(x, t - \tau) = \rho^{[n-1]}(x, t - \tau), \\ b_{*nr}(x, t) = b_*(\rho^{[n]}(x, t - \tau)) = b_*(\rho^{[n-1]}(x, t - \tau)), \rho^{[0]}(x, 0) = \rho_0^0(x, 0). \end{array} \right.$$

(2.2.3)

Розв'язання умови (2.2.3) аж до точності $O(\varepsilon^{m+1})$ будемо відшукувати у вигляді нижче поданих асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} c^{[n]}(x, t) &= c_0^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i c_i^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^i \Pi_i^{[n]}(\xi, t) + R_1^{[n]}(x, t, \varepsilon), \\ \rho^{[n]}(x, t) &= \rho_0^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i \rho_i^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^{i/2} P_i^{[n]}(\mu, t) + R_2^{[n]}(x, t, \varepsilon), \end{aligned}$$

(2.2.4)

де $c_i^{[n]}(x, t), \rho_i^{[n]}(x, t), (i = \overline{0, m})$ - елементи строгих часточок конкретних асимптотик, а також $c^n(x, t), \rho^n(x, t)$ - відповідь на умову (2.2.3), а $c_1^{[n]}(x, t), \dots, c_m^{[n]}(x, t), \rho_1^{[n]}(x, t), \rho_m^{[n]}(x, t)$ - деякі виправлення, котрі дають суттєвий вплив на внесок процесу дифузії поздовж фільтру, $\Pi_i^{[n]}(\xi, t), P_i^{[n]}(\mu, t)$

- функції на кшталт пограншару, $\xi = (L-x)\varepsilon^{-1}$, $\mu = (L-x)\varepsilon^{-1/2}$ – конкретні строги змінення, $R_1^{[n]}(x,t,\varepsilon), R_2^{[n]}(x,t,\varepsilon)$ – залишкові елементи.

Ряд (2.2.4) підставимо в умову під номером (2.2.3) та здійснивши деякі стандартні операції прирівнювання $c_i^{[n]}(x,t), \rho_i^{[n]}(x,t), (i = \overline{0,m})$ в результаті матимемо такі умови:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial c_0^{[n]}}{\partial x} = 0, \frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} = \beta c_0^{[n]} - \alpha \rho_0^{[n]}, \\ c_0^{[n]}(0,t) = c_*(t), c_0^{[n]}(x,0) = c_0^0(x,0), \\ \rho_0^{[n]}(0,t) = \rho_*(t), \rho_0^{[n]}(x,0) = \rho_0^0(x,0), \end{cases} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial c_i^{[n]}}{\partial x} = \psi_i^{[n]}, \frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t} = \beta c_i^{[n]} - \alpha \rho_i^{[n]} + \Phi_i^{[n]}, \\ c_i^{[n]}(0,t) = 0, c_i^{[n]}(x,0) = 0, \rho_i^{[n]}(0,t) = 0, \rho_i^{[n]}(x,0) = 0, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

де $\Psi_i^{[n]}(x,t) = c_{i-1xx}^{[n]} + c_{i-1x}^{[n]} b_{n\tau x}$, $\Phi_i^{[n]}(x,t) = \rho_{i-1xx}^{[n]} + \rho_{i-1x}^{[n]} b_{*n\tau x}$, $i = 1, 2, \dots$

В ході розв'язання умови під номером (2.2.5), ми власне прийдемо до знаходження розв'язку ось таких рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_0^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_0^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_0^{[n]}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \rho_0^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

З деякими конкретними умовами:

$$\begin{aligned} c_0^{[n]}(0,t) &= c_*(t), c_0^{[n]}(x,0) = c_0^0(x,0), \\ \rho_0^{[n]}(0,t) &= \rho_*(t), \rho_0^{[n]}(x,0) = \rho_0^0(x,0). \end{aligned}$$

Використаємо вже відомий нам метод Рімана, будемо мати:

$$\begin{aligned}
c_0^{[n]}(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(c_0^0(0,0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} xt \right) + \int_0^x e^{\frac{\beta\xi}{v}} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi)t \right) \right) \times \\
&\times \left[\frac{dc_0^0(\xi,0)}{d\xi} + \frac{\beta}{v} c_0^0(\xi,0) \right] d\xi + \int_0^t e^{\alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} x(t-\eta) \right) \left[\frac{dc_*(\eta)}{d\eta} + \alpha c_*(\eta) \right] d\eta, \\
\rho_0^{[n]}(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \left(\rho_*(0) I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} xt \right) + \int_0^t e^{\alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} x(t-\eta) \right) \right) \times \\
&\times \left[\frac{d\rho_*(\eta)}{d\eta} + \frac{\beta}{v} \rho_*(\eta) \right] d\eta + \int_0^x e^{\frac{\beta\xi}{v}} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi) \right) \left[\frac{d\rho_0^0(\xi,0)}{d\xi} + \frac{\beta}{v} \rho_0^0(\xi,0) \right] d\xi,
\end{aligned}$$

де I_0 – функція Бесселя, котра власне є функцією першого роду та ще й має нульовий порядок при наявному уявному аргументі.

І як результат, ми отримаємо знову умови для знаходження таких невідомих: $c_i^{[n]}(x,t), \rho_i^{[n]}(x,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c_i^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial c_i^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_i^{[n]}}{\partial x} - \frac{1}{v} G_i^{[n]}(x,t) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \rho_i^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v} \frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial x} - Q_i^{[n]}(x,t) &= 0, \\
c_i^{[n]}(0,t) = 0, c_i^{[n]}(x,0) = 0, \\
\rho_i^{[n]}(0,t) = 0, \rho_i^{[n]}(x,0) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

$$\text{де } G_i^{[n]}(x,t) = \frac{\partial \Psi_i^{[n]}}{\partial t} + \alpha \Psi_i^{[n]} - \frac{\partial \Phi_i^{[n]}}{\partial t}, Q_i^{[n]}(x,t) = \frac{\partial \Phi_i^{[n]}}{\partial t} + \frac{\beta}{v} \Psi_i^{[n]}.$$

Віднайшовши розв'язок до умови під номером (2.2.8) та використовуючи знову відомий метод Рімана, ми одержимо конкретні формули для визначення

$$c_i^{[n]}(x,t), \rho_i^{[n]}(x,t):$$

$$\begin{aligned}
c_i^{[n]}(x,t) &= \frac{e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t}}{v} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta\xi}{v} + \alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi)(t-\eta) \right) G_i^{[n]}(x,t) d\eta d\xi, \\
\rho_i^{[n]}(x,t) &= e^{-\frac{\beta x}{v} - \alpha t} \int_0^x \int_0^t e^{\frac{\beta\xi}{v} + \alpha\eta} I_0 \left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}} (x-\xi)(t-\eta) \right) Q_i^{[n]}(x,t) d\eta d\xi.
\end{aligned}$$

Такі функції, як: $\Pi^{[n]} = \sum_{i=0}^{m+1} \Pi_i^{[n]} \varepsilon^i$, $P^{[n]} = \sum_{i=0}^{m+1} P_i^{[n]} \varepsilon^{i/2}$ слугують власне для відкидання суперечностей, котрі добавлені добудованими постійними часточками $c^{[n]} = \sum_{i=0}^m c_i^{[n]} \varepsilon^i$, $\rho^{[n]} = \sum_{i=0}^m \rho_i^{[n]} \varepsilon^i$ але тільки в околі конкретної точки $x = L$, ну і певна річ, що задовольняють таким умовам:

$$\frac{\partial}{\partial x} (c^{[n]} + \Pi^{[n]}) = O(\varepsilon^{m+1}), \frac{\partial}{\partial x} (\rho^{[n]} + P^{[n]}) = O(\varepsilon^{m+1}).$$

А для того, щоб нам відшукати вище наведені функції, ми мусимо виконати розв'язання таких умов:

$$b_{n\tau} \Pi_{0\xi\xi}^{[n]} + \nu \Pi_{0\xi}^{[n]} = 0, \Pi_{0\xi}^{[n]} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \Pi_{0\xi}^{[n]}(L, t) = K_0(t);$$

$$b_{n\tau} \Pi_{i\xi\xi}^{[n]} + \nu \Pi_{i\xi}^{[n]} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\xi^i}{i} b_{n\tau} \Pi_{i-1\xi\xi}^{[n]} + b_{n\tau\xi^i} \Pi_{i-1\xi}^{[n]} \right) + I(i) P_{i-1t}^{[n]} + \\ + \sum_{i=1}^m \left(\mu^i b_{*n\tau\mu^i} P_{i-1\mu\mu}^{[n]} + \mu^i b_{*n\tau\mu^{i+1}} P_{i-1\mu\mu}^{[n]} \right) + I(i) \varepsilon^{i/2} P_{i-1t}^{[n]} + I(i+1) P_{it}^{[n]}, \\ \Pi_i^{[n]} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \Pi_{i\xi}^{[n]}(L, t) = K_i(t), i = \overline{1, m};$$

$$b_{*n\tau} P_{i\mu\mu}^{[n]} - \alpha P_i^{[n]} - P_{it}^{[n]} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\mu^i}{i} b_{*n\tau} P_{i-1\mu\mu}^{[n]} + b_{*n\tau\mu^i} P_{i-1\mu}^{[n]} \right) - \beta M(i) \Pi_{i-1}^{[n]},$$

$$P_i^{[n]} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, P_{i\mu}^{[n]}(L, t) = H_i(t), i = \overline{0, m};$$

$$I(a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a - \text{парне,} \\ 1, & \text{якщо } a - \text{непарне,} \end{cases}$$

$$M(a) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a - \text{парне,} \\ 0, & \text{якщо } a - \text{непарне,} \end{cases}$$

$$K_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = m+1, \\ -c_{ix}^{[n]}(L, t), & \text{якщо } i = 0, \dots, m, \end{cases}$$

$$H_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = m+1, \\ -\rho_{i\mu}^{[n]}(L, t), & \text{якщо } i = 0, \dots, m. \end{cases}$$

Для того, щоб прийти до кінцевого результату задач, зображених вище, а це ніщо інше як звичайні диференціальні рівняння другого порядку й

параболічні рівняння незмінних коефіцієнтів, у котрих остаточний результат зображується у явному вигляді.

Щоб нам віднайти залишкові елементи, потрібно уважно роздивитися нижче зображену систему задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_2^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial R_1^{[n]}}{\partial x} - \varepsilon b_{n\tau} \frac{\partial^2 R_1^{[n]}}{\partial x^2} - \varepsilon b_{n\tau x} \frac{\partial R_1^{[n]}}{\partial x} = \varepsilon^{m+1} g(x, t, \varepsilon), \\ \frac{\partial R_2^{[n]}}{\partial t} - \beta R_1^{[n]} + \alpha R_2^{[n]} - \varepsilon b_{*n\tau} \frac{\partial^2 R_2^{[n]}}{\partial x^2} - \varepsilon b_{*n\tau x} \frac{\partial R_2^{[n]}}{\partial x} = \varepsilon^{m+1} g_1(x, t, \varepsilon), \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} g(x, t, \varepsilon) = & b_{n\tau} \frac{\partial^2 c_m^{[n]}}{\partial x^2} + \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi}}{2} \frac{\partial^2 \Pi_m^{[n]}}{\partial \xi^2} - \xi b_{n\tau\xi} \frac{\partial^2 \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi}}{2} \frac{\partial^2 \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi^2} + \\ & + \varepsilon^2 b_{n\tau x} \frac{\partial c_m^{[n]}}{\partial x} - \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi}}{2} \frac{\partial \Pi_{m-1}^{[n]}}{\partial \xi} + \xi b_{n\tau\xi\xi} \frac{\partial \Pi_m^{[n]}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi\xi}}{2} \frac{\partial \Pi_m^{[n]}}{\partial \xi} - \\ & - b_{n\tau\xi} \frac{\partial \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi} + \varepsilon \xi b_{n\tau\xi\xi} \frac{\partial \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi\xi}}{2} \frac{\partial \Pi_{m+1}^{[n]}}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(x, t, \varepsilon) = & \beta \Pi_{m+1}^{[n]} + b_{*n\tau} \frac{\partial^2 \rho_m^{[n]}}{\partial x^2} + b_{*n\tau} \frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu^2} - \varepsilon^{\frac{4}{5}} \mu b_{*n\tau\mu} \frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu^2} + \varepsilon \frac{\mu^2 b_{*n\tau\mu\mu}}{2} \frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu^2} + \\ & + b_{*n\tau x} \frac{\partial \rho_m^{[n]}}{\partial x} - \frac{\mu^2 b_{n\tau\mu\mu}}{2} \frac{\partial P_m^{[n]}}{\partial \mu} + b_{*n\tau\mu} \frac{\partial P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu} - \varepsilon^{\frac{5}{4}} \mu b_{*n\tau\mu} \frac{\partial P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu} + \varepsilon \frac{\mu^2 b_{*n\tau\mu\mu}}{2} \frac{\partial P_{m+1}^{[n]}}{\partial \mu}, \end{aligned}$$

$$R_1^{[n]}(0, t, \varepsilon) = R_1^{[n]}(L, t, \varepsilon) = R_1^{[n]}(x, 0, \varepsilon) = R_2^{[n]}(0, t, \varepsilon) = R_2^{[n]}(L, t, \varepsilon) = R_2^{[n]}(x, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}).$$

Будемо вимагати, щоб початкова та гранична умови були досить таки точними. Також не забуваємо звертати увагу на коефіцієнти системи рівнянь за номером (2.2.1) та їхньої чіткості у конкретній точці $x = L$, на основі відомого принципу максимуму ми власне і приходимо до правильності твердження, поданого нижче:

$$R_i^{[n]}(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}) \quad (i = 1, 2).$$

Давайте тепер наведемо результати наших розрахунків за формулами (2.2.3), при $\rho_0(x) \equiv 0$, $c_0(t) = e^{-t}$, $\beta = \frac{1}{36} c^{-1}$, $a = \frac{1}{18000} c^{-1}$, $v = \frac{1}{36} \text{ мс}^{-1}$.

На рис.5 показано розподіли насиченостей $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ у різний момент часу, коли $t_0 = 0, 1, 2, 3$ (при $\varepsilon = 0$ – це криві 1а - 4а, а не рівні лінії 1b – 4b коли власне $\varepsilon = 0,05$).

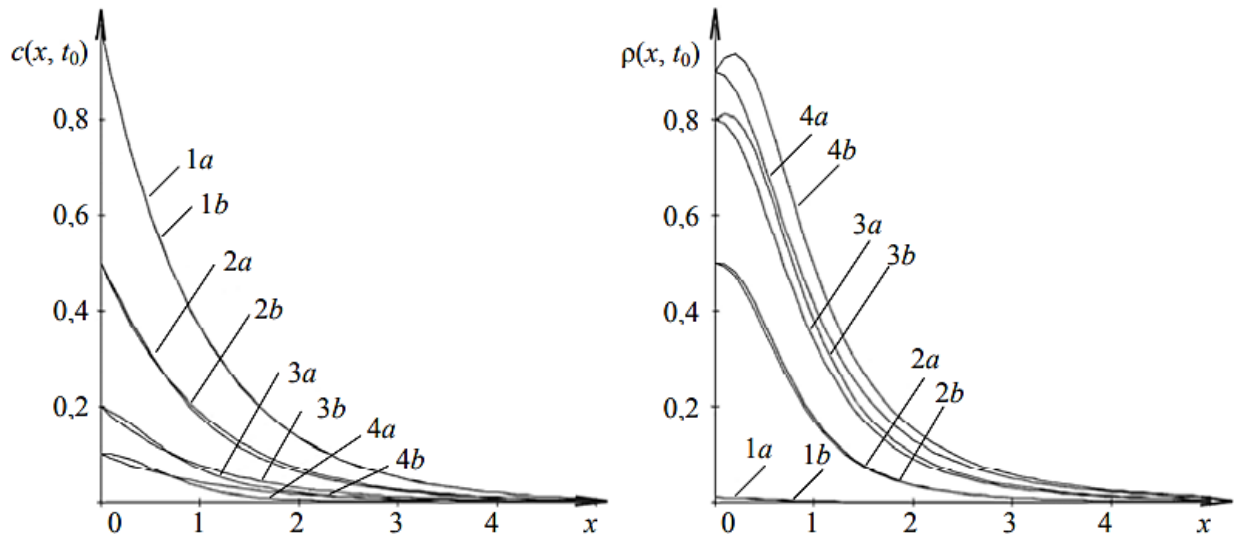


Рис. 5 Поділ $c(x, t_0)$ – а і $\rho(x, t_0)$ – б - у різні миті часу, коли $\varepsilon = 0,05$.

Поділ насиченості $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ при різних значеннях елемента дифузії можна побачити на рис.4: $\varepsilon = 0,1$ - криві 1; $\varepsilon = 0,05$ - криві 2; $\varepsilon = 0,03$ - криві 3; $\varepsilon = 0,01$ - криві 6.

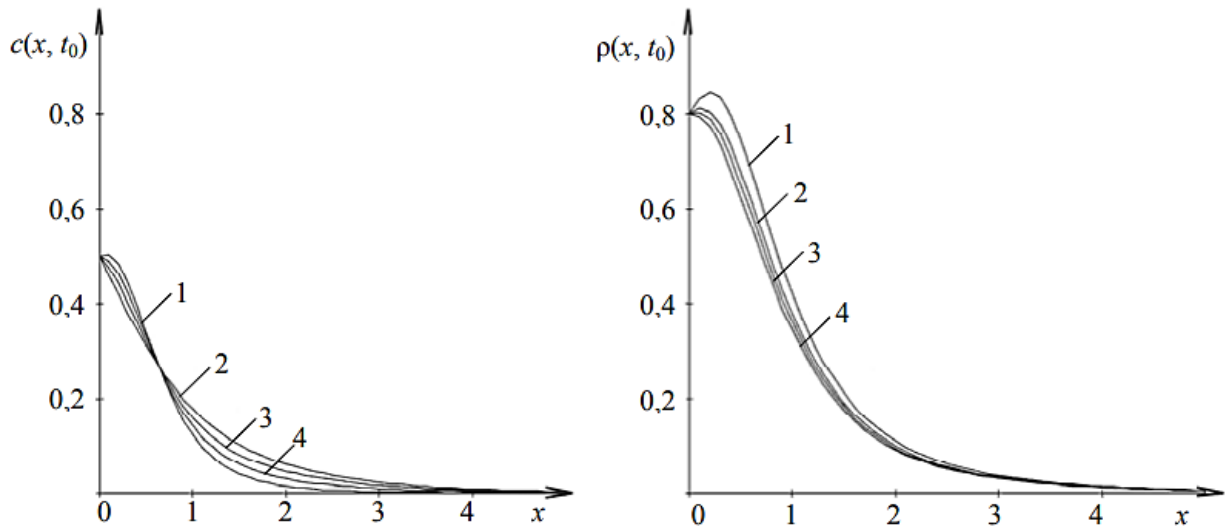


Рис. 6 Поділ $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ у різні миті часу, при різних ε .

Рисунок 7 конкретно нам демонструє розподіл насиченостей $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ вздовж фільтра у різний момент часу при:

$$t_0 = 0,1 - \text{!} \text{"} \# \$ \% \& ' \text{'}$$

$$t_0 = 1 - \text{!} \text{"} \# \$ \% (' \text{'}$$

$$t_0 = 2 - \text{!} \text{"} \# \$ \%) ' \text{'}$$

$$t_0 = 3 - \text{!} \text{"} \# \$ \% * + \text{'}$$

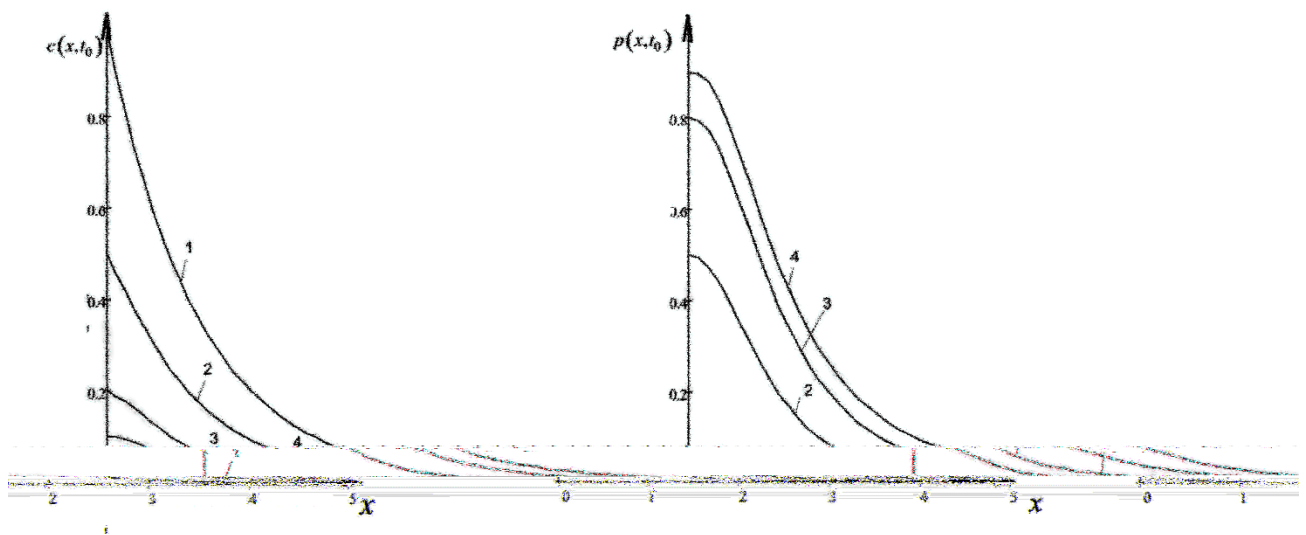


Рис. 7 Розподіл $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ в різні миті часу.

На рисунку 8 ми власне можемо побачити розподіл насиченостей $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ у деякому часі t при:

$$x_0 = 0,1 - !"#\$ \% \&'$$

$$x_0 = 1 - !"#\$ \% ('$$

$$x_0 = 1,5 - !"#\$ \%)'$$

$$x_0 = 2 - !"#\$ \% *'$$

$$x_0 = 2,5 - !"#\$ \% +'$$

$$x_0 = 3 - !"#\$ \% , -$$

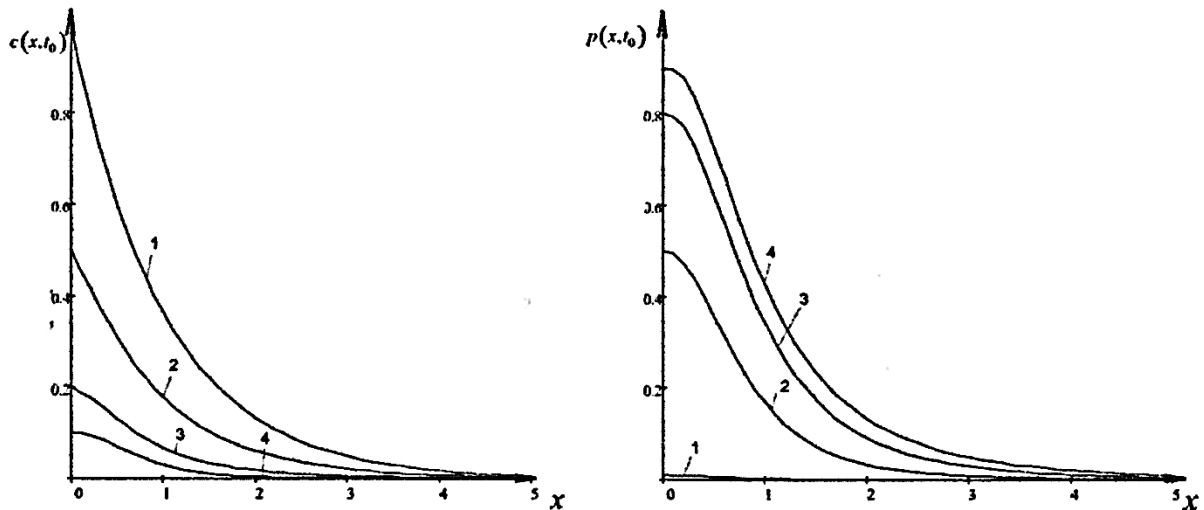


Рис. 8 Поділ $c(x, t_0)$ і $p(x, t_0)$ в неоднакових точках x .

Ось така вище розглянута методика висвітлення уже для нас відомої моделі Мінца методом переходу до задачі (2.2.1), (2.2.2) так би мовити дозволяє зберегти строгість відомих законів, котрі дають нам чіткий опис явища рухливості рідини в середовищі з порами. Якщо ж будувати її розв'язок, не йдучи «спочатку», а власне додавати вже до відомих розв'язків конкретні поправки. Варто відмітити, що вище розробленим метод можна користуватися і при шуканні схожих задачок за умови $\tau = 0$, та у деяких ситуаціях більш важчої будови такого елемента дифузії. Для прикладу якщо

$$D = \varepsilon(1 + \mu h(c(x, y, t))), \text{ чи } D = \varepsilon \left(1 + \mu \int_0^t c(x, y, \bar{t}) d\bar{t} \right), \text{ чи } D = \varepsilon \left(1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i a_i c^i \right)$$

де μ, a_i – будь-які числа, але обов'язково дійсні.

2.3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ВОДИ ІЗ ЗАВИСЛИМИ ЧАСТИНКАМИ БЕЗ УРАХУВАННЯ ДИФУЗІЇ

Насправді є досить величезна кількість досліджень, котрі присвячені питанню фільтрування мало насичених суспензій активного мулу, проте на сьогоднішній день механізм фільтрування активного мулу та деструкції органічних речовин є не до кінця розкритим. Напевно це пояснюється тим, що досить важко відразу ж знайти ряд параметрів. Для прикладу, питомий об'єм мулу, котрий є у фільтруючому завантаженні чи нехай швидкість окислення органічних речовин та інші. Через те, що ось цих даних немає, ми не можемо повноцінно використовувати можливості, котрі наявні у фільтрувальному методі доочищення.

Чи не мала кількість вчених (Мінц Д.М., Веригін М.М. та інші) працювали над вивченням цікавого питання, а саме моделювання ходу доочистки води при фільтрації крізь двошарове завантаження [27, 42]. Але є деякі чи не менш важливі складові методу очищення збурених вод у їхніх моделях, котрі залишилися неврахованими. Якщо говорити більш докладно, то їхні моделі не числять втрати концентрації забруднень водою, не досить ідеально побудований зв'язок між числом відкладень, котрі назбиралися у фільтрі та завислих речовин, які випадають із забрудненої рідини. Пропоную переглянути нижче наведену задачу, котра описує процес очистки води [36] саме за допомогою двошарового каркасно-засипного фільтра з урахуванням вище поставлених запитів:

$$v(x) \cdot c_x + \gamma(x) \cdot F(x, t) + c_t = 0, \quad (2.3.1)$$

$$u_t - \gamma(x) \cdot F(x, t) = 0, \quad (2.3.2)$$

$$F(x, t) = \begin{cases} c(x, t), & \text{якщо } c(x, t) < c_*^* - u(x, t), \\ c_*^* - u(x, t), & \text{якщо } c(x, t) \geq c_*^* - u(x, t), \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$c|_{x=x_*} = c_*(t), \quad c|_{t=0} = c_0^0(x), \quad u|_{t=0} = 0, \quad (2.3.4)$$

де $0 < x_* \leq x \leq x^* < \infty$, $l = x^* - x_*$ – розмір довжини фільтру, $0 < t < \infty$, $c(x, t)$ – насиченість речовини котра зашлаковується у воді, що фільтрується, $u(x, t)$ – насиченість бруду, яка зостається у фільтрі, $\gamma(x)$ – функція швидкості масообміну (дана функція дає нам чіткий опис темпу масообміну в гравійному та гравійно-піщаному шарах, c_*^* – концентрація межового насичення, c_* , c_0^0 – функції достатньої гладкості, котрі чітко визначені між собою в точці $(x_*, 0)$.

Функція $F(x, y)$ слугує за встановлення зв'язку між насиченостями $c(x, t)$ та $u(x, t)$. Але, попри це все, беручи до уваги ще кілька додаткових умов $c_*^* = u(x^*, t)$, $c_{**} > c(x^*, t)$ ми власне зможемо дізнатися час повного зашлакування фільтру, а також період праці цього ж фільтру, протягом якого насиченість бруду вже при виході з нього не буде вищою за межову c_{**} .

Хід розв'язання вище поставлених нами умов (2.3.1) – (2.3.4) приведемо до розв'язання $m+1$ ($m \in N$) задач відповідно на інтервалах часу $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$, $n = \overline{0, m}$ (де m – незмінна, котра відображається у ході розв'язування задачі в залежності від здійснення певних додаткових умов), τ – незмінна, вибір котрої власне залежить від заздалегідь вказаної конкретності розв'язку:

$$v(x) \cdot c_{nx} + \gamma(x) \cdot F_n(x, t) + c_{nt} = 0, \quad u_{nt} - \gamma(x) \cdot F_n(x, t) = 0,$$

$$F_n(x, t) = \begin{cases} c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau), & \text{якщо } c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) < c_*^* - u(x, t - \tau), \\ c_*^* - u(x, t - \tau), & \text{якщо } c(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) \geq c_*^* - u(x, t - \tau), \end{cases}$$

$$c|_{x=x_*} = c_*(t), \quad c|_{t=n\tau} = \begin{cases} c_0^0(x), & \text{якщо } n=0, \\ c_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases}$$

$$u|_{t=n\tau} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n=0, \\ u_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases}$$

де $f^{-1}(x)$ – є функцією, та й до того ж оберненою до функції $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$.

Кінцевим результатом ходу нашого розв'язання є:

$$u_n(x,t) = \gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x,s) ds + u_{n-1}(x, (n-1)\tau),$$

$$c_n(x,t) = \begin{cases} -\gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x,s) ds + c_{n-1}(f^{-1}(f(x)-t), (n-1)\tau), & t \leq f(x), \\ -\int_{x_*}^x \frac{\gamma(s)F_n(x,s)}{\nu(s)} ds + c_*(t-f(x)), & t > f(x). \end{cases}$$

А тепер, пропоную передивитися власне покрокове розв'язання розписаної вище умови:

1. Для початку, що ми зробимо – це надаємо умови $c_*(t)$ – межову та $c_0^0(x)$ – початкову, а також функцію темпу масообміну, c_*^* – концентрацію граничного насичення, не змінну ε , та на кінець вказуємо кількість вузлів для розбиття – l відрізка $[x_*, x^*]$. І в решті решт зробимо присвоєння: $m:=0$, де ! (лічильник).

2. Тепер, користуючись формулою $x_i = x_* + (x^* - x_*)i/l$, $i = \overline{0, l}$ ми віднаходимо вузли розбиття. Зафіксуємо незмінну величину $\tau = f(x_1 - x_0)$,

$$f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{\nu(s)}.$$

3. Беручи до уваги формули, подані нижче, віднаходимо розв'язок нашої умови у конкретний час $n\tau$, $n=1$:

$$F_1(x) = \begin{cases} c_0^0(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } c_0^0(x - f^{-1}(\tau)) < c_*^* - u(x, 0), \\ c_*^* - u(x, 0), & \text{якщо } c_0^0(x - f^{-1}(\tau)) \geq c_*^* - u(x, 0), \end{cases}$$

$$u_1(x_i, \tau) = \gamma(x_i) F_1(x_i) \tau,$$

$$c_1(x_i, \tau) = \begin{cases} -\gamma(x) F_1(x_i) \tau + c_0^0(f^{-1}(f(x_i) - \tau)), & i > 0, \\ c_*(\tau), & i = 0. \end{cases}$$

4. Потім перевіряємо чи здійснюється наша умова $c_1(x^*, \tau) \geq c_*^*$. При позитивній відповіді ми «топаємо» до пункту під номером 7, якщо ж умова не виконується – здійснюємо присвоєння: $n:=n+1$.

5. Беручи до уваги формули, котрі подані нижче, віднаходимо розв'язок нашої умови у конкретний час $n\tau$:

$$F_n(x) = \begin{cases} c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)) < c_*^* - u(x, (n-1)\tau), \\ c_*^* - u(x, (n-1)\tau), & \text{якщо } c_{n-1}(x - f^{-1}(\tau)) \geq c_*^* - u(x, (n-1)\tau), \end{cases}'$$

$$u_n(x_i, n\tau) = \gamma(x_i)F_n(x_i)\tau + u_{n-1}(x_i, (n-1)\tau),$$

$$c_n(x_i, n\tau) = \begin{cases} -\gamma(x)F_n(x_i)\tau + c_{n-1}(f^{-1}(f(x_i) - \tau), (n-1)\tau), & i > 0, \\ c_*(n\tau), & i = 0. \end{cases}$$

6. Повертаємося до пункту під номером 4.

7. Тоді, коли $m=0$, обов'язково робимо присвоєння $R_1 := n\tau$ (час ефективної роботи фільтру), й не забуваємо зробити присвоєння $m := m+1$, $l := l+1$, та рухаємось до пункту 2. Але коли у нас $m \neq 0$, то робимо таке присвоєння $R_2 := n\tau$.

8. І тоді, як $|R_1 - R_2| < \varepsilon$, то R_2 – тривалість ефективної праці фільтру, але як тільки $|R_1 - R_2| > \varepsilon$ – ми мусимо здійснити такі присвоєння: $R_1 := R_2$, $l := l+1$, та топаємо до пункту під номером 2.

При цьому всьому, не забуваємо звертати увагу на те, що під час вирішення вище розписаної схеми ми маємо розподіл бруду у воді, котра фільтрується у певні моменти часу $n\tau$, але ще у нас є розподіл бруду, котрий в свою чергу утворює осадок у фільтрі.

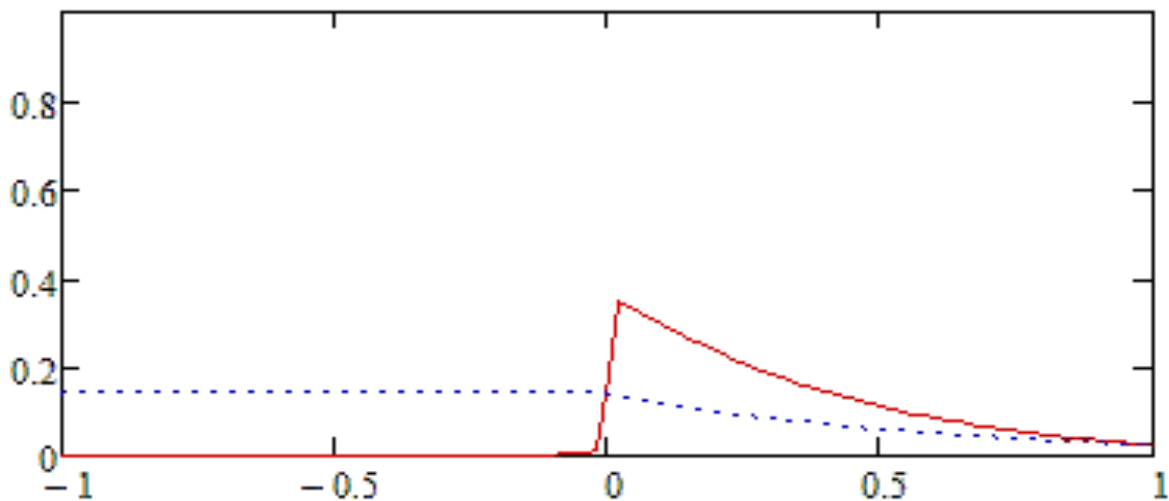
І так, плоди проведених експериментів.

Переглянута, вище відображена схема покрокового розв'язання поставленої нами на початку задачі, був власне реалізований у спеціальній математичній програмі *MathCAD*.

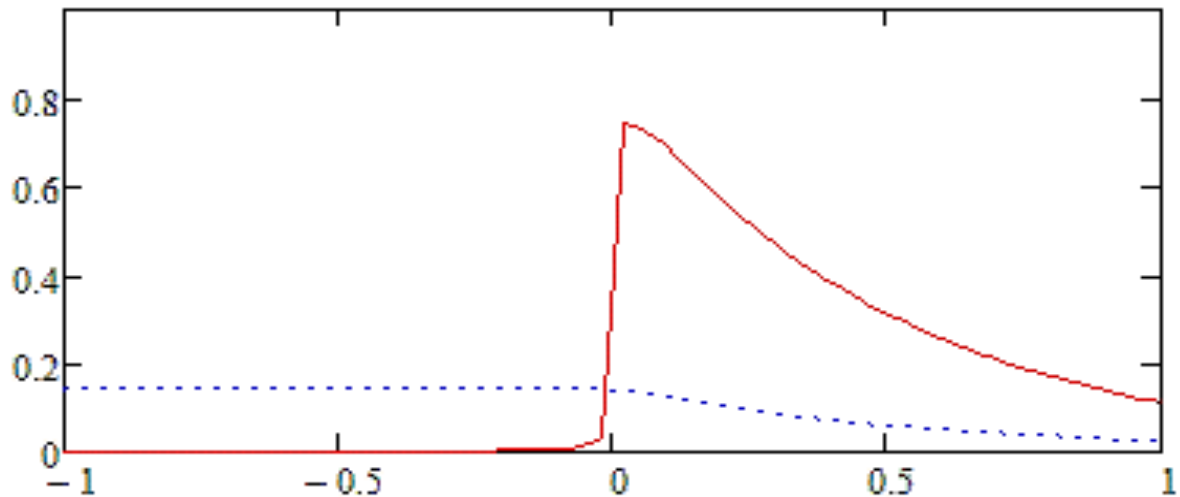
Відповіді на розрахунки, вище описаного алгоритму, було здобуто при $\gamma = 1$, $x_*^* = 1$, де $c_*^* = 0.8$ концентрація межового насичення, $\tau = f(x_1)$, в деяких точках $x_i = x_* + ((x_*^* - x_*) \cdot i) / n$, $i = \overline{0, n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ну що ж, а тепер власне математична модель! Так, так саме вона! Модель власне до якої ми йшли, відображена на рисунку під номером 9. Вона конкретну інформацію, щодо процесу доочистки води за допомогою фільтра з двошаровим наповненням при таких вхідних даних: $c_{**} = 0.05$ та функціями, котрі є в міру гладенькі та взаємозв'язані між собою: $c_0^0(x) = \text{arcctg}(400(x+1))/7\pi$, $c_*(t) = \text{arcctg}(-400t)/7\pi$; $v(x) = 0.4$, $n = 100$ – деяке число точок для розбиття та функції темпу масообміну – $\gamma(x) = 1/3 + \text{arcctg}(400x)^2/(3\pi)$ у такі моменти часу: $t_1 = 12.93$, $t_2 = 22.41$, $t_3 = 38.00$.

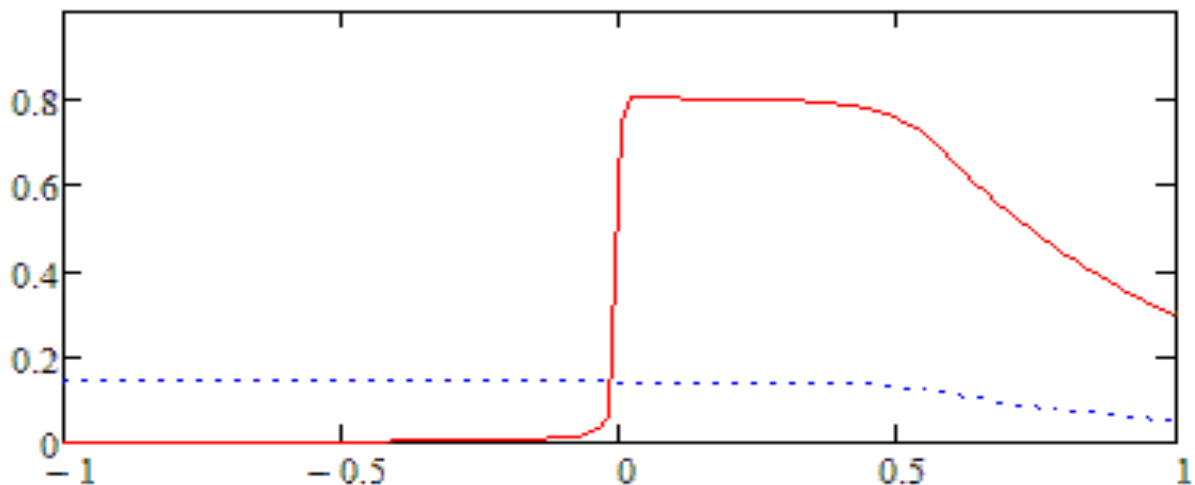
Блакитна крива дає нам інформацію про потік води, котра вже забруднилася, а бордова крива – на зашлакованість фільтра.



a)



б)



в)

Рис. 9 Розподіл концентрацій забрудненості у завантаженій речовині фільтру й самої рідини фільтрування.

Дивлячись на рисунок під номером 10, ми можемо побачити поділ насиченості розчиненої речовини у воді (криві 1–5) та забруднення у фільтрі (криві 1*–5*) у конкретні моменти $t_1 = 5.9$, $t_2 = 7.4$, $t_3 = 9.1$, $t_4 = 11.3$, $t_5 = 13.8$, коли $c_{**} = 0.1$, $c_0^0(x) = \text{arcctg}(400(x+1))/(2\pi)$, $c_*(t) = \text{arcctg}(-400t)/(2\pi)$ (тривалість активної дії фільтра $t_p = 13.8$).

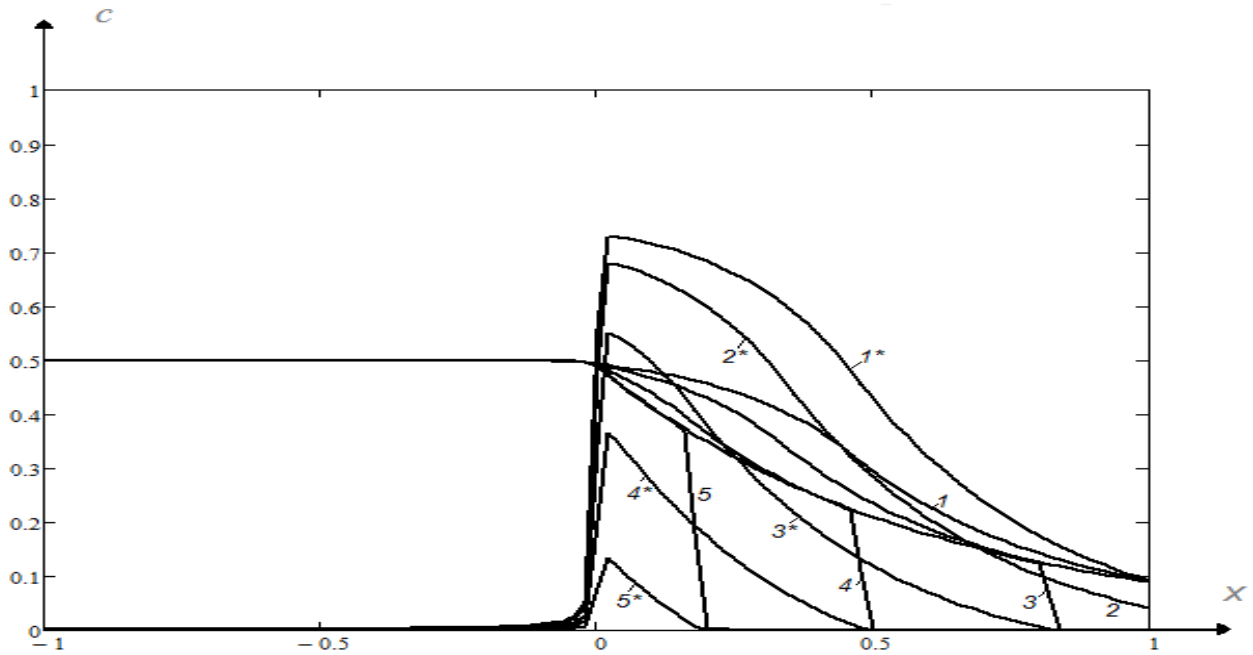


Рис. 10 Зашлакованість даного фільтру.

На рисунку 11 відображена крива, котра власне дає нам знати про залежність висоти фільтру від тривалості його ефективної роботи при $c_{**}=0.02$, $c_0^0(x)=\text{arctg}(500 \cdot (x+1))/9\pi$, $c_*(t)=\text{arctg}(-500t)/9\pi$, $v(x)=0.3$, $n=110$, $\gamma(x)=2/5+\text{arctg}(500x) \cdot 4/(5\pi)$. Поділ насиченості розчинної речовини, яка міститься у воді та забруднення у фільтрі в конкретні моменти часу $t_1=3.93$, $t_2=6.66$, $t_3=7.87$, $t_4=9.39$, $t_5=11.75$ коли власне $c_{**}=0.1$, $c_0^0(x)=\text{arctg}(500 \cdot (x+1))/2\pi$, $c_*(t)=\text{arctg}(500t)/2$ (тривалість роботи фільтру " $t_1=!$ "#\$) відображено на рисунку 12 (криві відповідно 1–5 й 1*–5*). Поділ насиченості розчинної речовини у воді та бруду, котре залишається у фільтрі (криві 1*–3* та 1–3) відповідно при $\gamma_1(x)=2/5+\text{arctg}(500x) \cdot 4/(5\pi)$, $\gamma_2(x)=1/5+\text{arctg}(500x) \cdot 2/(5\pi)$, $\gamma_3(x)=1/14+\text{arctg}(500x) \cdot 1/(7\pi)$ у певний момент, коли $t=4.966$ (а) і $t=3.733$ (б) та $v(x)=0.4$, $n=150$ показано на рисунку під номером 13.

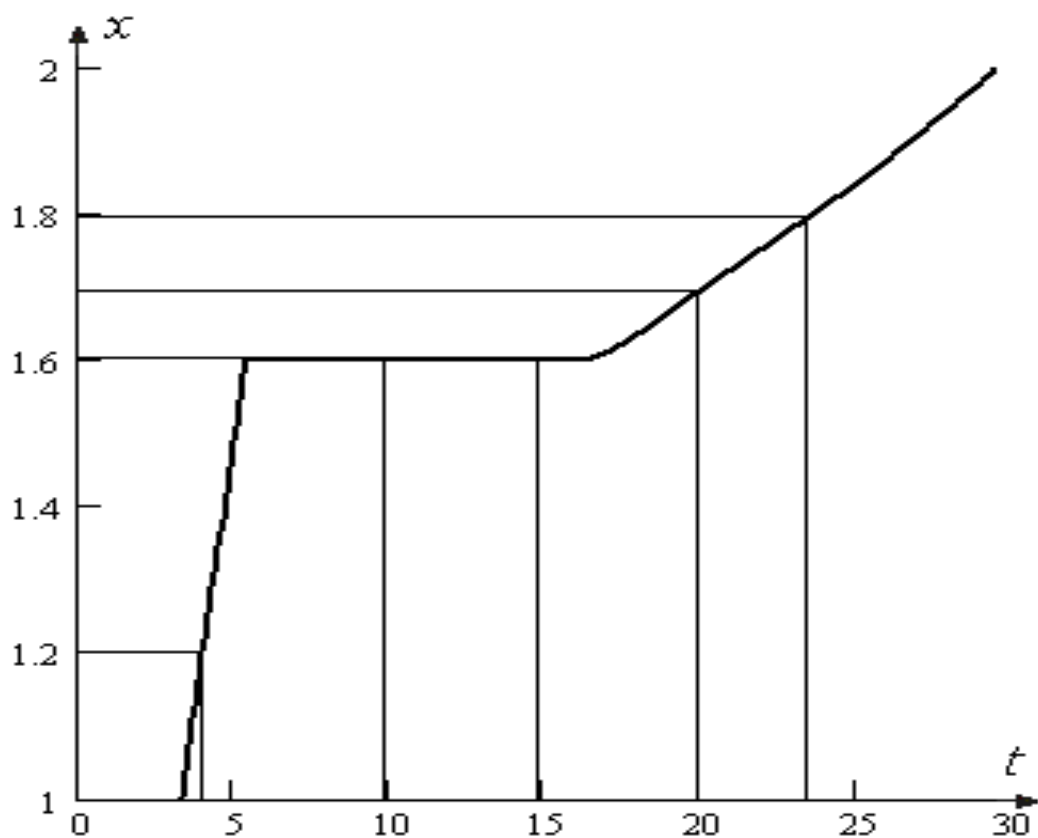


Рис. 11 Крива взаємозв'язку висоти фільтру від тривалості його ефективної роботи.

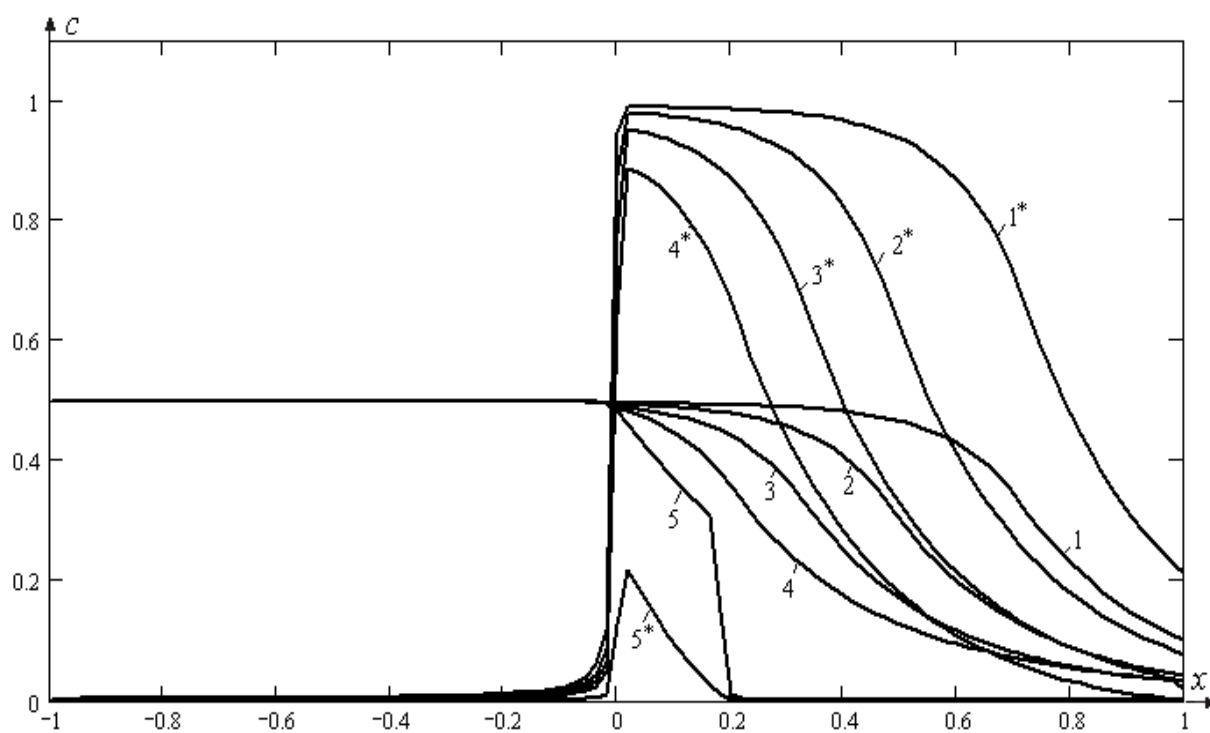


Рис. 12 Забрудненість даного фільтру.

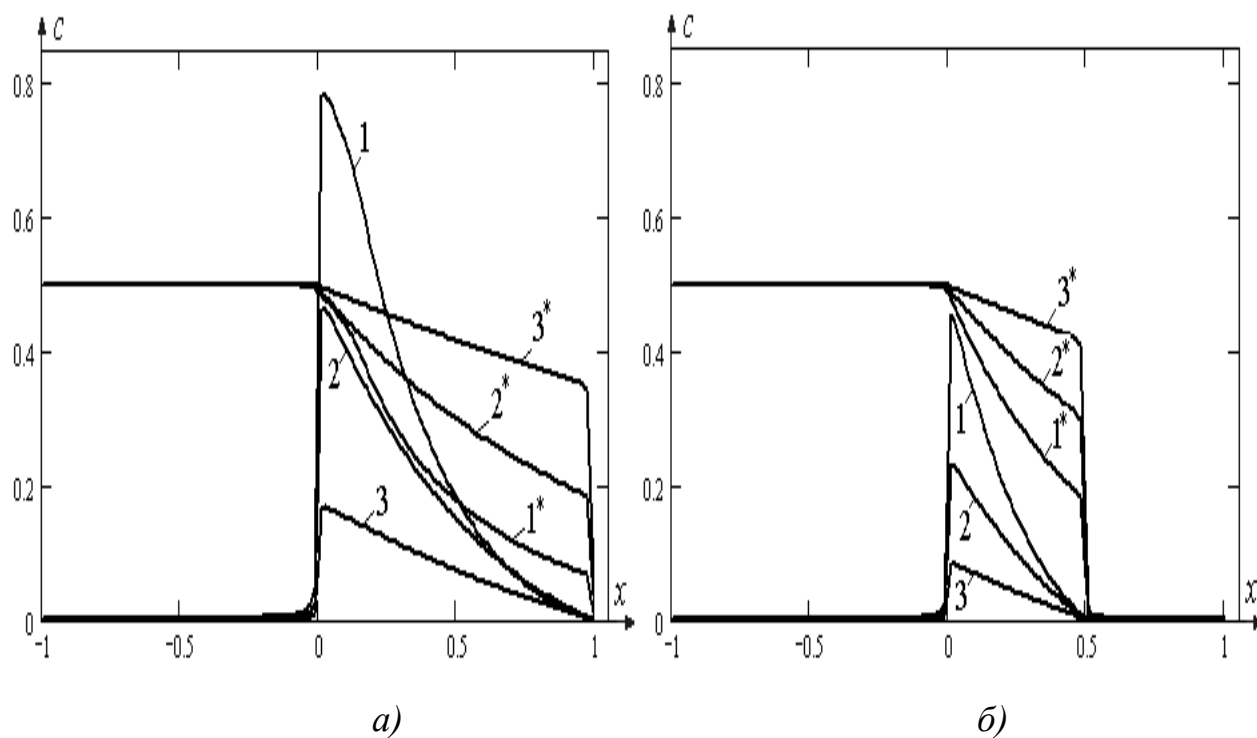


Рис. 13 Поділ насиченості бруду у воді та бруду, котрий залишається у фільтрі у моменти $t=4.966$ (а) та $t=3.733$ (б).

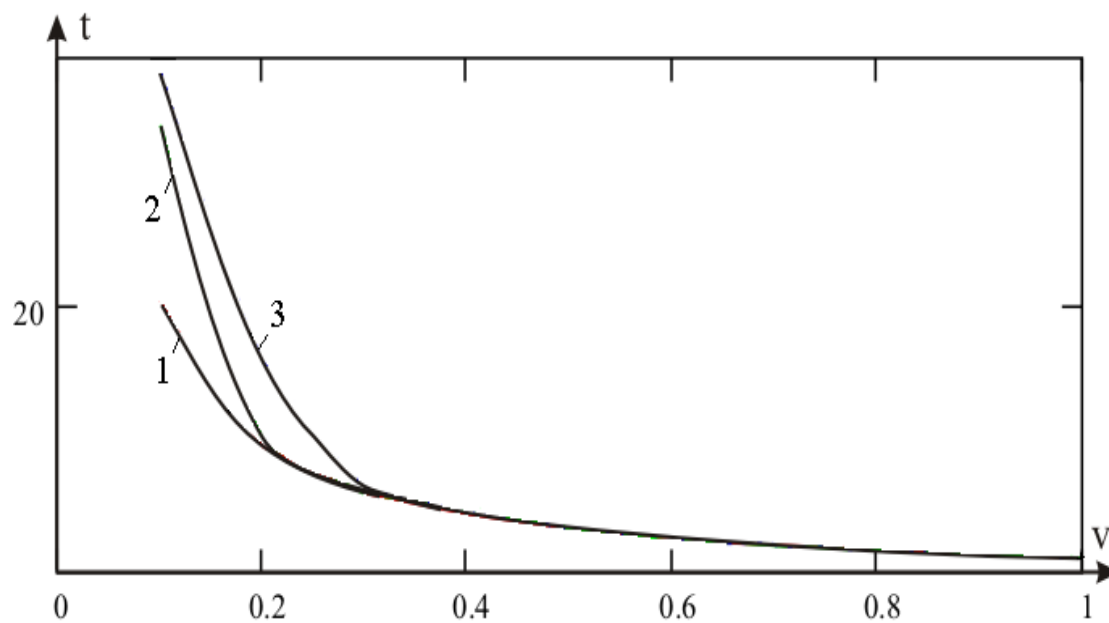


Рис. 14 Залежність часу робочої дії фільтру від темпу фільтрації.

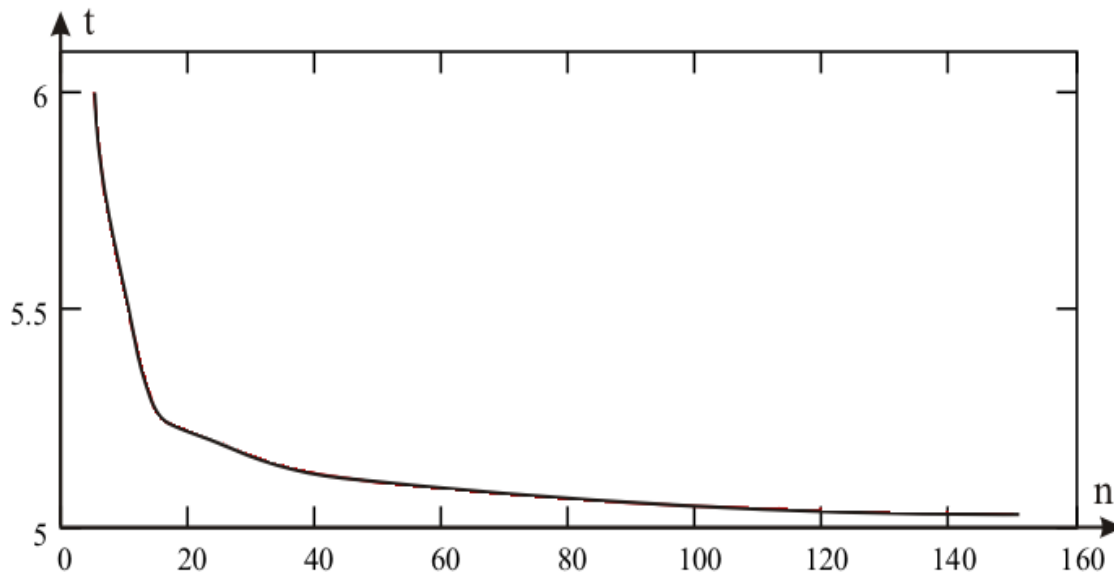


Рис. 15 Взаємозв'язок стабілізації часу активної дії фільтру до кількості точок розбиття.

На рисунку 14 ми можемо побачити залежність працюючої дії фільтру від темпу фільтрації забрудненої речовини, при $n=80$ і $\gamma_1(x)=1/14+\text{arctg}(500\cdot x)\cdot 1/(7\pi)$, $\gamma_2(x)=0.1+\text{arctg}(500\cdot x)\cdot 0.2/\pi$, $\gamma_3(x)=0.2+\text{arctg}(x\cdot 500)\cdot 0.4/\pi$ (криві під номером 1–3). І на кінець рисунок під номером 15 показує нам стабілізацію часу дії фільтру t стосовно кількості точок розбиття n при $\nu(x)=0.4$, $\gamma(x)=0.2+\text{arctg}(500\cdot x)\cdot 0.4\pi$.

2.4 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ДВОШАРОВОГО КАРКАСНО-ЗАСИПНОГО ФІЛЬТРУ.

З вище прочитаного ми вже дізналися, що у верхні шари багатошарових фільтрів з досить легких та не дуже міцних матеріалів. Чому так спитаєте? Це є досить очевидно, адже саме це є своєрідним так би мовити бар'єром щодо користування більш дієвого методу очистки фільтрів із використанням води. Більше того, при великих інтенсивностях промивки деякі шари переміщуються та виносяться. Так що ж таке каркасно-засипний фільтр?

Багатошаровий фільтр, для відновлення якого не потрібна поверхнева промивка, але можливо здійснювати водну, називається *каркасно-засипним*

фільтром. Такий фільтр має два шари: гравійно-каркасний та гравійно-піщаний.

Математичну модель процесу очистки рідини на каркасно-засипних фільтрах досліджували такі науковці, як: Сівак В.М., Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. [5, 6, 7, 34, 36]. Спираючись на вище сказану модель, нами була створена математична модель самого процесу очистки двошарового каркасно-засипного фільтру, котрий містить зернисте наповнення та застосування численного методу розв'язання складеної відповідно задачі.

Математична модель. Пропоную розглянути власне наступну модельну задачу процесу очистки двошарового каркасно-засипного фільтру:

$$\frac{v(x)}{k} \cdot u_x + \gamma(x) \cdot F(x,t) + u_t = 0, \quad (2.4.1)$$

$$c_t - \gamma(x) \cdot F(x,t) = 0, \quad (2.4.2)$$

$$F(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{якщо } u(x,t) < u_*^* - c(x,t), \\ u_*^* - c(x,t), & \text{якщо } u(x,t) \geq u_*^* - c(x,t), \end{cases} \quad (2.4.3)$$

$$u|_{x=x_*} = 0, u|_{t=0} = u_0^0(x), c|_{t=0} = 0, \quad (2.4.4)$$

де $0 < x_* \leq x \leq x^* < \infty$, $l = x^* - x_*$ – висота фільтру, $0 < t < \infty$, $u(x,t)$ – насиченість забруднення, котра зосталася у завантаженні, $c(x,t)$ – насиченість забруднення, котре відірвалось від завантаження у певній точці x за час t , k – стала, $\gamma(x)$ – функція, яка описує темп масообміну в гравійному та гравійно-піщаному шарах, u_*^* – межова насиченість відіраного бруду від завантаження, u_0^0 – задана функція, котра є в міру гладкою.

Функція $F(x,y)$ відповідає за встановлення зв'язку між концентраціями $c(x,t)$ та $u(x,t)$. Попри це все, врахувавши ще кілька додаткових умов $c(x^*,t) = u_*^*$, $c_{**} > u(x^*,t)$ ми власне зможемо визначити час повної очистки фільтру.

Хід розв'язку вище поставлених нами умов (2.4.1) – (2.4.4) приведемо до рішення $m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) умов відповідно на інтервалах часу $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$, $n = \overline{0, m}$ (де m – незмінна, котра відображається у ході відшукування розв'язків задачі в залежності від здійснення певних додаткових умов), τ – незмінна, вибір котрої власне залежить від задалегідь поданої конкретності розв'язку:

$$\frac{v(x)}{k} \cdot u_{nx} + \gamma(x) \cdot F_n(x, t) + u_{nt} = 0,$$

$$c_{nt} - \gamma(x) \cdot F_n(x, t) = 0,$$

$$F_n(x, t) = \begin{cases} u(x - f^{-1}(\tau), t - \tau), & \text{якщо } u(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) < u_*^* - c(x, t - \tau), \\ u_*^* - c(x, t - \tau), & \text{якщо } u(x - f^{-1}(\tau), t - \tau) \geq u_*^* - c(x, t - \tau), \end{cases}$$

$$u|_{x=x_*} = 0, \quad u|_{t=n\tau} = \begin{cases} u_0^0, & \text{якщо } n=0, \\ u_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases}$$

$$c|_{t=n\tau} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n=0, \\ c_{n-1}(x, n\tau), & \text{якщо } n>0, \end{cases}$$

де $f^{-1}(x)$ – функція, яка є оберненою до функції $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$.

Результатом розв'язання є:

$$c_n(x, t) = \gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x, s) ds + c_{n-1}(x, (n-1)\tau),$$

$$u_n(x, t) = \begin{cases} -\gamma(x) \int_{(n-1)\tau}^t F_n(x, s) ds + u_{n-1}(f^{-1}(f(x) - t), (n-1)\tau), & t \leq f(x), \\ -k \int_{x_*}^x \frac{\gamma(s) F_n(x, s)}{v(s)} ds + u_*(t - f(x)), & t > f(x), \end{cases}$$

А тепер, пропоную передивитися власне покрокове розв'язання розписаної вище умови:

1. Для початку, що ми зробимо – це надаємо умови $u_*(t)$ – межову та

$u_0^0(x)$ – початкову, а також функцію темпу масообміну, u_*^* –

концентрацію граничного насичення, не змінну ε , та на кінець вказуємо кількість вузлів для розбиття – l відрізка $[x_*, x^*]$. І в решті решт зробимо присвоєння: $m:=0$, де ! (лічильник).

2. Тепер, користуючись формулою $x_i = x_* + (x^* - x_*)i/l$, $i=0, \bar{l}$ ми віднаходимо вузли розбиття. Зафіксуємо незмінну величину $\tau = f(x_1 - x_0)$, $f(x) = \int_{x_*}^x \frac{ds}{v(s)}$.

3. Беручи до уваги формули, подані нижче, віднаходимо розв'язок нашої умови у конкретний час $n\tau$, $n=1$:

$$F_1(x) = \begin{cases} u_0^0(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } u_0^0(x - f^{-1}(\tau)) < u_*^* - c(x, 0), \\ u_*^* - c(x, 0), & \text{якщо } u_0^0(x - f^{-1}(\tau)) \geq u_*^* - c(x, 0), \end{cases}$$

$$c_1(x_i, \tau) = \gamma(x_i) F_1(x_i) \tau,$$

$$u_1(x_i, \tau) = \begin{cases} -\gamma(x) F_1(x_i) \tau + u_0^0(f^{-1}(f(x_i) - \tau)), & i > 0, \\ u_*(\tau), & i = 0. \end{cases}$$

4. Потім перевіряємо чи здійснюється наша умова $u_1(x^*, \tau) \geq u_*^*$. При позитивній відповіді ми «топаємо» до пункту під номером 7, якщо ж умова не виконується – здійснюємо присвоєння: $n:=n+1$.
5. Беручи до уваги формули, котрі подані нижче, віднаходимо розв'язок нашої умови у конкретний час $n\tau$:

$$F_n(x) = \begin{cases} u_{n-1}^0(x - f^{-1}(\tau)), & \text{якщо } u_{n-1}^0(x - f^{-1}(\tau)) < u_*^* - c(x, (n-1)\tau), \\ u_*^* - c(x, (n-1)\tau), & \text{якщо } u_{n-1}^0(x - f^{-1}(\tau)) \geq u_*^* - c(x, (n-1)\tau), \end{cases}'$$

$$c_n(x_i, n\tau) = \gamma(x_i) F_n(x_i) \tau + c_{n-1}(x_i, (n-1)\tau),$$

$$u_n(x_i, n\tau) = \begin{cases} -\gamma(x) F_n(x_i) \tau + u_{n-1}^0(f^{-1}(f(x_i) - \tau), (n-1)\tau), & i > 0, \\ u_*(n\tau), & i = 0. \end{cases}$$

6. Повертаємося до пункту під номером 4.

7. Тоді, коли $m=0$, обов'язково робимо присвоєння $R_1 := n\tau$ (час ефективної роботи фільтру), й не забуваємо зробити присвоєння $m:=m+1$, $l:=l+1$, та рухаємось до пункту 2. Але коли у нас $m \neq 0$, то робимо таке присвоєння $R_2 := n\tau$.
8. І тоді, як $|R_1 - R_2| < \varepsilon$, то R_2 – тривалість ефективної праці фільтру, але як тільки $|R_1 - R_2| > \varepsilon$ – ми мусимо здійснити такі присвоєння: $R_1 := R_2$, $l:=l+1$, та топаємо до пункту під номером 2.

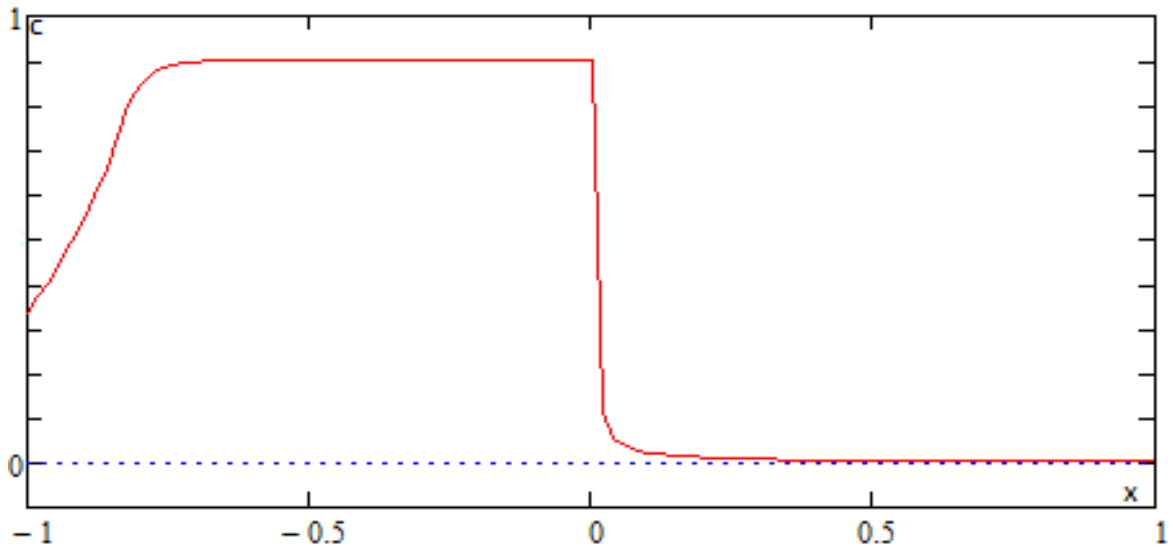
І так, плоди проведених експериментів.

Переглянута, вище відображена схема покрокового розв'язання поставленої нами на початку задачі, був власне реалізований у спеціальній математичній програмі *MathCAD*.

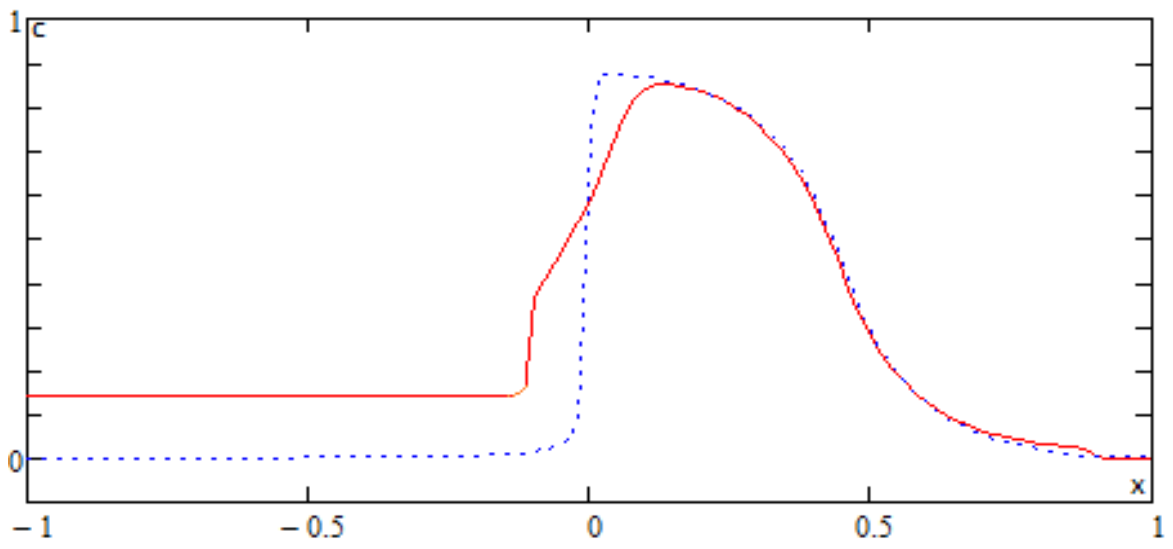
Відповіді на розрахунки, вище описаного алгоритму, було здобуто при $\varepsilon = 10^{-4}$, $x^* = 1$, де $c_*^* = 0.8$ концентрація межового насичення, $\tau = f(x_1)$, в деяких точках $x_i = x_* + ((x^* - x_*) \cdot i) / n$, $i = \overline{0, n}$, $n \in N$.

А тепер математична модель! Модель процесу очистки двошарового каркасно-засипного фільтру, котрий має такі вхідні дані: $c_{**} = 0.05$ – частота на виході з фільтру, $n = 100$ – число точок розбиття та функції темпу масообміну – $\gamma(x) = 2/5 + \text{arcctg}(600x)4/(5\pi)$ у моменти часу $t_1 = 12.93$, $t_2 = 22.41$, $t_3 = 38.00$ зображено на рисунку під номером 16.

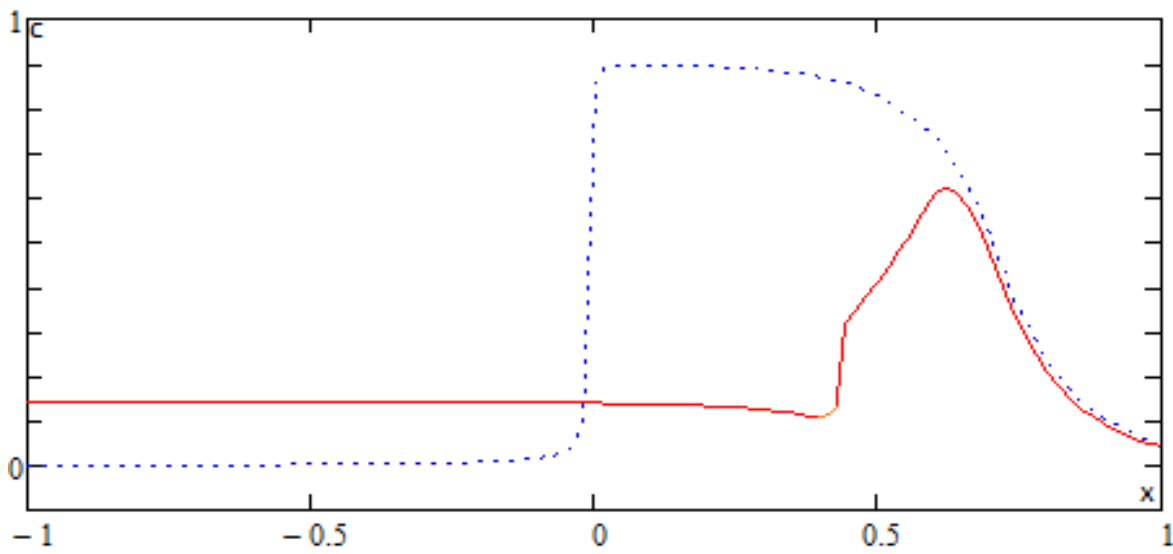
Блакитна крива дає нам чітку інформацію про потік води, а бордова крива – на зашлакованість фільтра.



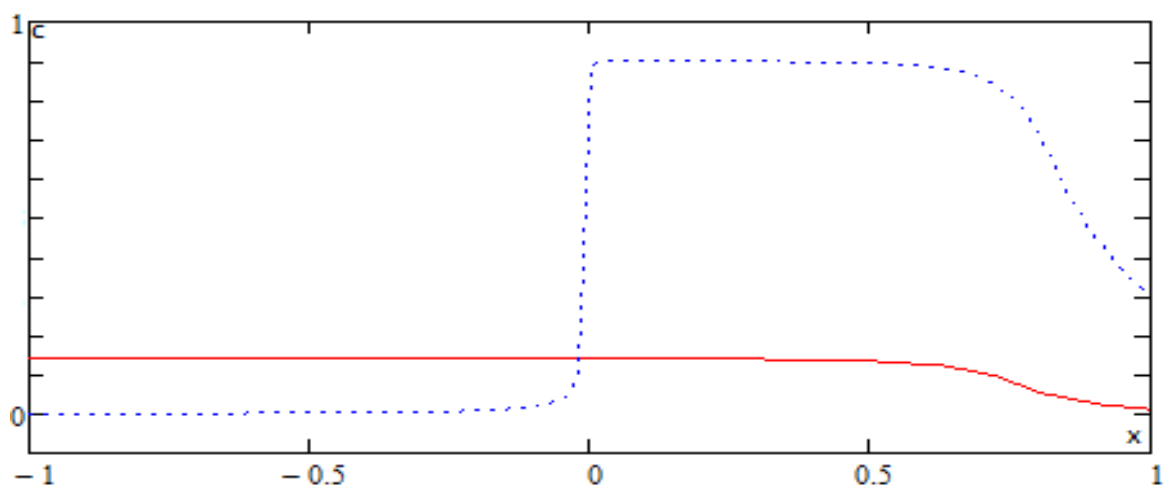
a)



б)



в)



г)

Рис. 16 Поділ насиченості забруднення при промивці фільтру.

На рисунку під номером 17, ми можемо помітити залежність довжини фільтру від темпу його промивки.

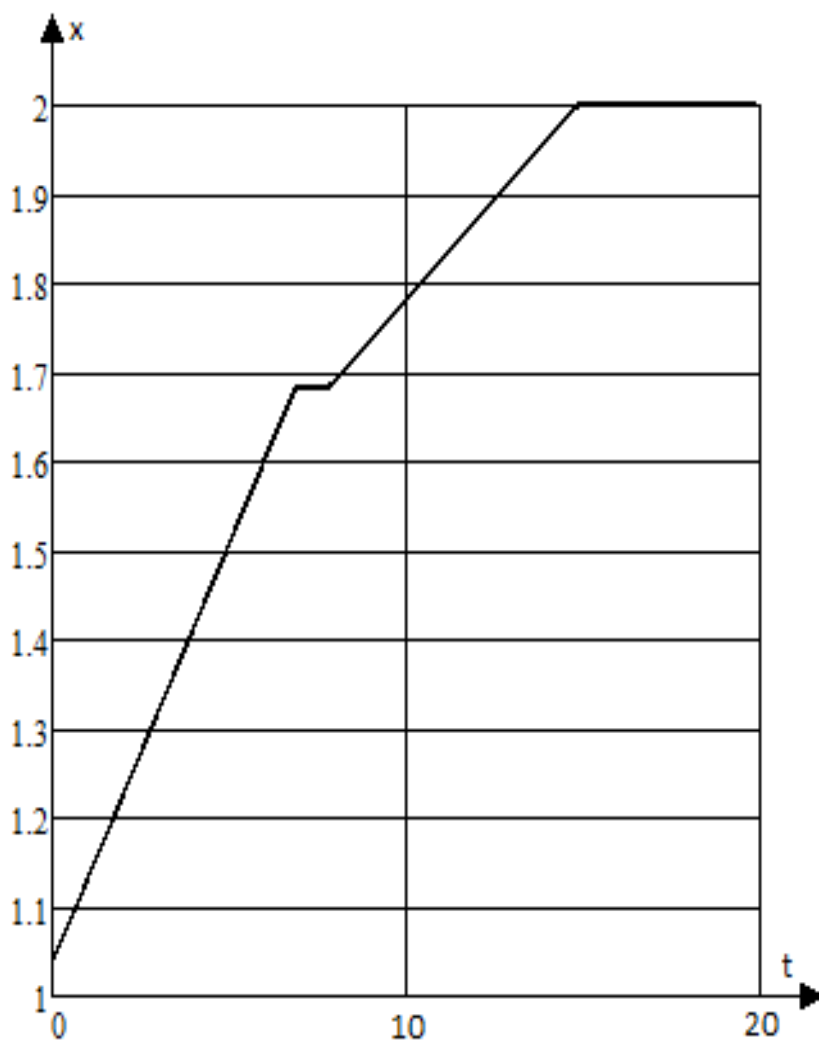


Рис. 17 Крива взаємозв'язку висоти фільтру від часу його промивки.

Поділ насиченості бруду, котрий відірвався від завантаження (криві 1–6) і насиченість бруду, що забирається водою з фільтру ($1^* - 6^*$) у відповідну мить часу $t_1 = 1.4$, $t_2 = 3.0$, $t_3 = 5.5$, $t_4 = 7.3$, $t_5 = 8.6$, $t_6 = 10.6$ при $c_{**} = 0.1$ - період промивки фільтру $t_n = 10.6$, показує нам рисунок під номером 18.

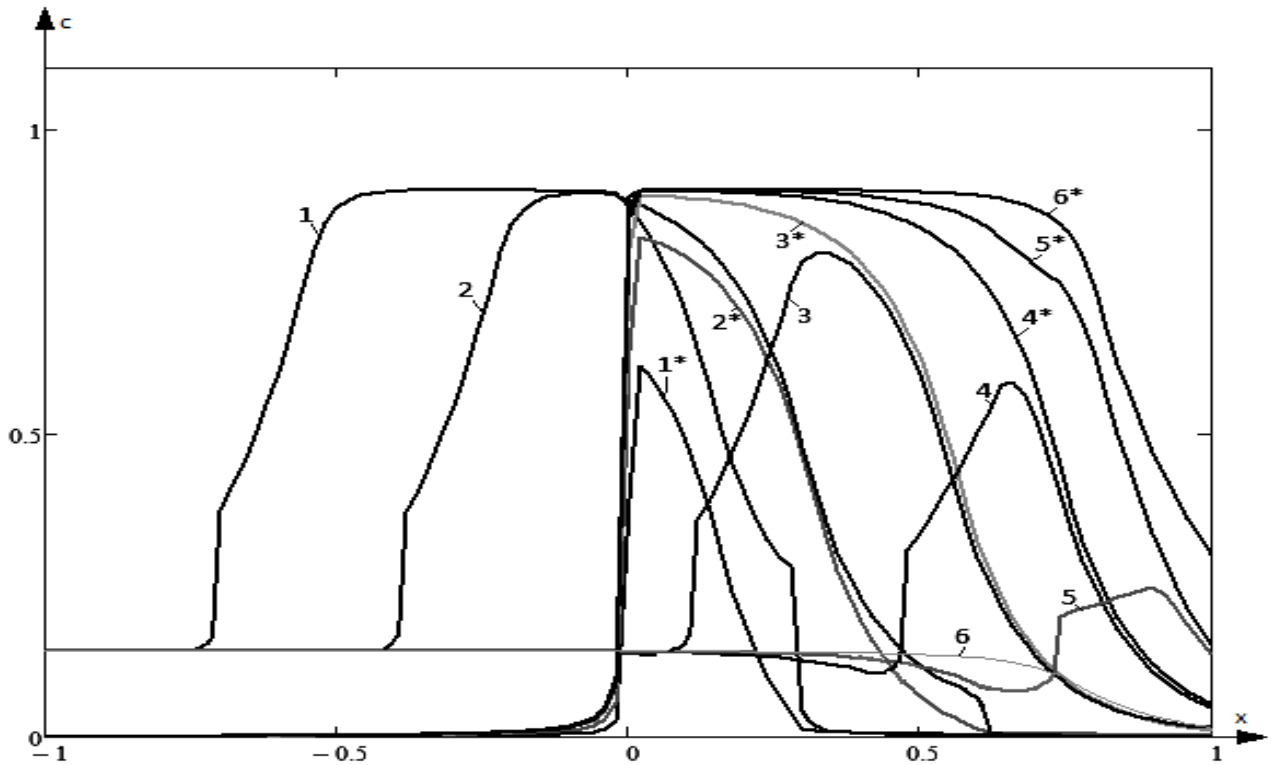
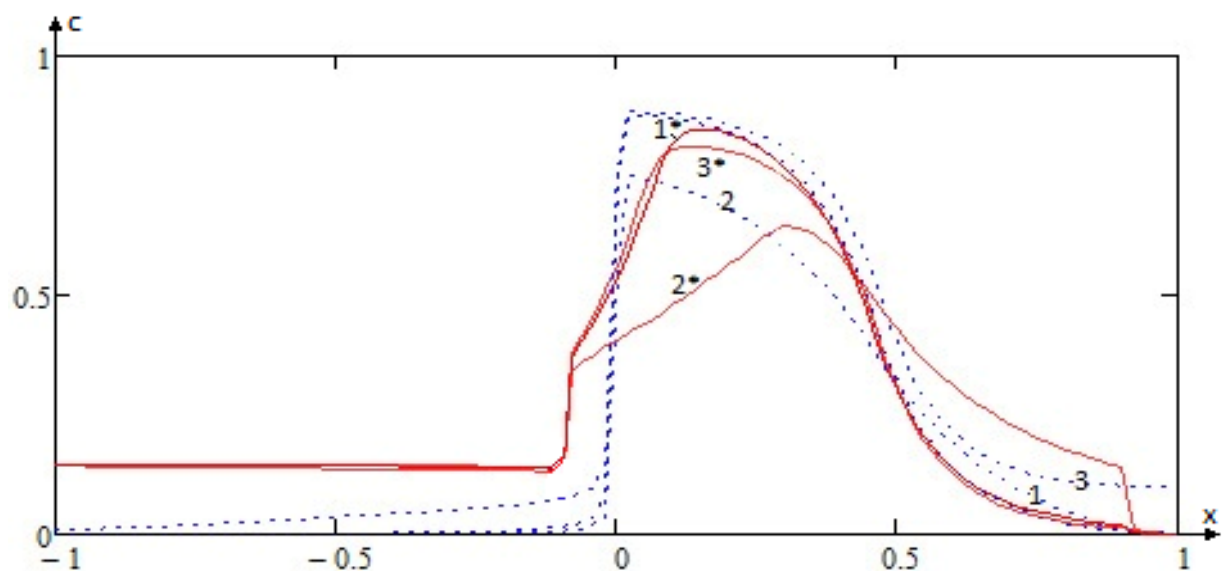
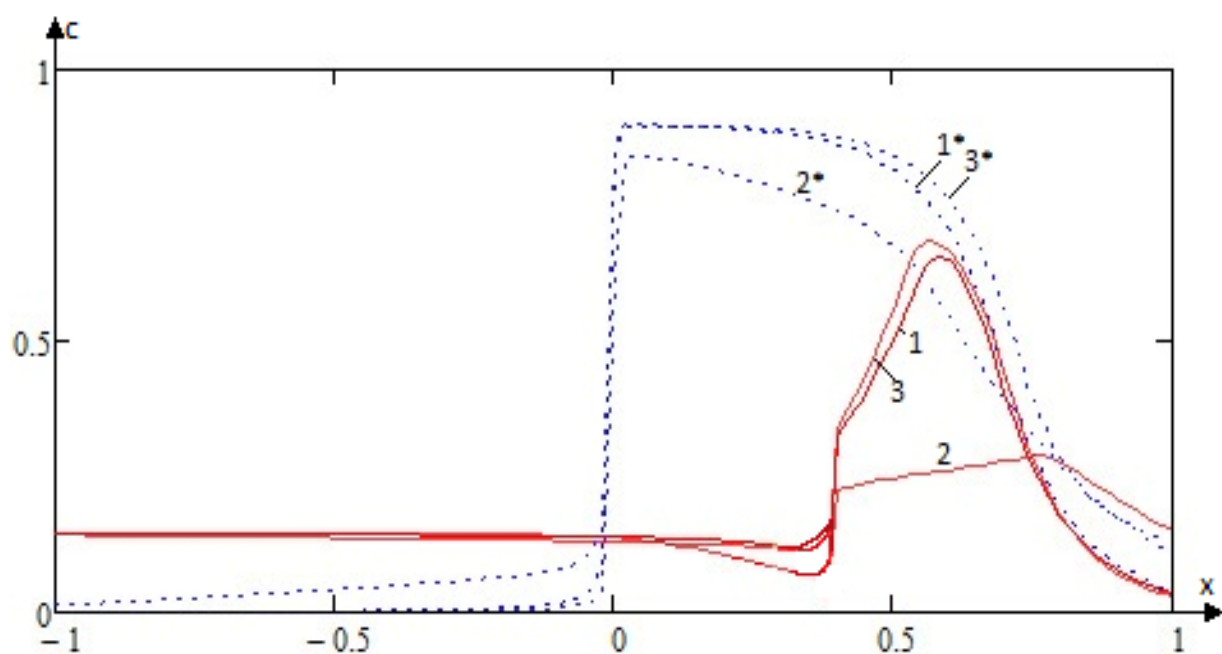


Рис. 18 Поділ насиченості забруднень у різні періоди часу.

На рисунку під номером 19 показано поділ насиченості бруду, котрий вже осів у завантаженні (криві $1^* - 3^*$) та насиченості бруду, який відірвався від завантаження у певній точці x за деякий час t (криві 1–3) відповідно при $\gamma_1(x) = 2/5 + \arctg(600x) \cdot 4/(5\pi)$, $\gamma_2(x) = 1/5 + \arctg(600x) \cdot 2/(5\pi)$, $\gamma_3(x) = 4/9 + \arctg(600x) \cdot 6/(7\pi)$ та $v(x) = 0.2$, $n = 150$ рис.19 (а) в моменти часу $t = 4.566$ та на рисунку 19 (б) в моменти часу $t = 6.966$.



а)



б)

Рис. 19 Поділ насиченості забруднення, котре вже осіло у завантаженні та насиченості забруднення, яке від'єдналося від завантаження в точці x за час t .

РОЗДІЛ III. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ВИКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ОЧИСТКИ ВОДИ ВІД ОРГАНІЧНИХ ЗАБРУДНЕНЬ НА КАРКАСНО-ЗАСИПНИХ ФІЛЬТРАХ В РАМКАХ РОБОТИ У КЛАСАХ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

Сьогодні вимагання щодо математичної підготовленості здобувачів не тільки перед вищої, але й вищої освіти досить таки збільшують роль формування в учнів та абітурієнтів навички до набуття нових знань, а ще й використання набутих знань до розв'язання різноманітних вправ згідно професійного характеру, що, в свою чергу, вимагає від наставника дослідження та створення більш сучасних якихось практичних завдань, котрі власне і будуть ціле направлені суто на розв'язування завдань згідно конкретної спеціальності.

Майже всі задачі, пов'язані з фізичними законами природи можна описати застосовуючи, диференціальні рівняння з частковими похідними [43].

Диференціальні рівняння грають чи не найважливішу роль, коли мова власне йде про вивчення процесів, які наявні у нашому реальному житті, як початкові компоненти певних математичних моделей. Є певні типи задач спеціально для диференціальних рівнянь у частинних похідних 1-го порядку, котрі використовуються для знаходження рішення задач конвективного масопереносу та задач конвективної дифузії. Наприклад, як відомо, процес масопереносу у процесі фільтрації, яке власне відбувається у пористому середовищі можна описати, використовуючи таку систему диференціальних рівнянь, як: рівняння фільтрації (закон Дарсі та рівність нерозривності) і рівність конвективної дифузії й масообміну (закон Фіна та рівняння балансу для маси речовин). А решта процесів описують іншими рівняннями та їх відповідними системами.

Отже, диференціальні рівняння з частковими похідними широко використовуються для запису законів природи, розв'язування задач конвективного масопереносу, конвективної дифузії тощо.

Але, учням шкіл не достатньо того матеріалу, котрий подається в школі. Для того, щоб він зумів вирішити систему подану у розділі 2, котра містить диференціальні рівняння в часткових похідних, потрібно опанувати додатково теоретичний матеріал.

Для цього, даний розділ присвячений саме висвітленню найголовніших теоретичних питань по методиці, котрі власне вчитель або ж наставник зможе передати учневі, чи учасникові МАН для вміння в подальшому змодельовати нелінійний процес очистки води від органічних забруднень на каркасно-засипному фільтрі та вирішити систему, котра містить диференціальні рівняння з частковими похідними.

3.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ. ОДНОРІДНЕ ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ

Диференціальне рівняння, яке містить більше ніж одну незалежну змінну називається рівнянням в частинних похідних [28].

Рівняння з частинними похідними першого порядку має такий вигляд [15]

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0. \quad (3.1.1)$$

Розв'язком такого рівняння (3.1.1) називається функція, подана нижче

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1.2)$$

котра є визначеною, неперервною зі своїми частинними похідними у певній області змінних x_1, \dots, x_n й обертає в цій же області рівняння (3.1.1) у

тотожність [15, 28, 35]. Водночас x_1, \dots, x_n і значення $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ належать

області визначення функції $\Phi(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Рівняння (3.1.1) називається лінійним, коли функція $\Phi(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ залежить лінійно лише від частинних похідних шуканої функції [33]

$$X_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u). \quad (3.1.3)$$

Давайте переглянемо однорідну рівність, а якщо бути точнішими, то ситуацію при якій $R(x_1, \dots, x_n, u) \equiv 0$, а функції $X_i(x_1, \dots, x_n, u)$, $i = 1, 2, \dots, n$ не мають зв'язку з u .

$$X_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (3.1.4)$$

Розв'язок, вище поданої рівності (3.1.4) такий

$$u = c, \text{ де } c = \text{const}. \quad (3.1.5)$$

Давайте доведемо те, що рівняння (3.1.4) може мати безліч коренів, відмінних від очевидних.

У такому разі, ми власне будемо розглядати разом із рівнянням (3.1.4) систему, котра містить звичайні диференціальні рівняння у симетричної форми

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)}. \quad (3.1.6)$$

Для цього, ми повинні розглянути та довести теореми, котрі власне і утворюють тісний контакт між рівністю під номером (3.1.4) та системою (3.1.6). Будемо вважати, що коефіцієнти $X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n)$ виразу (3.1.4) є неперервні водночас зі своїми ж частинними похідними по x_1, \dots, x_n у певному околі точки $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ й запевнятимемо, що у даній точці вони ні в якому разі не перетворюються у нуль (інше кажучи точка $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ні в якому разі не буде особливою точкою системи (3.1.6)) [35]. Для прикладу, вважатимемо, що

$$X_n(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0. \quad (3.1.7)$$

При такому нашому припущенні (3.1.6) буде мати $(n-1)$ самостійних інтегралів, котрі обов'язково є визначеними та неперервними із своїми

частинними похідними в околі точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Такий висновок ми отримали з того, що наша система під номером (3.1.6) є рівносильною до звичайної системи величини $(n-1)$

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, \dots, x_n)}{X_n(x_1, \dots, x_n)},$$

$$\frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2(x_1, \dots, x_n)}{X_n(x_1, \dots, x_n)},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, \dots, x_n)}{X_n(x_1, \dots, x_n)}$$
(3.1.8)

котра містить всі необхідні виконуючі вимоги до теореми, яка говорить про наявність самостійних інтегралів для деякої звичайної системи.

Теорема 1. Будь-який інтеграл системи під номером (3.1.6) буде неочевидним розв'язком рівняння під номером (3.1.4) [35].

Доведення:

Припустімо, що $\psi(x_1, \dots, x_n)$ – це інтеграл системи під номером (3.1.6), звичайно що він є визначеним у певному околі точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Остаточний диференціал функції $\psi(x_1, \dots, x_n)$, враховуючи (3.1.6) або (3.1.8), буде рівний нулю та матиме такий вигляд

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0. \quad (3.1.9)$$

Беручи до уваги такі співвідношення $dx_1 = \frac{X_1(x_1, \dots, x_n)}{X_n(x_1, \dots, x_n)} dx_n, \dots,$

$dx_{n-1} = \frac{X_{n-1}(x_1, \dots, x_n)}{X_n(x_1, \dots, x_n)} dx_n$, рівність (3.1.9) переписиться у такий вигляд

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \right] dx_n \equiv 0. \quad (3.1.10)$$

Розділимо обидві частини рівності на dx_n та одночасно помножимо на X_n , в результаті матимемо

$$X_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \equiv 0. \quad (3.1.11)$$

А це і говорить нам про те, що функція $u = (x_1, \dots, x_n)$ є власне рішенням рівності під номером (3.1.4).

Теорема 2. Будь-який неочевидний корінь рівності під номером (3.1.4) є інтегралом системи під номером (3.1.6) [35].

Доведення:

Припустимо, що $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ – неочевидний корінь рівності під номером (3.1.4). Отже,

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0. \quad (3.1.12)$$

Порахуємо

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right] dx_n = \left(X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \frac{dx_n}{X_n} \equiv 0.$$

А це власне і свідчить про те, що функція $\psi(x_1, \dots, x_n)$ є інтегралом системи під номером (3.1.6).

Приклад 1. Відшукати рішення лінійного однорідного рівняння з частинними похідними, поданого нижче

$$x \frac{\partial U}{\partial x} - 2y \frac{\partial U}{\partial y} - z \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (3.1.13)$$

Розв'язання:

Спочатку перепишемо нашу рівність під номером (3.1.13) у систему симетричної форми, матимемо

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z}. \quad (3.1.14)$$

Для такої системи звичайних диференціальних рівнянь матимемо нижче подані інтеграли

$$\psi_1 = xz, \quad \psi_2 = x\sqrt{y} \quad (3.1.15)$$

А тому,

$$U_1 = xy, U_2 = x\sqrt{y} \quad (3.1.16)$$

є рішенням рівності під номером (3.1.13).

3.2 ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Нехай

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.2.1)$$

деякі інтеграли системи (3.1.6), котрі є незалежними. А функція

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \quad (3.2.2)$$

де $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ – певна диференційована функція, котра є розв'язком рівняння під номером (3.1.4) [10].

А й справді, підставивши рівність (3.2.2) у (3.1.4) ми матимемо, що

$$\begin{aligned} X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} &= X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} (X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Формула під номером (3.2.2) називається загальним розв'язком рівності під номером (3.1.4) [10]. На відміну від загального рішення звичайного диференціального рівняння (3.2.18) включає не будь-які сталі, а певну функцію.

Отже, задача на відшукування загального рішення рівності (3.1.4) еквівалентна до задачі на відшукування $(n-1)$ незалежних інтегралів конкретної системи звичайних диференціальних рівнянь, які власне подано у симетричному вигляді [18].

Давайте переглянемо ситуацію, котра містить дві незалежні змінні

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (3.2.4)$$

Перепишемо нашу систему в симетричному вигляді

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}. \quad (3.2.5)$$

Відповідно, якщо функція $\psi(x, y)$ – це інтеграл нашої системи під номером (3.2.5), то

$$z = \Phi(\psi(x, y)) \quad (3.2.6)$$

є загальним рішенням рівності (3.2.4). Функція $\Phi(\psi(x, y))$ є довільною неперервною та ще й диференційованою функцією залежно від ψ . Геометрично загальному рішенням рівності (3.2.6) буде відповідати сімейство інтегральних поверхонь, котре тісно пов'язане із довільною функцією $\Phi(\psi(x, y))$.

Приклад 2. Відшукати загальний розв'язок рівності

$$x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0. \quad (3.2.7)$$

Розв'язання:

Здійснимо запис підходящої системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}. \quad (3.2.8)$$

Для такої системи під номером (3.2.8) віднайдемо інтеграл

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1, \quad \frac{x_3}{x_1} = c_2, \dots, \frac{x_n}{x_1} = c_{n-1}. \quad (3.2.9)$$

Отже

$$\psi_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \psi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \dots, \quad \psi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}. \quad (3.2.10)$$

А результатом буде

$$U = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right), \quad (3.2.11)$$

де $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$ – неперервна та диференційована функція, котра і є загальним розв'язком системи під номером (3.2.7).

Приклад 3. Вирішити рівність

$$(z-y) \frac{\partial U}{\partial x} + (x-z) \frac{\partial U}{\partial y} + (y-x) \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (3.2.12)$$

Розв'язання:

І так, здійснимо запис системи звичайних диференціальних рівнянь, котру подаємо так:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \quad (3.2.13)$$

Не важко з'ясувати, що

$$\psi_1 = x + y + z, \quad \psi_2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (3.2.14)$$

А тому, загальний розв'язок набуде виду:

$$U = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2). \quad (3.2.15)$$

3.3 ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Тепер власне ми підходимо до постановки і знаходження рішення задачі Коші нашого рівняння під номером (3.1.4) [1, 20]. З усіх знайдених розв'язків рівняння відшукати той,

$$u = f(x_1, \dots, x_n), \quad (3.3.1)$$

котрий буде задовольняти поставленій на початку задачі умові

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}, \quad (3.3.2)$$

або ж

$$u \Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (3.3.3)$$

де $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ задана функція від x_1, \dots, x_{n-1} , котра є неперервною та диференційованою [1, 35].

Якщо ж ми маємо випадок, коли є дві змінні, то постановка задачі має такий вид: знайти функцію

$$z = f(x, y), \quad (3.3.4)$$

Котра задовольняє поставленій умові

$$z = \varphi(y) \text{ при } x = x^{(0)}. \quad (3.3.5)$$

Геометрично (3.3.4), (3.3.5) говорить про те, що з усіх інтегральних поверхонь потрібно відшукати лиш ту, котра буде містити задану криву (3.3.5) коли $x = x^{(0)}$. Дана крива буде належати площині $x = x_0$, котра є паралельною до YOZ .

При ставленні задачі Коші власне для однорідного лінійного рівняння під номером (3.1.4), аби було існування кореня, здійснюють фіксацію конкретного

значення тієї змінної, яка є незалежною та для котрої відповідний коефіцієнт, котрий відповідає тій частинній похідній, від функції котру потрібно знайти, відмінний від нуля в деякій початковій точці $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Ми маємо випадок, згідно умови під номером (3.1.7), коли потрібно фіксувати x_n .

Тобто, при розв'язуванні задачі Коші наш розв'язок зводиться до відшукування функції вигляду $\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ так, аби

$$\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) \Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (3.3.6)$$

Давайте введемо деякі позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \bar{\psi}_1 \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases}. \quad (3.3.7)$$

Далі рівність (3.3.6) набуде такого виду

$$\Phi(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (3.3.8)$$

Відшукаємо рішення системи під номером (3.3.7) у околі конкретних точок $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, в залежності від x_1, \dots, x_{n-1} (це реально, адже $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ – незалежні інтеграли)

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) \\ \dots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Тому, функцію $\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ будемо вибрати так

$$\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})). \quad (3.3.10)$$

А умова під номером (3.3.8) буде здійснюватися

$$\Phi(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1})) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

А тому,

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})) \quad (3.3.11)$$

– є нашим шуканим розв'язком задачі Коші.

Приклад 4. Вирішити задачу Коші

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ за умови } z = \varphi(y) \text{ при } x = 0.$$

Розв'язання:

І так, складемо відповідну систему

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x},$$

звідси $\psi = x^2 + y^2$ – отриманий інтеграл.

Так, як $y^2 = \bar{\psi}, y = \sqrt{\bar{\psi}}$.

Кінцевим рішенням є $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Далі давайте переглянемо часткові випадки:

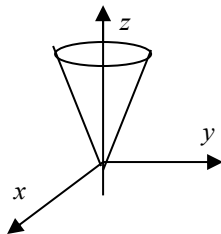


Рис. 20

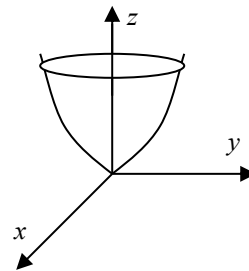


Рис. 21

а) $\varphi(y) = y$. Тоді матимемо, що $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 + y^2$.

Рішенням є конус, котрий отримано внаслідок обертання прямої $z = y$ навколо OZ (рис. 20);

б) $\varphi(y) = y^2$. Тоді матимемо, що $z = x^2 + y^2$.

Рішенням є параболоїд, котрий отримано внаслідок обертання прямої $z = y^2$ навколо OZ (рис. 21).

3.4 СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ У ПРОЦЕСІ ФІЛЬТРУВАННЯ В ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ. АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ.

Ми знаємо, що математична модель є наближеною, адже ми намагаємося відобразити найсуттєвіші сторони того чи іншого процесу. При цьому всьому, математична модель повинна бути досить таки простою для подальшого дослідження і та отримання даних про процес. Внаслідок цього, певні чинники,

котрі мають досить таки маленький вплив на процес – не беруть до уваги, а отже не всі складові є наявні у побудованій математичній моделі.

Варто зацікавитись, якою ж є роль власне ось тих неврахованих чинників? Чи матимуть вони сильний вплив на процес чи ні? Чи можна гарантувати, що процес може повністю відбутися без них?

Для того, щоб дати відповідь на ці питання нам варто створити більш таки детальнішу модель, котра власне і поєднає всі чинники, котрі не були наявні у більш простішій моделі. Далі нам варто вирішити питання щодо наближеності розв'язків, отриманих як з спрощеної моделі так і більш розширеної.

І так, внаслідок того, що ми власне врахуємо малі чинники, котрі наявні у розширеній моделі, ми отримаємо додаткові члени з меншими множниками, котрі власне опишуть малість цих чинників. Описані малі множники мають назву *малі параметри*.

У випадку, коли математична модель є диференціальним рівнянням, то запитання про дію цих малих параметрів власне на процес, що досліджується, приводить нас до ознайомлення із залежностями коренів диференціального рівняння саме від малих параметрів. Ці члени даного рівняння, котрі власне і містять малі параметри називаються *збуренням*.

Початкове рівняння, без цих членів є *незбуреним рівнянням*, а розширене, тобто у котрому є ці члени – *рівняння зі збуреннями (збурене)*.

Збурення, котре міститься у математичних моделях ділиться на два таких класи:

1. *Регулярні* – тобто ті збурення, котрі мало що змінюють у рішенні незбуреної задачі.

2. *Сингулярні* – це ті збурення, котрі суттєво змінюють розв'язок незбуреної задачі.

Диференціальні рівняння, котрі містять змінні коефіцієнти йдучи від 2-го порядку та й вище не можна розв'язати у замкненому виді.

А тому, для того, щоб розв'язати рівняння такого типу використовують різні наближені техніки (асимптотичні, аналітичні, числові та якісні методи) [41, 6].

Ми будемо розглядати саме асимптотичний метод, або його ще називають методом малого параметру.

Асимптотичні методи – це методи, котрі дають нам можливість охарактеризувати поведінку якихось певних функцій або розв'язків диференціальних, інтегральних чи інших рівнянь, у тому разі, коли певні параметри, від яких вони залежать, прямують до певної границі скінченної чи нескінченної [41, 6].

Дані методи виникли в математичному аналізі приблизно у XVIII ст.. вони досить широко використовувалися у працях таких науковців вчених як Лаграндж, Лавер'є, котрі поставили досить таки стійкий фундамент у теорію збурень [39].

Взагалі конвективна дифузія тісно взаємопов'язана із рухом середовища, власне у котрому внаслідок турбулентних якихось поштовхів відбувається змішування потоку і тим же зрівнюється насиченість речовини, котра наявна в об'ємі. Темп такої конвективної дифузії буде залежати від гідродинамічних чинників, котрі можна визначити, врахувавши швидкість того потоку та власне масштаб турбулентності. Розподіл насиченості внаслідок конвективної дифузії відтворюється за допомогою диференційної рівності конвективного перенесення речовини:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \tilde{N} = D \cdot \Delta \tilde{N}.$$

При наявності у рухомому середовищі диференційованого рівняння конвективного переносу через насиченість темп потоку є змінним. В такому випадку дане рівняння нам варто переглядати разом із рівняннями гідродинаміки, котрі є диференційованими, а це ніщо інше, як рівняння руху Нав'є-Стокса і рівняння потоку, що є нерозривним.

Давайте виведемо рівність для конвективної дифузії що міститься у деякій пластині.

Нехай маємо деякий простір темпів фільтраційного потоку $\vec{V} = (V_x(x, y), V_y(x, y))$. На тлі даного простору відбувається деякий поділ розчинних сполук.

Присвоїмо деякі позначення: D - коефіцієнт дифузії, $U_x(x, y)$, $U_y(x, y)$ - складові масового темпу, $c(x, y, t)$ – насиченість розчиненої сполуки у деякій точці (x, y) конкретного моменту t .

За допомогою закону Фіка, ми власне і будемо здійснювати опис рівняння руху $J = Cv_m$, $\vec{J} = -D \text{grad } C = -D \nabla C$ (C – насиченість дифузанта; v_m – середня швидкість):

$$\begin{cases} U_x = V_x c - D \frac{\partial c}{\partial x}; \\ U_y = V_y c - D \frac{\partial c}{\partial y}; \end{cases} \quad (3.4.1)$$

та рівність для рівноваги речовини $\frac{\partial \sigma C}{\partial t} = -\text{grad } J$:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma c}{\partial t} = 0 \quad (3.4.2)$$

де (U_x, U_y) – вектор масового темпу (темп зміни маси).

Після того, як ми підставимо рівність (3.1.4) у рівність під номером (3.1.5), врахувавши, що $\text{div } \vec{V} = 0$ (течія ідеальна), $D = \text{const}$, $\sigma = 1$, будемо мати:

$$D(c_{xx} + c_{yy}) - V_x c_x - V_y c_y = \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (3.4.3)$$

Рівність під номером (3.4.3) і є рівнянням виду «конвекція-дифузія», але лиш за умовою превалювання конвективного компонента $(V_x c_x + V_y c_y)$.

Давайте тепер переглянемо асимптотичний спосіб для розв'язання задач на кшталт «конвекція-дифузія».

Припустимо, що у нас є криволінійна чотирикутна область $G_z=ABCD$ ($z=x+iy$), котра власне обмежена кривими, яких є чотири і всі вони гладкі $AB=\{z:f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z:f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z:f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z:f_4(x,y)=0\}$, та у точках A, B, C, D перетинаються під кутом 90^0 . Уважно роздивимося у даній області модельну задачу, а саме хід конвективної дифузії під час фільтрування у середовищі, котре є пористим та одночасно однорідним, тобто має вид:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - v_x(x,y) \frac{\partial C}{\partial x} - v_y(x,y) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (3.4.4)$$

$$C|_{AB} = C_*(M,t),$$

$$C|_{CD} = C^*(M,t),$$

$$C(M,0) = C_0^0(M),$$

$$C|_{AD} = C_{**}(M,t), \quad (3.4.5)$$

$$C|_{BC} = C^{**}(M,t),$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x,y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \frac{d\varphi}{dn}|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn}|_{DA} = 0, \quad (3.4.6)$$

де $C(x,y,t)$ – насиченість речовини, котра розчиняється у процесі фільтрації у деякій точечці (x,y) та часу t , M – текуча точечка конкретної кривої, n – нормаль до певної не прямої лінії, ε – нескінченно мала величина, котра описує позитивні характеристики деяких частин дії над іншими, вважаючи що $\varepsilon > 0$, φ, v_x, v_y – здатність та складові частинки темпу фільтрації власне у пористому місці G_z , $\sqrt{v_x^2(x,y) + v_y^2(x,y)} > v_* \gg \varepsilon$, $C_*(M,t)$, $C^*(M,t)$, $C_0^0(M)$, $C_{**}(M,t)$, $C^{**}(M,t)$ – в міру згладжені функції, узгоджені одне з одним на ребрах простору G ($G = G_z \times (0, \infty)$).

Тепер введемо деяку злагоджену функцію нашої течії $\psi = \psi(x,y)$, котра є комплексно спряженою до функції $\varphi = \varphi(x,y)$. Нам варто замінити дві кінцеві

межові умови (3.4.6) на умову: $\psi|_{BC} = Q$, $\psi|_{AD} = 0$, де Q – невідома величина, повний розхід, а саму власне умову конкретнішою так би мовити абстрактною задачею на відповідне відбиття:

$$w = w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

деякої ділянки G_z на прямокутник

$$G_w = \{w: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}, \kappa = 1$$

(k – фактор власне дії фільтрації) при належних межових точках A, B, C, D (див. рис. 22, а)).

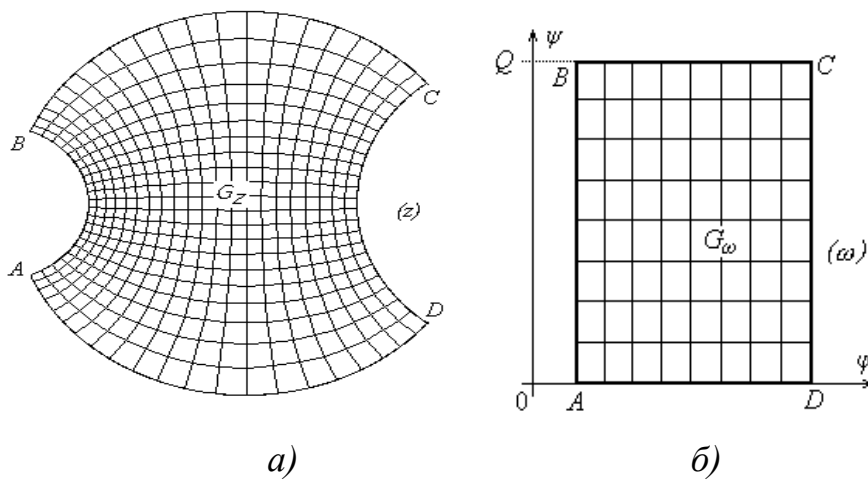


Рис. 22. Фізична частина G_z (а) та частина комплексного потенціалу G_w (б)

Така, вище описана задача була вирішена Бомбою А. Я. та Каштаном С. С. [6].

Тепер, нехай умова під номером (3.4.6) методом конформного відбиття $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) є вже вирішеною. У випадку, коли ми здійснимо заміну таких змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівності під номером (3.2.4) та умовах (3.2.5), одержимо потрібну нам «дифузійну задачу» для місця комплексного потенціалу:

$$\varepsilon v^2(\varphi, \psi) [C_{\varphi\varphi} + C_{\psi\psi}] - v^2(\varphi, \psi) C_{\varphi} = C_t, \quad (3.4.7)$$

$$C(\varphi_*, \psi, t) = C_*(\psi, t),$$

$$C(\varphi^*, \psi, t) = C^*(\psi, t),$$

$$C(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t),$$

$$C(\varphi, Q, t) = C^{**}(\varphi, t),$$

$$C(\varphi, \psi, 0) = C_0^0(\varphi, \psi),$$

де $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ (рух в довільному поперечному перерізі G_z) міститься у процесі розв'язання задачі фільтрації [6]. Бомба А. Я. відшукав розв'язок цієї задачі та ще й з точністю до $O(\varepsilon^2)$ у виді асимптотичного ряду, поданого нижче:

$$\begin{aligned} C(\varphi, \psi, t) = & C_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \cdot C_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^2 \check{I}_i(\varphi, \psi, t) + \\ & + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} P_i(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \bar{P}_i(\varphi, \mu, t) + R_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

де R_2 – член залишку, $C_i(\varphi, \psi, t)$, ($i = \overline{0,1}$) – члени систематичної частини асимптотики, $\check{I}_i(\xi, \psi, t)$, ($i = \overline{0,2}$) – деякі функції на кшталт пограншару у околі $\varphi = \varphi^*$, а його інші члени – пограншарові функції, $P_i(\varphi, \eta, t)$, $\bar{P}_i(\varphi, \mu, t)$, ($i = \overline{0,2}$) – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q$ (поправки на лініях течії BC та AD), $\xi = (\varphi^* - \varphi) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\eta = (Q - \psi) \varepsilon^{-1/2}$, $\mu = \psi \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – потрібні регулятивні перетворення [6].

Давайте підставимо рівність під номером (3.4.8) у рівність (3.4.7), та зрівняймо коефіцієнти при тих самих степенях ε . Отримаємо чергові умови з допомогою яких знайдемо головну частину $C_0(\varphi, \psi, t)$ рішення та виправлення $C_1(\varphi, \psi, t)$:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) C_{0\varphi} + C_{0t} = 0, \\ C_0|_{t=0} = C_0^0(\varphi, \psi), C_0|_{\varphi=\varphi^*} = C_*(\psi, t), \end{cases} \quad (3.4.9)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) C_{1\varphi} + C_{1t} = g(\varphi, \psi, t), \\ g(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi)(C_{0\varphi\varphi} + C_{0\psi\psi}), \\ C_1(\varphi, \psi, 0) = C_1(\varphi^*, \psi, t) = 0, \end{cases}$$

Характеристичне рівняння, рівність характеристик та власне загальний розв'язок 1-ої із задач (3.4.9) матиме вигляд:

$$\frac{d\varphi}{v^2(\varphi, \psi)} = \frac{dt}{1}, f(\varphi, \psi) - t = \rho, C_0(\varphi, \psi, t) = \hat{O}(f(\varphi, \psi) - t),$$

де $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) d\tilde{\varphi}$, $\Phi(x)$ – будь-яка диференційована функція, ρ – певна стала [20, 31]. А власне її рішення подають у вигляді:

$$C_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} C_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \\ C_*(\varphi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де f^{-1} – функція, котра є оберненою до f залежно від змінної φ . Застосовуючи спосіб характеристик та беручи до уваги те, що змінна ψ котра є у другій із задач (3.4.9) є лиш параметром, ми власне і знаходимо рішення $C_1(\varphi, \psi, t)$:

$$C_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) g(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi)) d\tilde{\varphi}, & t > f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t \leq f(\varphi, \psi). \end{cases}$$

У тому разі, коли при вірності функцій $C_0^0(\varphi, \psi)$ та $C_*(\varphi, t)$ здійснюється тільки умова, а саме – неперервність $C_0^0(0, \psi) = C_*(0, t)$, то $C_0(\varphi, \psi, t)$, більш того функція $C_1(\varphi, \psi, t)$, не вийде гладенькою поздовж $t = f(\varphi, \psi)$ ($\forall \varphi \in (-\varphi_*, \varphi^*)$). Отже (3.4.8) не задовольняє рівність (3.4.7) у області $\{(\varphi, \psi, t) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q, t > 0\}$.

Задля гладкості цієї не згладженості поздовж ознаки $t = f(\varphi, \psi)$ для початку замість негладкої функції $C_0(\varphi, \psi, t)$ дивляться її гладкість:

$$\tilde{C}_0(\varphi, \psi, t) = 2^{-1}(1 - D(\theta))C_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi) + 2^{-1}(1 + D(\theta))C_*(\varphi, t - f(\varphi, \psi)),$$

де $D(\theta) = \int_0^{\theta} e^{-\tau^2} d\tau$, $\theta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}(t - f(\varphi, \psi))$.

А й справді, функція $C \approx \tilde{C}_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon C_1(\varphi, \psi, t) = \tilde{C}(\varphi, \psi, t)$ підходить нашому рівнянню (3.4.7), але не задовольняє здійсненню початкової та межових умов, котрі власне задовольнялись функцією $C_0(\varphi, \psi, t)$.

Для того, щоб виконувалась друга із межових умов, варто побудувати зовнішню межову функцію $\tilde{I} = \tilde{I}_0 + \varepsilon \tilde{I}_1 + \varepsilon^2 \tilde{I}_2$ у деякому околі $\varphi = \varphi_*$ так, аби $C(\varphi, \psi, t)$ із близькістю до $O(\varepsilon^2)$ підходила так само, як рівняння, так і решта межових умов. Зробимо зміну (розтяг): $\xi = \varepsilon^{-1}(\varphi_* - \varphi)$, $\varphi = \varphi_* - \varepsilon \xi$.

Враховуючи основні правила інтегрування отримаємо, що $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$,

$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$. Тоді запишемо оператор $L\dot{I} = \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \Delta \dot{I} - v^2(\varphi, \psi) \dot{I}_\varphi - \dot{I}_t$ для змінних

$$(\xi, \psi, t): L\dot{I} = v^2(\varphi_* - \xi\varepsilon, \psi) \left[\left[\varepsilon^{-1} \dot{I}_{\xi\xi} + \varepsilon \dot{I}_{\psi\psi} \right] + \varepsilon^{-1} \dot{I}_\xi \right] - \dot{I}_t.$$

Зробимо розклад $v^2(\varphi_* - \xi\varepsilon, \psi)$ у ряд Тейлора в околі точки $\varphi = \varphi_*$. Матимемо:

$$v^2(\varphi_* - \xi\varepsilon, \psi) = v^2(\varphi_*, \psi) + 2v(\varphi_*, \psi)v'(\varphi_*, \psi)(-\varepsilon\xi) + (v'^2(\varphi_*, \psi) + v(\varphi_*, \psi)v''(\varphi_*, \psi))(\varepsilon\xi)^2 + \dots$$

Тобто рівняння матиме такий вид:

$$\varepsilon(v^2(\varphi_*, \psi, t) - \alpha\xi\varepsilon + \dots)(\varepsilon^{-2} \dot{I}_{\xi\xi} + \dot{I}_{\psi\psi}) + \varepsilon^{-1}(v^2(\varphi_*, \psi, t) - \alpha\xi\varepsilon + \dots) \dot{I}_\xi = \dot{I}_t,$$

де $\alpha = -2v(\varphi_*, \psi)v'(\varphi_*, \psi)$.

Здійснимо прирівняння $L(\dot{I}_0 + \varepsilon \dot{I}_1 + \varepsilon^2 \dot{I}_2) = 0$ коефіцієнтів, які власне розташовані біля однакових степенів ε для відшукування Π_i . Матимемо рівняння та відповідні до них умови:

$$\begin{cases} \dot{I}_{0\xi\xi} + \dot{I}_{0\xi} = 0, \\ \dot{I}_0(0, \psi, t) = C^*(\psi, t) - C_0(\varphi_*, \psi, t), \quad \dot{I}_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_{1\xi\xi} + \dot{I}_{1\xi} = v^{-2}(\varphi_*, \psi) f_1(\xi, \psi, t), \quad f_1(\xi, \psi, t) = \dot{I}_{0t}(\xi, \psi, t), \\ \dot{I}_1(\varphi_*, \psi, t) = -C_1(\varphi_*, \psi, t), \quad \dot{I}_1(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_{2\xi\xi} + \dot{I}_{2\xi} = v^{-2}(\varphi_*, \psi) f_2(\xi, \psi, t), \\ f_2(\xi, \psi, t) = v^{-2}(\varphi_*, \psi) \alpha \xi \dot{I}_{0t}(\xi, \psi, t) + \dot{I}_{1t}(\xi, \psi, t) - v^2(\varphi_*, \psi) \dot{I}_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t), \\ \dot{I}_2(\varphi_*, \psi, t) = 0, \quad \dot{I}_2(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Тепер власне можна відшукати розв'язки поданих рівнянь. Отримаємо:

$$\dot{I}_0(\xi, \psi, t) = (C^*(\psi, t) - C_0(\varphi_*, \psi, t))e^{-\xi},$$

$$\dot{I}_1(\xi, \psi, t) = -C_1(\varphi_*, \psi, t)e^{-\xi} - v^{-2}(\varphi_*, \psi) \xi \dot{I}_{0t}(\xi, \psi, t),$$

$$\dot{I}_2(\xi, \psi, t) = -((M_1 + M_2)\xi - M_2\xi^2/2)e^{-\xi},$$

де $M_1 = -(v^{-2}(\varphi_*, \psi)C_{1t}(\varphi_*, \psi, t) + (C_{\psi\psi}^*(\psi, t) - C_{0\psi\psi}(\varphi_*, \psi, t)))$,

$$M_2 = v^{-4}(\varphi_*, \psi)\alpha(C_t^*(\psi, t) \cdot$$

$$-C_{0t}(\varphi_*, \psi, t)) - v^{-4}(\varphi_*, \psi)(C_{tt}^*(\psi, t) - C_{0tt}(\varphi_*, \psi, t)).$$

Для того, щоб була справедливою умова $C(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t)$, створюють зовнішню прикоряову функцію $P = P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1/2} + \varepsilon P_1$. Нагадаємо, що функція $P(\varphi, \psi, t)$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ повинна підходити як рівнянню, так і до всіх межових умов.

Для цього, потрібно додати заміну розтягу: $\eta = \sqrt{\varepsilon}^{-1}\psi$, $\psi = \eta\sqrt{\varepsilon}$. Беручи до уваги

помітні співвідношення: $\frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$, ми в змозі записати оператор

$$LD = \varepsilon v^2(\varphi, \psi)\Delta D - v^2(\varphi, \psi)P_\varphi - P_t \text{ у виді для наших змінних } (\varphi, \eta, t):$$

$$LD = \varepsilon v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta) [D_\varphi + \varepsilon^{-1}D_{\eta\eta}] - v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta)D_\varphi - D_t.$$

Тепер виконаємо розпис функції $v(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\eta)$ у ряд Тейлора в околі $\psi = 0$ та власне здійснимо підстановку у нашу рівність. Після зрівняння

$L(P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1/2} + \varepsilon P_1) = 0$ коефіцієнтів біля тих самих степенів ε , отримаємо:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(D_{0\eta\eta} + D_{0\varphi}) = D_{0t}, \\ P_0(\varphi, 0, t) = C_{**}(\varphi, t) - W(\varphi, 0, t), P_0(\varphi, 0, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(D_{1/2\eta\eta} + D_{1/2\varphi}) = K(\varphi, \eta, t), \\ P_{1/2}(\varphi, 0, t) = 0, P_{1/2}(\varphi, 0, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, 0)(D_{1\eta\eta} + D_{1\varphi}) = B(\varphi, \eta, t), \\ P_1(\varphi, 0, t) = 0, P_1(\varphi, 0, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

де $W(\varphi, \psi, t) = C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2$,

$$K(\varphi, \eta, t) = P_{1t} - 2\eta v'(\varphi, 0, t)v^{-1}(\varphi, 0, t)P_{0t},$$

$$B(\varphi, \eta, t) = P_{2t} - 2\eta v'(\varphi, 0)g(\varphi, 0)(P_{1\eta\eta} + P_{1\varphi}) - v^2(\varphi, 0)P_{0\varphi\varphi} - \frac{v'^2(\varphi, 0) + v(\varphi, 0)v''(\varphi, 0)}{v^2(\varphi, 0)}\eta^2 P_{0t}$$

Так, як нам необхідно, щоб здійснювалася межова умова $C(\varphi, Q, t) = C^{**}(\varphi, t)$, ми так же само, як і для P , зобразимо поверхневу межову функцію $\bar{P} = \bar{P}_0 + \sqrt{\varepsilon} \bar{P}_{1/2} + \varepsilon \bar{P}_1$.

І зрештою, зробимо ось таку підстановку:

$$\mu = \sqrt{\varepsilon}^{-1} (Q - \psi), \quad \psi = Q - \mu \sqrt{\varepsilon}.$$

ВИСНОВКИ

В ході виконання дипломної роботи на тему: «Математичне моделювання нелінійних процесів очищення води від органічних забруднень на каркасно-засипних фільтрах» були підбиті підсумки і виконано наступне:

1. Було описано що таке фільтрування, які є його основні види.
2. Здійснено опис фізичної моделі фільтрування.
3. Була наведена класифікація фільтрів із зернистим навантаженням, за низкою найважливіших ознак.
4. В описовому та табличному варіантах було наведено основні вимоги до якості води.
5. В роботі наведено закономірності фільтрування рідини на двошарових каркасно-засипних фільтрах з урахуванням дифузії.
6. Розглянуто модель самого процесу очищення води на каркасно-засипних фільтрах з урахуванням зворотного зв'язку.
7. Математично змодельовано процес фільтрування води з домішками без урахування дифузії з використанням програмного забезпечення MathCad.
8. Було змодельовано та у графічному вигляді зображено процес промивки двошарового каркасно-засипного фільтру.
9. Створено матеріали для факультативного заняття в науковій діяльності.

Матеріал даної магістерської роботи може бути використаний для проведення факультативних занять; при проведенні лекційних занять у вищих навчальних закладах; написанні робіт в Малій академії наук.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. С. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978
2. Алексеев Л.С. Контроль качества воды: учебник. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2007. 160 с.
3. Бахвалов Н.С. Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.- М.: Наука, 1987. 451 с.
4. Бербер В.А. Современное состояние в области исследования по обеспечению и контролю промышленной чистоты гидросистем. *Промышленная чистота рабочих жидкостей гидросистем и фильтрация*. Челябинск, 1983. С. 20-21.
5. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія»/ А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 252 с.
6. Бомба А. Я. Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде / А.Я. Бомба // Укр. матем. журн. – 1982. – Т.4, №4. – С. 493-496.
7. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки.- Київ: Наукова думка, 2007. – 264 с.
8. Бродский Г.С., Слесарев Б.В. Повышение надежности гидропривода – средство эффективного внедрения гидравлических экскаваторов на горных предприятиях СНГ. *«Горный журнал»*. 2002. №4. С. 54-57.
9. Гончаренко В. М. Нелинейные задачи для уравнений с частными производными / В. М. Гончаренко. – Чернівці : Рута, 2000. – 200 с.
10. Гончаренко В. М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними / В. М. Гончаренко. – Київ : Вища школа, 1995. – 350 с.
11. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2001. – 605 с.

12. Джеймс А. У. Математические методы контроля загрязнения воды: монографія. Мир, 1981. 471 с.
13. Доочистка сточных вод на зернистых фильтрах / Н. Н. Гириоль, М.Г. Журба, Г. М. Семчук, Б. Н. Якимчук; под общ. ред. Н. Н. Гириоля. – К., 1998. – 92 с.
14. Дронова Н. Д. Питна вода як фактор ризику. Kyiv Weekly, 2006. №44. 229 с.
15. Зайцев, В. Ф. Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.
16. Запольський А. К. Водопостачання, водовідведення та якість води: підручник. Київ. 2005. 671 с.
17. Запольський А. К., Мішкова-Клименко Н.А., Астрелін І.М. Фізико-хімічні основи технології очищення стічних вод: підручник. Київ: Логос, 2000. 552 с.
18. Имшенецкий В.Г. Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядков. М.: Изд. Моск. мат. общества, 1916
19. Исакова Е. К. Асимптотика решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического вида с малым параметром при производной. ДАН СССР. – Т. 117, №6. – 1957. – С. 935-938.
20. Капустина Т. О. Асимптотические решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. – 2000. – Т. 36, Л/515. – С.662– 666.
21. Климюк Ю. Є. Математичне моделювання просторових процесів фільтрації рідин у одного класу двошарових кусково-однорідних насичених пористих середовищах / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 10 (19). – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – С. 49–65.

22. Когановский А.М. Адсорбция органических веществ из воды. Л.: Химия, 1990. – 256 с.
23. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964. – 350 с.
24. Коновалов А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск : Наука. СО РАН. 1988. – 168 с.
25. Копсон Э.Т. Асимптотические разложения. – М.: Мир, 1966. – 159 с.
26. Кочмарский, В.З., Демчик И.И. Статистическая интерпретация математической модели фильтрования Минца *Теорет. основы хим. технологии*. Київ. 1989. №3, т. 23. С. 405-407.
27. Крылов, В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Наука. Т1, 1976. 584 с.; Т2, 1977. 611с.
28. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. – 830 с.
29. Кучеренко О.Ю. Питна вода має стати національним пріоритетом. *«Якість питної води: нові підходи та шляхи вирішення»*: 2008 рік: матеріали Міжнародн. наук.-практ. конф., 2008 р. Київ: МПВтСР, 2008. С. 14-21.
30. Лаврик В. И., Никифорович Н. А. Исследования конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена. Препр. АН УССР. Ин-т математики; 82.20. – К.: 1982. – 46 с.
31. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – К.: Наукова думка, 1973. – 264 с.
32. Ляшко И. И., Демченко Л. И., Мистецкий Г. Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. К. : Наук. думка, 1991. – 264 с.
33. Масленикова В. Н. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учебник. – М.: Издательство РУДН, 1997. – 447 с.
34. Математичне моделювання процесів первинної очистки стічних вод із використанням пористих мікрочастинок / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк, В. М. Сівак // Вісник Національного університету водного

господарства та природокористування. Серія «Технічні науки». – 2014. – Вип. 1(64). – С. 106–114

35. Петровский И.Г. Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: Физматлит, 1961.

36. Сівак, В. М., Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. Комп'ютерне моделювання процесів очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. 2005. Вип. 4 (32). С. 164-169.

37. Скопецкий, В.В. Бомба А.Я., Присяжнюк И.М. Сингулярно возмущенные задачи типа «конвекция-диффузия» в многосвязных областях. *Компьютерная математика*. 2004. №2. С. 99-104.

38. Терентьев О.М., Ворфоломеев А.В. Фізичні методи очищення рідин: конспект лекцій. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 162 с.

39. Треногин В. А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вішика. УМН. – 1970. – Т.25. – Вып. 4. – С.123–156.

40. Україна. Наказ. Про затвердження Державних санітарних норм та правил «Гігієнічні вимоги до води питної, призначеної для споживання людиною»: [затверджений Міністерством охорони здоров'я України 12 травня 2010 р.] // Законодавство України. – 2010. – №400 (12 травня).

41. Фешенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К.: Наукова думка, 1966. – 251 с.

42. Хертель Г. Современные гидравлические жидкости для украинской промышленности «Бизнес-мост». 2007. №3. С. 34-35.

43. Шамин Р. В. Дифференциальные уравнения в частных производных в пространствах Соболева. М.: «Грин Принт», 2019. —180 с.

44. Шехтман Ю. М. Фильтрация малоцентрированных суспензий. Москва: АН СССР, 1961. 212 с.