Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:
Методичні матеріали з курсу «Вступ у вищу математику» для дистанційного навчання

Виконала: студентка ІІ курсу, групи М-М-21
Спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Корнійчук Марія Анатоліївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Демчик С. П.

Рецензенти: канд. техніч. наук, доцент Присяжнюк О. В.
канд. фіз.-мат. наук, професор Крайчук О. В.

Рівне-2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Вступ у вищу математику» відіграє важливе значення в навчальному процесі. Він є необхідним для кращого сприйняття студентами вищої математики.

Математика є однією з найдавніших фундаментальних наук, що зародилась на початку цивілізації. Сучасна математика інтенсивно проникає у всі сфери діяльності людини, об'єктивно відображаючи універсальні закони навколишнього світу. Інколи математична культура ближча до науки, інколи до мистецтва; вона може бути і дотичною до них.

В Україні на вагу золота повинні цінуватися ті спеціалісти, які досконало володіють елементами вищої математики і не є вузькими ремісниками, а творцями у своїй справі.

Дисципліна «Вступ у вищу математику» для студентів та викладачів початківців має стати органічним поєднанням фундаментальної математичної теорії та задач професійної спрямованості.

Особистісно орієнтоване навчання вищої математики має забезпечувати умови для особистого зростання, самовизначення і самореалізації майбутніх вчителів та викладачів, для підвищення їхнього кругозору, творчої активності у професійній діяльності.

На заняттях з вступу у вищу математику існують всі можливості для використання математичних відомостей, морально-виховних аспектів, сучасних комп'ютерних засобів, які разом із продуманою організацією навчальної діяльності студентів можуть посприяти удосконаленню їхнього як математичного, так і педагогічного способу мислення. Тому процес навчання математики виступає *тренінговою технологією* у набутті життєво важливих та професійних компетентностей.

Велика кількість типових розв'язаних задач в кожному розділі дає можливість краще засвоїти теоретичний матеріал даного курсу.

Актуальність теми «Методичні матеріали з курсу «Вступ у вищу математику» для дистанційного навчання» обумовлена тим, що він є базою для кращого засвоєння студентами математичного аналізу, алгебри, геометрії та інших розділів вищої математики.

Об'єкт дослідження: основні методи розв'язування задач, які базуються на теорії курсу «Вступ у вищу математику».

Предмет дослідження: теоретичний матеріал із шкільного курсу математики.

Мета дослідження: розробити теоретичний матеріал та матеріал для практичних занять з курсу, а також завдання для самостійної, індивідуальної роботи студентів.

Апробація: матеріали дипломної роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів, здобувачів вищої освіти та співробітників РДГУ, 13-15 травня 2021 року.

РОЗДІЛ 1. ЛЕКЦІЙНИЙ МАТЕРІАЛ

1.1 Графіки елементарних функцій. Перетворення графіків функцій шляхом паралельного перенесення, стиску тощо

План

1. Поняття графіка функції. Класи функцій.

2. Графіки елементарних функцій.

2.1. Стала функція.

2.2. Степенева функція.

2.3. Показникова функція.

2.4. Логарифмічна функція.

2.5. Тригонометрична функція.

2.6. Обернено тригонометрична функція.

3. Перетворення графіків функція.

1. Поняття графіка функції. Класи функцій.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини Oxy, для кожної з яких абсциса x є значенням аргументу, а ордината y – відповідним значенням функції [1, с. 44].

Степенева функція x^{α} (α – будь-яке число), показникова функція a^x $(0 < a \neq 1)$, логарифмічна функція $log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, тригонометричні функції: $sin\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$, $ctg\,x$, обернені тригонометричні функції: $arcsin\,x$, $arccos\,x$, $arctg\,x$, $arcctg\,x$ і гіперболічні функції: $sh\,x$, $ch\,x$, $th\,x$, $cth\,x$ називаються *основними елементарними функціями.*

Елементарною функцією називають таку функцію, яку можна задати формулою вигляду $y = f(x)$, де вираз правої частини складено з основних елементарних функцій та сталих функцій з використанням скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня та побудови функції від функції [14, с. 148].

Всі функції, що отримуються за допомогою скінченного числа арифметичних дій над основними елементарними функціями, а також отримані шляхом накладання цих функцій складають клас елементарних функцій.

2. Графіки елементарних функцій.

2.1. Стала функція.

Стала функція – це функція, яка задається формулою $y = C$, де C – деяке число. Графіком цієї функції є пряма, що проходить через точку $(0; C)$ і паралельна осі Ox, що знаходиться на відстані $|C|$ від осі Ox і розташована вище осі Ox (Рис. 1.1), якщо $C > 0$, і нижче осі Ox, якщо $C < 0$ (Рис. 1.2).

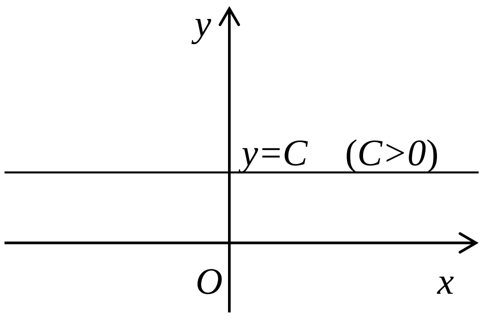


Рис. 1.1

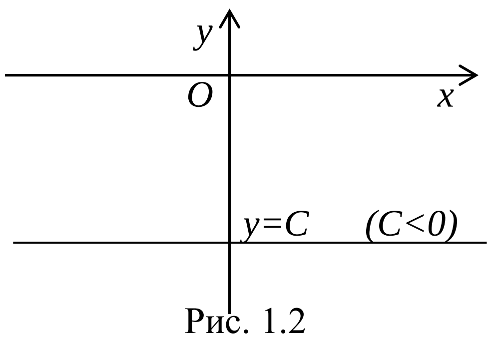


Рис. 1.2

2.2. Степеневої функції

Степенева функція – це функція виду

$$y = x^n, n \epsilon N. \quad (1.1)$$

a) $y = x$ $(n = 1)$. $D(x) = x \epsilon R$. Функція неперіодична, непарна. Графіком є пряма лінія (Рис. 1.3).

b) $y = x^2$ $(n = 2)$. $D(x) = (-\infty; +\infty)$. Функція неперіодична, парна. (Рис. 1.4).

c) $y = x^3$ $(n = 3)$. $D(x) = (-\infty; +\infty)$. Функція неперіодична, непарна. Графік функції – лінія, яка називається *кубічною параболою* (Рис. 1.5).

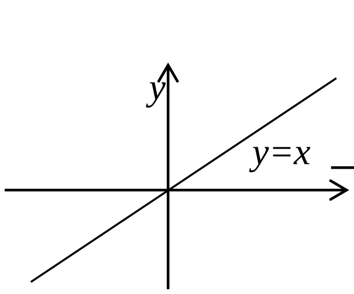


Рис. 1.3

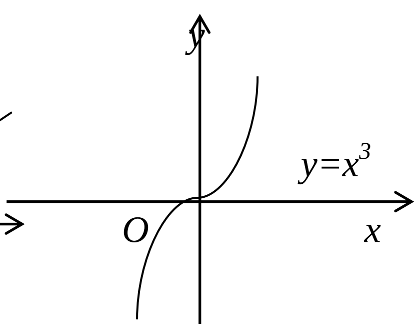


Рис. 1.4

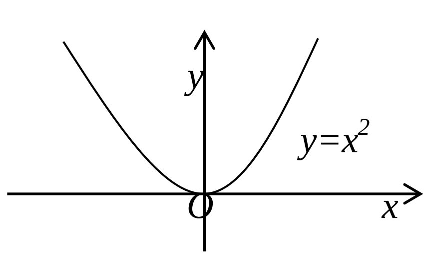


Рис. 1.5

d) $y = \sqrt{x}$ $(n = \frac{1}{2})$. $D(x) = [0; +\infty)$, $E(y) = [0; +\infty)$. Функція неперіодична, ні парна, ні непарна (Рис. 1.6.).

e) $y = \frac{1}{x}$ $(n = -1)$. $D(x) = (-\infty;\ 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup \cup (0; +\infty)$. Функція неперіодична, непарна (Рис. 1.7).

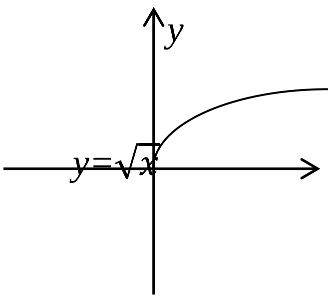


Рис. 1.6

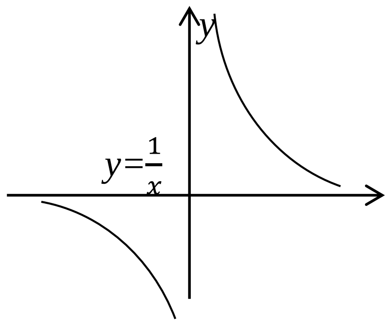


Рис. 1.7

f) $y = \frac{1}{x^2}$ $(n = -2)$. $D(x) = (-\infty;\ 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$. Функція неперіодична, парна (Рис. 1.8).

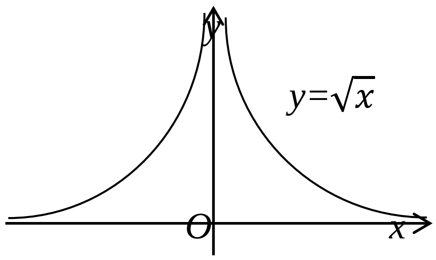


Рис. 1.8

2.3. Показникова функція.

$$y = a^x, \tag{1.2}$$

де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається *показниковою*.

$D(x) = R, E(y) = (0; +\infty)$. Функція неперіодична, ні парна, ні непарна. Графіки функцій для $a > 0$ і для $0 < a < 1$ зображенні на Рис. 1.9, Рис. 1.10.

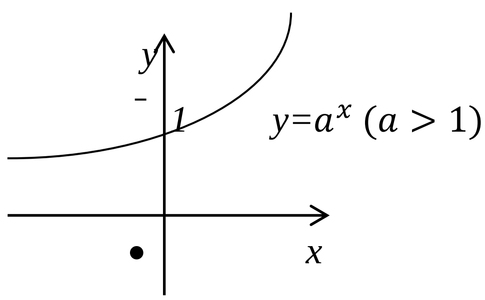


Рис. 1.9

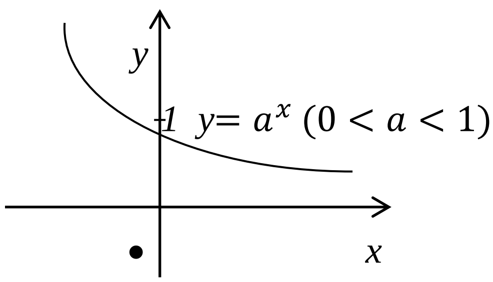


Рис. 1.10.

2.4. Логарифмічна функція.

Функція вигляду

$$y = log_a x, \tag{1.3}$$

де $a > 0, a \neq 1, x > 0$, називається *логарифмічною*. Число a називається *основою логарифма*.

Область визначення такої функції – множина всіх додатних чисел $y > 0$. Множина значень – це множина всіх дійсних чисел. Функція неперіодична, ні парна, ні непарна.

Оскільки співвідношення (1.3), за визначенням логарифма рівносильне, рівності $x = a^y$, то функції (1.2) та (1.3) взаємно обернені. Ми можемо, таким чином, отримати графік логарифмічної функції (Рис. 1.10) із графіка показникової, повернувши криву Рис. 1.9 на 180° навколо бісектриси першого координатного кута.

Графіки функцій для $a > 0$ і для $0 < a < 1$ зображені на Рис. 1.11, Рис. 1.12.

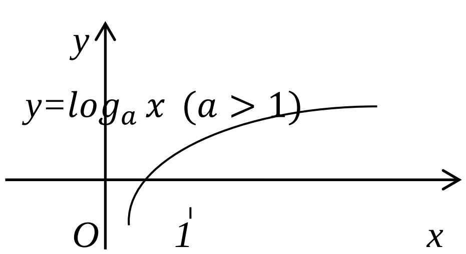


Рис. 1.11

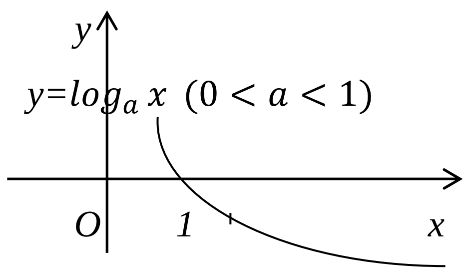


Рис. 1.12

2.5. Тригонометрична функція.

Тригонометричні функції мають вид

$$y = sin\, x\, , y = cos\, x\, , y = tg\; x\, , y = ctg\; x.$$

а) $y = sin\, x$. Графіком цієї функції є хвилеподібна лінія, яку називають *синусоїдою*. (Рис. 1.13)

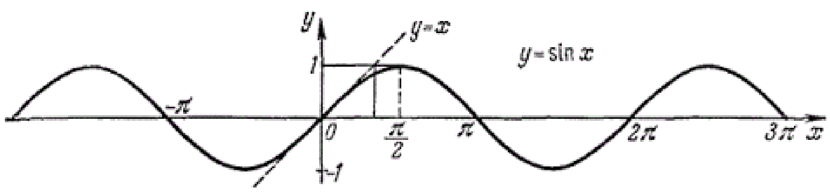


Рис. 1.13

$D(x) = x\epsilon R$, $E(y) = [-1; 1]$. Зростає при $x \epsilon \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \epsilon Z$, і спадає при $x \epsilon \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \epsilon Z$. Функція періодична, найменший додатний період даної функції 2π, тобто

$$sin(x + 2\pi) = sin\, x.$$

Крім того, функція (1.3) непарна ($sin(-x) = -\, sin\, x$).

b) $y = cos\, x$. Графіком цієї функції є та ж синусоїда , що і на Рис. 1.13, але посунута на $\frac{\pi}{2}$ одиниць вправо. Графік косинуса називають *косинусоїдою* (Рис. 1.14).

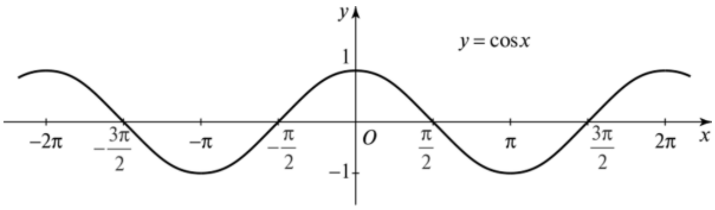


Рис. 1.14

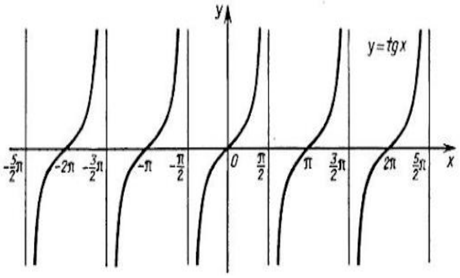
$D(x) = x\, \epsilon\, R$, $E(y) = [-1; 1]$. Вона – періодична, найменший додатний її період рівний 2π, тобто $cos(x + 2\pi) = cos\, x$.

Функція парна ($cos(-x) = cos\, x$).

c) $y = tg\, x$. Графік розглянутої функції називають *тангенсоїдою* (Рис. 1.15).

$D(x) = x\, \epsilon\, R / x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k\, \epsilon\, Z.$, $E(y) = y\, \epsilon\, R$. Функція періодична, період – π, непарна $(tg(-x) = -tg(x))$.

d) $y = ctg\, x$. Графік розглянутої функції називають *котангенсоїдою* (Рис. 1.16).



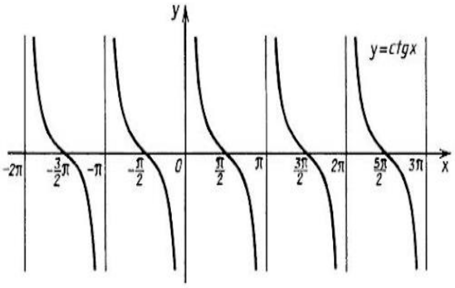


Рис. 1.15 Рис. 1.16

$D(x) = x \epsilon R / x = \pi k, \quad k \epsilon Z.,\quad E(y) = y \epsilon R.$ Функція періодична, період – π, непарна $(ctg(-x) = -ctg(x))$.

2.6. Обернено тригонометрична функція.

Обернені тригонометричні функції мають вид

$$y = arcsin\, x\, , y = arccos\, x\, , y = arctg\; x\, , y = arcctg\; x$$

a) $y = arcsin\, x.$ $D(x) = [-1; 1],$ $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$ Функція неперіодична, непарна. Графік функції зображений на Рис. 1.15а.

b) $y = arccos\, x.$ $D(x) = [-1; 1]$, $E(y) = [0; \pi]$. Функція неперіодична, ні парна, ні непарна. Графік функції зображений на Рис. 1.15б.

c) $y = arctg\; x.$ $D(x) = x \epsilon R$ $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функція неперіодична, непарна. Вона зростає при $x \epsilon R$. Графік функції зображений на Рис. 1.15в.

d) $y = arcctg\; x.$ $D(x) = x \epsilon R$ $E(y) = (0; \pi)$. Функція неперіодична, ні парна, ні непарна. Графік функції зображений на Рис. 1.15г.

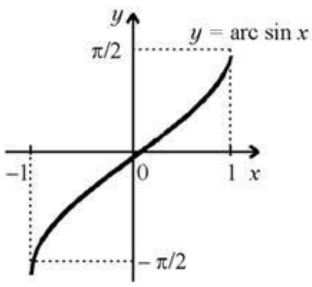


Рис. 1.17а

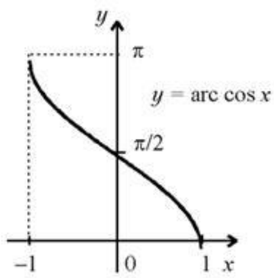


Рис. 1.17б

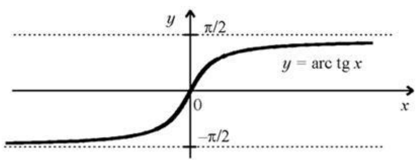


Рис. 1.17в

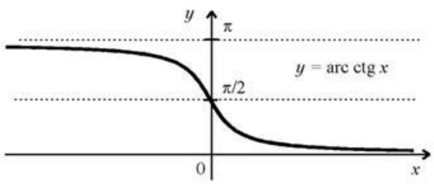


Рис. 1.17г

3. Перетворення графіків функцій.

Якщо графік функції $y = f(x)$ відомий, то

1. Графік функції $y = f(x) + C$ дістанемо, з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy вгору на C, якщо $C > 0$, або на $|C|$ вниз, якщо $C < 0$.

2. Графік функції $y = f(x + C)$ отримаємо, з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Ox на C вправо, якщо $C > 0$, або на $|C|$ вліво, якщо $C < 0$.

3. Графік функції $y = f(kx)$ дістанемо, з графіка функції $y = f(x)$ його розтягом (при $0 < k < 1$ розтяг у $\frac{1}{k}$ разів) або стиском (при $k > 1$ стиск у k разів) вздовж осі Ox.

4. Графік функції $y = kf(x)$ дістанемо, з графіка функції $y = f(x)$ його розтягом (при $k > 1$ розтяг у k разів) або стиском (при $0 < k < 1$ стиск у $\frac{1}{k}$ разів) уздовж осі Oy.

5. Графік функції $y = -f(x)$ дістанемо, з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox.

6. Графік функції $y = f(-x)$ дістанемо, з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Oy.

7. Щоб отримати графік функції $y = |f(x)|$ із графіка функції $y = f(x)$, потрібно частину графіка $y = f(x)$, яка лежить вище осі Ox (і на самій осі) залишити без змін, а ту частину, яка лежить нижче осі Ox, відобразити симетрично відносно цієї осі.

8. Щоб отримати графік функції $y = f(|x|)$ із графіка функції $y = f(x)$, потрібно частину графіка $y = f(x)$, яка лежить праворуч осі Ox (і на самій осі) залишити без змін, і саме цю частину відобразити симетрично відносно осі Oy.

9. Щоб отримати графік функції $|y| = f(x)$, потрібно частину графіка $y = f(x)$, яка лежить вище осі Ox (і на самій осі) залишити без змін, і саме цю частину відобразити симетрично відносно осі Ox.

10. Щоб отримати графік функції $|y| = f(|x|)$ із графіка функції $y = f(x)$, потрібно частину графіка $y = f(x)$, яка лежить вище осі Ox (і на самій осі) залишити без змін, а ту частину, яка лежить нижче осі Ox, відобразити симетрично відносно цієї осі.

1.2 Метод математичної індукції. Біном-Ньютона

План

1. Метод математичної індукції.
2. Поняття перестановки, розміщення та комбінації.
3. Формула біном Ньютона.
4. Основні наслідки із формули Ньютона.

1. Метод математичної індукції.

Принцип математичної індукції називають таке твердження: будь-яка множина натуральних чисел M, що має такі властивості

1) $1 \epsilon M$,

2) якщо $a \epsilon M$, тоді наступне число $b = a + 1$ також належить цій множині, містить всі натуральні числа.

Також використовується узагальнений принцип математичної індукції: будь-яка множина натуральних чисел M, що має властивості

1) число $m \epsilon M$,

2) $n \geq m$ належить M, тоді наступне число $k = n + 1$ теж належить цій множині, містить всі натуральні числа.

Кожне доведення твердження за методом математичної індукції складається з трьох кроків:

1) Перевіряють правильність твердження $A(n)$ для $n = 1$, тобто істинність висловлення $A(1)$;

2) Припускаємо, що твердження $A(n)$ для $n = k$ істинне і доводимо справедливість даного твердження для $n = k + 1$, тобто

$$A(k) = A(k + 1);$$

3) Робимо висновок про справедливість даного твердження для будь-якого натурального n.

Перевірка правильності висловлення $A(1)$ у доведеннях методом математичної індукції обов’язкова.

Приклад. Довести методом математичної індукції, що

$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2}.$

Доведення

1) Перевіряємо вірність при $n = 1$, маємо

$\frac{1(1+3)}{(1+1)(1+2)} = \frac{1(1+1)}{1+2}, \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$

2) Припустимо, що дана рівність виконується для $n = k$

$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+1)}{k+2}.$

Користуючись цим припущенням доведемо, що дана рівність виконується і для $n = k + 1$

$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} + \frac{(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{k+3}.$

$\frac{k(k+1)}{k+2} + \frac{(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+1)(k+3)+(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k(k+3)+(k+4))}{(k+2)(k+3)} =$

$= \frac{(k+1)(k^2+4k+4)}{(k+2)(k+3)} \frac{(k+1)(k+2)^2}{(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{(k+3)}.$

3) На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що задана рівність справедлива для будь-якого натурального n.

2. Поняття перестановки, розміщення та комбінації.

Означення. Перестановкою з n *елементів* називається довільна впорядкована множина з n елементів.

Позначимо число усіх перестановок n–елементної множини P_n.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ = n!$$

Скорочення $n!$ (читають «ен факторіал») називається факторіалом числа n.

Означення. Розміщенням з n *елементів по* k називається довільна впорядкована підмножина з k елементів $(k < n)$, складена з елементів n–елементної множини, що відрізняються один від одного або складом елементів, або порядком їх розміщення.

Кількість упорядкованих k–елементних підмножин n–елементної множини, всі k елементів якої різні, становить

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)$$

або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Означення. Комбінацією (сполученням) з n *елементів по* k називається вибірка елементів k із даної невпорядкованої множини.

Кількість комбінацій позначується C_n^k.

Число всіх комбінацій із n елементів по k, де $0 \leq k \leq n$, дорівнює добутку k послідовних натуральних чисел, з яких найбільшим є n, діленому на добуток всіх натуральних чисел від 1 до k.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-1)\cdot k}.$$

Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k)$, отримаємо:

$$C_n^k = \frac{n!}{n!\cdot(n-k)!}.$$

Властивості сполучень:

1. $C_0^0 = 1;$
2. $C_n^0 = 1;$
3. $C_n^n = 1;$
4. $C_n^k = C_n^{n-k};\ n \geq k;$
5. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1};$
6. $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$

3. Формула біном Ньютона.

Теорема (біноміальна теорема). Для будь-якого натурального числа n має місце рівність

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n \quad (1.4)$$

Права частина рівності (1.4) називається *розкладом бінома*, а коефіцієнти $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$ – *біноміальними коефіцієнтами.*

Формула (1.4) називається *формулою бінома Ньютона*.

Для доведення теореми зручно користуватись лемою.

Лема (формула додавання). $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$ (1.5)

Доведення

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)} = (n-1)!\left(\frac{n-k}{k!(n-k)} + \frac{k}{k!(n-k)}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{k!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)} = C_n^k.$$

Доведення

Застосуємо метод математичної індукції.

1) Перевіряємо вірність при $n = 1$, маємо

$(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1$, $a + b = a + b$.

2) Припустимо, що дана теорема виконується для $n = h$:

$(a+b)^h = C_h^0 a^h + C_h^1 a^{h-1} b + C_h^2 a^{h-2} b^2 + \cdots + C_h^k a^{h-k} b^k + \cdots + C_h^h b^h$

Користуючись цим припущенням доведемо, що дана теорема правильна і для $n = h + 1$:

$$(a+b)^{h+1} = C_{h+1}^0 a^{h+1} + C_{h+1}^1 a^h b + C_{h+1}^2 a^{h-1} b^2 + \cdots + C_{h+1}^k a^{h-k+1} b^k +$$
$$+ C_{h+1}^{k+1} a^{h-k} b^{k+1} + \cdots + C_{h+1}^h a b^h + C_{h+1}^{h+1} b^{h+1}.$$

З припущення

$$(a+b)^{h+1} = (a+b)^h (a+b) = \big(C_h^0 a^h + C_h^1 a^{h-1} b + C_h^2 a^{h-2} b^2 + \cdots +$$
$$+ C_h^k a^{h-k} b^k + \cdots + C_h^h b^h\big)(a+b) = C_h^0 a^{h+1} + C_h^1 a^h b + C_h^2 a^{h-1} b^2 + \cdots +$$
$$+ C_h^k a^{h-k+1} b^k + \cdots + C_h^h b^h a + C_h^0 a^h b + C_h^1 a^{h-1} b^2 + C_h^2 a^{h-2} b^3 + \cdots +$$
$$+ C_h^k a^{h-k} b^{k+1} + \cdots + C_h^h b^{h+1} = C_h^0 a^{h+1} + (C_h^0 + C_h^1) a^h b + (C_h^1 + C_h^2) \cdot$$
$$\cdot a^{h-1} b^2 + \cdots + \big(C_h^{k-1} + C_h^k\big) a^{h-k+1} b^k + \big(C_h^k + C_h^{k+1}\big) a^{h-k} b^{k+1} + \cdots +$$
$$+ \big(C_h^{h-1} + C_h^k\big) a b^{h-1} + C_h^h a b^{h+1}.$$

За лемою (1.5) і тим, що $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$. (1.6)

Отже, теорема правильна і для $n = h + 1$.

3) На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що формула Біном Ньютона справедлива для будь-якого натурального n.

Застосувавши знак суми $\sum$ і (1.6) формула (1.4) набуде вигляду

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}.$$

4. *Основні наслідки із формули Ньютона.*

Наслідки:

1) Число всіх членів розкладу на одиницю більше за показник степеня бінома.

2) Сума показників степенів при a і b в довільному розкладі рівна n-показнику степеня бінома.

3) Біноміальні коефіцієнти, рівновіддалені від кінців розкладу, рівні між собою, бо $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доведення

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}.$$

4) Загальний член розкладу має вигляд

$$T_{k+1} = C_n^k b^k a^{n-k}.$$

5) Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n.

Приклад. Напишіть розклад по формулі біном Ньютона виразу $(3 + 2\,x)^5$.

Розв'зання

$$(3 + 2\,x)^5 = C_5^0 3^5 + C_5^1 3^{5-1}(2x) + C_5^2 3^{5-2}(2x)^2 + C_5^3 3^{5-3}(2x)^3 +$$
$$+C_5^4 a^{5-4} b^2 + C_5^5 (2x)^5 = 243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5.$$

Запишемо у стандартному вигляді:

$$(3 + 2\,x)^5 = 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243.$$

Відповідь: $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$.

1.3 Нерівності Бернулі, Коші-Буняковського

План

1. Нерівність Бернулі та її доведення.
2. Нерівність Коші-Буняковського та її доведення.
3. Часткові випадки нерівності Коші-Буняковського.

1. Нерівність Бернулі та її доведення.

Означення. Якщо $x \geq 1$ і n – натуральні числа, тоді має місце нерівність

$$(1+\ x)^n \geq 1 + nx. \qquad (1.7)$$

Нерівність (1.7) називається *нерівністю Бернулі*.

Доведення

Нерівність (1.7) будемо доводити методом математичної індукції

1) Перевіряємо чи виконується при $n = 1$, маємо

$(1+\ x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x,\ 1+\ x = 1 + x.$

2) Припустимо, що дана нерівність виконується для $n = k$

$(1+\ x)^k \geq 1 + kx.$

Користуючись цим припущенням доведемо, що нерівність виконується і для $n = k + 1$

$(1+\ x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$

$(1+\ x)^{k+1} = (1+\ x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + kx + x +$
$+kx^2 \geq 1 + kx + x = 1 + (k+1)x.$

3) На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що задана нерівність справедлива для будь-якого натурального n. Причому, для $n > 1$ і $x \neq 0$, $x \geq 1$ справедлива строга нерівність:

$$(1+\ x)^n > 1 + nx.$$

Узагальнена нерівність Бернулі

$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n) > 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n,$

де x_1, x_2, x_3,…, x_n – числа одного знаку ($a_i \neq 0 > -1$, $i = 1, 2,…,n$); $n \geq 2$.

Доведення

Доведемо методом математичної індукції

1) Перевіряємо чи виконується при $n = 2$, маємо

$(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 > 1 + x_1 + x_2$,

тут ми врахували, що x_1 та x_2 одного знака.

2) Припустимо, що дана нерівність виконується для $n = k \geq 2$

$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \dots (1 + x_k) > 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k$.

Користуючись цим припущенням доведемо, що нерівність виконується і для $n = k + 1$

$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) > 1 + x_1 + x_2 + x_3 + + \dots + x_k + x_{k+1}$.

$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) > (1 + x_1 + x_2 + x_3 + + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1} + x_{k+1}(x_1 + x_2 + + x_3 + \dots + x_k) > 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1}$.

3) На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що задана нерівність справедлива для будь-якого натурального n.

Приклад. Довести, що якщо $a > 1$, то $lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

Доведення

Нехай $a - 1 = \alpha$, тоді $\alpha > 0$, $a = 1 + \alpha$;

$$a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \; \forall \; n \in N,$$

а так як $lim_{n\to\infty} n\alpha = +\infty$, то і $lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

2. Нерівність Коші-Буняковського та її доведення.

Теорема. (Нерівність Коші-Буняковського) Для будь-яких двох елементів x, y евклідового простору справедлива нерівність:

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y) \text{ [27, с. 110].} \qquad (1.8)$$

Доведення

Для будь-якого дійсного числа λ виконується нерівність

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0. \qquad (1.9)$$

За властивостями симетричності і лінійності скалярного добутку: $(x, y) = (y, x)$, $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $(\mu x, y) = \mu(x, y)$, вираз (1.9) можна записати у вигляді: $\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0$.

Якщо розглядати ліву частину попередньої нерівності як квадратний тричлен відносно λ, тоді для виконання самої нерівності при будь-яких λ дискримінант має бути недодатнім ($D \le 0$):

$D = 4(x,y)^2 - 4(x,x)\cdot(y,y) \le 0$, тобто $(x,y)^2 \le (x,x)\cdot(y,y)$

Нерівність Коші-Буняковського застосовується в лінійній алгебрі для векторів, в математичному аналізі для нескінченних рядів, інтегрування добутків та в теорії ймовірностей при застосуванні до коваріації та варіації.

Приклад. Знайдіть найбільше та найменше значення виразу $6x + 8y$, якщо $x^2 + y^2 = 36$.

Розв'язання

Розглянемо два набори чисел $(x; y)$ і $(6; 2)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського (1.8):

$(6x + 8y)^2 \le (x^2 + y^2)(6^2 + 8^2)$.

Врахувавши те, що $x^2 + y^2 = 36$, отримаємо

$(6x + 8y)^2 \le 36\cdot(36 + 64) = 36\cdot 100 = 3600$,

$(6x + 8y)^2 \le 3600$,

означає $-60 \le 6x + 8y \le 60$.

Отже, найбільше значення виразу дорівнює 60, а найменше -60.

Відповідь: найбільше 60, найменше -60.

Приклад. Довести нерівність $\sqrt{8a+3} + \sqrt{8b+3} + \sqrt{8c+3} \le 7$ при умові, що $2a + 2b + 2c = 5$.

Доведення

Розглянемо два набори чисел $\left(\sqrt{8a+3};\ \sqrt{8b+3}\right); \sqrt{8c+3}$ і $(2; 2; 2)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського (1.8):

$$\left(2\cdot\sqrt{8a+3} + 2\cdot\sqrt{8b+3} + 2\cdot\sqrt{8c+3}\right)^2 \le \left(\left(\sqrt{8a+3}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{8b+3}\right)^2 + \left(\sqrt{8c+3}\right)^2\right)(2^2 + 2^2 + 2^2),$$

$$4\cdot\left(\sqrt{8a+3} + \sqrt{8b+3} + \sqrt{8c+3}\right)^2 \le (8a + 3 + 8b + 3 + 8c + 3)\cdot 12,$$

$$\left(\sqrt{8a+3} + \sqrt{8b+3} + \sqrt{8c+3}\right)^2 \le (4(2a + 2b + 2c) + 9)\cdot 3.$$

Врахувавши те, що $2a + 2b + 2c = 5$, отримаємо

$\left(\sqrt{8a+3} + \sqrt{8b+3} + \sqrt{8c+3}\right)^2 \leq (4 \cdot 5 + 9) \cdot 3 = 87,$

$\sqrt{8a+3} + \sqrt{8b+3} + \sqrt{8c+3} \leq \sqrt{87}.$

Отже,

$\sqrt{8a+3} + \sqrt{8b+3} + \sqrt{8c+3} \leq 7.$

3. Часткові випадки нерівності Коші-Буняковського.

Які б не були дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ і $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, маємо:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{m} {\alpha_k}^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} {\beta_k}^2, \qquad (1.10)$$

причому знак рівності буде тоді і тільки тоді, коли α_k і β_k пропорційні: $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{\beta_m}{\alpha_m}$.

Теорема. Якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ дві дійсні функції на проміжку $a \leq x \leq b$, тоді нерівність для інтегралів має вигляд

$$\left[\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx\right]^2 \leq \int_a^b f_1^2(x) dx \cdot \int_a^b f_2^2(x) dx \text{ [23, с. 141].} \qquad (1.11)$$

Доведення

$$\int_a^b [\xi f_1(x) - f_2(x)]^2 dx = \xi^2 \int_a^b f_1^2(x) dx - 2\xi \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx + \int_a^b f_2^2(x) dx,$$

де ξ – довільне дійсне число. У лівій частині видно, що при будь-якому ξ вираз не може бути від'ємним. Але якщо тричлен $A\xi^2 - 2\xi B + C$ при всіх дійсних ξ невід'ємний, тоді як відомо $AC - B^2 \geq 0$. Застосувавши до попереднього тричлена це і дає нерівність (11).

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{5x} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 4|x + 1|$.

Розв'язання

Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} = 4|x + 1|.$

Розглянемо два набори чисел $(\sqrt{5};1)$ і $(\sqrt{x};\sqrt{x^2-x-2})$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського (1.10):

$$\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-x-2}\right)^2 \le \left(\sqrt{5}^2+1^2\right)\left(\sqrt{x}^2+\sqrt{x^2-5x+2}^2\right),$$

$$\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-x-2}\right)^2 \le 6\cdot(x+x^2-5x+4),$$

$$\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-x-2}\right)^2 \le 6\cdot(x^2-4x+4),$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-x-2} \le \sqrt{6}|x-2|$$

У цій нерівності рівність досягається тоді і тільки тоді, коли існує таке число k, що $\sqrt{5}=k\sqrt{x}$, $1=k\sqrt{x^2-x-2}$.

Звідси

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{1}.$$

Ми отримали рівняння, яке рівносильне заданому.

Маємо:

$$\begin{cases}\frac{x}{5}=\frac{x^2-x-2}{1}\\ x\ge 0\end{cases},\ \begin{cases}5x^2-6x-10=0\\ x\ge 0\end{cases},\ \begin{cases}x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{59}}{5}\\ x\ge 0\end{cases},\ x=\frac{3+\sqrt{59}}{5}.$$

Відповідь: $x=\frac{3+\sqrt{59}}{5}$.

1.4 Тригонометричні рівняння і нерівності

План

1. Найпростіші тригонометричні рівняння.
2. Знаходження розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь за допомого одиничного кола.
3. Однорідні тригонометричні рівняння. Метод введення допоміжного кута.
4. Найпростіші тригонометричні нерівності.

1. Найпростіші тригонометричні рівняння

Найпростішими тригонометричними рівняннями називають рівняння вигляду

$$\sin x = a, \cos x = a, tg\, x = a, ctg\, x = a.$$

Для знаходження розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь використовують три такі підходи:

1) використання графічного способу розв'язування рівнянь;
2) знаходження розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь за допомого одиничного кола;
3) аналітичне виведення формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь.

2. Знаходження розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь за допомого одиничного кола.

Знайдемо розв'язок рівняння

$$\sin x = a \qquad (1.12)$$

Будемо шукати розв'язки рівняння (1.12) на проміжку $[-\pi; \pi]$, зробивши обмеження для a.

а) Нехай $0 < a < 1$. На осі Oy позначимо точку A з ординатою a і проведемо через неї пряму, паралельну осі Ox (Рис.1.18.). Пряма перетне коло у двох точках B і С. Точка B зображає число з проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Це число можна позначити через $arcsin\, a$. Інше довільне число можна записати формулою:

$$x = arcsin\, a + 2k\pi, \text{ де } k \in Z.$$

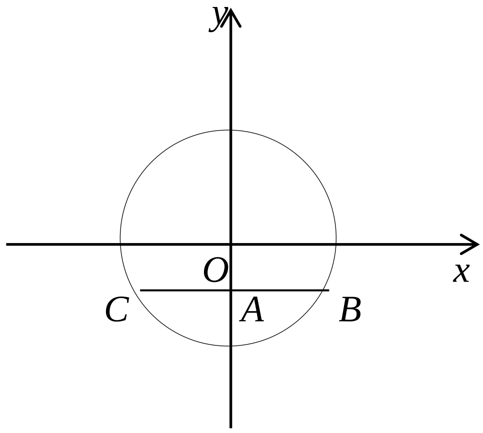


Рис.1.18

Точка C зображає число, що дорівнює $\pi - arcsin\, a$. Будь-яке інше число має вигляд: $x = \pi - arcsin\, a + 2k\pi$, де $k \in Z$.

Об'єднуючи останні формули розв'язків рівняння (1.12) в одну, дістанемо формулу $x = (-1)^n\, arcsin\, a + \pi n$, де $n \in Z$,

b) Нехай $-1 < a < 0$. На осі Oy позначимо точку A і проведемо через неї пряму, паралельну осі Ox (Рис.1.19). Пряма перетне коло у двох точках B і C. Точка B відповідає числу з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Це число можна позначити через $arcsin\, a$. Інше довільне число має вигляд: $x = arcsin\, a + 2k\pi$, де $k \in Z$.

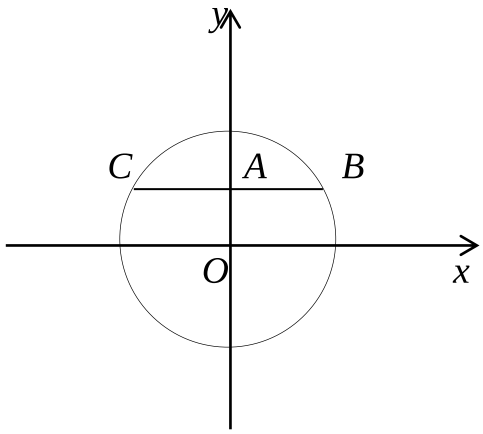


Рис.1.19

Точка C відповідає числу, що позначається через $-\pi - arcsin\, a$. Будь-яке інше значення x можна записати формулою:

$$x = -\pi - arcsin\, a + 2k\pi, \quad \text{де} \quad k \in Z,$$

або

$$x = -\,arcsin\, a + (2k-1)\pi, \text{ де } k \in Z.$$

Об'єднуючи останні формули розв'язків рівняння (1.12) в одну, отримаємо формулу $x = (-1)^n\, arcsin\, a + \pi n$, де $n \in Z$, яка еквівалентна формулі для випадку $0 < a < 1$.

Якщо $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$, то відповідні точки зображають числа на одиничному колі вигляду:

$$x = \pi n, \text{ де } n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ де } n \in Z,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ де } n \in Z.$$

Дані точки, можна дістати із знайденої формули загальних розв'язків рівняння (1.12) при вказаних значеннях a.

Знайдемо даним способом розв'язок рівняння

$$cos\,x = a \tag{1.13}$$

На (Рис.1.20) видно, що коли $a > 1$ і $a < -1$, то рівняння (1.13) не має розв'язків, бо $-1 < sin\,x < 1$ для будь-якого x.

Косинус – парна функція, тому на відрізку $[-\pi; 0]$ рівняння (1.13) має точно один розв'язок – число $arccos\,a$, а на відрізку $[0; \pi]$ – число $-\,arccos\,a$.

Внаслідок періодичності функції косинус всі інші розв'язки відрізняються від цих на $2\pi n$, $n \in Z$, тобто формула коренів рівняння (1.13) має вигляд:

$$x = \pm\, arccos\,a + 2\pi n, \text{ де } n \in Z.$$

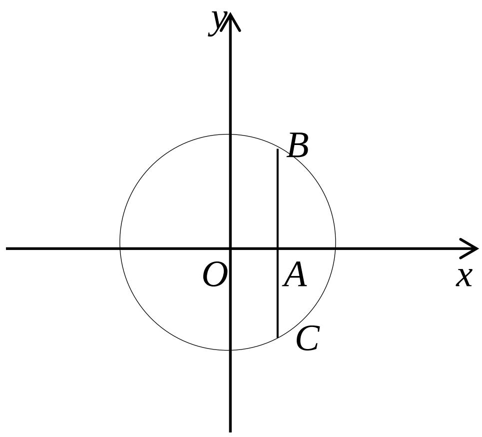


Рис.1.20

Якщо $a = 1$, тоді числа $arccos\,a$ і $-\,arccos\,a$ збігаються (дорівнюють нулю), тому розв'язки рівняння (1.13) записують у вигляді:

$$x = 2\pi n, \text{ де } n \in Z..$$

Якщо $a = -1$, тоді $x = \pi + 2\pi n$, де $n \in Z$.

Якщо $a = 0$, тоді $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in Z$.

Рівняння

$$tg\,x = a \tag{1.14}$$

Розв'язування рівняння (1.14) зручно проілюструвати за допомогою лінії тангенсів.

Функція тангенс приймає будь-яке дійсне значення, тому рівняння (1.14) має корені при довільному значенні a. Рівняння має на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ завдовжки π лише один корінь, який дорівнює $arctg\,a$.

Так як, функція тангенс – періодична, з основним періодом π, всі інші корені рівняння (1.14) відрізняються від знайденого на $\pi n,\ n \epsilon Z$, тобто формула коренів рівняння (1.14) має вигляд:

$$x = arctg\, a + \pi n, \text{ де } n \epsilon Z.$$

Якщо $a = 0$, то $x = \pi n$, де $n \epsilon Z$.

Рівняння

$$ctg\, x = a, \tag{1.15}$$

аналогічно до рівняння (1.14), має корені при довільному значенні a. Розв'язування рівняння (1.15) також зручно проілюструвати за допомогою лінії котангенсів.

Рівняння має на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ завдовжки π лише один корінь, який дорівнює $arcctg\, a$.

Функція котангенс, як і тангенс – періодична, з основним періодом π, тому всі інші корені рівняння (1.15) відрізняються від знайденого на πn, $n \epsilon Z$, тобто формула коренів рівняння (1.15) має вигляд:

$$x = arcctg\, a + \pi n, \text{ де } n \epsilon Z.$$

Якщо $a = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \epsilon Z$.

3. Однорідні тригонометричні рівняння. Метод введення допоміжного кута.

Однорідними тригонометричними рівняннями називають, рівняння, у яких ліва частина є многочленом, у кожному члені якого сума показників степенів синуса і косинуса одного і того самого аргументу однакова, а права частина – нуль.

В загальному вигляді однорідне рівняння можна записати так:

$$asin^n x + bsin^{n-1} x \cdot cos\, x + \cdots + m\, sin\, x \cdot cos^{n-1} x + lcos^n x = 0.$$

Дане однорідне рівняння n-го степеня відносно синуса та косинуса розв'язується діленням лівої і правої частини на $sin^n x$ або на $cos^n x$.

Рівняння вигляду $a\, sin\, x + b\, cos\, x = c$, де $a,\ b,\ c$ – деякі відмінні від нуля числа, зручно розв'язувати методом введення допоміжного кута

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi), \qquad (1.16)$$

де $\varphi = arctg\ \frac{a}{b}$ – допоміжний аргумент.

4. Найпростіші тригонометричні нерівності.

Найпростішими тригонометричними нерівностями називають нерівності, які містять найпростіші тригонометричні вирази виду $\sin x > a$, $\cos x > a$, $tg\ x > a$, $ctg\ x > a$ та інші, у яких на місті знака $>$ стоїть один із знаків $\geq$, $<$ або $\leq$.

Загальні формули для розв’язування найпростіших тригонометричних нерівностей є досить громіздкими, тому їх, як і алгебраїчних, доцільно розв’язувати графічним способом. Порівняно з іншими способами розв’язування найпростіших тригонометричних нерівностей графічний метод має недолік: кожного разу потрібно будувати, хоч і схематично, графіки тригонометричних функцій. Тому, зазвичай такі нерівності розв’язують, використовуючи одиничне коло, лінії тангенса і котангенса.

Приклад. Розв’язати нерівність $\left|ctg\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right)\right| < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв’язання

Розкриємо в даної нерівності модуль

$$\begin{cases} ctg\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ ctg\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

$$arcctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3};$$

$$arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\frac{\pi}{3} + \pi n < -2x - \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < -x < \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$-\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi n}{2} < x < -\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

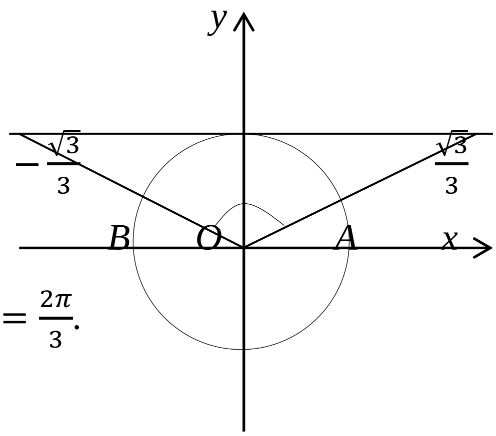


Рис. 1.21

Відповідь: $-\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi n}{2} < x < -\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

2.1 Алгебраїчні вирази та їх перетворення (цілі та дробово-раціональні вирази)

Формули скороченого множення

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

2) $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$;

3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot(a^2 \mp 2ab + b^2)$;

4) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Приклад 1. Спростити вираз та знайти його значення:

$\left(1 - \frac{2}{2-a}\right) : \left(1 - \frac{1-2a^2}{2-a} + a\right)$, якщо $a = 3$.

Розв'язання

$$\left(1 - \frac{2}{2-a}\right) : \left(1 - \frac{1-2a^2}{2-a} + a\right) = \left(\frac{2-a-2}{2-a}\right) : \left(\frac{2-a-1+2a^2+2-a}{2-a}\right) = \frac{-a}{2-a}:$$

$$: \frac{2a^2-2a+3}{2-a} = \frac{-a}{2-a} \cdot \frac{2-a}{2a^2-2a+3} = \frac{-a}{2a^2-2a+3}.$$

Знайдемо значення отриманого виразу, при $a = 3$:

$$\frac{-3}{2\cdot 3^2 - 2\cdot 3 + 3} = -\frac{3}{15} = -0{,}2.$$

Відповідь: $-0{,}2$.

1. $\frac{a}{a^2+7} + \frac{2a^3}{a^2-7} - \frac{a}{a+\sqrt{7}}$, якщо $a = 1$;
4. $\left(\frac{2}{b+1} - \frac{2}{b-1}\right) : \frac{5}{a-1}$, якщо $b = 5$;
2. $\left(1 - \frac{c^{-n}+a^{-n}}{c^{-n}-a^{-n}}\right)^{-2}$, якщо $c = 1$, $b = 7$;
5. $\frac{1}{1+\frac{4}{3+\frac{1}{a}}}$, якщо $a = -1$;
3. $\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) : \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right)$, якщо $a = 5$;
6. $\frac{1}{1+\frac{4}{3+\frac{1}{a}}}$, якщо $a = -1$.

Приклад 2. Спростити: $\frac{x-2}{5} + \left(\frac{1}{2x-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{2-x}{1-8x^3} \cdot \frac{1+4x^2+2x}{2x^2+x} - \frac{2+x}{x+4x^3-4x^2}\right)^{-1}$.

Розв'язання

1) $\left(\frac{2-x}{1-8x^3} \cdot \frac{1+4x^2+2x}{2x^2+x} - \frac{2+x}{x+4x^3-4x^2}\right)^{-1} = \left(\frac{2-x}{(1-2x)\cdot(1+2x+4x^2)} \cdot \frac{1+4x^2+2x}{x\cdot(2x+1)} -\right.$

$\left. - \frac{2+x}{x\cdot(1+4x^2-4x)}\right)^{-1} = \left(\frac{2-x}{1-2x} \cdot \frac{1}{x\cdot(2x+1)} - \frac{2+x}{x\cdot(1+4x^2-4x)}\right)^{-1} =$

$= \left(\frac{2-x}{x\cdot(1-4x^2)} - \frac{2+x}{x\cdot(1+4x^2-4x)}\right)^{-1} = \left(\frac{(2-x)\cdot(1+4x^2-4x)-(2+x)\cdot(1-4x^2)}{x\cdot(1-4x^2)\cdot(1+4x^2-4x)}\right)^{-1} =$

$$=\left(\frac{2+8x^2-8x-x-4x^3+4x^2-2+8x^2-x+4x^3}{x\cdot(1-4x^2)\cdot(1+4x^2-4x)}\right)^{-1}=\left(\frac{20x^2-10x}{x\cdot(1-4x^2)\cdot(1+4x^2-4x)}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{10x\cdot(2x-1)}{x\cdot(1-2x)\cdot(1+2x)\cdot(1+4x^2-4x)}\right)^{-1}=\left(\frac{-10\cdot(1-2x)}{(1-2x)\cdot(1+2x)\cdot(1+4x^2-4x)}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{-10}{(1+2x)\cdot(1-2x)^2}\right)^{-1}=\left(\frac{(1+2x)\cdot(1-2x)^2}{10}\right)^{1}=\frac{(1+2x)\cdot(1-2x)^2}{10};$$

2) $\left(\frac{1}{2x-1}\right)^2\cdot\frac{(1+2x)\cdot(1-2x)^2}{10}=\left(-\frac{1}{1-2x}\right)^2\cdot\frac{(1+2x)\cdot(1-2x)^2}{10}=\frac{1}{(1-2x)^2}\cdot$

$\cdot\frac{(1+2x)\cdot(1-2x)^2}{10}=\frac{1+2x}{10};$

3) $\frac{x-2}{5}+\frac{1+2x}{10}=\frac{2x-4+1+2x}{10}=\frac{4x-3}{10}.$

Відповідь: $\frac{4x-3}{10}$.

1. $\left(a^2-b^2-\frac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^{-1};$
2. $\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}+\frac{a}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{5}\cdot\left(\frac{a+b}{15}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{a-b};$
3. $\left(\frac{x}{16y-y^3}-\frac{1}{y^2+3y}+\frac{4}{y^2x-16x}\right):\frac{x^2-8x+16}{y^3x-16yx};$
4. $\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right):\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\right);$
5. $\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\frac{a}{(a-b)^2}+\frac{a}{b^2-a^2}\right)+\frac{3a+b}{a+b}.$

Завдання 3. Поділити многочлен на двочлен:

$7x^7-x^5+10x^4-6x^3-13x^2-9x+9$ на x^2-2.

Розв'язання

Використаємо ділення під «кутом»:

$$\begin{array}{l|l}
-\;7x^7-x^5+10x^4-6x^3-13x^2-9x+9 & x^2-2 \\
\quad 7x^7-14x^5 & 7x^5+13x^3+10x^2+20x+7 \\
\hline
\qquad -\;13x^5+10x^4-6x^3-13x^2-9x+9 & \\
\qquad\quad 13x^5-26x^3 & \\
\hline
\qquad\qquad -\;10x^4+20x^3-13x^2-9x+9 & \\
\qquad\qquad\quad 10x^4-20x^2 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -\;20x^3+7x^2-9x+9 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 20x^3-40 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} 7x^2 - 9x + 49 \\ \underline{7x^2 - 14 \qquad\quad} \end{array} \\ -9x + 63 \end{array}$$

$7x^5 + 13x^3 + 10x^2 + 20x + 7$ – многочлен-частка.

$-9x + 63$ – многочлен-остача.

Отже, згідно формули $P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R_k(x)$ можемо записати:

$7x^7 - x^5 + 10x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 9x + 9 = (7x^5 + 13x^3 + 10x^2 + 20x + 7) \cdot (x^2 - 2) + (-9x + 63)$.

Відповідь: $(7x^5 + 13x^3 + 10x^2 + 20x + 7)(x^2 - 2) + (-9x + 63)$.

1. $49x^5 + 4x^4 + 7x^2 + 3x - 8$ на $-7x - 1$;
2. $-9x^4 + 4x^8 - x^4 + x^3 + 45x - 11$ на $3x^2 + 5$.
3. $14x^9 + 5x^7 - 2x^6 - 12x^4 + 24x^3 + 15x^2 - 2x - 1$ на $2x + 1$.
4. $19x^5 - x^4 + x^3 - 9x^2 + 9x - 30$ на $3x^2 - 9x - 2$.
5. $-2x^8 + 10x^6 - 6x^3 - 2x^2 - 7x + 44$ на $-4x^2 + 3x - 8$.

2.2 Алгебраїчні вирази та їх перетворення (ірраціональні вирази)

Приклад 1. Обчислити:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{12+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{4-\sqrt{12+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}}.$$

Розв'язання

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{12+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{4-\sqrt{12+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}}=\sqrt{12+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\left(4+\sqrt{12+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(4-\sqrt{12+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}\right)}=\sqrt{12+6\sqrt{3}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{4+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{16-\left(12+\sqrt{4+6\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{12+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{4+6\sqrt{3}}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{4-\sqrt{4+6\sqrt{3}}}=\sqrt{12+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt{16-4-6\sqrt{3}}=\sqrt{12+6\sqrt{3}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{144-\left(6\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{144-108}=\sqrt{36}=6.$$

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot$
$\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$;
2. $\left(\sqrt[6]{27}+\sqrt[4]{64}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt[4]{64}\right)$;
3. $\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)$;
4. $\sqrt{3-2\sqrt{3}}-\sqrt{3+2\sqrt{3}}$;

5. $\sqrt{6+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{30+4\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{30+\sqrt{30+4\sqrt{5}}}}\cdot$

$\cdot\sqrt{6-\sqrt{30+\sqrt{30+4\sqrt{5}}}}.$

Приклад 2. Спростити: $\left(a^{\frac{1}{3}}+b+\frac{4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right).$

Розв'язання

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b+\frac{4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right)=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt[3]{a}+b)\cdot(\sqrt[3]{a}-b)+4b^2-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{\sqrt[3]{a}-2(\sqrt[3]{a}-b)+\sqrt[3]{a}+b}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}\right)=\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}-b^2+4b^2-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):$$

$$:\left(\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{a}+2b+\sqrt[3]{a}+b}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}\right)=\left(\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{3b}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}\right)=\left(\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a}-b}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}-b^2}{3b}\right)=\left(\frac{3b^2}{\sqrt[3]{a}-b}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{(\sqrt[3]{a}+b)\cdot(\sqrt[3]{a}-b)}{3b}\right)=b\cdot(\sqrt[3]{a}+b)=b\sqrt[3]{a}+b^2.$$

Відповідь: $b\sqrt[3]{a}+b^2$.

1. $\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^{\frac{3}{2}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt[3]{ab}-3b}{a-b}\right)^{-2};$

2. $\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)^{-1}};$

3. $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a+b}-\frac{2b}{a-b};$

4. $\frac{a^{\frac{1}{3}}c^2-3b^{\frac{1}{2}}}{(c^2+3)\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}+\sqrt{b}\right)}+\frac{3a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}c^2}{(c^2-3)\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}+\sqrt{b}\right)};$

5. $\left(\frac{x^2}{x^2-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{x^2+y^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\frac{x^2+y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y}}-\frac{x^2-y^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right).$

2.3 Модуль дійсного числа. Розв’язування рівнянь та нерівностей з модулями

Приклад 1. Розв’язати рівняння:

$5|x^2+6x|-3|5-2x|-|3x-18|+5|-x^2|=9x+2.$

Розв’язання

1) $x \epsilon R$

2) Знайдемо нулі модулів

$x^2+6x=0$ $\quad$ $5-2x=0$ $\quad$ $3x-18=0$ $\quad$ $-x^2=0$

$x(x+6)=0$ $\quad$ $x=2.5$ $\quad$ $x=6$ $\quad$ $x=0$

$x=0$ $\quad$ $x=-6$

3) Знайдемо знаки функцій на кожному проміжку

$+ + - +$ | $- + - +$ | $+ + - -$ | $+ - - -$ | $+ - + -$

-6 $\quad$ 0 $\quad$ 2.5 $\quad$ 6

4) На кожному з цих інтервалів розв’язуємо рівняння без знака модуля

а) $x \epsilon (-\infty;\ -6)$, тоді

$5(x^2+6x)-3(5-2x)+(3x-18\,)+5(-x^2)=9x+2$

$5x^2+30x-15+6x+3x-18-5x^2=9x+2$

$x=\frac{7}{6}$ – не входить до інтервалу

б) $x \epsilon [-6;\ 0)$, тоді

$-5(x^2+6x)-3(5-2x)+(3x-18\,)+5(-x^2)=9x+2$

$-5x^2-30x-15+6x+3x-18-5x^2=9x+2$

$2x^2+6x+7=0$ – рівняння не має розв’язки, бо $D<0$.

в) $x \epsilon [0;\ 2.5)$, тоді

$5(x^2+6x)-3(5-2x)+(3x-18\,)-5(-x^2)=9x+2$

$5x^2+30x-15+6x+3x-18+5x^2=9x+2$

$10x^2+30x-35=0$ – рівняння не має розв’язки, бо $D<0$.

г) $x \epsilon [2.5;\ 6)$, тоді

$5(x^2+6x)+3(5-2x)+(3x-18\,)-5(-x^2)=9x+2$

$5x^2+30x+15-6x+3x-18+5x^2=9x+2$

$10x^2 + 18x - 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{524}}{20}$ – не входить до інтервалу.

д) $x \in [6;\ +\infty)$, тоді

$5(x^2 + 6x) + 3(5 - 2x) - (3x - 18\ ) - 5(-x^2) = 9x + 2$

$5x^2 + 30x + 15 - 6x - 3x + 18 + 5x^2 = 9x + 2$

$10x^2 + 12x + 31 = 0$ – рівняння не має розв’язки, бо $D < 0$.

Об’єднавши розв’язки, які ми отримали на всіх п’ятьох проміжках, отримаємо, що дане рівняння не має розв’язку.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

1. $|x + 10| - |7x - 14| + 2|3x + 9| = 10$;
2. $-2|x^2 - x| - |3 - x| + 6|3x + 18| + |x^2 - 3| = x + 6$;
3. $|x^2 + x + 5| - |2 - x| + 2|3x - 36| + |x - 5x^2| = 7x - 8x^2$;
4. $9|x^2 - x| - |3 - x| + 6|3x + 18| + |x^2 - 3| = x + 6$;
5. $2|48 - 4x| - 4|x - 12| + |2 - 78x| - 23|x - 23| = -108x + 2$;
6. $8|6x - x^2 + 8| + 6|9 - 3x| + |3x + 90| + |x^2 - 4x| = x + 16$;

Приклад 2. Розв’язати нерівність:

$|x - 1| - 3|2x - 1| + 5|3x - 2| < 4x$.

Розв’язання

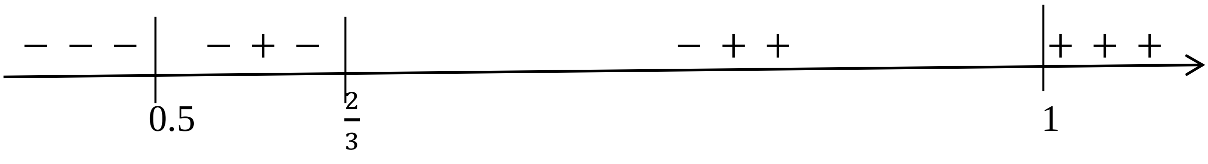
1) Знайдемо ОДЗ: $x \in R$.

2) Знайдемо нулі підмодульних функцій:

$x - 2 = 0,\ 2x - 1 = 0,\ 3x - 2 = 0$

$x = 1, \qquad x = 0.5, \quad x = \frac{2}{3}$.

3) Знайдемо знаки функцій на кожному проміжку



4) На кожному з цих інтервалів розв’язуємо нерівність без знака модуля

а) $x \in (-\infty;\ 0.5)$, тоді

$-(x - 2) + 3(2x - 1) - 5(3x - 2) < 4x$

$-x + 2 + 6x - 3 - 15x + 10 < 4x$

$x > \frac{9}{14}$

$x \epsilon \emptyset$

б) $x \epsilon [0.5; \frac{2}{3})$, тоді

$-(x - 2) - 3(2x - 1) - 5(3x - 2) < 4x$

$-x + 2 - 6x + 3 - 15x + 10 < 4x$

$x > \frac{15}{26}$

$x \epsilon \left(\frac{15}{26}; \frac{2}{3}\right)$

в) $x \epsilon [\frac{2}{3};\ 1)$, тоді

$-(x - 2) - 3(2x - 1) + 5(3x - 2) < 4x$

$-x + 2 - 6x + 3 + 15x - 10 < 4x$

$x < 1.25$

$x \epsilon [\frac{2}{3};\ 1)$

г) $x \epsilon [1;\ +\infty)$, тоді

$x - 2 - 3(2x - 1) + 5(3x - 2) < 4x$

$x - 2 - 6x + 3 + 15x - 10 < 4x$

$x < 1.5$

$x \epsilon [1;\ 1.5)$

Об’єднавши розв’язки на всіх чотирьох проміжках, отримаємо $x \epsilon (\frac{15}{26};\ 1.5)$.

Відповідь: $x \epsilon (\frac{15}{26};\ 1.5)$.

1. $|x + 9| + |-4x - 8| - |x - 9| \geq 7 - 4x$;
2. $4|6x - 36| + |x - 11| + 4|x - 14| > -x$;
3. $|5 - x + x^2| - 3|x - x^2| - |x - 8| \leq 3x^2$;
4. $|x - 6| + 7|x - 1| - |x - 4 + x^2| < 1 - x$;
5. $-4|5x - 100| - |x + 1| - 2|8x + 9 - x^2| \leq 1 + 3x$;
6. $10|x - 8| - 37|x^2 - 100| + |x + x^2| > 1 - 1x$.

2.4 Рівняння з одним невідомим

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$

Розв'язання

$\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4};$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x^2-4x+2\neq 0, \\ x^2+x+2\neq 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_{1,2}\neq 2\pm\sqrt{2}, \\ x\epsilon R \end{array}\right.$

$\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{2}{x}}=-\frac{5}{4};$

Вводимо нову змінну: $x+\frac{2}{x}=t$

Отримаємо: $\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}=-\frac{5}{4};$

$\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}+\frac{5}{4}=0;$

$\frac{2\cdot 4\cdot(t+1)+3\cdot 4\cdot(t-4)+5\cdot(t-4)\cdot(t+1)}{4(t-4)\cdot(t+1)}=0;$

$\frac{8t+8+12t-48+5t^2-15t-20}{4(t-4)\cdot(t+1)}=0;$

$\frac{t^2+t-12}{4(t-4)\cdot(t+1)}=0.$

ОДЗ: $(t-4)\cdot(t+1)\neq 0, \left[\begin{array}{l} t\neq 4 \\ t\neq -1 \end{array}\right.$.

$t^2+t-12=0;$

$D=1^2-4\cdot(-12)=1+48=49;$

$t_1=\frac{-1+\sqrt{49}}{2}=\frac{-1+7}{2}=3;\quad t_2=\frac{-1-\sqrt{49}}{2}=\frac{-1-7}{2}=-4;$

Повертаємося до заміни:

$x+\frac{2}{x}=3;\qquad x+\frac{2}{x}=-4;$

$x+\frac{2}{x}-3=0;\qquad x+\frac{2}{x}+4=0;$

$\frac{x^2+2-3x}{x}=0;\qquad \frac{x^2+2+4x}{x}=0.$

ОДЗ: $x\neq 0.$

$x^2+2-3x=0;\qquad x^2+2+4x=0;$

$D=3^2-4\cdot 2=9-8=1;\qquad D=4^2-4\cdot 2=16-8=8;$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2;$ $\quad$ $x_3 = \frac{4+\sqrt{8}}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$ – не зад. ОДЗ

$x_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1; ;$ $\quad$ $x_4 = \frac{4-\sqrt{8}}{2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$ – не зад. ОДЗ

Відповідь: $x_1 = 2, x_2 = 1.$

1. $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0;$
2. $\frac{5}{4x^2+4x+4} - \frac{3x}{x^3-1} = \frac{1}{2(x-1)};$
3. $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^4 - 8\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2 = 9;$
4. $9\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 14;$
5. $\frac{16}{(x+6)\cdot(x-1)} - \frac{20}{(x+2)\cdot(x+3)} = 1;$
6. $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-4}{x+5} - \frac{x-5}{x+6}.$

Приклад 2. Розв’язати квадратне рівняння: $\left(\sqrt{x} - 2\right)(x^2 + x - 2) = 0.$

Розв’язання

Знайдемо ОДЗ: $x \geq 0$

Розв’яжемо рівняння:

$\left(\sqrt{x} - 2\right)(x^2 + x - 2) = 0,$

$\sqrt{x} - 2 = 0$ або $x^2 + x - 2 = 0,$

$\sqrt{x} = 2 \quad D = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0,$

$x_1 = 4;\ x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1;\ x_3 = \frac{-1-3}{2} = -2$ – не задовольняє ОДЗ.

Відповідь: $x_1 = 4;\ x_2 = 1.$

1. $5x^2 - 7x + 9 = -4x + 4(x^2 - 6);$
2. $\left(3 - 6\sqrt{x}\right)(x^2 - 3(4x - 6)) = 0;$
3. $-8x + 4 = -x - 34(5x - x^2 + 1);$
4. $x^2 - x + 5(9x - 5) = x - 3x^2 + 8(32x^2 + 86);$
5. $-x^2 - x + 1 = x - 9(21 - x) + x^2.$

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $2x^3 - 8x^2 - 3x + 12 = 0.$

Розв’язання

Групуємо два перші та два останні члени:

$2x^2(x - 4) - 3(x - 4) = 0.$

Винесимо спільний множник $(x - 4)$ за дужки, отримаємо:

$(x - 4)(2x^2 - 3) = 0.$

$x_1 = 1, x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Відповідь: $x_1 = 1, x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

1. $x^3 - 15x^2 + 75x - 135 = 0$;   4. $2x^3 - 7x^2 - x + 32 = 0$;
2. $9x^3 - 2x^2 - 8x - 10\frac{2}{3} = 0$;   5. $9x^3 - 2x^2 - 8x - 10 = -4$;
3. $-x^3 - x^2 + 4x - 10 = 7x + 5x^2$;   6. $x^3 - 6x = 6$.

Приклад 4. Розв'язати ірраціональні рівняння:

$\sqrt{x - 3 - 2\sqrt{x - 4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} = 1$.

Розв'язання

Введемо нову змінну: $\sqrt{x - 4} = t$, де $t \geq 0$.

Тоді $x - 4 = t^2$; $x = t^2 + 4$.

Отримаємо рівняння $\sqrt{t^2 + 1 - 2t} + \sqrt{t^2 + 4 - 4t} = 1$, яке можна записати так: $\sqrt{(t-1)^2} + \sqrt{(t-2)^2} = 1$. Звідси

$|t - 1| + |t - 2| = 1$.

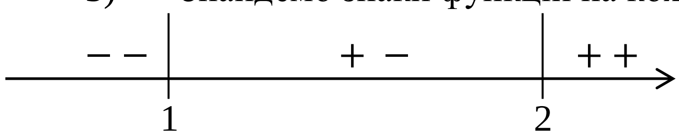
1) $t \in R$.

2) Знаходимо точки в яких модулі перетворюються в нуль

$t - 1 = 0$ $t - 2 = 0$

$t = 1$ $t = 2$

3) Знайдемо знаки функцій на кожному проміжку



4) На кожному з цих інтервалів розв'язуємо рівняння без знака модуля

а) $t \in (-\infty;\ 1)$, тоді

$-(t - 1) - (t - 2) = 1$

$-t + 1 - t + 2 = 1$

$t = 1$ – не входить в інтервал.

б) $t \in [1;\ 2)$, тоді

$t - 1 - (t - 2) = 1$

$t - 1 - t + 2 = 1$

$1 = 1$ – $t \epsilon [1;\ 2)$.

в) $t \epsilon [2;\ +\infty)$

$t - 1 + t - 2 = 1$

$2t - 3 = 1$

$t = 2$ – входить до інтервалу.

Об’єднавши розв’язки, які ми отримали на всіх трьох проміжках, отримаємо $t \epsilon [2; 3]$.

Виконуючи обернену заміну, маємо $2 \leq \sqrt{x-4} \leq 3$, звідки

$4 \leq x - 4 \leq 9$

$8 \leq x \leq 13$

Відповідь: $x \epsilon [8; 13]$.

1. $\sqrt{2x - 5 - 2\sqrt{2x-6}} + \sqrt{2x - 4\sqrt{2x-6}} = 2x$;
2. $\sqrt{x - 8 - 4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x - 8\sqrt{x-2}} = 8$;
3. $\sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x+2}} + \sqrt{x + 18 - 8\sqrt{x+2}} = 1$;
4. $\sqrt{3x+8} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;
5. $\sqrt{2x^2 + 3x} + \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = \sqrt{4x+9}$.

2.5 Системи рівнянь (лінійних з двома невідомими)

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2y + 3x - 7 = 0, \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання

З другого рівняння виразимо змінну x через змінну y: $x = y + 4$.

Підставимо у перше рівняння системи замість змінної x вираз $y + 4$:

$$\begin{cases} 2y + 3(y+4) - 7 = 0, \\ x = y + 4 \end{cases} \begin{cases} 5y + 5 = 0, \\ x = y + 4 \end{cases} \begin{cases} y = -1, \\ x = y + 4 \end{cases} \begin{cases} y = -1, \\ x = 3 \end{cases}$$

Пара чисел $(3; -1)$ – розв'язок.

Відповідь: $(3;\ -1)$.

1. $\begin{cases} y - 7x + 2 = 0, \\ x - 5y - 1 = 0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} y - x - 13 = 0, \\ 5x - 5y - 31 = 0 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 7x - 7y - 7 = 0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} -y + x + 3 = 0, \\ 6x - 10y + 14 = 0 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} -3x + y - 2 = 0, \\ 6x - y = 8 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x - y + 16 = 0, \\ 4x - y - 10 = 0 \end{cases}$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3y - 4x - 1 = 0, \\ 3x + 4y + 18 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання

Помножимо обидві частини першого рівняння на 3, а другого рівняння на 4, отримаємо $\begin{cases} 9y - 12x - 3 = 0, \\ 12x + 16y + 72 = 0. \end{cases}$

Додаємо почленно ліві і праві частини рівнянь системи, отримаємо:

$25y + 69 = 0;\ \ y = -2{,}76.$

Підставимо знайдене значення y змінної в перше рівняння вихідної системи, отримаємо:

$3 \cdot (-2{,}76) - 4x - 1 = 0;\ \ x = -2{,}32.$

Пара чисел $(-2{,}32;\ -2{,}76)$ – розв'язок.

Відповідь: $(-2{,}32,; -2{,}76)$.

1. $\begin{cases} 4y + 8x = 9, \\ 4x - 8y + 1 = 0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 11y + 2x = 6, \\ 11x - 2y = 10 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 2x + 7y + 7 = 0, \\ -2x + 7y + 8 = 0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} -15y + 3x - 11 = 0, \\ 15x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} 8y + 12x = 0, \\ 8x - 12y + 1 = 0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} -12x - 8y - 1 = 0, \\ 12y + 8x = -1 \end{cases}$.

2.6 Системи рівнянь (нелінійних з двома невідомими)

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 = 26, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 37. \end{cases}$

Розв’язання

Помножимо перше рівняння на 37, а друге – на -26, отримаємо:

$$\begin{cases} 74x^2 + 74xy + 37y^2 = 962, \\ -26x^2 - 26xy - 52y^2 = -962. \end{cases}$$

Додамо почленно рівняння системи:

$$48x^2 + 48xy - 15y^2 = 0;$$

$$16x^2 + 16xy - 5y^2 = 0.$$

Дана система не має розв’язків при $y = 0$, тоді при $y \neq 0$

$$16\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16\frac{x}{y} - 5 = 0.$$

Нехай $\frac{x}{y} = t$, тоді

$16t^2 + 16t - 5 = 0;$

$D = 256 + 320 = 576;$

$t_1 = \frac{-16+24}{32} = \frac{1}{4}$; $t_2 = \frac{-16-24}{32} = \frac{-40}{32} = \frac{-5}{4}$.

Отже,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{x}{y}=\frac{1}{4}, \\ \frac{x}{y}=\frac{-5}{4}; \end{array}\right. \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 26; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x=y, \\ 4x=-5y; \end{array}\right. \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 261; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x=y, \\ 2x^2+2xy+y^2=26; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{4}{-5}x=y, \\ 2x^2+2xy+y^2=261; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x=y, \\ 2x^2+8x^2+16x^2=26; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{4}{-5}x=y, \\ 2x^2-\frac{8}{5}x^2+\frac{16}{25}x^2=26; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x=y, \\ 26x^2=26; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{4}{-5}x=y, \\ \frac{26}{25}x^2=26; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x=y, \\ x_1=1, x_2=-1; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{4}{-5}x=y, \\ x_3=5, x_4=-5; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_1=4, y_2=-4, \\ x_1=1, x_2=-1; \end{cases} \\ \begin{cases} y_3=-4, y_4=4, \\ x_3=5, x_4=-5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пара чисел $(1; 4)$, $(-1; -4)$, $(5; -4)$, $(-5; 4)$ – розв’язок.

Відповідь: $(1; 4)$, $(-1; -4)$, $(5; -4)$, $(-5; 4)$.

1. $\begin{cases} 6x^2 + xy - y^2 = 45, \\ 7x^2 + 7xy + y^2 = 25. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -4x^2 - 6xy + 5y^2 = 6, \\ x^2 - 8xy + 3y^2 = -7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + xy + 17y^2 = 16, \\ -4x^2 - 9xy + 22y^2 = 9. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 8x^2 - x + 2y + 2y^2 = 25, \\ x^2 + xy + y^2 + x = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - 9xy + 2y^2 = 12, \\ x^2 + 4xy - 8y^2 = 10. \end{cases}$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

Розв'язання

Оскільки

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x + y)^2 - 2xy - xy) = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = u(u^2 - 3v);$

$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = uv,$

тоді маємо систему:

$$\begin{cases} uv = 30, \\ u(u^2 - 3v) = 35. \end{cases} \begin{cases} v = \frac{30}{u}, \\ u\left(u^2 - 3 \cdot \frac{30}{u}\right) = 35. \end{cases} \begin{cases} v = \frac{30}{u}, \\ u^3 = 125. \end{cases} \begin{cases} v = 6, \\ u = 5. \end{cases}$$

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом підстановки:

$$\begin{cases} x = 5 - y, \\ (5 - y)y = 6, \end{cases} \begin{cases} x = 5 - y, \\ y^2 - 5y + 6 = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 5 - y, \\ y_1 = 3, y_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 3, \\ y_1 = 3, y_2 = 2, \end{cases}$$

Пара чисел $(2; 3)$, $(3; 2)$ – розв'язок.

Відповідь: $(2; 3)$, $(3; 2)$.

1. $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 3, \\ x^3 - y^3 = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2y + 4xy^2 = 24, \\ 5x^3 + 5y^3 = -125. \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy + y = 10, \\ x^4y + yx^3 = 2000. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 10, \\ x - 2y = -10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2xy - y = 36, \\ 2x^3y - yx^2 = 2016. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 7xy + y = 49, \\ 21x^3y + 3yx^2 = 3575. \end{cases}$

2.7 Показникові функції і їх властивості. Показникові рівняння і системи рівнянь

Показникові співвідношення

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \quad a^{x-y} = a^x : a^y; \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x;$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x; \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \text{ якщо } b \neq 0; \quad a^0 = 1; \quad a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ якщо } a \neq 0; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $4^{x-4} + 4^{x-5} - 4^{x-7} = 5056$.

Розв'язання

$4^{x-4} + 4^{x-5} - 4^{x-7} = 5056$;

$4^{x-7}(4^3 + 4^2 - 1) = 5056$;

$4^{x-7} \cdot 79 = 5056$;

$4^{x-7} = 4^3$;

$x - 7 = 3$;

$x = 10$.

Відповідь: $x = 10$.

1. $7^{2x^2+1} = 7^{6x-9}$;
2. $13^{2x-1} - 13^{2x-2} + 169^{x+1} = 28561$;
3. $169^{5x^2+x-6} = 13^{x-1}$;
4. $6^{x-5} - 6^{x+9} + 6^{x+7} = 6480$;
5. $6^{2x-x^2} - 6^{x+15} - 6^{x+7x^2} - 36^{x+24} + 6^{x+1} = 7776$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $3^{2x+1} - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} = 0$.

Розв'язання

$\frac{3^{2x+1}}{5^{2x+1}} - 2 \cdot \frac{3^x \cdot 5^x}{5^{2x+1}} - 1 = 0$;

$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1 = 0$;

$3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 5 = 0$;

Введемо нову змінну $\left(\frac{3}{5}\right)^x = t$, отримаємо:

$3t^2 - 2t - 5 = 0$;

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64;$

$t_1 = \frac{2+\sqrt{64}}{2\cdot 3} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$; $t_2 = \frac{2-\sqrt{64}}{2\cdot 3} = \frac{-6}{6} = -1$ – не задовольняє умові;

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = 1\frac{2}{3};$

$x = log_{\frac{3}{5}} 1\frac{2}{3}.$

Відповідь: $x = log_{\frac{3}{5}} 1\frac{2}{3}.$

1. $11^{2x-1} - 4 \cdot 15^x - 6^{2x-2} = 0;$
2. $6^{4x+2} + 4 \cdot 15^{2x} + 25^{4x-1} = 0;$
3. $8^{2x} + 10 \cdot 15^{x-1} + 3^{2x-1} = 0;$
4. $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0;$
5. $2^x - 5 = \frac{6}{2^x};$
6. $10^x + \frac{2}{10^x} = -8.$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $11^{4x-7} = 3^{2-9x}$.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівності за основою 10, отримаємо:

$lg\, 11^{4x-7} = lg\, 3^{2-9x};$

$(4x - 7)\, lg\, 11 = (2 - 9x)\, lg\, 3;$

$4x\, lg\, 11 - 7\, lg\, 11 = 2\, lg\, 3 - 9x\, lg\, 3;$

$x(4\, lg\, 11 + 9\, lg\, 3) = 2\, lg\, 3 + 7\, lg\, 11;$

$x = \frac{2\, lg\, 3 + 7\, lg\, 11}{4\, lg\, 11 + 9\, lg\, 3}.$

Відповідь: $x = \frac{2\, lg\, 3 + 7\, lg\, 11}{4\, lg\, 11 + 9\, lg\, 3}.$

1. $4^{-x-2} = 16^{x-8} - 4^{x-7};$
2. $15^{4x-5} = 2^{2-9x};$
3. $12^{2x+13} = 6^{2-9x};$
4. $9^{19-2x} = 18^{2-9x};$
5. $7^{8-7x} = 20^{2-9x};$
6. $10^{6x+10} = -3^{3+6x}.$

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $5^{2x+1} + 3^{x+3} - 75^x - 135 = 0.$

Розв'язання

Перетворимо дане рівняння:

$5 \cdot 25^x + 3^3 \cdot 3^x - 25^x \cdot 3^x - 135 = 0;$

$25^x(5 - 3^x) - 3^3(5 - 3^x) = 0;$

$(25^x - 3^3)(5 - 3^x) = 0;$

$25^x - 3^3 = 0$ або $5 - 3^x = 0$;

$25^x = 3^3$ або $3^x = 5$;

$x_1 = log_{25} 3^3 = 3\, log_{5^2} 3 = \frac{3}{2} log_5 3$; $x_2 = log_3 5$.

Відповідь: $x_1 = \frac{3}{2} log_5 3$; $x_2 = log_3 5$.

1. $6^{2x+1} - 2^{x+5} + 72^x - 192 = 0$;
2. $3^{2x+1} + 8^{x+2} + 72^x + 192 = 0$;
3. $9^{2x-1} + 3^{x+4} - 243^x = 9$;
4. $2^{4x+4} + 6^{2x+2} + 24^{2x} + 576 = 0$;
5. $5^{6x-3} + 10^{3x+4} - 100^{3x} - 80 = 0$.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18, \\ 2^y \cdot 3^x = 12. \end{cases}$

Розв'язання

Перемножимо рівняння системи, отримаємо:

$2^{x+y} \cdot 3^{y+x} = 216$;

$6^{x+y} = 6^3$;

$x + y = 3$.

Поділимо перше рівняння на друге, отримаємо:

$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{18}{12}$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{3}{2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$;

$x - y = -1$.

Розв'язок даної системи зведеться до розв'язку рівносильній їй системі: $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=3-y, \\ 2y=4, \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

Пара чисел $(1; 2)$ – розв'язок.

Відповідь: $(1; 2)$.

1. $\begin{cases} 2^{5x} \cdot 3^{2y} = 24, \\ 2^{2y} \cdot 3^{5x} = 54. \end{cases}$;
2. $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 36, \\ 3^y \cdot 4^x = 108. \end{cases}$;
3. $\begin{cases} 1^x \cdot 19^{-y} = 19, \\ 1^{-y} \cdot 19^x = 361. \end{cases}$;
4. $\begin{cases} 3^{6x} \cdot 5^{-y} = 45, \\ 3^{-y} \cdot 5^{6x} = 135. \end{cases}$;
5. $\begin{cases} 3^{4x} \cdot 7^y = 63, \\ 3^y \cdot 7^{4x} = 189. \end{cases}$;
6. $\begin{cases} 8^x \cdot 2^y = 32, \\ 8^y \cdot 2^x = 64. \end{cases}$

2.8 Логарифмічні функції. Властивості логарифмів. Логарифмування та потенціювання. Логарифмічні рівняння і системи рівнянь

Логарифмічні тотожності

Основна логарифмічна тотожність $a^{log_a b} = b$

$log_a 1 = 0; \quad log_a a = 1; \quad log_a xy = log_a|x| + log_a|y|, xy > 0$

$log_a \frac{x}{y} = log_a|x| - log_a|y|, \frac{x}{y} > 0; \quad log_a x^p = p\, log_a|x|, x^p > 0$

$log_{a^k} x = \frac{1}{k} log_a x; \quad a^{log_c b} = b^{log_c a}$

$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$, де $b > 0, c > 0, c \neq 1$

Приклад 1. Обчислити:

$\frac{log_2 192}{log_{12} 2} - \frac{log_2 24}{log_{96} 2} = log_2 192 \cdot log_2 12 - log_2 24 \cdot log_2 96 = log_2(2^6 \cdot 3) \cdot$
$\cdot log_2(2^2 \cdot 3) - log_2(2^3 \cdot 3) \cdot log_2(2^5 \cdot 3) = (6log_2 2 + log_2 3) \cdot (2log_2 2 +$
$+ log_2 3) - (3log_2 2 + log_2 3) \cdot (5log_2 2 + log_2 3) = (6 + log_2 3) \cdot$
$\cdot (2 + log_2 3) - (3 + log_2 3) \cdot (5 + log_2 3) = 12 + 6\, log_2 3 + 2\, log_2 3 +$
$+(log_2 3)^2 - 15 - 3\, log_2 3 - 5\, log_2 3 - (log_2 3)^2 = -3.$

1. $72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2} log_7 9 - log_7 6} + 5^{-log_{\sqrt{5}} 4}\right)$; 4. $\frac{3\, log_7 2 - \frac{1}{2} log_7 64}{4\, log_5 2 - \frac{1}{3} log_5 27}$;

2. $\frac{1}{2} log_7 36 - log_7 14 - 3\, log_7 \sqrt[3]{21}$; 5. $\left(log_7 2 + \frac{1}{log_5 7}\right) \cdot lg\, 7$;

3. $log_4 81 \cdot log_{\sqrt{3}} 7 \cdot log_{49} 32$; 6. $12^{\frac{log_6(log_6 12)}{log_6 12}} \cdot log_{12} 6$.

Приклад 2. Виразити через a і b: $log_{\sqrt{3}} 4500$, якщо $log_3 15 = a$, $log_3 10 = b$.

Розв'язання

$log_{\sqrt{3}} 4500 = 2\, log_3 3 \cdot 15 \cdot 100 = 2(log_3 3 + log_3 15 + log_3 10^2) =$
$= 2(1 + log_3 1\,5 + 2\, log_3 10) = 2(1 + a + 2b) = 2 + 2a + 4b.$

1. $log_4 1250$, якщо $log_2 5 = a$;
2. $log_7 6300$, якщо $log_{49} 9 = a$, $log_{49} 10 = b$;
3. $log_7 22400$, якщо $log_{\sqrt{7}} 20 = 2a$, $log_{\sqrt{7}} 16 = b$;

4. $log_2 5760$, якщо $log_4 8 = a$, $log_4 36 = -5b$;

5. $log_9 6174$, якщо $log_3 7 = 3b$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

$$lg(x^2+1) - 0{,}5\, lg(x^2+2x+1)^2 = lg\, 3.$$

Розв'язання

$lg(x^2+1) - lg(x^2+2x+1) = lg\, 3;$

$lg(x^2+1) - lg\, 3 = lg(x^2+2x+1);$

$lg\frac{(x^2+1)}{3} = lg(x^2+2x+1);$

$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{3} = x^2+2x+1, \\ \frac{x^2+1}{3} > 0, \\ x^2+2x+1 > 0, \end{cases} \begin{cases} x^2+3x+1=0, \\ x \in R, \\ x \in R, \end{cases} \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}; \\ x \in R, \\ x \in R, \end{cases}$$

Відповідь: $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

1. $log_2 x \cdot log_4 x \cdot log_8 x = 568;$
2. $log_{\sqrt{x}} 16 \cdot log_4 \sqrt[16]{\frac{256}{32-x}} = 10;$
3. $8\, log_3(5x+1) + 2\, log_3(-5x+1)^4 - log_3(x^2+11)^2 = log_3 2;$
4. $log_9(6x+3) - 0{,}5\, log_{81} x = 6;$
5. $\frac{1}{log_3 x - 1} = \frac{2}{log_3 x - 2}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $log_{(x+2)}{}^2\, 16 - 4log_{(x+2)}2 = 3$.

Розв'язання

ОДЗ: $x+2>0$; $x>-2$; $x \in (-2;\ +\infty)$.

$4log_{(x+2)}{}^2\, 2 - 4log_{(x+2)}2 = 3;$

$4\left(\frac{1}{log_2(x+2)}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{log_2(x+2)} = 3.$

Введемо нову змінну: $\frac{1}{log_2(x+2)} = t$, отримаємо:

$4t^2 - 4t - 3 = 0;$

$D = (-4)^2 - 4\cdot 4\cdot(-3) = 64;$

$t_1 = \frac{4+\sqrt{64}}{2\cdot 4} = \frac{3}{2}$; $t_2 = \frac{4-\sqrt{64}}{2\cdot 4} = -\frac{1}{2}$;

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{log_2(x+2)} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{log_2(x+2)} = -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} log_2(x+2)^3 = log_2 4, \\ log_2(x+2) = log_2\frac{1}{4}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} (x+2)^3 = 4, \\ x+2 = \frac{1}{4}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x+2 = \sqrt[3]{4}, \\ x = -2+\frac{1}{4}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt[3]{4}-2, \\ x_2 = -1{,}75. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = \sqrt[3]{4} - 2$; $x_2 = -1{,}75$.

1. $log_2{}^2\, x^2 - 4log_2 x^2 + log_2 8 = 0$;
2. $x^{lgx-2} = 10^{2lgx-3}$;
3. $log_2{}^2\, 100x + log_2{}^2\, 10x = 14 + log_2 \frac{1}{x}$;
4. $log_{12}(2x+1) + 9\log_{(2x+1)^3} 25 = 7$;
5. $11\, log_x 6 + 2\, log_6 x^4 + 3\, log_{16} x^4 = 0$.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 25^y \cdot 5^x = 625, \\ lg(x+y)^2 - lg\, y = 2\, lg\, 5. \end{cases}$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} y>0, \\ x+y\neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y>0, \\ x\neq -y. \end{cases}$

$\begin{cases} 5^{2y}\cdot 5^x = 5^4, \\ lg\frac{(x+y)^2}{y} = lg\, 25, \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{2y+x} = 5^4, \\ \frac{(x+y)^2}{y} = 25, \end{cases}$ $\begin{cases} 2y+x=4, \\ (x+y)^2 = 25y, \end{cases}$ $\begin{cases} x=4-2y, \\ (4-y)^2 = 25, \end{cases}$ $\begin{cases} x=4-2y, \\ \left[\begin{array}{l} 4-y=5, \\ 4-y=-5, \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} x=4-2y, \\ \left[\begin{array}{l} y=-1 \text{ –не задовольняє ОДЗ}, \\ y=9, \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=-14, \\ y=9. \end{cases}\right.$

Пара чисел $(-14; 9)$ – розв'язок.

Відповідь: $(-14; 9)$.

1. $\begin{cases} x-10y=900, \\ lg\, x - lg\, y = 2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} lg\, x - lg\, y = 7, \\ lg\, x + lg\, y = 5. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 14x-4y=560, \\ lg\, x + lg\, y = 8. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 36^y \cdot 6^{2x} = 216, \\ lg(x+y)^2 + lg\, y = -\, lg\, 9. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 8^y \cdot 64^x = 512, \\ lg(x-y)^2 + lg(4y) = -5\, lg\, 20. \end{cases}$
8. $\begin{cases} lg\frac{5x+10}{3x-18} - lg\frac{2x-6}{8x} = 3, \\ lg\, x - lg\, y = -4. \end{cases}$

2.9 Тригонометричні функції. Основні тригонометричні формули. Доведення тотожностей

Основні тригонометричні тотожності

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1; \quad tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}; \quad ctg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha};$$

$$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1; \quad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}; \quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$$

Формули подвійного кута

$$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha; \quad cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha;$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}; \quad ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}$$

Формули потрійного кута

$$sin\,3\alpha = 3\,sin\,\alpha - 4sin^3\alpha; \quad cos\,3\alpha = 4cos^3\alpha - 3\,cos\,\alpha$$

$$tg\,3\alpha = \frac{3tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}; \quad ctg\,3\alpha = \frac{ctg^3\alpha - 3ctg\,\alpha}{3tg^2\alpha - 1}$$

Формули додавання

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin\,\alpha \cdot cos\,\beta \pm cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta \mp sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}; \quad ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta \mp 1}{ctg\,\alpha \pm ctg\,\beta}$$

Формули суми та різниці

$$sin\,\alpha \pm sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\,cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\,sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{sin(\alpha \pm \beta)}{cos\,\alpha \cdot cos\,\beta}; \quad ctg\,\alpha \pm ctg\,\beta = \frac{sin(\beta \pm \alpha)}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta}$$

Формули універсальної підстановки

$$sin\,\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad cos\,\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Формули пониження степеня

$$sin^2\alpha = \frac{1-cos\,2\alpha}{2}; \quad cos^2\alpha = \frac{1+cos\,2\alpha}{2}$$

Формули добутку тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

Приклад 1. Спростити: $\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{4\cos x\cdot(\cos x+\cos 2x)}$.

Розв'язання

$$\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{4\cos x\cdot(\cos x+\cos 2x)}=\frac{1+\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x+4\cos^3 x-3\cos x}{4\cos x\cdot(\cos x+\cos 2x)}=$$

$$=\frac{-2\cos x+2\cos^2 x+4\cos^3 x}{4\cos x\cdot(\cos x+\cos 2x)}=\frac{2\cos x\cdot(2\cos^2 x+\cos x-1)}{4\cos x\cdot(\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x)}=\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cdot(\cos x+2\cos^2 x-1)}=$$

$$=\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cdot(2\cos^2 x+\cos x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

1. $\frac{\sin 27x\cdot\cos 3x-\cos 27x\cdot\sin 3x}{\cos 3x\cdot\cos 9x-\sin 3x\cdot\sin 9x}$;
2. $\left(\frac{1}{\sin x}+ctg\,x\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin x}-ctg\,x\right)$;
3. $\frac{\sin(3x+x)\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)}{\sin(\pi-2x)}$;
4. $\cos^4\frac{x}{4}-\sin^4\frac{x}{4}$;
5. $\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 4x}$;
6. $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$.

Приклад 2. Обчислити: $2\sin 20°\cdot\cos 50°\cdot\sin 60°\cdot\cos 10°$.

Розв'язання

$$2\sin 20°\cdot\cos 50°\cdot\sin 60°\cdot\cos 10°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 20°\cdot\cos(90°-40°)\cdot$$

$$\cdot\cos(90°-80°)=\sqrt{3}\cdot\sin 20°\cdot\sin 40°\cdot\sin 80°=\sqrt{3}\cdot\sin 20°\cdot$$

$$\cdot\frac{\cos 40°-\cos 120°}{2}=\sqrt{3}\cdot\sin 20°\cdot\frac{\cos 40°-\cos(90°+30°)}{2}=\sqrt{3}\cdot\sin 20°\cdot$$

$$\cdot\frac{\cos 40°+\sin 30°}{2}=\sqrt{3}\cdot\sin 20°\cdot\frac{\cos 40°+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 20°\cdot\cos 40°+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin 20°=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-\sin 20°+\sin 60°}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin 20°=-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin 20°+\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin 20°=\frac{3}{8}.$$

Відповідь: $\frac{3}{8}$.

1. $\sin 68°\cdot\sin 38°-\sin 52°\cdot\cos 112°$;
4. $\frac{\cos 50°-\cos 100°}{tg\,10°+tg\,50°}$;

2. $8\sin 70^\circ - \frac{1}{\sin 10^\circ}$;

3. $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 90^\circ$;

5. $8\sin 70^\circ - \frac{1}{\sin 10^\circ}$;

6. $\frac{\sin 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ}$.

Приклад 3. Довести тотожність: $\frac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}$.

Доведення

Переносимо все в ліву частину тотожності, отримаємо:

$$\frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha} - \frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} = 0;$$

Зробимо перетворення з лівою частиною:

$$\frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha} - \frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha + \sin\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + \cos\alpha} - \frac{2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} =$$

$$= \frac{4\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 2\cos\alpha} - \frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha} = \frac{4\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{4\cos^3\alpha - 2\cos\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} -$$

$$- \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{0}{2\cos^2\alpha - 1} = 0;$$

$0 = 0$ – ліва частина дорівнює правій, отже, тотожність правильна.

Доведено.

1. $\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{2}{\cos x}$;

2. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = tg\,\alpha + tg\,\beta$;

3. $\frac{\sin 4x}{4\cos x} = \sin x \cdot \cos 2x$;

4. $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = ctg^2 x$;

5. $ctg\,2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2\,ctg\,x}$;

6. $\frac{tg\,4x + tg\,3x}{1 - tg\,4x\cdot tg\,3x} = tg\,7x$.

2.10 Властивості та графіки тригонометричних функцій

Приклад 1. Знайти найменший додатний період функції: $y = cos\frac{2x}{7}$.

Розв'язання

$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{7}} = 7\pi.$

Відповідь: $T_1 = 7\pi$.

1. $y = sin\left(-\frac{3x}{6}\right)$; 3. $y = tg\frac{6x}{11}$; 5. $y = ctg\,(-3x)$;

2. $y = tg\,4x$; 4. $y = ctg\frac{x}{6}$; 6. $y = ctg\,\left(-\frac{5x}{9}\right)$.

Приклад 2. Користуючись властивостями тригонометричної функції, порівняти числа: $sin\frac{\pi}{12}$ і $sin\frac{11\pi}{9}$.

Розв'язання

Оскільки $sin\frac{7\pi}{9} = sin\left(\pi + \frac{2\pi}{9}\right) = -sin\frac{2\pi}{9}$ і $sin\frac{\pi}{12} > -sin\frac{2\pi}{9}$.

Отже, $sin\frac{\pi}{12} > sin\frac{11\pi}{9}$.

Відповідь: $sin\frac{\pi}{12} > sin\frac{11\pi}{9}$.

1. $tg\,(-1{,}5\pi)$ і $tg\,(-0{,}4\pi)$; 3. $cos\,3$ і $cos\,6$; 5. $tg\,6°$ і $tg\,8°$;

2. $cos\frac{3\pi}{11}$ і $cos\frac{6\pi}{11}$; 4. $ctg\,\frac{13\pi}{8}$ і $ctg\,\frac{\pi}{8}$; 6. $ctg\,13°$ і $ctg\,48°$.

Приклад 3. Розташувати числа в порядку їх зростання:
$tg\,0{,}5$, $tg\,1{,}1$, $tg\,(-1{,}3)$, $tg\,(-1{,}7)$.

Розв'язання

Числа $tg\,0{,}5$, $tg\,1{,}1$ – додатні (точки $P_{0{,}5}$ і $P_{1{,}1}$ знаходяться в I чверті), а числа $tg\,(-1{,}3)$, $tg\,(-1{,}7)$ – від'ємні (точки $P_{-1{,}3}$ і $P_{-1{,}7}$ знаходяться в IV чверті). Враховуючи, що $0 < 0{,}5 < \frac{\pi}{2}$, $0 < 1{,}1 < \frac{\pi}{2}$ і те, що функція $tg\,x$ на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ зростає, з нерівності $0{,}5 < 1{,}1$ одержуємо $tg\,0{,}5 < tg\,1{,}1$.

Також $-\frac{\pi}{2} < -1{,}3 < 0$, $-\frac{\pi}{2} < -1{,}7 < 0$. Функція $tg\,x$ на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ зростає, з нерівності $-1{,}3 > -1{,}7$ одержуємо $tg\,(-1{,}3) > tg\,(-1{,}7)$.

Отже, у порядку зростання ці числа розташовуються так:

$tg\ (-1{,}7)$, $tg\ (-1{,}3)$, $tg\ 0{,}5$, $tg\ 1{,}1$.

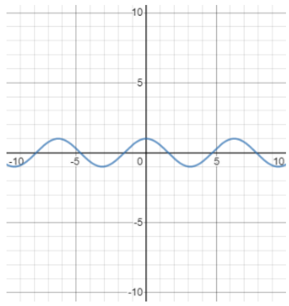
Відповідь: $tg\ (-1{,}7)$, $tg\ (-1{,}3)$, $tg\ 0{,}5$, $tg\ 1{,}1$.

1. $ctg\ 0{,}5$, $ctg\ (-2{,}1)$, $ctg\ 2{,}9$, $ctg\ (-2{,}5)$;
2. $sin\ 4{,}7$, $sin\ (-7{,}6)$, $sin\ 3{,}1$, $sin\ (-6{,}6)$;
3. $cos\ 110°$, $cos\ 125°$, $cos(-478°)$, $cos\ 178°$, $cos(-579°)$;
4. $tg\ (-2{,}4)$, $tg\ 0{,}7$, $tg\ 1{,}5$, $tg\ (-3{,}8)$;
5. $ctg\ 54°$, $ctg\ (-400°)$, $ctg\ 78°$, $ctg\ (-345°)$.

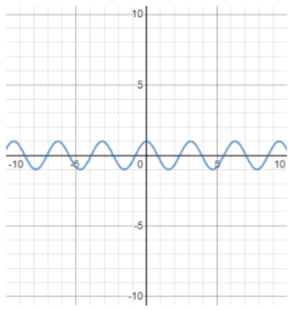
Приклад 4. Побудувати графік функції та вказати нулі функції і проміжки знакосталості: $y = cos\ 2x - 4$.

Побудова

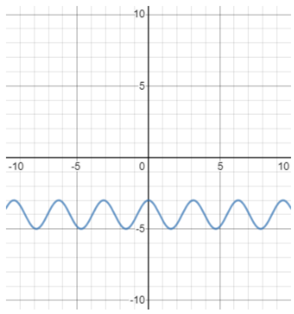
Побудуємо спочатку графік функції $y = cos\ x$



Будуємо графік функції $y = cos\ 2x$, стискаючи графік функції $y = cos\ x$ у 2 рази до осі OY



Будуємо графік функції $y = cos\ 2x - 4$, опустивши графік функції $y = cos\ 2x$ на 4 одиниці вниз



Нулі функції: $(0;\ -3)$.

Проміжки знакосталості: тільки від'ємні значення $x \in R$.

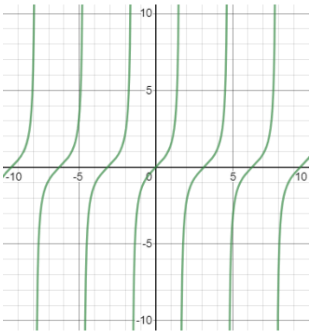
1. $y = cos\frac{1}{6}x + 7$; 2. $y = tg\, 8x - 3$; 3. $y = sin\, 9x + 1$;

4. $y = sin\, 5x - \frac{5}{3}$; 5. $y = cos\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$; 6. $y = ctg\frac{2}{9}x + \frac{7}{11}$.

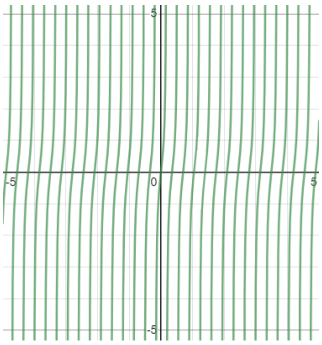
Приклад 5. Побудувати графік функції: $y = -\frac{1}{3}tg\ \left|9x - \frac{\pi}{4}\right|$.

Побудова

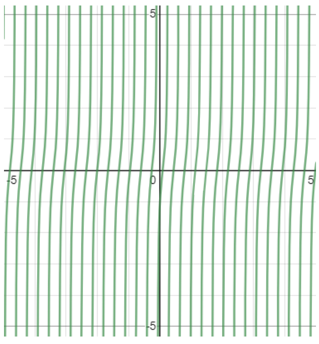
Побудуємо спочатку графік функції $y = tg\, x$



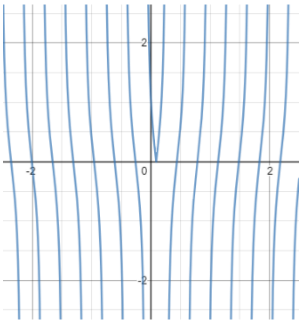
Побудуємо графік функції $y = tg\, 9x$, стискаючи графік функції $y = tg\, x$ у 9 разів до осі OY



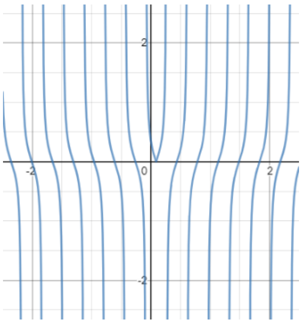
Побудуємо графік функції $y = tg\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)$, паралельним переносом графіка функції $y = tg\, 9x$ вздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{4}$ одиниці вправо



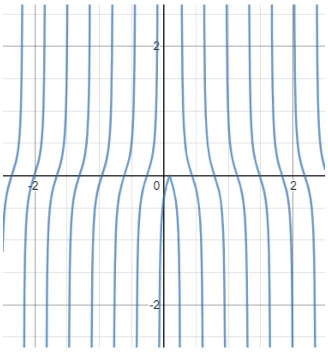
Побудуємо графік функції $y = tg\left|9x - \frac{\pi}{4}\right|$, частину графіка $y = tg\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)$, яка лежить праворуч осі Ox (і на самій осі) залишити без змін, і саме цю частину від ображаємо симетрично відносно осі Oy.



Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{3}tg\left|9x - \frac{\pi}{4}\right|$, стискаючи графік функції $y = tg\left|9x - \frac{\pi}{4}\right|$ у 3 рази до осі OY



Побудуємо графік функції $y = -\frac{1}{3}tg\left|9x - \frac{\pi}{4}\right|$, відбиваємо графік функції $y = \frac{1}{3}tg\left|9x - \frac{\pi}{4}\right|$ симетрично осі OX



1. $y = \frac{1}{2}\,tg\left|-x + \frac{2\pi}{3}\right|;$
2. $y = -6\,ctg\left|-3x - \frac{\pi}{2}\right|;$
3. $y = -\frac{1}{3}\,ctg\left|8x - \frac{\pi}{3}\right| - 9;$
4. $y = \frac{1}{5}\,tg\left|-\frac{1}{4}x + 3\pi\right|;$
5. $y = -8tg\left|\frac{1}{6}x - \frac{\pi}{6}\right|.$

2.11 Тригонометричні рівняння та нерівності

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\frac{1}{4}sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Розв'язання

Зведемо дане рівняння:

$$sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^n\,arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n,\,n\,\epsilon\,Z;$

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi n,\,n\,\epsilon\,Z;$

$x=\frac{\pi}{5}-(-1)^n\frac{\pi}{2}+2\pi n,\,n\,\epsilon\,Z.$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{5}-(-1)^n\frac{\pi}{2}+2\pi n,\,n\,\epsilon\,Z.$

1. $5\,cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{25}\right)=\frac{\sqrt{3}}{10};$
2. $-3\,tg\left(\frac{x}{9}+6\pi\right)=-\sqrt{3};$
3. $\frac{1}{4}ctg\left(\frac{x}{8}+\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4};$
4. $\frac{1}{2}sin\left(\frac{x}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4};$
5. $2\,sin(2x-5\pi)=-1;$
6. $\frac{1}{14}tg\left(7x-\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{14}.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$3cos^2x-13sin^2x+2\sqrt{3}\,sin\,x\cdot cos\,x=1.$

Розв'язання

$3cos^2x-13sin^2x+2\sqrt{3}\,sin\,x\cdot cos\,x=sin^2x+cos^2x;$

$2cos^2x-12sin^2x+2\sqrt{3}\,sin\,x\cdot cos\,x=0;$

Поділимо обидві частини рівняння на $sin^2x\neq 0$, отримаємо:

$2ctg^2x-12+2\sqrt{3}\,ctg\,x=0;$

Уведемо нову змінну $t=ctg\,x$.

Тоді отримане рівняння можна записати у вигляді

$2t^2+2\sqrt{3}t-12=0;$

$t^2+\sqrt{3}t-6=0;$

$t_1=\frac{\sqrt{3}-5}{2},\,t_2=\frac{\sqrt{3}+5}{2}.$

$\left[\begin{array}{l} ctg\,x=\frac{\sqrt{3}-5}{2}, \\ ctg\,x=\frac{\sqrt{3}+5}{2}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1=arcctg\frac{\sqrt{3}-5}{2}+\pi n, n \in Z, \\ x_2=arcctg\frac{\sqrt{3}+5}{2}+\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$

Відповідь: $arcctg\,\frac{\sqrt{3}-5}{2} + \pi n,\ arcctg\,\frac{\sqrt{3}+5}{2} + \pi n$, де $n \in Z$.

1. $sin\,2x \cdot tg\,x + 1 = 3\,sin\,x$;
2. $3cos^2x + sin^2x - 4\,sin\,x \cdot cos\,x = 0$;
3. $(sin\,x + cos\,x)^2 - 6\,(sin\,x + cos\,x) = 5$;
4. $cos\,4x + sin\,2x = -1$;
5. $3\,sin\,2x - 2cos^2 2x = 7$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $sin\,x + 2\,cos\,x = 1$.

Розв'язання

Обчислимо значення аргументу φ:

$\varphi = arctg\ \frac{1}{2}$.

Використаємо формулу для лівої частини:

$$sin\,x + 2\,cos\,x = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot sin\left(x + arctg\ \frac{1}{2}\right) = \sqrt{5} \cdot sin\left(x + arctg\ \frac{1}{2}\right);$$

$\sqrt{5} \cdot sin\left(x + arctg\ \frac{1}{2}\right) = 1;$

$sin\left(x + arctg\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}};$

$x + arctg\ \frac{1}{2} = (-1)^n\,arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n, n \in Z;$

$x = (-1)^n\,arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - arctg\ \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z.$

Відповідь: $(-1)^n\,arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - arctg\ \frac{1}{2} + \pi n$, де $n \in Z$.

1. $\sqrt{2}sin\,x - 2\,cos\,x = 1$;
2. $2\,sin\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = -1$;
3. $2\sqrt{3}sin\,x - 4\,cos\,x = -2$;
4. $\sqrt{3}sin\,x + cos\,x = 4$;
5. $sin\,x - cos\,x = 1$;
6. $sin\,x - cos\,x = 2$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$.

Розв'язання

На проміжку $[-\pi;\ \pi]$ будуємо одиничне коло і позначаємо на осі Oy точку A з ординатою $\frac{1}{2}$ (Рис. 2.1). Проведемо через цю точку пряму, паралельну осі Ox, яке перетне коло в двох точках M_1 і M_2. Знайдемо дугу, яка відповідає даному проміжку: M_1 – початок дуги, M_2 – кінець дуги.

Для того, щоб визначити, де початок дуги, а де кінець, потрібно обходити дугу кола з початку до кінця проти годинникової стрілки.

Тоді

$M_1 = 0 + arcsin\frac{1}{2} = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$;

$M_2 = \pi - arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \epsilon Z$;

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \epsilon Z$;

$\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \pi n, n \epsilon Z$.

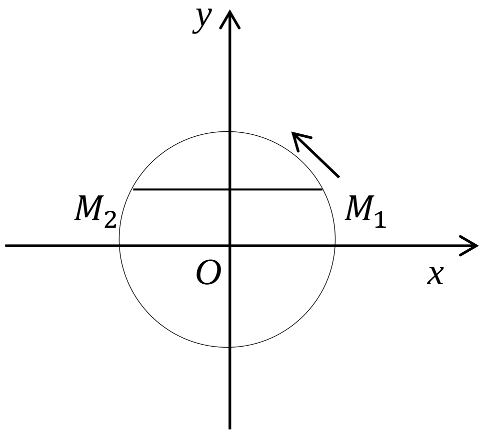


Рис. 2.1

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \pi n, n \epsilon Z$.

1. $\frac{1}{\sqrt{3}} sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{2}$; 2. $2\,cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) \leq 1$; 3. $cos\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4. $\frac{1}{2} sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) > -\frac{1}{4}$; 5. $tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6. $tg\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) > 1$.

Приклад 5. Розв’язати нерівність $2sin^2 x - 5\,cos\,x + 1 > 0$.

Розв’язання

$2(1 - cos^2 x) - 5\,cos\,x + 1 > 0$;

$-2cos^2 x - 5\,cos\,x + 3 > 0$.

Уведемо нову змінну $t = cos\,x$.

Тоді отримане рівняння можна записати у вигляді

$-2t^2 - 5t + 3 > 0$;

$2t^2 + 5t - 3 < 0$;

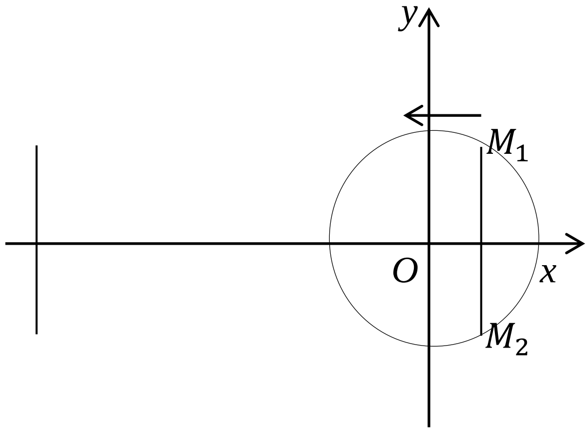
$t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = -3$

$-3 < t < \frac{1}{2}$;

$-3 < cos\,x < \frac{1}{2}$.

На проміжку $[-\pi; \pi]$ будуємо одиничне коло і позначаємо на осі Ox точку A з абсцисою $\frac{1}{2}$ і точку B з абсцисою -3 (Рис. 2.2). Проведемо через ці точки прямі, паралельні осі Oy, які перетнуть коло в двох точках M_1 і M_2.

Знайдемо дугу, яка відповідає даним проміжкам: M_1 – початок дуги, M_2 – кінець дуги.



Тоді

$M_1 = 0 + arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

$M_2 = 2\pi - arccos\frac{1}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

Отже

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Відповідь: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Рис. 2.2

1. $\frac{1}{\sqrt{3}} sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{2}$;
2. $\frac{1}{2} sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) > -\frac{1}{4}$;
3. $cos\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4. $2\,cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) \le 1$;
5. $tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
6. $tg\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) > 1$.

2.12 Послідовності та границі. Границя функції. Неперервність функції

Приклад 1. Довести, що послідовність із загальним членом є спадною: $y_n = \frac{12}{5n}$.

Доведення

Визначимо знак різниці: $y_{n+1} - y_n = \frac{12}{5(n+1)} - \frac{12}{5n} = -\frac{12}{5(n+1)\cdot n} < 0$.

Отримали $y_{n+1} < y_n$. За означенням задана послідовність спадає.

1. $y_n = \frac{2}{3n}$; 2. $y_n = \frac{49}{10n}$; 3. $y_n = \frac{9}{4n}$;

4. $y_n = \frac{100}{9n}$; 5. $y_n = \frac{10}{7n}$; 6. $y_n = \frac{8}{3n}$.

Приклад 2. Знайти границю: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^3 + 13n^2 + 3n + 88}{4 - 5n}$.

Розв'язання

Чисельник і знаменник дробу ділимо на найбільший степінь n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3 + 13n^2 + 3n + 88}{4 - 5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1 + \frac{13}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{88}{n^3}}{\frac{4}{n^3} - \frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{0} = \infty.$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n} - 3\sqrt[5]{n}}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + n + 9}{n^2 + n - 3}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n - 4}{3n^4 + 3n^2 - 5n - 1}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^5 - 10}{-8n^6 - 9n^3 + n}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-7n^3 - 8}{n^3 - n^2 + n - 7}$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{16n^3 - 10}{2n^3 - 3n^2 + 2n}$.

Приклад 3. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}\right)\cdot\left(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}\right)}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \sin x - (1 - \sin x)}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}\right)} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}\right)} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = 1.$$

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5\sqrt{8x^2 - 3x + 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 9}}$;

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$;

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - tg\, x}$;

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin 4x}{2x^2}$;

5. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^{14} - 8x + 3}}{5x^7 + 9}$;

6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin 8x}{x}$.

Приклад 4. Дослідити функції на неперервність, знайти точки розриву і встановити їх: $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2-7x+7}}$.

Розв'язання

ОДЗ: $x^2 - 7x + 7, x_1 \neq 1, x_2 \neq 7$.

Функція неперервна на інтервалах $(-\infty;\ 1) \cup (1; 7) \cup (7;\ +\infty)$, розрив може бути в точках $x_1 = 1, x_2 = 7$.

$$f(1 + 0) = \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{x-1}{x^2-7x+7}} = e^0 = 1;\ f(1 - 0) = \lim_{x \to 1-0} e^{\frac{x-1}{x^2-7x+7}} = 1.$$

Отримали: $f(1 + 0) = f(1 - 0)$, отже точка $x = 1$ – точка усувного розриву.

$$f(7 + 0) = \lim_{x \to 7+0} e^{\frac{x-1}{x^2-7x+7}} = e^{+\infty} = \infty;$$

$$f(7 - 0) = \lim_{x \to 7-0} e^{\frac{x-1}{x^2-7x+7}} = e^{-\infty} = 0.$$

Маємо $f(7 + 0) \neq f(7 - 0)$, отже точка $x = 7$ – точка розриву другого роду.

1. $f(x) = \begin{cases} 4^x, \text{якщо } x \leq 2, \\ (x + 1)^2, \text{якщо } 2 < x \leq 8, \\ ln(x - 1), \text{якщо } x > 8. \end{cases}$

2. $f(x) = arctg\ \frac{3}{x-10}$;

3. $f(x) = \frac{1}{(6-x)(2x-9)}$;

4. $f(x) = \frac{|3x-5|}{3x-5}$;

5. $f(x) = 4^{\frac{1}{10x+100}}$;

6. $f(x) = \frac{|5x-8|}{x+15}$.

2.13 Алгебра векторів. Метод координат на площині

Приклад 1. Знайти координати, довжину та напрямні косинуса вектора $|\overline{AB}|$, якщо: $A\ (-1; 0; 2)$ і $B\ (1; -1; 4)$.

Розв'язання

Знайдемо координати вектора: $|\overline{AB}| = (2; -1; 2)$.

Знайдемо довжину вектор: $|\overline{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Знайдемо напрямні косинуса вектора: $cos\,\alpha = cos\,\gamma = \frac{2}{3}$, $cos\,\beta = -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $|\overline{AB}| = (2; -1; 2)$, $|\overline{AB}| = 3$, $cos\,\alpha = cos\,\gamma = \frac{2}{3}$, $cos\,\beta = -\frac{1}{3}$.

1. $A\ (2; 5; -2)$ і $B\ (3; 4; -2)$;
2. $A\ (5; -6; 7)$ і $B\ (8; -2; 7)$;
3. $A\ (-1; 1; -1)$ і $B\ (-1; 1; 1)$;
4. $A\ (3; 4; 0)$ і $B\ (2; 0; 1)$;
5. $A\ (6; 3; 1)$ і $B\ (2; 8; -3)$;
6. $A\ (-9; 3; 0)$ і $B\ (-2; 1; 8)$.

Приклад 2. Знайти скалярний добуток векторів:

$\vec{n} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$ і $\vec{m} = -3\vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання

Використавши властивості скалярного добутку маємо:

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = (4\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} - \vec{b}) = -12(\vec{a})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 5(\vec{b})^2 =$$

$$= -12|\vec{a}|^2 + 11\vec{a} \cdot \vec{b} + 5|\vec{b}|^2 = -12|\vec{a}|^2 + 11|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) + 5|\vec{b}|^2 =$$

$$= -12 \cdot 4 + 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 5 \cdot 9 = -48 + 66 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 45 = -3 + 33\sqrt{3}.$$

Відповідь: $\vec{n} \cdot \vec{m} = -3 + 33\sqrt{3}$.

1. $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{m} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$;
2. $\vec{n} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$;
3. $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$;
4. $\vec{n} = -\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{m} = 7\vec{a} - 4\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{3\pi}{2}$;
5. $\vec{n} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$ і $\vec{m} = 5\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Приклад 3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = \vec{a} - 8\vec{b}$ і $\vec{d} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = 45°$.

Розв'язання

$\vec{c} \times \vec{d} = (\vec{a} - 8\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) = 3(\vec{a} \times \vec{a}) + 2(\vec{a} \times \vec{b}) - 24(\vec{b} \times \vec{a}) -$
$-16(\vec{b} \times \vec{b}) = 0 + 2(\vec{a} \times \vec{b}) + 24(\vec{a} \times \vec{b}) - 0 = 26(\vec{a} \times \vec{b})$.

$S = |\vec{c} \times \vec{d}| = |26(\vec{a} \times \vec{b})| = 26|\vec{a} \times \vec{b}| = 26|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 26 \cdot$
$\cdot 2 \cdot 4 \cdot sin\,45° = 26 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 104\sqrt{2}$.

Відповідь: $S = 140\sqrt{2}$.

1. $\vec{c} = \vec{a} + 5\vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 16$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 270°$;

2. $\vec{c} = 5\vec{a} - 6\vec{b}$ і $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 90°$;

3. $\vec{c} = -\vec{a} + 6\vec{b}$ і $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 270°$;

4. $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{d} = 9\vec{a} - 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 9$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 180°$;

5. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} + 7\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 60°$.

Приклад 4. Довести методом координат: у будь-якому чотирикутнику сума квадратів його сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей до якої ще додається квадрат відстані між серединами діагоналей помножений на 4.

Доведення

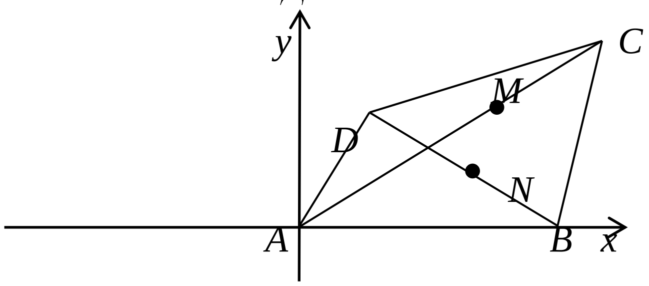


Рис. 2.3

В системі координат побудуємо чотирикутник $ABCD$.

Виберемо систему координат так, щоб точка A була початком координат, AB – віссю Ox. У першій чверті поставимо будь-які точки C і D. У вибраній системі координат точки A, B, C, D мають такі координати: $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(b;c)$, $D(d;e)$.

У чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагоналі AC та BD. Поставимо точки M та N відповідно середини діагоналей (Рис. 2.3). Точки M та N матимуть такі координати:

$M\left(\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$, $N\left(\frac{d+a}{2};\frac{e}{2}\right)$.

Запишемо умову, яку потрібно довести:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2.$$

$AB^2\ =a^2,\ BC^2=(a-b)^2+c^2,\ CD^2=(b-d)^2+(c-e)^2,\ DA^2=d^2+e^2,$

$AC^2=b^2+c^2, BD^2=(d-a)^2+e^2, MN^2=\left(\frac{d+a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{c-e}{2}\right)^2.$

Зробимо перетворення з лівою частиною виразу:

$a^2+(a-b)^2+c^2+(b-d)^2+(c-e)^2+d^2+e^2=a^2+a^2-$
$-2ab+b^2+c^2+b^2-2bd+d^2+c^2-2ce+e^2+d^2+e^2=2a^2+2b^2+$
$+2c^2+2d^2+2e^2-2(ab+bd+ce).$

Зробимо перетворення з правою частиною виразу:

$b^2+c^2+(d-a)^2+e^2+4\cdot\left(\left(\frac{d+a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{c-e}{2}\right)^2\right)=b^2+c^2+d^2-$
$-2ad+a^2+e^2+4\cdot\left(\frac{b^2-2b(d+a)+(d+a)^2+c^2-2ce+e^2}{4}\right)=a^2+b^2+c^2+d^2+$
$+e^2-2ad+b^2-2bd-2ab+d^2+2ad+a^2+c^2-2ce+e^2=2a^2+$
$+2b^2+2c^2+2d^2+2e^2-2ab-2bd-2ce=2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+$
$+2e^2-2(ab+bd+ce).$

Доведено.

1. В трикутнику ABC AD – медіана, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Довести, що квадрат медіанти трикутника дорівнює половині суми квадратів.

2. Довести, що сума квадратів відстаней від фіксованої точки K взятої в площині даного кола до кінців довільного діаметра цього кола є величина стала.

3. Довести, що якщо ABCD – прямокутник і N – будь-яка точка його площини, то $NA^2+NC^2=NB^2+ND^2$.

4. Довести, що в кожній трапеції середини діагоналей і середини основ є вершинами паралелограма.

5. Довести, що в трапеції відрізок, який з’єднує середини діагоналей паралельний основам і дорівнює їхній піврізниці.

2.14 Розв'язування геометричних задач на доведення

Приклад 1. Довести методом векторної алгебри: в трикутнику ABC з площею $S = d$ точки K, M, P є серединами медіан. Довести, що площа трикутника KMP дорівнює $\frac{1}{16}d$.

Доведення

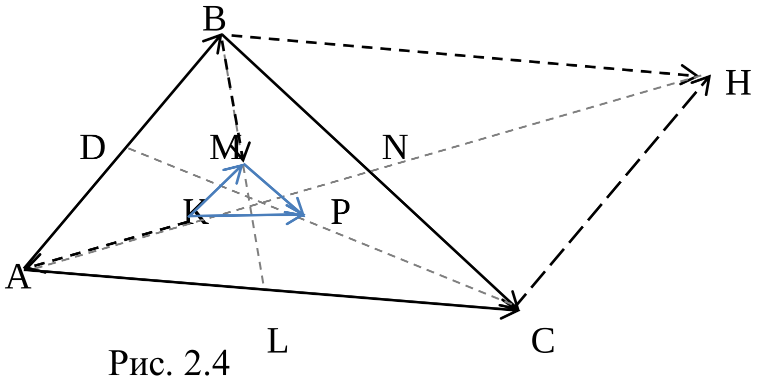


Рис. 2.4

Від точки C паралельно до AB проведемо пряму CH, сполучимо точки B та H. Отримаємо паралелограм $ABHC$ (Рис. 2.4), $AN = \frac{1}{2}AH$.

Нехай $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$, $S_{KMP} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KP}\right]\right|$.

$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$;

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{KA} = -\frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$;

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BL}$; $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$;

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$;

$\overrightarrow{KM} = -\frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{-\vec{a} - 2\vec{a} + 4\vec{a}}{4} = \frac{1}{4}\vec{a}$.

$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$;

$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$;

$\overrightarrow{KM} = -\frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{-\vec{b} - 2\vec{b} + 4\vec{b}}{4} = \frac{1}{4}\vec{b}$.

Тоді $S_{KMP} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KP}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\left[\frac{1}{4}\vec{a}, \frac{1}{4}\vec{b}\right]\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot$
$\cdot\, 2\, S_{ABC} = \frac{1}{16}S_{ABC} = \frac{1}{16}d$.

Доведено.

1. До кожної грані трикутної призми побудований перпендикулярний вектор направлений зовні призми модуль якого рівний площі відповідної грані. Доведіть, що сума усіх побудованих векторів рівна нулю.

2. Довести, що якщо в тетраедрі дві пари протилежних ребер взаємно перпендикулярні, то третя пара ребер також буде перпендикулярна.

3. Довести, що в правильній трикутній піраміді протилежні ребра взаємно перпендикулярні.

4. Довести, що сума медіан трикутника дорівнює $\frac{3}{4}$ сумі квадратів його сторін.

5. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Приклад 2. З вершини B трикутника ABC, проведено бісектрису BL. Довести, що $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$.

Доведення

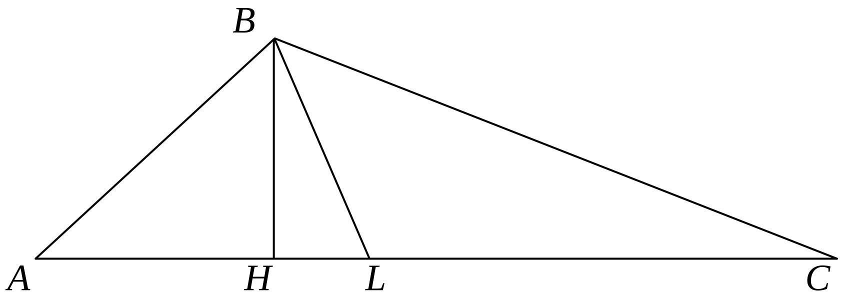


Рис. 2.5

Доведемо рівність за допомогою формул площі трикутника.

Бісектриса BL ділить заданий трикутник на два менших трикутника ABL і BCL. Обчислимо площі утворених трикутників за формулою:

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin\, \varphi.$

Так, як BL є бісектрисою кута B, тоді $\measuredangle ABL = \measuredangle LBC = \frac{\alpha}{2}$.

$S_{\Delta ABL} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BL \cdot sin \frac{\alpha}{2}$, $S_{\Delta BCL} = \frac{1}{2} \cdot BL \cdot BC \cdot sin \frac{\alpha}{2}$.

Поділимо площі одна на одну. Отримаємо: $\frac{S_{\Delta ABL}}{S_{\Delta BCL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BL \cdot sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2} \cdot BL \cdot BC \cdot sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AB}{BC}$.

Знайдемо площі цих трикутників за допомогою формул площі половини добутку висоти на основу:

$S_{\Delta ABL} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot BH, S_{\Delta BCL} = \frac{1}{2} \cdot LC \cdot BH.$

Поділимо дві останні рівності одна на одну: $\frac{S_{\Delta ABL}}{S_{\Delta BCL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AL \cdot BH}{\frac{1}{2} \cdot LC \cdot BH} = \frac{AL}{LC}$.

Тоді з двох останніх рівностей слідує, що $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$.

Доведено.

1. Довести, що в чотирикутнику, описаного навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні.

2. Від вершини B рівнобедреного трикутника ABC з основою BC відкладено рівні відрізки: BK – на стороні AB і BH – на стороні BC. Довести рівність трикутників ACH і CAK.

3. У трикутнику ABC точки D, K, C, M належать одному й тому самому колу. Довести, що $2AB^2 = CB^2 + CA^2$.

4. У тетраедрі $DABC$ при вершині D три кути прямі. Вершина D проектується в точку H на основу ABC. Довести, що $S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$, де S, S_1, S_2 – площі трикутників ADB, ACB, AHB відповідно.

5. Довести, що в правильній трикутній піраміді протилежні ребра взаємно перпендикулярні.

Приклад 3. Довести методом геометричних перетворень: трапеція у якої діагоналі рівні є рівнобічною.

Доведення

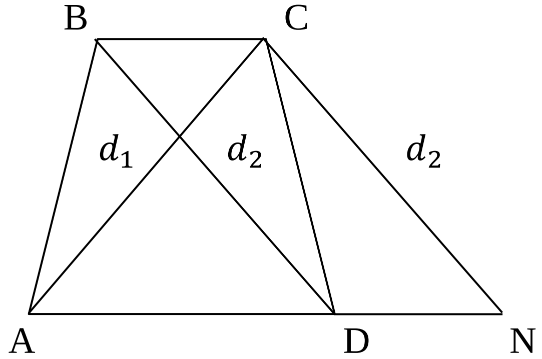


Рис. 2.6

Проведемо з вершини C пряму, паралельну діагоналі AC, сполучимо точки D і N, отримаємо паралелограма $BCND$ (Рис. 2.6).

Отже, $BD = CN = d_2$.

ΔACN – рівнобічний, бо $d_1 = d_2$.

Звідси слідує, що $\angle CAN = \angle \mathrm{ANC} = \angle \mathrm{BDA}$.

$\Delta ABD = \Delta ACD$ – за I ознакою рівності трикутників.

Отже, $AB = CD$.

Доведено.

1. Довести, що в рівнобедреному трикутнику сума відстаней від будь-якої точки основи до бічних сторін є величина стала.

2. Довести, що трикутник в якого дві медіани рівні є рівнобедреним.

3. На прямій лінії зафіксовано підряд три точки A, B, C в одній півплощині відносно прямої побудовано рівносторонні трикутники AMB і BNC. Довести, що трикутник BPR – рівносторонній. Якщо P – середина AN, R – середина MC.

4. На сторонах AB і BC ромба $ABCD$ у якого $\angle BAD = 60°$ позначені відповідно точки M і N, такі, що $AM = BN$. Довести, що трикутник MDN – правильний.

5. На двох суміжних сторонах паралелограма $ABCD$ зовні побудовано рівносторонні трикутники AKBі BPC. Довести, що трикутник DKP – рівносторонній.

РОЗДІЛ 3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

3.1 Самостійна робота 1 з теми «Алгебраїчні вирази. Модуль дійсного числа»

Варіант №0

Приклад 1. Спростити вираз та знайти його значення

$\left(\frac{a-5}{a^2-5a+25}-\frac{12a-61}{a^3+125}\right):\frac{3a-18}{2a^2-10a+50}$, якщо $a=3$.

Розв'язання

$$\left(\frac{a-5}{a^2-5a+25}-\frac{12a-61}{a^3+125}\right):\frac{3a-18}{2a^2-10a+50}=\left(\frac{a-5}{(a-5)^2}-\frac{12a-61}{(a+5)\cdot(a-5)^2}\right):\frac{3(a-6)}{2\cdot(a-5)^2}=$$

$$=\left(\frac{(a-5)\cdot(a+5)-12a+61}{(a+5)\cdot(a-5)^2}\right):\frac{3(a-6)}{2\cdot(a-5)^2}=\left(\frac{a^2-12a+36}{(a+5)\cdot(a-5)^2}\right):\frac{3(a-6)}{2\cdot(a-5)^2}=\frac{(a-6)^2}{(a+5)\cdot(a-5)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{2\cdot(a-5)^2}{3(a-6)}=\frac{(a-6)\cdot 2}{3\cdot(a+5)}.$$

Обчислимо значення при $a=3$:

$$\frac{(a-6)\cdot 2}{3\cdot(a+5)}=\frac{(3-6)\cdot 2}{3\cdot(3+5)}=\frac{(-3)\cdot 2}{3\cdot 8}=-\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

$|x-5|-5|8x-24|-|x+10|\geq 25x.$

Розв'язання

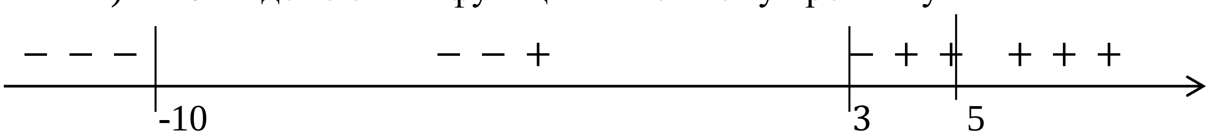
1) Знайдемо ОДЗ: $x \epsilon R$.

2) Знайдемо нулі підмодульних функцій:

$x-5=0,\ 8x-24=0,\ x+10=0$

$x=5,\quad x=3,\quad x=-10.$

3) Знайдемо знаки функцій на кожному проміжку



4) На кожному з цих інтервалів розв'язуємо нерівність без модуля

а) $x \epsilon (-\infty;\ -10)$, тоді

$-(x-5)+5(8x-24)+(x+10)\geq 25x$

$-x+5+40x-120+x+10\geq 25x$

$x \geq 7$

$x \epsilon \emptyset.$

б) $x \epsilon [-10;\ 3)$, тоді

$-(x-5)+5(8x-24)-(x+10) \geq 25x$

$-x+5+40x-120-x-10 \geq 25x$

$x \leq -9\frac{8}{13}$

$x \epsilon [-10;\ -9\frac{8}{13})$

в) $x \epsilon [3;\ 5)$, тоді

$-(x-5)-5(8x-24)-(x+10) \geq 25x$

$-x+5-40x+120-x-10 \geq 25x$

$x \leq 6\frac{13}{17}$

$x \epsilon [3;\ 5).$

г) $x \epsilon [5;\ +\infty)$, тоді

$(x-5)-5(8x-24)-(x+10) \geq 25x$

$x-5-40x+120-x-10 \geq 25x$

$x \leq 2\frac{5}{8}$

$x \epsilon \emptyset.$

Об'єднавши розв'язки на всіх чотирьох проміжках, отримаємо $x \epsilon [-10;\ -9\frac{8}{13}) \cup [3;\ 5).$

Відповідь: $x \epsilon [-10;\ -9\frac{8}{13}) \cup [3;\ 5).$

3.2 Самостійна робота 2 з теми «Розв'язування рівнянь та систем»

Варіант №0

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$2(x^2+2x+4)^2-15(x-2)^2=13(x^3-2)$.

Розв'язання

Використовуючи формулу різниці кубів, зведемо рівняння до однорідного:

$x^3-2=(x-2)(x^2+2x+4)$.

$2(x^2+2x+4)^2-13(x-2)(x^2+2x+4)-15(x-2)^2=0$.

Поділимо на $(x-2)^2$ і зробимо заміну $\frac{(x^2+2x+4)}{(x-2)}=t$, отримаємо:

$2t^2-13t-15=0$.

$D=(-13)^2-4\cdot 2\cdot(-15)=169+120=289$,

$t_1=\frac{13+\sqrt{289}}{2\cdot 2}=7{,}5;\ t_2=\frac{13-\sqrt{289}}{2\cdot 2}=-1$.

Повертаємося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{(x^2+2x+4)}{(x-2)}=7{,}5;\\ \frac{(x^2+2x+4)}{(x-2)}=-1,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+2x+4=7{,}5(x-2);\\ x^2+2x+4=-(x-2);\end{array}\right.\\ x-2\neq 0.\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2-5{,}5x-19=0;\\ x^2+3x+2=0;\end{array}\right.\\ x\neq 2.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x\epsilon\ \emptyset;\\ x_1=-1;\ x_2=-2;\end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=-1;\ x_2=-2$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}3x^2+x+2y+2y^2=8,\\ x^2+xy+y^2+x=4.\end{cases}$

Розв'язання

Помножимо друге рівняння на -2 і додамо до першого, отримаємо:

$$\begin{cases}x^2-2xy-x+2y=0,\\ x^2+xy+y^2+x=4.\end{cases} \begin{cases}x(x-1)-2y(x-1)=0,\\ x^2+xy+y^2+x=4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-1)(x-2y)=0,\\ x^2+xy+y^2+x=4.\end{cases} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y^2+y-2=0.\end{cases}\\ \begin{cases}x=2y,\\ 7y^2+2y-4=0.\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_{1,2}=1,\\ y_1=1, y_2=-2.\end{cases}\\ \begin{cases}x_3=\frac{-2+2\sqrt{29}}{7}, x_4=\frac{-2-2\sqrt{29}}{7},\\ y_3=\frac{-1+\sqrt{29}}{7}, y_4=\frac{-1-\sqrt{29}}{7}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $(1;1)$, $(1;-2)$, $\left(\frac{-2+2\sqrt{29}}{7};\frac{-1+\sqrt{29}}{7}\right)$, $\left(\frac{-2-2\sqrt{29}}{7};\frac{-1-\sqrt{29}}{7}\right)$.

3.3 Самостійна робота 3 з теми «Тригонометричні рівняння. Вектори»

Варіант №0

Приклад 1. Розв'язати рівняння $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\,ctg\,x$.

Розв'язання

$\frac{tg\,x+tg\frac{\pi}{4}}{1-tg\,x}+\frac{tg\,x-1}{tg\frac{\pi}{4}+tg\,x}=2\cdot\frac{1}{tg\,x}$;

$\frac{tg\,x+1}{1-tg\,x}+\frac{tg\,x-1}{1+tg\,x}=2\cdot\frac{1}{tg\,x}$;

$\frac{tg\,x(1+tg\,x)^2+tg\,x(tg\,x-1)(1-tg\,x)-2(1-tg\,x)(1+tg\,x)}{(1-tg\,x)\cdot tg\,x}=0$;

$\frac{3\,tg^2\,x-1}{(1-tg\,x)\cdot tg\,x}=0$.

ОДЗ: $(1-tg\,x)\cdot tg\,x\neq 0$; $\left[\begin{array}{l}1-tg\,x\neq 0;\\ tg\,x\neq 0,\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n;\\ x\neq\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$

$3tg^2\,x-1=0$; $tg\,x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

Відповідь: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

Приклад 2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}-6\vec{b}$ якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b})=45°$.

Розв'язання

$\vec{c}\times\vec{d}=(\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}-6\vec{b})=3(\vec{a}\times\vec{a})-6(\vec{a}\times\vec{b})-3(\vec{b}\times\vec{a})+$

$+6(\vec{b}\times\vec{b})=0-6(\vec{a}\times\vec{b})-3(\vec{a}\times\vec{b})-0=-9(\vec{a}\times\vec{b})$

$S=|\vec{c}\times\vec{d}|=|-9(\vec{a}\times\vec{b})|=9|\vec{a}\times\vec{b}|=9|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin(\vec{a}\hat{}\vec{b})=9\cdot 3\cdot$

$\cdot 6\cdot sin\,45°=9\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=81\sqrt{2}$.

Відповідь: $S=81\sqrt{2}$.

3.4 Контрольна робота 1 з теми «Розв'язування рівнянь»

Варіант №0

Приклад 1. Спростити вираз:

$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-5)}.$$

Розв'язання

Додамо спочатку перші два дроби:

$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-2+x}{x(x-1)(x-2)}=\frac{2x-2}{x(x-1)(x-2)}=\frac{2(x-1)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{2}{x(x-2)}$$

До знайденої суми додамо третій дріб:

$$\frac{2}{x(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{2x-6+x}{x(x-2)(x-3)}=\frac{3x-6}{x(x-2)(x-3)}=\frac{3(x-2)}{x(x-2)(x-3)}=\frac{3}{x(x-3)}.$$

До знайденої суми додамо четвертий дріб:

$$\frac{3}{x(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=\frac{3x-12+x}{x(x-3)(x-4)}=\frac{4x-12}{x(x-3)(x-4)}=\frac{4(x-3)}{x(x-3)(x-4)}=\frac{4}{x(x-4)}.$$

Діючи аналогічно, дістаємо:

$$\frac{4}{x(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-5)}=\frac{4x-20+x}{x(x-4)(x-5)}=\frac{5x-20}{x(x-4)(x-5)}=\frac{5(x-4)}{x(x-4)(x-5)}=\frac{5}{x(x-5)}.$$

Відповідь: $\frac{5}{x(x-5)}$.

Приклад 2. Розв'язати ірраціональні рівняння:

$$\sqrt[3]{(x-6)^2}-3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)}+2\sqrt[3]{(2x+3)^2}=0.$$

Розв'язання

Оскільки $x=6$ не є коренем даного рівняння, то при діленні обох частин рівняння на $\sqrt[3]{(x-6)^2}\neq 0$ одержуємо рівносильне рівняння

$$1-3\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}+2\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-6}\right)^2}=0.$$

Введемо нову змінну $t=\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}$, отримаємо:

$1-3t+2t^2=0;$

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=9-8=1;$

$t_1=\frac{3+1}{4}=1,\ t_2=\frac{3-1}{4}=0{,}5.$

Виконавши обернену заміну, отримаємо:

$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}} = 1$ або $\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}} = 0{,}5$

$\frac{2x+3}{x-6} = 1$ або $\frac{2x+3}{x-6} = \frac{1}{8}$

$2x + 3 = x - 6$ або $8(2x + 3) = x - 6$

$x = -9$ або $16x + 24 = x - 6$

$x = -9$ або $x = -2.$

Відповідь: $-9, -2.$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-3|x|-4}{x+1} = -3x.$

Розв'язання

ОДЗ: $x + 1 \neq 0, x \neq -1.$

Запишемо рівняння сукупністю:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = -3x; \\ \frac{x^2-3(-x)-4}{x+1} = -3x, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 = -3x \cdot (x+1); \\ x^2 - 3(-x) - 4 = -3x \cdot (x+1), \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x^2 - 4 = 0; \\ 4x^2 + 6x - 4 = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 = 1; \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 1; \\ x_{3,4} = \frac{-3\pm 5}{4}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, x_2 = -1 \text{ – сторонній корінь;} \\ x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -2. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -2.$

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $7^{2x+1} + 2^{x+4} - 98^x - 112 = 0.$

Розв'язання

Перетворимо дане рівняння:

$7 \cdot 49^x + 2^4 \cdot 2^x - 49^x \cdot 2^x - 112 = 0;$

$49^x(7 - 2^x) - 2^4(7 - 2^x) = 0;$

$(49^x - 2^4)(7 - 2^x) = 0;$

$49^x - 2^4 = 0$ або $7 - 2^x = 0;$

$49^x = 2^4$ або $2^x = 7;$

$x_1 = log_{49} 2^4 = 4\, log_{7^2} 2 = 2\, log_7 2;\ x_2 = log_2 7.$

Відповідь: $x_1 = 2\, log_7 2;\ x_2 = log_2 7.$

Приклад 5. Розв’язати рівняння:

$$lg(x^2+3x-4)-0{,}25\,lg(x^2+8x+10)^4-lg\,2=0.$$

Розв’язання

$$lg(x^2+3x-4)-0{,}25\,lg(x^2+8x+10)^4-lg\,2=0;$$

$$lg(x^2+3x-4)-lg\,2=lg(x^2+8x+10);$$

$$lg\,\frac{(x^2+3x-4)}{2}=lg(x^2+8x+10);$$

$$\begin{cases}\frac{x^2+3x-4}{2}=x^2+8x+10,\\ \frac{x^2+3x-4}{2}>0,\\ x^2+8x+10>0,\end{cases}\quad \begin{cases}x^2+13x+24=0,\\ x\in(-\infty;\ -4)\cup(1;+\infty),\\ x\in(-\infty;-4-\sqrt{6})\cup(-4+\sqrt{6};+\infty),\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=-12, x_2=-1-\emptyset;\\ x\in(-\infty;\ -4)\cup(1;+\infty),\\ x\in\left(-\infty;-4-\sqrt{6}\right)\cup\left(-4+\sqrt{6};+\infty\right).\end{cases}$$

Відповідь: $x=-12$.

3.5 Контрольна робота 2 з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності. Вектори»

Варіант №0

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $sin\,2x + sin\,4x = -sin\,6x$.

Розв'язання

$sin\,2x + sin\,6x + sin\,4x = 0;$

$2sin\,4x \cdot cos\,x + sin\,4x = 0;$

$sin\,4x\,(2\,cos\,x + 1) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} sin\,4x=0, \\ 2\,cos\,x+1=0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 4x=\pi n, n\,\epsilon\,Z, \\ cos\,x=-\frac{1}{2}, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi n}{4}, n\,\epsilon\,Z, \\ x=\pm\,arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n, n\,\epsilon\,Z, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi n}{4}, n\,\epsilon\,Z, \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\,\epsilon\,Z. \end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{\pi n}{4}, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, де $n\,\epsilon\,Z$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $tg\,\left(\frac{7}{3}x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$.

Розв'язання

Будуємо одиничне коло і дотичну до нього в точці $M_0(1;0)$ (лінію тангенсів). Нанесемо на лінію тангенсів (Рис. 3.1) точку 1 і точки, що лежать вище цієї точки. Цим точкам лінії тангенсів відповідає дуга PA одиничного півкола.

Ордината точки P дорівнює $\frac{\pi}{2}$, а

$\beta = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

Тоді

$\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \frac{7}{3}x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\,\epsilon\,Z;$

$\pi n \leq \frac{7}{3}x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\,\epsilon\,Z;$

$\frac{3}{7}\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{28} + \frac{3}{7}\pi n,\ n\,\epsilon\,Z.$

Відповідь: $\frac{3}{7}\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{28} + \frac{3}{7}\pi n,\ n\,\epsilon\,Z.$

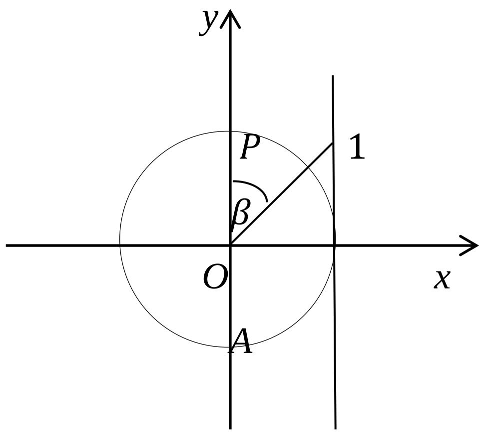


Рис. 3.1

Приклад 3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = 9\vec{a} - 12\vec{b}$ і $\vec{m} = 5\vec{a} - 8\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 15$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання

$\vec{n}\cdot\vec{m}=\left(9\vec{a}-12\vec{b}\right)\cdot\left(5\vec{a}-8\vec{b}\right)=45(\vec{a})^2-72\vec{a}\cdot\vec{b}-60\vec{a}\cdot\vec{b}+$
$+96\left(\vec{b}\right)^2=45|\vec{a}|^2-132|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\left(\vec{a}\hat{}\vec{b}\right)+96\left|\vec{b}\right|^2=45\cdot 7-132\cdot 7\cdot 15\cdot$
$\cdot cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+96\cdot 15=315-132\cdot 105\cdot\frac{1}{2}+1440=-5175.$

Відповідь: $\vec{n}\cdot\vec{m}=-5175.$

Приклад 4. Використовуючи методом координат знайти радіус кола описаного навколо трикутника зі сторонами a, b, c.

Розв'язання

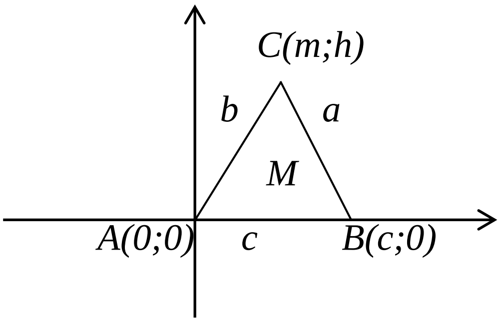


Рис. 3.2

$AM=CM=BM=R.$

$AM^2=x^2+y^2=R^2;$

$R^2=(x-m)^2+(y-h)^2;\ \ R^2=(x-c)^2+y^2.$

$AM^2=BM^2;$

$x^2+y^2=(x-c)^2+y^2;$

$x^2+y^2=x^2-2xc+c^2+y^2;$

$x=\frac{c^2}{2c}=\frac{c}{2}.$

$CM^2=AM^2;$

$x^2+y^2=(x-m)^2+(y-h)^2;$

$x^2+y^2=x^2-2xm+m^2+y^2-2yh+h^2;$

$2\cdot\frac{c}{2}\cdot m-m^2+2yh-h^2=0;$

$2yh=m^2+h^2-cm;$

$y=\frac{m^2+h^2-cm}{2h}.$

$R=\left(\frac{c}{2};\frac{m^2+h^2-cm}{2h}\right).$

$$R^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{m^2+h^2-cm}{2h}\right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{(m^2+h^2-cm)^2}{4h^2} = \frac{c^2}{4} +$$

$$+ \frac{(m^2+h^2)^2-2(m^2+h^2)\cdot cm+(cm)^2}{4h^2} = \frac{c^2}{4} + \frac{m^4+2m^2h^2+h^4-2cm^3-2h^2cm+c^2m^2}{4h^2} =$$

$$= \frac{c^2h^2+m^4+2m^2h^2+h^4-2cm^3-2h^2cm+c^2m^2}{4h^2} = \frac{(m^2+h^2)((m-c)^2+h^2)}{4h^2}.$$

$$R = \sqrt{\frac{(m^2+h^2)((m-c)^2+h^2)}{4h^2}} = \frac{\sqrt{b^2\cdot a^2}}{2h} = \frac{b\cdot a}{2h} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S}.$$

Відповідь: $R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$.

Приклад 5. У трикутнику ABC $3\,tg\,\angle A + ctg\,\angle B = 0$. Довести, що $m_c = R$.

Доведення

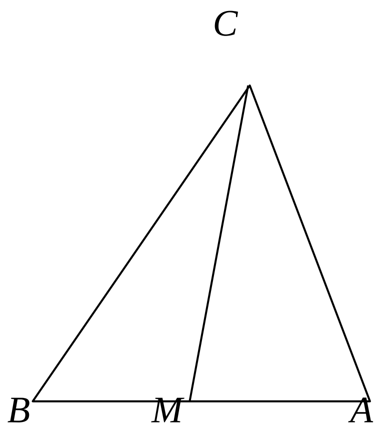


Рис. 3.3

Перетворимо рівність, задану в умові таким чином:

$$3\frac{sin\,\angle A}{cos\,\angle A} + \frac{cos\,\angle B}{sin\,\angle B} = 0,$$

або

$$3\,sin\,\angle A \cdot sin\,\angle B + cos\,\angle B \cdot cos\,\angle A = 0,$$

$$2\,sin\,\angle A \cdot sin\,\angle B + cos(\angle A - \angle B) = 0,$$

$$cos(\angle A - \angle B) - cos(\angle A + \angle B) + cos(\angle A - \angle B) = 0.$$

Отже, $2\,cos(\angle A - \angle B) - cos(\angle A + \angle B) = 0$.

Далі маємо:

$$CM^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{R^2}{2}\cdot(4sin^2\angle A + 4sin^2\angle B - 2sin^2\angle C) = \frac{R^2}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(2 - 2\,cos\,2\angle A + 2 - 2\,cos\,2\angle B - 1 + cos^2(\angle A + \angle B)\right) = \frac{R^2}{2}\cdot$$

$$\cdot \left(2 - 2(\cos 2\angle A + \cos 2\angle B) + 2\cos^2(\angle A + \angle B)\right) = \frac{R^2}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(2 - 2\cos(\angle A + \angle B)\,(2\cos(\angle A - \angle B) - \cos(\angle A + \angle B))\right).$$

Скористаємося співвідношенням

$2\cos(\angle A - \angle B) - \cos(\angle A + \angle B) = 0.$

Дістанемо, що $CM = R$.

Доведено.

ВИСНОВКИ

Курс «Вступ у вищу математику» є невід'ємною частиною в розвитку математичних здібностей студентів. Вивчення даного курсу дозволяє студентам збільшити глибину засвоєння знань, формуванню наукових понять та законів. Крім того, даний матеріал сприяє підвищенню наукового рівня знань студентів, розвитку логічного мислення та їх творчих здібностей.

Використання матеріалу дипломної роботи у навчальному процесі допоможе студентам вищих навчальних закладів засвоїти знання з вищої математики; сприяти їхньому математичному розвитку і також допоможе удосконалювати абстрактне й логічне мислення, що є необхідною складовою сучасного педагога, сприятиме формуванню в студентів стійкого інтересу до вивчення вищої математики.

Даний матеріал сприяє систематизації, поглибленню і розширенню математичних знань, умінь і навичок необхідних у майбутній професійній діяльності, вміння бачити та застосовувати математику в реальному життя.

Вивчення даного матеріалу у вищих навчальних закладах забезпечує:

– формування особистості студентів, розвиток їхнього інтелектуального, аналітичного та синтетичного мислення, математичної культури та інтуїції.

– володіння математичних апаратом, необхідним для вивчення фахових дисциплін, розвитку здібностей свідомого сприйняття математичного матеріалу, властивого для відповідної професії.

– володіння основними математичними поняттями, необхідними для аналізу і модулюванню явищ, які відбуваються у різних професіях, пошуку оптимальних рішень з метою підвищення ефективності роботи у вибраній професії, опрацювання й аналіз результатів обчислювальних експериментів.

– формування високого рівня математичної підготовки випускників навчальних закладів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1) Басманов О. Є. Вища математики: навч. пос. / О. Є. Басманов. – Харків: Дільниця оперативної поліграфії АПБ України, 2003. – 138 с.

2) Башмаков М. И. Математика:учеб. / М. И. Башмаков. – Москва: КНОРУС, 2017. – 394 с.

3) Богомолов Н. В. Математика: учеб. для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – 7-е изд., стер. – Москва: Дрофа, 2010. – 395 с.

4) Борисенко О. В. Алгебраїчні вирази: теорія та практика: навч.-метод. пос. / О. В. Борисенко. – Київ: ТОВ «Праймдрук», 2012. – 36 с.

5) Вища математика: Збірник задач: навч. пос. / [Дубовик В. П., Юрик І. І. та ін.]. – Київ: А. С. К., 2005. – 480 с.

6) Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов. – 2-е изд. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – Т. 1. – 328 с.

7) Галабурдин А. В. Высшая математика: мини-справ. для вузов / А. В. Галабурдин. – Ростов н/Д: Феникс, 2014. – 190 с.

8) Гельфанд И. М. Функции и графики (основные приемы) / И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э.Э. Шноль. – 7-е изд., стер. – Москва: МЦНМО, 2006. – 120 с.

9) Демидович Б. П. Кратний курс высшей математики: учеб. пос. для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – Москва: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 656 с.

10) Дубовик В. П. Вища математика: навч. пос. для студ. вищ. навч. зак. / В. П. Дубовик. – 4-е вид. – Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

11) Збірник задач з Вищої математики / [Бабенко В. В., Зіневич А. Г., Кучура С. М. та ін.]. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана франка, 2005. – 256 с.

12) Ильин В. А. Основы математического анализа: учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Ч. 1. – 648 с.

13) Краткий курс высшей математики: учеб. / Под общ. ред. К. В. Балдина. – 2-е изд. – Москва: Издатель скоторговая корпорация «Дашков и К», 2015. – 510 с.

14) Кривула В. Г. Вища математика: практикум / В. Г. Кривула, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – Київ: ЦУЛ, 2003. – 536 с.

15) Литвин І. І. Вища математика: навч. пособ. / І. І. Литвин, О. М. Конопчук, Г. О. Желізняк. – Київ: Центр навчальної літератури., 2014. – 368 с.

16) Львовський С. М. Лекции по математическому аналізу / С. М. Львовський. – Москва: МЦНМО, 2008. – 296 с.

17) Математика: учеб.-метод. комплекс / А. Б. Гончарова. – Санкт-Петербург: СЗТУ, 2009. – 228 с.

18) Математика: учеб. пособ. / [Данилов Ю. М., Журбенко Л. Н., Никонова Л. Н. та др.]. – Москва: ИНФРА-М, 2009. – 496 с.

19) Махеев В. И. Высшая математика, краткий курс: учеб. пособ. / В. И. Махеев, Ю. В. Павлюченко. – 2-е изд., испр. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 196 с.

20) Натансон И. П. Кратный курс высшей математики: учеб. для вузов. Спец. лит. / И. П. Натансон. – Санкт-Петербург: «Лань», 1999. – 736 с.

21) Омельченко В. П. Математика: учеб. пособ. / В. П. Омельченко, Э. Курбатова. – 3-е изд., стер. – Ростов на Дону: Феникс, 2011. – 380 с.

22) Роганін О. М. Математика: практ. довід. / О. М. Роганін, О. І. Каплун. – Харків: ФОП Сівак Т. К., 2009. – 416 с.

23) Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – 11-е изд. – Санк-Петербург: БХВ-Петербург, 2010. – Т. 3. – Ч. 1. – 400 с.

24) Смирнов В. И. Курс высшей математики: учеб. лит. для вузов / В. И. Смирнов. – 24-е изд. – Санк-Петербург: БХВ-Петербург, 2008. – Т. 1. – 624 с.

25) Тевяшев А. Д. Вища математика у прикладах та задачах / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. – Харків: ХТУРЕ, 2002. – Ч. 1. – 552 с.

26) Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: учеб. для вузов / Г. М. Фихтенгольц. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: «Лань», 2015. – Ч. 1. – 448 с.

27) Шамолин М. В. Высшая математика / М. В. Шамолин. – Москва: «Екзамен», 2008. – 910 с.

28) Шипачев В. С. Курс высшей математики: учеб. для вузов / В. С. Шипачев. – 4-е изд., испр. – Москва: ОНИКС, 2009. – 608 с.

29) Шипачев В. С. Начала высшей математики: учеб. пособ. / В. С. Шипачев. – 5-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2013. – 384 с.

30) Яковлев Г. Н. Лекции по математическому аналізу: учеб. пособ. для вузов / Г. Н. Яковлев. – Москва: узд. физ.-мат. літератури, 2001. – Ч. 1. – 400 с.

ДОДАТКИ

Додаток А. Контрольні запитання

1. Що називають графіком функції?
2. Що називають елементарною функцією?
3. Навести приклад графіків степеневої функції.
4. Навести приклад графіків тригонометричних функцій.
5. Як отримати графік функції $y = |f(x)|$?
6. Як отримати графік функції $y = f(-x)$?
7. Що таке принцип математичної індукції?
8. В чому полягає суть методу математичної індукції?
9. Що таке перестановка?
10. Що таке розміщення?
11. Що таке комбінація?
12. Яка формула біном Ньютона?
13. Які наслідки із формули біном Ньютона?
14. Яку нерівність називають нерівністю Бернулі?
15. Яку нерівність називають нерівністю Коші-Буняковського?
16. Де застосовують нерівності Бернулі та Коші-Буняковського?
17. Навести часткові випадки нерівності Коші-Буняковського.
18. Який вигляд мають найпростіші тригонометричні рівняння?
19. Які є методи розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь?
20. Який розв’язок рівняння $sin\, x = a, ctg\, x = a$?
21. Що таке однорідні тригонометричні рівняння?
22. Як розв’язуються найпростіші тригонометричні нерівності?

Додаток Б. Завдання для домашніх робіт

Приклад. Спростити вираз та знайти його значення:

1. $\frac{8}{ab}-\frac{4a+7}{a}\cdot\frac{5}{a+2}$, якщо $a=-9$, $b=2$;

2. $\left(\frac{a}{9b-b^3}-\frac{1}{b^2+3b}+\frac{3}{b^2a-9a}\right):\frac{a^2-6a+9}{b^3a-9ba}$, якщо $a=10$, $b=3$;

3. $\frac{c+b}{(b-a)(a-c)}+\frac{b+a}{(a-c)(c-b)}+\frac{a+c}{(c-b)(b-a)}$, якщо $a=2$, $b=4$, $c=-1$;

4. $\left(\frac{a^2-2b}{b^2-b^2}-\frac{a}{a+b}\right):\frac{a^2-b^2}{5ba+4a^2b}$, якщо $a=4$, $b=16$.

Приклад. Спростити:

1. $\frac{x+7}{x+9}+\left(\frac{x+7}{x^2+81-18x}+\frac{x+5}{x^2-81}\right)\cdot\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^{-2}$;

2. $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{b-a}{b^2+ab}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{b^3-ba^2}+\frac{1}{b+a}\right)^{-1}$;

3. $\left(\frac{x+y}{x-y}\cdot\left(1-\frac{x}{x+y}\right)\right)^{-1}\cdot\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{b-a}{b^2+ab}\right)$;

4. $\frac{2x}{b+x}+\left(\frac{2y}{(x-b)^2}-\frac{2y}{x^2-b^2}\right)\cdot\left(\frac{y}{(x-b)^2}\right)^{-1}$;

5. $\left(\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{y^2-2xy+x^2}{2x}+\frac{y}{x+y}$;

6. $\left(\frac{2-n}{n+2}-\frac{n+2}{n-2}\right)\cdot\left(\frac{2+n}{2-n}+\frac{n-2}{n+2}\right)^{-1}$;

7. $\frac{x^2-9y^2x}{9y^2+x^2}\cdot\left(\frac{x+3y}{x^2-3xy}+\frac{x-3y}{3xy+x^2}\right)$.

Приклад. Поділити многочлен на двочлен:

1. $9x^7-23x^8+x^4+12x^5+5x^2+7$ на x^2-9x-1;

2. $31x^2-4x^8-7$ на $-31x+2$;

3. $-3x^5+5x^4+3x-2$ на $3x^3-x-5$;

4. $15x^6-5x^4+6x^3-1$ на $2x-1$;

5. $4x^8-x^3+4x+10$ на $-x^2-5x+3$;

6. $4x^8-11x^3+9x+80$ на $-x^2-5x-10$.

Приклад. Обчислити:

1. $\sqrt{9+4\sqrt{2}}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)$;

3. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{5}$;

2. $\sqrt{7+2\sqrt{12}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$; 4. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

5. $\sqrt{5+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{20+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{20+\sqrt{4+\sqrt{3}}}}\cdot$

$\cdot\sqrt{5-\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{2}}}}$;

6. $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{8+\sqrt{60+\sqrt{7}}}\cdot\sqrt{8+\sqrt{60+\sqrt{60+\sqrt{7}}}}\cdot$

$\cdot\sqrt{8-\sqrt{60+\sqrt{60+\sqrt{7}}}}$;

7. $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}}\cdot$

$\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}}$.

Приклад. Спростити:

1. $\frac{6\sqrt{a}-3}{8}\cdot\left(\frac{2a^{-2}+\frac{a^3}{2}}{a^{-2,5}-\frac{1}{2}a^{-3}}+\frac{\sqrt{a^{-1}}-a^{-2}}{a^{-1}+a^{-1,5}+a^{-3}}-3\sqrt{a}\right)$;

2. $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b^2}}\right)^{-1}$;

3. $\frac{5a}{b-a}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a^2b^2}+a\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a}}-1\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}}+\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^{2}}\right)$;

4. $\left(\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{ba^2x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^2+bx-2\right)\cdot\left(\sqrt{bx}+2\right)^{-1}-2-\sqrt{bx}$;

5. $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)$.

Приклад. Розв’язати рівняння:

1. $|x^2-4x+5|-8|2-x|+8|3x^2-36|-|x-x^2|=1|3x-x^2|$;
2. $-4|2-8x|-9|10x-125|+|12x+x^2|=4x^2+|x^2-12x|$;

3. $-5|4-x|-|4x-56|-13|x^2-x-15|+|x-6x^2|=x-9x^2$;

4. $14|x^2+7x+10|+9|10-x|+16|x-36|+|x^2-9x|=72x$.

Приклад. Розв'язати нерівність:

1. $8|12x-6|-|13-x|-10+34x\le 5|11x-9-2x^2|$;

2. $|5-4x-x^2|-34|x-9x^2|-4|x+10|\ge 8x^2$;

3. $|22x-76|+23|x-1|-16|8x-4|>-5x+9$;

4. $|-9x-18|-4|-7x+14|+12|8x-x^2|\le 1+9x+|-x+7|$.

Приклад. Розв'язати рівняння:

1. $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$;
2. $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{3}{2x^2+6x}$;
3. $10x^2=5x+0,6$;
4. $\left(2\sqrt{x}-512\right)(x^2-36)=0$;
5. $x^2-x+12=5x-9+x^2-8x$;
6. $11x^3-6x-1=9x^2-11x+4$;
7. $\frac{12x}{3x^2-10x+1}-\frac{1}{x}=3x-6$;
8. $\frac{13x}{3x^2-5x+2}-\frac{12x}{3x^2+x+2}=5$;
9. $x^2-8x+16=-1$;
10. $x^2+8x=-17$;
11. $x^3-9x^2-x=24$;
12. $4x-x^3-2x^2+9x-1=0$.

Приклад. Розв'язати ірраціональні рівняння:

1. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

2. $\sqrt{x-10}+\sqrt{2x+5}=\sqrt{9x-6}$;

3. $\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=x+6$;

4. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+2$;

5. $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+1}=12$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

1. $\begin{cases}3x+3y=5,\\ x+y=-4\end{cases}$;
2. $\begin{cases}2y+9x+7=0,\\ -y+6x+34=0\end{cases}$;
3. $\begin{cases}2x+y+9=0,\\ 7x-y-3=0\end{cases}$;

16. $\begin{cases}2y+x=23,\\ 2x-4y-3=0\end{cases}$;
17. $\begin{cases}5x-5y=14,\\ y-x=15\end{cases}$;
18. $\begin{cases}5x+y-1=0,\\ 5x-8y+12=0\end{cases}$;

4. $\begin{cases}-5x-9y-1=0,\\ 9y-5x+18=0\end{cases}$;

5. $\begin{cases}14y+9x-13=0,\\ -14x+9y-4=0\end{cases}$;

6. $\begin{cases}3x+3y=18,\\ x^2-xy-7y^2=-1\end{cases}$;

7. $\begin{cases}x+y=-9,\\ 4x^2+18xy-4y^2=-22\end{cases}$;

8. $\begin{cases}y-4x=5,\\ 8x^2-9xy-y^2=12\end{cases}$;

9. $\begin{cases}4y^2-x^2+3xy+19=0,\\ 5y-x+15=0\end{cases}$;

10. $\begin{cases}14x-14y=-32,\\ -x^2-7xy+4y^2=7\end{cases}$;

11. $\begin{cases}x^2-12xy+3y^2=6,\\ x^2+12xy+2y^2=7.\end{cases}$;

12. $\begin{cases}9xy-y=9,\\ 18x^3y-2yx^2=1800.\end{cases}$;

13. $\begin{cases}5xy-4y=20,\\ 25x^3y-20yx^2=8100.\end{cases}$;

14. $\begin{cases}xy-4y=16,\\ x^3y-4yx^2=576.\end{cases}$;

15. $\begin{cases}2xy-3y=121,\\ 2x^3y-3yx^2=1089.\end{cases}$;

19. $\begin{cases}2x-3y-3=0,\\ 2y+3x=5\end{cases}$;

20. $\begin{cases}6y+3x=-1,\\ 6x-3y+18=0\end{cases}$;

21. $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ y-x=-24\end{cases}$;

22. $\begin{cases}x+y=4,\\ x^2+y=-18\end{cases}$;

23. $\begin{cases}7x-y=7,\\ 2x^2-108xy-12y^2=28\end{cases}$;

24. $\begin{cases}y^2-6x^2-xy-9=0,\\ 5y-5x=5\end{cases}$;

25. $\begin{cases}x-y=-11,\\ 7x^2-25xy-y^2+7=0\end{cases}$;

26. $\begin{cases}225x^2+196y^2=-1,\\ xy=7.\end{cases}$;

27. $\begin{cases}xy+7y=196,\\ x^3y+7yx^2=1764.\end{cases}$;

28. $\begin{cases}9xy-2y=25,\\ 18x^3y-4yx^2=1120.\end{cases}$;

29. $\begin{cases}3xy+10y=4,\\ 9x^3y-30yx^2=6084.\end{cases}$.

Приклад. Розв’язати рівняння:

1. $(0{,}6)^{5+3x}=\frac{125}{27}$;
2. $4^{x-4}+4^{x-5}-4^{x-7}=5056$;
3. $169^{5x^2+x-6}=13^{x-1}$;
4. $4^{2x+2}-15^x-1^{2x+3}=0$;
5. $5^{3x+6}-4^{x-10}=7^{2-9x}$;
6. $8^{-5x+3}=-10^{2-9x}$;
7. $(0{,}6)^{5+3x}=\frac{125}{27}$
8. $17^{-2x-5}=4^{7+9x}$;
9. $8^x-\frac{12}{8^x}=28$;
10. $2^{-3x+10}=17^{8+4x}$.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь:

1. $\begin{cases} 2^x \cdot 4^{\frac{y}{3}} = 16, \\ 2^{\frac{y}{3}} \cdot 4^x = 64. \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 6^x \cdot 3^y = 54, \\ 6^y \cdot 3^x = 162. \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 20, \\ 2^y \cdot 5^x = 160. \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 2^x \cdot 1^{4y} = 16, \\ 2^y \cdot 1^{4x} = 32. \end{cases}$.

Приклад. Обчислити:

1. $2\,log_{27}\,log_7\,343$;
2. $log_{3+\sqrt{10}}\left(3-\sqrt{10}\right) + log_{3-\sqrt{10}}\left(3+\sqrt{10}\right)$;
3. $3 \cdot 5^{2\left(log_{\sqrt{3}}5\right)^{-1} + \frac{1}{3}log_5 8} - 10$;
4. $12^{\frac{log_6(log_6 12)}{log_6 12}} \cdot log_{12} 6$;
5. $\left(log_7 2 + \frac{1}{log_5 7}\right) \cdot lg\,7$;
6. $log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$;
7. $\frac{1}{2}^{8\,log_{\frac{1}{2}} 2}$;
8. $log_{\frac{1}{3}} 81$;
9. $\frac{log_5 36 - log_5 12}{log_5 9}$.

Приклад. Виразити через a і b:

1. $log_{\frac{1}{2}} 300$, якщо $log_{\frac{1}{4}} 2 = 6a$, $log_{\frac{1}{4}} 3 = 2b$;
2. $log_{\sqrt{3}} 9600$, якщо $log_3 16 = -a$, $log_3 12 = -b$;
3. $log_{\sqrt{15}} 6300$, якщо $log_5 6 = 9a$, $log_3 7 = b$;
4. $log_{\sqrt{13}} 218400$, якщо $log_5 14 = -a$, $log_3 12 = 6b$;
5. $log_{\sqrt{2}} 14400$, якщо $log_2 3 = a$, $log_2 24 = -2b$.

Приклад. Розв’язати рівняння

1. $log_8\left(\frac{2x+19}{x+13}\right) = log_8\left(\frac{-8x}{x+2}\right)$;

8. $log_{13}\left(\frac{x-60}{-x-3}\right) = log_{13}\left(\frac{3x-14}{x-1}\right)$;

2. $log_6\left(\frac{x-2}{6x-13}\right) = log_6\left(\frac{-6x+7}{x+8}\right)$;

9. $log_7\left(\frac{2x+2}{12x-3}\right) = log_7\left(\frac{5x-2}{4x+1}\right)$.

3. $log_{36} x^2 + log_6(x+1) = log_6\left(log_{\sqrt[4]{5}} 625\right)$;

4. $2\,log_2 8x - 2\,log_2 2x = 4 + log_2 5x$;

5. $5^{(\log_5(2x-7))^2} + (2x-7)^{\log_5(2x-7)} = 75$;

6. $log_3(x-3) \cdot log_9(x-3) \cdot log_{81}(x-3) = 127$;

7. $log_9{}^2(4x-8)^2 - 4log_9(4x-8)^2 + log_9 81 = 0$;

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

1. $\begin{cases} 81^y \cdot 3^x = 729, \\ lg(x-9y)^2 - 0{,}25\, lg\, y^4 = 5\, lg\, 2. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} lg\, x + lg\, y = 10, \\ lg\, x - lg\, y = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 4y = 336, \\ 0{,}5\, lg\, x^2 + lg\, y = 3. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} lg(x-4) - lg\, y = 1, \\ lg(x-4) + lg\, y = 8. \end{cases}$

Приклад. Спростити:

1. $sin(\pi - 2x) + 2\, cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$;

2. $(ctg\, x - tg\, x) \cdot sin\, 2x - 2\, cos\, 2x$;

4. $\left(\frac{1}{sin\, x} + ctg\, x\right) \cdot \left(\frac{1}{sin\, x} - ctg\, x\right)$;

5. $ctg^2 x - cos^2 x - ctg^2 x \cdot cos^2 x$;

6. $\frac{cos^3 x - sin^3 x}{1 + sin\, x \cdot cos\, x} - cos\, x + sin\, x$.

Приклад. Обчислити:

1. $tg\, 15°$;

2. $sin\, 75° + sin\, 15°$;

3. $\big(sin(-30°)\, cos(60°) + tg\,(-135)\big) \cdot \big(ctg\,(-120°) \cdot cos(-30°) -$
$- sin(-120°) \cdot tg\,(-30°)\big)$;

4. $sin\, 960° + cos\, 690° \cdot sin\, 510°$;

5. $tg\, \frac{20\pi}{3} \cdot tg\, \left(-\frac{31\pi}{6}\right) \cdot ctg \frac{16\pi}{3}$.

Приклад. Довести тотожність:

1. $(cos\, \alpha - cos\, \beta)^2 + (sin\, \alpha - sin\, \beta)^2 = 4sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;

2. $sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta) = 2\, sin\, \alpha \cdot cos\, \beta$;

3. $(sin\, x - cos\, x)^2 + (sin\, x + cos\, x)^2 = 2$;

4. $tg\, \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - tg\, \alpha = 1 + tg\, \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot tg\, \alpha$;

5. $\frac{tg\, 4x + tg\, 3x}{1 - tg\, 4x \cdot tg\, 3x} = tg\, 7x$.

Приклад. Знайти найменший додатний період функції:

1. $y = sin \frac{5x}{2}$; 4. $y = cos\, 7x$; 7. $y = tg\, \left(-\frac{x}{6}\right)$;

2. $y = tg\,(-12x)$; 5. $y = cos\, -6x$; 8. $y = ctg\, 3x$;

3. $y = cos\left(-\frac{9x}{5}\right)$; 6. $y = sin(-4x)$; 9. $y = sin\, 12x$.

Приклад. Користуючись властивостями тригонометричної функції, порівняти числа:

1. $cos\, 100°$ і $cos\, 130°$; 3. $sin(-5\pi)$ і $sin(-4\pi)$;

2. $sin\, 10°$ і $sin\, 50°$; 4. $ctg\,(-1)$ і $ctg\,(-1{,}6)$.

Приклад. Розташувати числа в порядку їх зростання:

1. $sin\,(-213°)$, $sin\,(-265°)$, $sin\, 5{,}1$, $sin\, 3{,}7$;
2. $tg\,(-567°)$, $tg\, 76°$, $tg\, 89°$, $tg\,(-7{,}6)$;
3. $cos\, 3$, $cos\, 1278°$, $cos(-97°)$, $cos(-34°)$;
4. $ctg\, 5{,}9$, $ctg\,(-127°)$, $ctg\, 967°$, $ctg\,(-3{,}7°)$;
5. $sin\, 7{,}6$, $sin\,(-3{,}8)$, $sin\, 8{,}2$, $sin\,(-4{,}1)$.

Приклад. Побудувати графік функції та вказати нулі функції і проміжки знакосталості:

1. $y = cos\, 5x - \frac{1}{4}$; 3. $y = cos\frac{1}{5}x + 11$;

2. $y = sin\frac{1}{3}x + 10$; 4. $y = sin\frac{1}{3}x - \frac{1}{7}$.

Приклад. Побудувати графік функції:

1. 7. $y = 2\, ctg\, \left|\frac{3}{8}x - \frac{3\pi}{2}\right| + 11$; 2. $y = -\frac{1}{4}\, ctg\, \left|-5x + \frac{\pi}{4}\right| - 2$.

Приклад. Розв’язати рівняння:

1. $\frac{1}{6}cos(-4x - 6\pi) = -3\sqrt{3}$; 6. $-\frac{1}{3}sin\left(\frac{x}{7} - 4\pi\right) = \frac{1}{3}$;

2. $\frac{1}{4}sin\left(\frac{x}{8} - \frac{\pi}{2}\right) = -1$; 7. $-ctg(x - 9\pi) = 0$;

3. $\sqrt{3}sin\, x + 2\sqrt{3}cos\, x = 3$; 8. $-\sqrt{3}sin\, x - cos\, x = -1$;

4. $\sqrt{3}sin\, x + 3\, cos\, x = -3$; 9. $\sqrt{3}sin\, x + 2\, cos\, x = -2$.

5. $9\,(tg^4\, x + ctg^4\, x) - 15(tg\, x + ctg\, x)^2 = 2$;

Приклад. Розв’язати нерівність:

1. $-\frac{1}{5}cos\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) > -\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 4. $\sqrt{3}\, tg\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) > 1$;

2. $-3\,ctg(x+\pi) > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 5. $ctg(3x-\pi) > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $|cos(6x-2\pi)| > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Приклад. Довести, що послідовність із загальним членом є спадною:

1. $y_n = \frac{45}{12n}$; 3 . $y_n = \frac{34}{13n}$; 5. $y_n = \frac{67}{2n}$.

2. $y_n = \frac{36}{11n}$; 4. $y_n = \frac{87}{14n}$;

Приклад. Знайти границі:

1. $lim_{n\to\infty} \frac{16n^3-10}{2n^3-3n^2+2n}$; 6. $lim_{n\to\infty} \frac{n^2-6n}{n-17n^2+1}$;

2. $lim_{n\to\infty} \frac{n^7+16n}{10n-7n^{18}-9}$; 7. $lim_{n\to\infty} \frac{16n^3-10}{2n^3-3n^2+2n}$;

3. $lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+7n-3}{n^2-2n+3}$; 8. $lim_{n\to\infty} \left(\frac{3e^x+1}{3e^x}\right)^{2x^2}$;

4. $lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$; 9. $lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+x^2+3}{x^2-x+1}\right)^{5x}$.

5. $lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^8+3x+4}}{5x^4-2}$;

Приклад. Дослідити функції на неперервність, знайти точки розриву і встановити їх:

1. $f(x) = \begin{cases} cos\,x, \text{ якщо } x < 0, \\ x+1, \text{ якщо } 0 < x \le 2 \\ \frac{5}{x}, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$, 3. $f(x) = 3^{\frac{1}{x-1}}$;

2. $f(x) = \frac{6}{(3x^2-27)(x+5)}$; 4. $f(x) = \frac{1}{1-e^{2-3x}}$

Приклад. Знайти координати, довжину та напрямні косинуса вектора $|\overline{AB}|$, якщо:

1. $A\ (11; 3; -2)$ і $B\ (-1; 11; -4)$; 5. $A\ (-1; 1; 0)$ і $B\ (5; -1; -14)$;

2. $A\ (1; -3; 2)$ і $B\ (9; 1; 2)$; 6. $A\ (3; -1; -2)$ і $B\ (-1; -1; 3)$;

3. $A\ (2; 3; 2)$ і $B\ (-1; -1; -4)$; 7. $A\ (7; -7; -1)$ і $B\ (4; 8; 0)$.

4. $A\ (-2; -4; 0)$ і $B\ (10; 0; 6)$;

Приклад. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\vec{m}$, якщо:

1. $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{m} = \vec{a} - 12\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$;

2. $\vec{n} = -7\vec{a} + 5\vec{b}$ і $\vec{m} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{2\pi}{4}$;

3. $\vec{n} = 8\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{m} = \vec{a} + 6\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$;

4. $\vec{n} = 5\vec{a} - 7\vec{b}$ і $\vec{m} = 8\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$;

5. $\vec{n} = 6\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{m} = \vec{a} - 10\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$;

6. $\vec{n} = -2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{m} = -9\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 9$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$;

7. $\vec{n} = -\vec{a} - 9\vec{b}$ і $\vec{m} = -\vec{a} + 6\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

Приклад. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

1. $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 120°$;

2. $\vec{c} = 10\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 14$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 45°$;

3. $\vec{c} = 6\vec{a} - 15\vec{b}$ і $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 135°$;

4. $\vec{c} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 135°$;

5. $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 90°$;

6. $\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b}$ і $\vec{d} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 30°$.

Приклад. Довести методом координат, що в рівнобедреному трикутнику сума відстаней від будь-якої точки основи до бічних сторін є величина стала.

Приклад. Довести методом векторної алгебри:

1. Середня лінія трапеції паралельна основам і довжина її дорівнює півсумі довжин основ.

2. Висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

3. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не колінеарні, то із того, що $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ слідує $[\vec{a};\vec{b}] = [\vec{b};\vec{c}] = [\vec{c};\vec{a}]$.

4. У всякому трикутнику ABC $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$, де a, b, c – довжини сторін трикутника ABC.

Приклад. Довести:

1. На стороні AB трикутника ABC взято точку F. Через неї проведено прямі FK і FN, паралельні відповідно сторонам AC і AB (K належить BC, N належить AC). Довести, що ці прямі відтинають на сторонах BC і AC трикутника відрізки $CK=c$ і $CN=d$ такі, що $\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=1$.

2. Довести, що існує призма, відмінна від куба, і така, що в неї всі грані рівні між собою.

3. Довести, що в рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

4. Дано трикутник ABC, $AB=c$, $CB=a$, $AC=b$. Довести, що площа шукається за формулою $S=\frac{1}{2}ah_a$.

5. Довести, що $r_a=\frac{S_\Delta}{p-a}$, де r_a – радіус зовнішнього кола, проведений до сторони a трикутника ABC, p – його півпериметр.

6. Довести, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

Приклад. Довести методом геометричних перетворень:

1. На сторонах AB і BC трикутника ABC побудовано квадрати $ABNM$ і $BCPG$. Причому квадрат $ABNM$ і трикутник ABC розміщені по різні сторони AB, а квадрат $BCPG$ і трикутник ABC по одну сторону BC. Доведіть, що $MG=AC$ і MG – перпендикулярне до AC.

2. Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

3. Середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

4. Трикутник з координатами вершин $(-2;1;3)$, $(3;-2;1)$, $(1;3;-2)$ є рівностороннім.

5. Довести. що коли в трикутнику медіана і бісектриса, проведені з однієї вершини, збігаються, то трикутник рівнобедрений.

6. Довести. що коли бісектриси трикутника рівні, то він рівнобедрений.

Додаток В. Завдання для самостійних робіт

Самостійна робота 1

Варіант №1

1. Спростити вираз та знайти його значення:

$\left(\frac{5}{a^2+7a+10}-\frac{2}{a^2-5a+6}+\frac{a}{a^2-8a+15}\right)^2\cdot\frac{(a+5)^2}{20}$, якщо $a=7$.

2. Розв’язати нерівність $\left||x-12|-5x^2\right|>5-3x$.

Варіант №2

1. Спростити вираз та знайти його значення: $\frac{a^2+27}{a^3-9a}\cdot\frac{5a-15}{a^2-6a+9}+\frac{a}{5}$, якщо $a=-6$.

2. Розв’язати нерівність $\left|\frac{x^2-6x-7}{\sqrt{2x^2-9x-5}}\right|<8x$.

Варіант №3

1. Спростити вираз та знайти його значення: $\frac{1-a}{1+a}+\frac{a^2+6a}{a^2-1}:\frac{6+a}{1+a}$, якщо $a=12$.

2. Розв’язати нерівність $|x-7|-3|-x-4|+23|9x+1|<-x^2$.

Варіант №4

1. Спростити вираз та знайти його значення $\frac{25^{3a-1}}{100-125^{2a-2}}$, якщо $a=6$.

2. Розв’язати нерівність $9x^2-|x-5|\le 9x-7$.

Варіант №5

1. Спростити вираз та знайти його значення:

$\left(\frac{1}{2a+1}-\frac{3}{8a^3+1}+\frac{3}{4a^2-2a+1}\right)\cdot\left(2a-\frac{4a-1}{2y+1}\right)$, якщо $a=-5$.

2. Розв’язати нерівність $\left|\frac{x^2-9|x|-7}{\sqrt{x+3}}\right|>6x-5$.

Варіант №6

1. Спростити вираз та знайти його значення:

$\left(\frac{a-3}{a^2-3a}-\frac{1}{a^2-9}:\frac{a+3}{(3-a)^2}\right)\cdot\frac{(a+3)^2}{9}$, якщо $a=4$.

2. Розв’язати нерівність $9|x+4|-3|4x+12|>-x|2x-5|$.

Варіант №7

1. Спростити вираз та знайти його значення:

$\frac{4a^2-49}{2a+5} \cdot \frac{1}{4a^2+14a} - \frac{2x+7}{4a^2-10x}$, якщо $a = 2$.

2. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-3|x|-4}{x-2} < -11x$.

Варіант №8

1. Спростити вираз та знайти його значення:

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{b}{a+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$, якщо $a = 2$, $a = 9$.

2. Розв'язати нерівність $|x^2 - x + 1| \geq |x^2 - 3x - 7|$.

Самостійна робота 2

Варіант №1

1. Розв'язати рівняння $5^{x-2} - 5^{x-6} - 5^{x-4} = 3125$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2 \cdot 8^{9y} = 1024; \\ 5^{9y} \cdot 2^{3x} = 76. \end{cases}$

Варіант №2

1. Розв'язати рівняння $4^{2x+2} + 4 \cdot 20^{x+1} - 5^{2x+2} = 0$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 64^x \cdot 8^y = 4096; \\ lg(x-y)^2 + lg\, y = 4\, lg\, 8\,. \end{cases}$

Варіант №3

1. Розв'язати рівняння $15^{6x-10} = 8^{4-x}$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ \frac{1}{2}x^2 - y = 10 \end{cases}.$

Варіант №4

1. Розв'язати рівняння $3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 15 = 0$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} lg\, x - lg\,(2y) = 4; \\ lg\, 2y + lg\, x = 9. \end{cases}$

Варіант №5

1. Розв'язати рівняння $log_{(x+2)}{}^2\, 16 - 4log_{(x+2)}2 = 3$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 7^{6x} \cdot 5^{2y} = 245; \\ 5^{2y} \cdot 7^{6x} = 175. \end{cases}$

Варіант №6

1. Розв'язати рівняння $x^2 - 4x + \sqrt{4x^2 + 36x + 81} - 9 = 0$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{3x} + 6\sqrt{y} = 8; \\ 3x - y = 10. \end{cases}$

Варіант №7

1. Розв'язати рівняння $4x^{4`} - 324 = 0$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 4y + 3x = 20 \\ x^2 - 2x + y = -5 \end{cases}$.

Варіант №8

1. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{5x - 6} + \sqrt{x^2 - 5x + 18} = 3$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x - 43 \cdot 7^y = 7; \\ 3^x \cdot 7^y = \frac{27}{43}. \end{cases}$

Самостійна робота 3

Варіант №1

1. Розв'язати рівняння $cos^2\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) - sin^2\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = 2\vec{a} - 13\vec{b}$ і $\vec{d} = 9\vec{a} + 6\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 13$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 30°$.

Варіант №2

1. Розв'язати рівняння $sin\,x - \sqrt{5}\,cos\,x = \sqrt{5}$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{d} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 34$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 90°$.

Варіант №3

1. Розв'язати рівняння $-6cos^2x - 2sin^2x + \sqrt{3}\,sin\,x \cdot cos\,x = 1$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = 8\vec{a} + 7\vec{b}$ і $\vec{d} = -12\vec{a} + 26\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 14$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 60°$.

Варіант №4

1. Розв'язати рівняння $cos^2x + 8\,cos\,x - 7 = 0$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = -\vec{a} - 5\vec{b}$ і $\vec{d} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 14$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 45°$.

Варіант №5

1. Розв’язати рівняння $sin\left(-9x + \frac{\pi}{5}\right) - 6\,cos\left(-9x + \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{3}$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = \vec{a} + 10\vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} + 8\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 15$, $|\vec{b}| = 23$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 120°$.

Варіант №6

1. Розв’язати рівняння $sin\,8x + sin\,16x = -\,sin\,32x$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = \vec{a} - 11\vec{b}$ і $\vec{d} = -4\vec{a} - 8\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 16$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 135°$.

Варіант №7

1. Розв’язати рівняння $sin\,4x + 5(sin\,x + cos\,x)$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = \vec{a} + 9\vec{b}$ і $\vec{d} = 23\vec{a} + \vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 20$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 270°$.

Варіант №8

1. Розв’язати рівняння $7cos^2x + 3sin^2x - 2\sqrt{3}\,sin\,x \cdot cos\,x = 2$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = -6\vec{a} + 17\vec{b}$ і $\vec{d} = 9\vec{a} + 18\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 18$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 30°$.

Додаток Г. Завдання для контрольних робіт

Контрольна робота 1

Варіант №1

1. Спростити вираз: $\frac{ab-ad}{bc+cd} \cdot \frac{ba+ad}{bc-cd}$.

2. Розв’язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt[3]{(x-2)^2} - 2\sqrt[3]{(x-2)(5x+1)} + \sqrt[3]{(5x+1)^2} = 0$.

3. Розв’язати рівняння: $-x^2 - 16 = x^3$.

4. Розв’язати рівняння: $-7^{2x-1} - 9 \cdot 15^x - 8^{2x+2} = 0$.

5. Розв’язати рівняння: $x^{log_5 x} = 125x^2$.

Варіант №2

1. Спростити вираз: $\frac{\frac{1}{x-y}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{a}} \cdot \left(1 - \frac{x^2+y^2-a^2}{2xy}\right)^{-1}$.

2. Розв’язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2-1}$.

3. Розв’язати рівняння: $\left|x^2 - |x|\right| = 4$.

4. Розв’язати рівняння: $10^{2x+3} + 1^{x+7} + 100^x + 1000 = 0$.

5. Розв’язати рівняння: $lg(x^2 - 2x - 4) = lg\, 11$.

Варіант №3

1. Спростити вираз: $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) \cdot \left(\frac{xy}{x^2-y^2}\right)^{-1}$.

2. Розв’язати ірраціональне рівняння: $\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt[3]{2x+1} = 2$.

3. Розв’язати рівняння: $\left|\frac{x^2-4x}{x^2+3x}\right| = 1$.

4. Розв’яжіть рівняння: $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

5. Розв’язати нерівність: $log_7(x+3) + 0{,}5\, log_{49} x = 14$.

Варіант №4

1. Спростити вираз: $\frac{6\sqrt{x}-3}{8} \cdot \left(\frac{2a^{-2}+\frac{a^{-2}}{2}}{a^{-2,5}-\frac{1}{2}a^{-3}} + \frac{\sqrt{a^{-1}}-a^{-2}}{a^{-1}+a^{-1,5}+a^{-2}} - 3\sqrt{a}\right)$.

2. Розв’язати ірраціональне рівняння: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x-3} = 0$.

3. Розв'язати рівняння: $\frac{4}{|x+1|-2} = |x+2|$.

4. Розв'язати рівняння: $4^{4x+3} + 5^{2x+3} + 80^{2x} + 800 = 0$.

5. Розв'язати рівняння: $log_2(18 - 4^x) = 6 - x$.

Варіант №5

1. Спростити вираз: $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$.

2. Розв'язати ірраціональне рівняння: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.

3. Розв'язати рівняння: $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+5|x-5|} = 9x$.

4. Розв'язати рівняння: $-1^{2x+1} + 6^{x+5} - 6^x + 7776 = 0$.

5. Розв'язати рівняння: $\frac{1}{2} lg(2x-1) = 1 - lg\sqrt{x-9}$.

Варіант №6

1. Спростити вираз: $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - \left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}} - \sqrt[4]{ax}\right)$.

2. Розв'язати ірраціональне рівняння: $\sqrt[3]{2x-8} + \sqrt[3]{x-8} = 2$.

3. Розв'язати рівняння: $\left|x^2 - |x|\right| = 2x^2 - x$.

4. Розв'язати рівняння: $8^{2x+1} + 7^{x+2} - 48^x - 392 = 0$.

5. Розв'язати рівняння: $log_5 x + log_7 x = log_5 35$.

Варіант №7

1. Спростити вираз: $\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}$.

2. Розв'язати ірраціональне рівняння: $\sqrt[3]{2x+7} + 2 = \sqrt[3]{3(x-1)}$.

3. Розв'язати рівняння: $\frac{x^2-9|x|-4}{x-1} = 8x$.

4. Розв'язати рівняння: $7^{2x+3} - 4^{x+1} + 196^x = 1372$.

5. Розв'язати рівняння: $log_2 x + \frac{4}{log_x 2} = 5$.

Варіант №8

1. Спростити вираз: $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3}$.

2. Розв'язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt[3]{(x-6)^2}-3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)}+2\sqrt[3]{(2x+3)^2}=0.$

3. Розв'язати рівняння: $|x-5|-2|6-x^2|+5|7x-9|=14x-8.$

4. Розв'язати рівняння: $10^{x-1}+10^{x-12}-10^{x-4}=6000.$

5. Розв'язати рівняння $lg\,x+log_x 10=2{,}5.$

Варіант №9

1. Спростити вираз: $(p(p^2-4)^{-1}+2p(2-p)^{-1}+(p+2)^{-1})\cdot$
$\cdot\,(p-2+(10-p^2)\cdot(p+2)^{-1})^{-1}.$

2. Розв'язати ірраціональне рівняння: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x^2-6}.$

3. Розв'язати рівняння: $\left||x+7|+x^2\right|=12.$

4. Розв'язати рівняння: $2^{2x+2}-2\cdot 15^x-2^{2x+1}=0.$

5. Розв'язати рівняння: $log_5 x\cdot log_9 x=log_5 9.$

Варіант №10

1. Спростити вираз: $\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\frac{1}{b^{-n}}-\frac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}.$

2. Розв'язати ірраціональне рівняння: $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt{x^2-6x+3}=6.$

3. Розв'язати рівняння: $\frac{x^2-|x|-8}{|3x-8|}=5.$

4. Розв'язати рівняння: $14^{x+17}+3^{7x+1}=2^{4+9x}.$

5. Розв'язати рівняння: $2\,log_{\sqrt{2}} x+log_x \frac{1}{3}=3.$

Контрольна робота 2

Варіант №1

1. Розв'язати рівняння: $sin\,7x+sin\,3x-3\,cos\,2x=0.$

2. Розв'язати нерівність:

$sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\le-\frac{1}{2}.$

3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n}=\vec{a}-19\vec{b}$ і $\vec{m}=9\vec{a}-12\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=17$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b})=2\pi.$

4. Використовуючи методом координат довести, що радіус $R = \frac{ab+bc+ac}{6(l+m+n)}$, де l, m, n – відстані від центроїда до сторін трикутника ВС, AC, AB.

5. Нехай при продовженні медіан AM_1, AM_2, CM_3 до перетину з колом, описаним навколо трикутника ABC, дістанемо точки M', M'', M'''. Довести, що $\frac{AM}{MM'} + \frac{BM}{MM''} + \frac{CM}{MM'''} = 3$.

Варіант №2

1. Розв’язати рівняння: $cos\,6x \cdot cos\,3x + sin\,6x \cdot sin\,3x = 1$.
2. Розв’язати нерівність: $\left|6\,cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)\right| \leq -3$.
3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = -14\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{m} = -8\vec{a} - 8\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

4. Використовуючи методом координат довести, що якщо у трикутнику ABC точки M_1, M_2, C, M належать одному й тому самому колу, тоді $2c^2 = a^2 + b^2$.

5. Довести, що півпериметр ортоцентричного трикутника дорівнює $\frac{S}{R}$.

Варіант №3

1. Розв’язати рівняння: $tg\,x \cdot sin\,x - tg\,x = 0$.
2. Розв’язати нерівність:

$sin(2x + 6\pi) \cdot sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) - cos(2x + 6\pi) \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) > -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = 19\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{m} = \vec{a} - 7\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 10$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

4. У коло вписаний трикутник ABC. Медіана CM_3 перетинає коло вдруге в точці D. Довести методом координат, що $AC^2 + BC^2 = 2CM_3 \cdot CD$.

5. У трикутника ABC проведені медіани і в трикутника AM_2M, CM_2M, CM_1M, BM_3M, BM_1M, AM_3M вписані кола. Довести, що коли три з них рівні між собою, то всі шість рівні.

Варіант №4

1. Розв'язати рівняння: $cos\,6x + cos\,4x = -\,cos\,2x$.

2. Розв'язати нерівність: $18\,sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}x\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}x\right) \leq \frac{9}{2}$.

3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = \vec{a} + 9\vec{b}$ і $\vec{m} = -15\vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 23$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}^\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

4. Довести методом координат формулу Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

5. Довести, що середини M_1, M_2, M_3 сторін трикутника ABC, основи висот H_1, H_2, H_3, а також точки E_1, E_2, E_3 – середини відрізків AH, BH, CH – належать одному колу, яке називається колом дев'яти точок.

Варіант №5

1. Розв'язати рівняння: $\frac{cos\,3x - cos\,x}{1 + sin\,x} = 0$.

2. Розв'язати нерівність: $\left|3\,tg\,\left(4x - \frac{\pi}{5}\right)\right| < 10$.

3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = -8\vec{a} - 9\vec{b}$ і $\vec{m} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 16$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}^\wedge\vec{b}) = -\pi$.

4. Довести методом координат, що відстані від точок дотику зовні вписаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника ABC до їх спільної вершини, дорівнює півпериметру p трикутника ABC.

5. Довести, що у трикутнику ABC $ctg\,\angle CMB = \frac{1}{2}(ctg\,\angle A - ctg\,\angle B)$, де CM – медіана трикутника ABC.

Варіант №6

1. Розв'язати рівняння: $\frac{cos\,4x - cos\,2x}{1 - sin\,x} = 5$.

2. Розв'язати нерівність: $sin\left(8x + \frac{\pi}{9}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = -65\vec{a} + 22\vec{b}$ і $\vec{m} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 11$, $(\vec{a}^\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

4. Дано трикутник ABC з сторонами a, b і c, в який вписано коло. До нього проведено дотичну, яка перетинає сторони трикутника AB і AC відповідно у точках D_1 і D_2. Знайти методом координат периметр трикутника AD_1D_2, якщо $D_1D_2 = m$.

5. Довести, що у трикутнику ABC $ctg\measuredangle BAM_1 + ctg\measuredangle CBM_2 +$ $+ctg\measuredangle ACM_3 = \frac{3}{4}3\frac{a^2+b^2+c^2}{S}$, де AM_1, BM_2, CM_3 – медіани трикутника ABC.

Варіант №7

1. Розв'язати рівняння: $sin\,10x - sin\,5x = sin\,25x$.
2. Розв'язати нерівність: $10\,cos(3x + 6\pi) > 5$.
3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = -\vec{a} + 12\vec{b}$ і $\vec{m} = -9\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 18$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

4. Дано трикутник ABC з сторонами a, b і c, в який вписано коло. До нього проведено дотичну, яка перетинає сторони трикутника AB і AC відповідно у точках D_1 і D_2. Знайти методом координат площу трикутника AD_1D_2, якщо $D_1D_2 = m$.

5. Довести, що з усіх трикутників, вписаних у даний трикутник, ортоцентричний має найменший периметр.

Варіант №8

1. Розв'язати рівняння: $sin\,3x - sin\,6x = 2\,sin\,9x$.
2. Розв'язати нерівність:

$$sin(8x - \pi) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5}{9}x\right) - cos(8x - \pi) \cdot sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5}{9}x\right) > 1.$$

3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = \vec{a} - 32\vec{b}$ і $\vec{m} = -8\vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 14$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

4. Довести методом координат, що площа трикутника ABC знаходиться за формулою $S = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot AW_1$, де W_1 – точка перетину бісектриси кута CAB з описаним колом, F_1, F_2 – точки дотику півкола до сторін AC і AB.

5. Довести, що алгебраїчна сума квадратів відстаней будь-якої точки X площини від вершини трикутника ABC і від його центру M пов'язані співвідношенням $XA^2 + XB^2 + XC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3XM^2$.

Варіант №9

1. Розв'язати рівняння: $cos\,2x \cdot cos\,7x + sin\,7x \cdot sin\,2x = 1$.
2. Розв'язати нерівність: $\left|\left|cos\left(6x - \frac{3\pi}{5}\right)\right| + 2\right| \geq 1\frac{1}{2}$.
3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = 13\vec{a} + 5\vec{b}$ і $\vec{m} = 7\vec{a} - 22\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 5\pi$.

4. Знайти методом координат площу бісектрального трикутника, якщо відомі сторони a, b, c трикутника ABC.

5. Доведіть, що якщо на медіані CM_3 існує така точка N, що $NA^2 + NB^2 = 2NC^2$, то відрізок ON перпендикулярний до відрізка CM_3.

Варіант №10

1. Розв'язати рівняння: $sin\,8x + sin\,2x - 5\,cos\,6x = 0$.
2. Розв'язати нерівність: $\left|\left|sin\left(\frac{9}{7}x - 6\pi\right)\right| + 6\right| \geq 7$.
3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{n} = -14\vec{a} - 10\vec{b}$ і $\vec{m} = 6\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 13$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

4. Довести методом координат формулу Ейлера. У трикутнику ABC $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

5. Довести, що радіус описаного навколо трикутника кола дорівнює радіусу кола, що проходить через дві вершини і ортоцентр цього трикутника.

Додаток Д. Індивідуально довгострокові завдання

Варіант №0

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $8x^7 + 6x^5 - x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 2ax - b$ ділиться без остачі на многочлен $2x^2 + x - 1$. У відповідь записати суму значень a і b.

Розв'язання

Використаємо ділення під «кутом»:

$$
\begin{array}{l|l}
8x^7 + 6x^5 - x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 2ax - b & x^2 + 3x + 2 \\
\cline{2-2}
-\ \underline{8x^7 + 24x^6 - 22x^5} & 8x^5 - 24x^4 + 40x^3 - 73x^2 + 193x - 417 \\
\quad -24x^6 - 28x^5 - x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 2ax - b & \\
\quad -\ \underline{-24x^6 - 68x^5 - 48x^4} & \\
\qquad 40x^5 + 47x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 2ax - b & \\
\qquad -\ \underline{40x^5 + 120x^4 + 80x^3} & \\
\qquad\quad -73x^4 - 77x^3 - 18x^2 + 2ax - b & \\
\qquad\quad -\ \underline{-73x^4 - 270x^3 - 180x^2} & \\
\qquad\qquad 193x^3 + 162x^2 + 2ax - b & \\
\qquad\qquad -\ \underline{193x^3 + 579x^2 + 386x} & \\
\qquad\qquad\quad -417x^2 + (2a - 386)x - b & \\
\qquad\qquad\quad -\ \underline{-417x^2 - 1251x - 834} & \\
\qquad\qquad\qquad (2a + 865)x - b + 834. &
\end{array}
$$

$2a + 865 = 0$; $a = -432{,}5$.

$-b + 834 = 0$; $b = 834$.

$a + b = -432{,}5 + 834 = 401{,}5$.

Відповідь: $a + b = 401{,}5$.

2. Спростити та обчислити значення виразу:

$\left(\frac{x-2y}{x^3+y^3} + \frac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right) : \frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2} + \frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$, при $x = 0{,}5$, $y = 0{,}8$.

Розв'язання

$$\left(\frac{x-2y}{x^3+y^3}+\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right):\frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}=\left(\frac{x-2y}{(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{y}{x\cdot(x^2-xy+y^2)}\right):\frac{x^2+y^2}{x\cdot(x^2-y^2)}+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}=\left(\frac{x^2-2xy+xy+y^2}{x\cdot(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)}\right):\frac{x^2+y^2}{x\cdot(x^2-y^2)}+$$

$$+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}=\frac{x^2-xy+y^2}{x\cdot(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)}:\frac{x^2+y^2}{x\cdot(x^2-y^2)}+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}=\frac{1}{x\cdot(x+y)}\cdot$$

$$\cdot b\ \ \frac{x\cdot(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x^3+y^3)+xy\cdot(x+y)}=\frac{1}{x\cdot(x+y)}\cdot\frac{x\cdot(x-y)\cdot(x+y)}{x^2+y^2}+$$

$$+\frac{2y^2}{(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)+xy\cdot(x+y)}=\frac{x-y}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2+xy)}=\frac{x-y}{x^2+y^2}+$$

$$+\frac{2y^2}{(x+y)\cdot(x^2+y^2)}=\frac{(x-y)\cdot(x+y)+2y^2}{(x+y)\cdot(x^2+y^2)}=\frac{x^2-y^2+2y^2}{(x+y)\cdot(x^2+y^2)}=\frac{x^2+y^2}{(x+y)\cdot(x^2+y^2)}=\frac{1}{x+y}.$$

Обчислимо значення при $x=0{,}5$, $y=0{,}8$:

$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{0{,}5+0{,}8}=\frac{1}{\frac{13}{10}}=\frac{10}{13}.$

Відповідь: $\frac{10}{13}$.

3. Розв’язати нерівність $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x}<\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+3{,}75}$.

Розв’язання

$\left(\frac{1}{25}\right)^{2x}<\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+3{,}75}$;

$(5^{-2})^{2x}<(5^{0{,}5})^{x^2+3{,}75}$;

$5^{-4x}<5^{0{,}5x^2+1{,}875}$;

$-4x<0{,}5x^2+1{,}875$;

$0{,}5x^2+4x+1{,}875>0$;

$x^2+8x+3{,}75>0$;

$D=64-4\cdot 3{,}75=64-15=49$;

$x_1=\frac{-8+\sqrt{49}}{2}=\frac{-8+7}{2}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$; $x_2=\frac{-8-\sqrt{49}}{2}=\frac{-8-7}{2}=\frac{-15}{2}=-7{,}5.$

Відповідь: $x_1=-0{,}5$; $x_2=-7{,}5$.

4. Обчислити значення виразу $\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{25}}\right)^{-\frac{20}{3}}+log_4 9\cdot log_3 4-7^{log_{\sqrt{7}}3}$.

Розв’язання

$\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{25}}\right)^{-\frac{20}{3}} + log_4 9 \cdot log_3 4 - 7^{log_{\sqrt{7}} 3} = \left(\frac{5^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{2}{5}}}\right)^{-\frac{20}{3}} + \frac{1}{log_9 4} \cdot log_3 4 -$

$-7^{log_{7^{\frac{1}{2}}} 3} = \frac{5^{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{20}{3}\right)}}{5^{\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{20}{3}\right)}} + \frac{1}{log_{3^2} 4} \cdot log_3 4 - 7^{log_7 3^2} = \frac{5^{-\frac{5}{3}}}{5^{-\frac{8}{3}}} + \frac{1}{2\,log_3 4} \cdot log_3 4 - 3^2 =$

$= 5^{-\frac{5}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)} + \frac{1}{2} - 9 = 5^1 + \frac{1}{2} - 9 = 5 + \frac{1}{2} - 9 = -3{,}5;$

Відповідь: $\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{25}}\right)^{-\frac{20}{3}} + log_4 9 \cdot log_3 4 - 7^{log_{\sqrt{7}} 3} = -3{,}5.$

5. Розв’язати рівняння $log_{x^3} 25 + log_{25x} 5 = 1.$

Розв’язання

$log_{x^3} 25 + log_{25x} 5 = 1;$

$\frac{1}{log_{25} x^3} + \frac{1}{log_5 25x} = 1;$

$\frac{2}{3\,log_5 x} + \frac{1}{log_5 25 + log_5 x} = 1;$

$\frac{2}{3\,log_5 x} + \frac{1}{2 + log_5 x} = 1;$

$\frac{2\cdot(2+log_5 x)+3\,log_5 x-3\,log_5 x\cdot(2+log_5 x)}{3\,log_5 x\cdot(2+log_5 x)} = 0;$

$\frac{3\,{log_5}^2 x+log_5 x-4=0}{3\,log_5 x\cdot(2+log_5 x)} = 0.$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} 3\,log_5 x \neq 0, \\ 2 + log_5 x \neq 0. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} log_5 x \neq 0, \\ log_5 x \neq -2. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x \neq 1, \\ x \neq 5^{-2}. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x \neq 1, \\ x \neq \frac{1}{25}. \end{array}\right.$

$3\,{log_5}^2 x + log_5 x - 4 = 0.$

Вводимо нову змінну $log_5 x = t$

$3t^2 + t - 4 = 0;$

$D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 1 + 48 = 49;$

$t_1 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2\cdot 3} = \frac{-1+7}{6} = \frac{6}{6} = 1;\ t_2 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2\cdot 3} = \frac{-1-7}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}.$

$log_5 x_1 = 1 \qquad log_5 x_2 = -\frac{4}{3}$

$x_1 = 5 \qquad x_2 = \frac{1}{5\sqrt[3]{5}}.$

Відповідь: $x_1 = 5,\ x_2 = \frac{1}{5\sqrt[3]{5}}.$

6. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3^{1+2\,log_3(y-x)} = 4, \\ 2\,log_5(2y-x-12) = log_5(y-x) + log_5(y+x)\,. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 3^{1+2\,log_3(y-x)} = 4, \\ 2\,log_5(2y-x-12) = log_5(y-x) + log_5(y+x)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 + 3^{log_3(y-x)^2} = 4, \\ log_5(2y-x-12)^2 = log_5(y-x)\cdot(y+x)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-x)^2 = 1, \\ (2y-x-12)^2 = y^2 - x^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-x)^2 = 1, \\ 4y^2 - 4yx + x^2 - 48y + 24x + 144 = y^2 - x^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm 1 + x, \\ 3y^2 - 4yx + 2x^2 - 48y + 24x + 144 = 0. \end{cases}$$

Дана система ділиться на дві системи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 + x, \\ 3y^2 - 4yx + 2x^2 - 48y + 24x + 144 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 + x, \\ 3y^2 - 4yx + 2x^2 - 48y + 24x + 144 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 + x, \\ 3(1+x)^2 - 4(1+x)x + 2x^2 - 48(1+x) + 24x + 144 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 + x, \\ 3(-1+x)^2 - 4(-1+x)x + 2x^2 - 48(-1+x) + 24x + 144 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 + x, \\ 3 + 6x + 3x^2 - 4x - 4x^2 + 2x^2 - 48 - 48x + 24x + 144 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 + x, \\ 3 - 6x + 3x^2 + 4x - 4x^2 + 2x^2 + 48 - 48x + 24x + 144 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 + x, \\ x^2 - 22x + 99 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 + x, \\ x^2 - 26x + 195 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння першої системи:

$x^2 - 22x + 99 = 0;$

$D = 22^2 - 4\cdot 99 = 484 - 396 = 88;$

$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{88}}{2} = \frac{22 \pm 2\sqrt{22}}{2} = 11 \pm \sqrt{22}.$

Розв'яжемо квадратне рівняння другої системи:

$x^2 - 26x + 195 = 0;$

$D = 26^2 - 4 \cdot 195 = 676 - 780 = -104.$

Дане рівняння не має розв'язків, бо $D < 0$. Отже друга система не має розв'язків.

$\begin{cases} y = 1 + x, \\ x_{1,2} = 11 \pm \sqrt{22}. \end{cases} \begin{cases} y_{1,2} = 1 + 11 \pm \sqrt{22}, \\ x_{1,2} = 11 \pm \sqrt{22}. \end{cases} \begin{cases} y_{1,2} = 12 \pm \sqrt{22}, \\ x_{1,2} = 11 \pm \sqrt{22}. \end{cases}$

Відповідь: $\left(11 + \sqrt{22}; 12 + \sqrt{22}\right), \left(11 - \sqrt{22}; 12 - \sqrt{22}\right).$

7. Довести тригонометричну тотожність:

$(sin\, x + tg\, x) \cdot (cos\, x + ctg\, x) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x).$

Розв'язання

$(sin\, x + tg\, x) \cdot (cos\, x + ctg\, x) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x);$

$\left(sin\, x + \frac{sin\, x}{cos\, x}\right) \cdot \left(cos\, x + \frac{cos\, x}{sin\, x}\right) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x);$

$\left(\frac{sin\, x \cdot cos\, x + sin\, x}{cos\, x}\right) \cdot \left(\frac{cos\, x \cdot sin\, x + cos\, x}{sin\, x}\right) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x);$

$\left(\frac{sin\, x \cdot cos\, x + sin\, x}{sin\, x}\right) \cdot \left(\frac{cos\, x \cdot sin\, x + cos\, x}{cos\, x}\right) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x);$

$\left(\frac{sin\, x \cdot (cos\, x + 1)}{sin\, x}\right) \cdot \left(\frac{cos\, x \cdot (sin\, x + 1)}{cos\, x}\right) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x);$

$(1 + cos\, x) \cdot (1 + sin\, x) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x);$

$(1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x).$

Отже $(sin\, x + tg\, x) \cdot (cos\, x + ctg\, x) = (1 + sin\, x) \cdot (1 + cos\, x).$

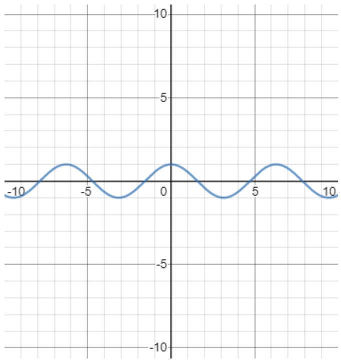
Доведено.

8. Побудувати графік тригонометричної функції:

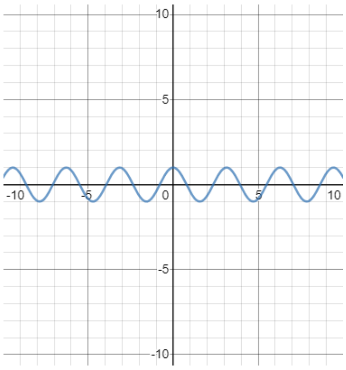
$y = -\frac{1}{4}\, cos \left|2x - \frac{3\pi}{7}\right| + 4.$

Побудова

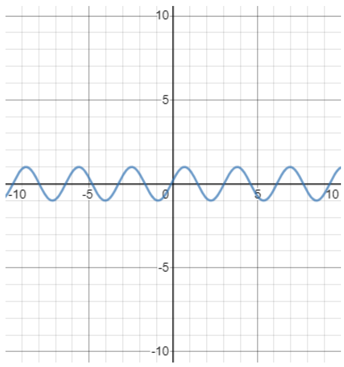
Побудуємо спочатку графік функції $y = cos\, x$



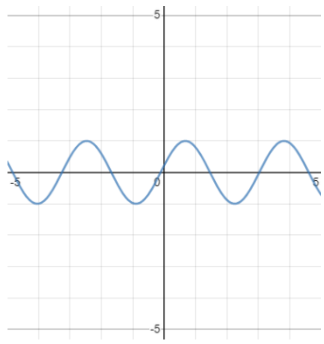
Будуємо графік функції $y = cos\, 2x$, стискаючи графік функції $y = cos\, x$ у 2 рази до осі OY



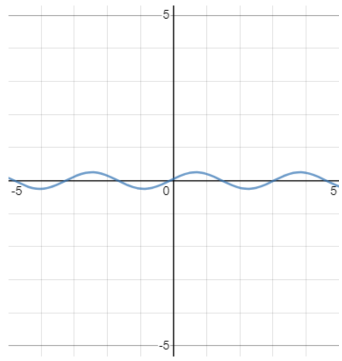
Будуємо графік функції $y = cos\left(2x - \frac{3\pi}{7}\right)$, паралельним переносом графіка функції $y = cos\, 2x$ вздовж осі абсцис на $\frac{3\pi}{7}$ одиниці вправо



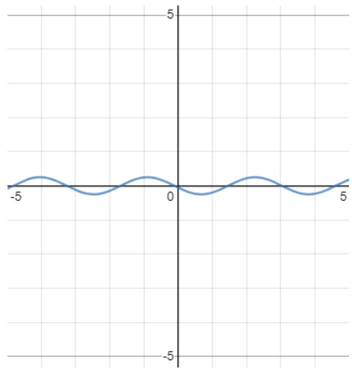
Побудуємо графік функції $y = cos\left|2x - \frac{3\pi}{7}\right|$, частину графіка $y = cos\left(2x - \frac{3\pi}{7}\right)$, яка лежить праворуч осі Ox (і на самій осі) залишити без змін, і саме цю частину від ображаємо симетрично відносно осі Oy.



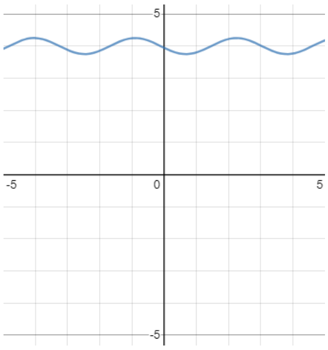
Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{4} cos\ \left|2x - \frac{3\pi}{7}\right|$, стискаючи графік функції $y = cos\ \left|2x - \frac{3\pi}{7}\right|$, у 4 рази до осі OY



Побудуємо графік функції $y = -\frac{1}{4} cos\ \left|2x - \frac{3\pi}{7}\right|$, відбиваємо графік функції $y = \frac{1}{4} cos\ \left|2x - \frac{3\pi}{7}\right|$, симетрично осі OX



Побудуємо графік функції $y = -\frac{1}{4} cos\ \left|2x - \frac{3\pi}{7}\right| + 4$, піднявши графік функції $y = -\frac{1}{4} cos\ \left|2x - \frac{3\pi}{7}\right|$на 4 одиниці в гору



9. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$\sqrt{|sin\,x|} = \sqrt[4]{-|sin\,x|} + tg\,x.$

Розв'язання

ОДЗ цього рівняння складається з усіх x, які задовольняють умовам:
$\begin{cases} -|sin\,x| \geq 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n. \end{cases}$

Тобто $-|sin\,x| \geq 0$, $|sin\,x| \leq 0$, $sin\,x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$.

Отже, ОДЗ даного рівняння є $x = \pi k$, $k \in Z$.

Підставляючи ці значення x в задане рівняння, отримаємо

$\sqrt{|sin\,\pi k|} = \sqrt[4]{-|sin\,\pi k|} + tg\,\pi k;$

$0 = 0$, а це означає, що всі $x = \pi k$, $k \in Z$, є розв'язком цього рівняння. Інших коренів у цього рівняння бути не може, оскільки всі корені рівняння знаходяться в його ОДЗ, а там немає інших значень, крім $x = \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь: $x = \pi k$, $k \in Z$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність: $2\,sin\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot cos\frac{5x}{2} > 0$

Розв'язання

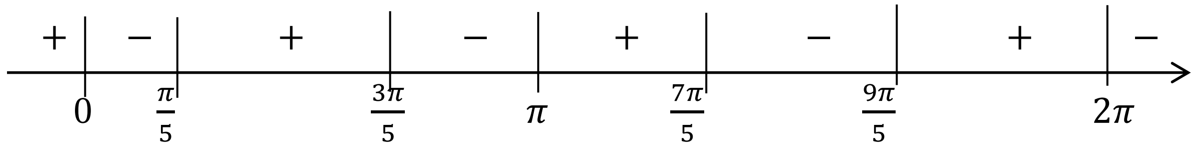
Розглянемо функцію $y = sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{5x}{2}$ – її головний період 2π.

Знайдемо нулі цієї функції на проміжку $[0; 2\pi]$.

$\left[\begin{array}{l} sin\frac{x}{2} = 0; \\ cos\frac{5x}{2} = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi n, n \in Z; \\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z; \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 0;\ x = 2\pi \in [0; 2\pi]; \\ x = \frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \pi; \frac{7\pi}{5}; \frac{9\pi}{5}, \in [0; 2\pi]. \end{array}\right.$

За методом інтервалів розв'яжемо дану нерівність



$x \in \left(\frac{\pi}{5} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{9\pi}{5} + 2\pi n;\ 2\pi +\right.$

$\left.+2\pi n\right), n \in Z.$

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{5} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup$

$\cup \left(\frac{9\pi}{5} + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n\right), n \in Z.$

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{8-x}-2\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2 + \sqrt[3]{8-x}\cdot 2 + 4\right)}{x\cdot\left(\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2 + \sqrt[3]{8-x}\cdot 2 + 4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^3 - 2^3}{x\cdot\left(\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2 + \sqrt[3]{8-x}\cdot 2 + 4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x\cdot\left(\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2 + \sqrt[3]{8-x}\cdot 2 + 4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2 + \sqrt[3]{8-x}\cdot 2 + 4} = \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{8-0}\right)^2 + \sqrt[3]{8-0}\cdot 2 + 4} =$$

$$= \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{2^3}\right)^2 + \sqrt[3]{2^3}\cdot 2 + 4} = \frac{-1}{4+4+4} = -\frac{1}{12}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{12}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = -3\vec{a} + 17\vec{b}$ і $\vec{d} = 12\vec{a} + 9\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 19$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 60°$.

Розв'язання

$\vec{c}\times\vec{d} = \left(-3\vec{a} + 17\vec{b}\right)\times\left(12\vec{a} + 9\vec{b}\right) = -3\cdot 12(\vec{a}\times\vec{a}) - 3\cdot 9\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) +$

$+17 \cdot 12(\vec{b} \times \vec{a}) + 17 \cdot 9(\vec{b} \times \vec{b}) = 177(\vec{a} \times \vec{b})$.

Тоді

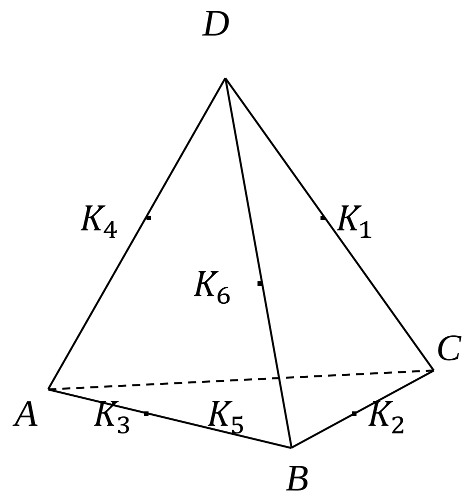
$S = |\vec{c} \times \vec{d}| = |177(\vec{a} \times \vec{b})| = 177|\vec{a} \times \vec{b}| = 177|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\vec{a}^\wedge\vec{b}) =$

$= 177 \cdot 10 \cdot 19 \cdot sin\,60° = 177 \cdot 10 \cdot 19 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16815\sqrt{3}$.

Відповідь: $S = 16815\sqrt{3}$.

13. Довести, що якщо куля дотикається до всіх ребер тетраедра, то суми довжин протилежних ребер тетраедра рівні між собою.

Доведення



Нехай куля дотична до ребер тетраедра $ABCD$ у точках K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6.

Оскільки дотичні, проведені з однієї точки до даної кулі, рівні між собою, то

$DK_1 = DK_6 = DK_4, AK_4 = AK_3 = AK_5,$

$BK_2 = BK_3 = BK_6, CK_1 = CK_2 = CK_5.$

Розглянемо суми S_1 та S_2:

$S_1 = AD + BC,$

$S_2 = DC + AB.$

Оскільки

$AD + BC = AK_4 + DK_4 + BK_2 + CK_2,$

а $DC + AB = DK_1 + CK_1 + AK_3 + BK_3,$

то, враховуючи попередні рівності, маємо, що $S_1 = S_2$.

Аналогічно доводить рівність про сум інших пар ребер тетраедра.

Доведено.

Варіант №1

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $5x^7 - 5x^6 - 9x^5 + x^4 - -8x^2 - 2ax - 3b$ ділиться без остачі на многочлен $5x^2 - 5x - 7$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення $\frac{\sqrt[3]{ab^2} - 2\sqrt[6]{ba^5} + b}{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt{ab}}$, при $a = 6$, $b = 3$.

3. Розв'язати рівняння $4^{x+1} - 5^{x-\frac{3}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-4}$.

4. Розв'язати нерівність $2^{2x-1} + 4^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 9y = 5, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $6^{\overline{log_{\sqrt{2}} 6}^{\,6}} + \frac{1}{3} log_3 27$.

7. Довести тригонометричну тотожність $\frac{cos^3 x - cos\, 3x}{cos\, x} + \frac{sin^3 x + sin\, 3x}{sin\, x} = 3$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції:
$y = |tg\,(-4x + 6\pi)| - 5$.

9. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$4\, sin^2\left(5x - \frac{5\pi}{6}\right) + 2\, sin\left(5x - \frac{5\pi}{6}\right) \cdot cos\left(5x - \frac{5\pi}{6}\right) = 3$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність $\left||tg\,(7x + 2\pi)| - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^3 - 1}}{x^2 + 2x}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = -\vec{a} - 37\vec{b}$ і $\vec{d} = 4\vec{a} + 19\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 9$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 30°$.

13. Довести, що в прямокутному тетраедрі $ABCD$ радіус вписаної куля r обчислюється за формулою $r = \frac{S_б - S}{p}$, де $S_б$ – площа бічної поверхні, p – сума довжин ребер, які утворюють прямі кути при вершині D, S – площа основи ABC.

Варіант №2

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $4x^9 - 16x^7 - 9x^7 + 52x^5 - -45x^3 + x^2 + ax - 7b$ ділиться без остачі на многочлен $2x^3 - x^2 + 4x - 1$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення:
$\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{8}} + b^{\frac{1}{8}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{8}} - b^{\frac{1}{8}}\right)$ при $a = 5$, $b = 2$.

3. Розв’язати нерівність $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$.

4. Розв’язати рівняння $lg\, x - lg(x^2 - 4) = lg(x + 2) + lg\, 3$.

5. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} y^3 + x^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot log_6 7 \cdot log_7 32$.

7. Довести тригонометричну тотожність:
$cos^2 x - cos^4 x + sin^4 x = sin^2 x$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції $y = \left| cos\left(\frac{1}{5}|x| - \pi\right)\right|$.

9. Розв’язати тригонометричне рівняння:
$3\, sin(3x - \pi) + 4\, cos(3x - \pi) = 5$.

10.Розв’язати тригонометричну нерівність:
$sin^6 6x + cos^6 6x + 2\, sin\, 3x \cdot cos\, 3x \geq 0$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, 5x}{x}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = -2\vec{a} + 37\vec{b}$ і $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 15$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 900°$.

13. У ортоцентричному тетраедрі проведно три відрізки, кожний з яких перпендикулярний до двох протилежних ребер, а кінці відрізків

належать цим ребрам. Довести, що: 1) ці відрізки перетинаються в ортоцентрі тетраедра; 2) ортоцентр тетраедра ділить ці відрізки, як і висоти тетраедра, на частини, добуток яких сталий; 3) кінці цих відрізків належать сфері.

Варіант №3

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $13x^7 + x^6 + 23x^4 +$ $+13x^3 + 6x^2 + 18ax - 5b$ ділиться без остачі на многочлен $-x^2 - 4x - 15$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення:

$\left(\frac{2x+\sqrt{x}\sqrt{y}}{3x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}{x-\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$, при $x = 5$, $y = 7$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{x^2}{x^2+1} - x = \frac{2-x^3}{x^2+1}$.

4. Розв'язати нерівність $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y - log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $15\, log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7}\cdot\frac{1}{49}\cdot 5^{log_{\sqrt{5}}\sqrt[4]{49}}\right)$.

7. Довести тригонометричну тотожність:

$ctg^2 x - cos^2 x = cos^2 x \cdot ctg^2 x.$

8. Побудувати графік тригонометричної функції $y = 2\,sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}$.

9. Розв'язати тригонометричне рівняння $cos^4 x - sin^4 x = 0$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність:

$\frac{5}{9} + sin^2 x + \frac{5}{9}(3 - cos\, x)^2 > 0.$

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{d} = -56\vec{a} + 8\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 23$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}\,^\wedge\vec{b}) = 270°$.

Продовження додатку Д

13. Довести, що коли відстані між мимобіжними ребрами тетраедра d_1, d_2, d_3, то об'єм тетраедра не менший ніж $\frac{1}{3} d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$.

Варіант №4

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $-x^7 + 16x^5 + 72x^4 + +20x^3 + x^2 - 3ax + 20b$ ділиться без остачі на многочлен $-10x^2 + x - 16$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$, при $x = 0{,}6$, $y = 2$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{(x+2)\cdot(x+3)}$.

4. Розв'язати нерівність $9^x - \frac{28}{3^{2x-1}} + \frac{1}{3} \geq 0$.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ lg(x+y)^2 - lg\, x = 2\, lg\, 3\,. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $log_9 10 \cdot lg\, 11 \cdot log_{11} 12 \cdot log_{12} 27$.

7. Довести тригонометричну тотожність $\frac{sin\, x}{1-cos\, x} + \frac{sin\, x}{1-cos\, x} = \frac{2}{sin\, x}$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції:
$y = \frac{2}{9}\left| ctg\left(6|x| + \frac{\pi}{8}\right)\right|$.

9. Розв'язати тригонометричне рівняння $sin\sqrt{x} + cos\sqrt{-x} = 1$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність:
$|3\, sin^2 x + 2\, sin\, x \cdot cos\, x + cos^2 x + 1| \leq 3$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x \cdot \sqrt{x} - 45}{\sqrt{4x^2 - 6x - 7}}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = \vec{a} + 13\vec{b}$ і $\vec{d} = -\vec{a} - 17\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 25$, $|\vec{b}| = 27$, $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = 150°$.

13. Довести, що у рівногранному тетраедрі сума косинусів усіх двогранних кутів дорівнює 2.

Варіант №5

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $24x^9 - 9x^8 + 16x^7 + +45x^4 + 5x^3 + 28x^2 - ax - 6b$ ділиться без остачі на многочлен $12x^2 - 8x - 11$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення $\left(\sqrt{x}\sqrt{y} - \frac{xy}{x+\sqrt{x}\sqrt{y}}\right) : \frac{\sqrt[4]{xy}-\sqrt{y}}{x-y}$, при $x = 10$, $y = 49$.

3. Розв'язати нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1 < 0$.

4. Розв'язати рівняння $log_2(9x^2 - 20) - 2 = log_2 6 + log_2 x$.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}log_9 4} + 25^{log_{125} 8}\right) \cdot 49^{log_7 2}$.

7. Довести тригонометричну тотожність $(tg^2 x - sin^2 x) \cdot \frac{ctg^2 x}{sin^2 x} = 1$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції:
$y = \frac{2}{9}\left| ctg\left(-6|x| + \frac{\pi}{8}\right)\right|$.

9. Розв'язати тригонометричне рівняння $3\,sin\,x - 4\,cos\,x = 5$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність:
$-6(2\,cos^2 x - 1)^2 + 36\,sin\,x \cdot cos\,x + 10 > 0$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(n+3)^2}{4+7+10+\ldots+(3n+1)}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = 12\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{d} = -7\vec{a} + \vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 16$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 30°$.

13. Довести, що відношення синусів плоских кутів будь-якого із тригранних кутів тетраедра дорівнює оберненому відношенню синусів відповідних лінійних кутів двогранних кутів тетраедра.

Варіант №6

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $16x^7 - 17x^5 - 5x^4 +$ $+2x^3 + 3x^2 - 5ax + 3b$ ділиться без остачі на многочлен $-x^2 + 11x - 8$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}+1} - \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right) : \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}$, при $x = 64$.

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} + \sqrt{22-x} = 7$.

4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq x - 2$.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} lg(x^2 + y^2) = 2, \\ log_{48} x + log_{48} y = 1. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $3^{\frac{2}{log_{\sqrt{5}} 3} + \frac{1}{4} log_3 16}$.

7. Довести тригонометричну тотожність $\sqrt{\frac{1+cos\,x}{1-cos\,x}} - \sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}} = 2ctg\,x$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції $y = -\frac{1}{5} cos|3x + 5\pi|$.

9. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$cos^2\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність $\frac{tg\,x}{tg\,x+2} - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{tg\,x+2}$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = 6\vec{a} - 27\vec{b}$ і $\vec{d} = -7\vec{a} - 5\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 10$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 60°$.

13. Довести, що коли всі двогранні кути тетраедра рівні між собою, то тетраедр – правильний.

Варіант №7

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $-28x^9 - 6x^8 + 23x^6 +$ $+76x^5 - 10x^4 + x^3 - 10x^2 - 2ax + 8b$ ділиться без остачі на многочлен $-2x^2 + 24x - 8$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення $\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}}$, при $x=8$, $y=2$.

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-12x+36}=8$.

4. Розв'язати нерівність $25^x-4\cdot 5^x-5\geq 0$.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} log_{\frac{1}{3}}x+log_{\frac{1}{3}}y=2, \\ log_{\frac{1}{3}}x+log_{\frac{1}{3}}y=4. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $49^{0,5(log_7 9-log_7 6)}-16\cdot 5^{-log_{\sqrt{5}}4}$.

7. Довести тригонометричну тотожність $\frac{\sqrt{1-sin^2 x}}{sin\,x}=\frac{cos\,x}{\sqrt{1-cos^2 x}}$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції:

$y=-\left|tg\left(-\frac{3}{4}|x|\right)\right|-7$.

9. Розв'язати тригонометричне рівняння $sin(7x)+12\,cos(7x)=7$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність:

$cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{6}{cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)-1}<\frac{2\left(-2\,cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)+1\right)}{cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)-1}$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c}=12\vec{a}+10\vec{b}$ і $\vec{d}=-7\vec{a}+8\vec{b}$ якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=56$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b})=270°$.

13. Довести, що кут φ між мимобіжними ребрами a й a_1 тетраедра $ABCD$ обчислюється за формулою $\cos\varphi=\frac{|-b^2-{b_1}^2+c^2+{c_1}^2|}{2aa_1}$.

Варіант №8

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $14x^7+x^5-18x^4-9x^3+$ $+12x^2-10ax-2b$ ділиться без остачі на многочлен $7x^2-3x+1$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення:

$\left(\frac{1-y^{-2}}{y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{y^2}+\frac{y^{-2}-y}{y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{y^2}\right)^{-2}$, при $x=8$, $y=0,5$.

3. Розв’язати рівняння $\frac{1}{5-lg\,x}+\frac{2}{1+lg\,x}=1$.

4. Розв’язати нерівність $lg\,\sqrt{3x-5}+\frac{1}{2}lg(2x-4)<2-lg\,5$.

5. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases}\frac{1}{lg\,y-1}+\frac{1}{lg\,y+1}=2^{-x},\\ lg^2y-2^x=5.\end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $20^{\frac{1}{2\,log_{81}5}}\cdot(0{,}25)^{\frac{1}{2\,log_{81}5}}$.

7. Довести тригонометричну тотожність $\frac{1-sin\,2x}{(sin\,x-cos\,x)^2}=1$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції: $y=cos\left|3x-\frac{1}{3}\right|+5$.

9. Розв’язати тригонометричне рівняння $sin^2\,3x-sin\,3x=0$.

10. Розв’язати тригонометричну нерівність $5\,sin\,x+cos\,2x<3$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c}=\vec{a}-34\vec{b}$ і $\vec{d}=-6\vec{a}-7\vec{b}$ якщо $|\vec{a}|=46$, $|\vec{b}|=8$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=120°$.

13. Довести, що проекція Q вершини рівногранного тетраедра на протилежну грань належить прямій Ейлера цієї грані, причому $OQ=OH$ (O – центр кола, описаного навколо грані, H – ортоцентр грані).

Варіант №9

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $60x^8-4x^7+3x^5-$ $-13x^3+2x^2-7ax+6b$ ділиться без остачі на многочлен $30x^2-x+3$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення:

$\frac{\sqrt{x}-2}{4x-16\sqrt{x}+16}:\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-4}-\frac{x-12}{2x-8}-\frac{2}{x+2\sqrt{x}}\right)$, при $x=4$.

3. Розв’язати нерівність $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2}<8\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{16-2x}$.

4. Розв’язати рівняння $log_{81}\,x+log_{27}\,x+log_9\,x=\frac{13}{12}$.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^{2x} - 2^{y} = 725, \\ 3^{x} - 2^{\frac{y}{2}} = 25. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $log_6 34 - log_6 17 + log_6 18$.

7. Довести тригонометричну тотожність $\frac{1+cos\,4x+sin\,4x}{1-cos\,4x+sin\,4x} = ctg\,2x$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції:

$y = -9\left|sin\left(-\frac{3}{8}x + \frac{3\pi}{4}\right)\right|$.

9. Розв'язати тригонометричне рівняння $cos\,x + cos\,3x = 0$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність:

$sin^2 2x + cos\frac{x}{2} + 6\,sin\,5x \geq 7$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c} = -8\vec{a} + 7\vec{b}$ і $\vec{d} = 21\vec{a} - 4\vec{b}$ якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 50$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 60°$.

13. У тетраедрі $ABCD$ a і a_1, b і b_1, c і c_1 – довжини протилежних ребер. Довести, що $m_D = \frac{1}{3}\sqrt{3\left({a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2\right) - (a^2 + b^2 + c^2)}$.

Варіант №10

1. Знайти, за яких значень a і b многочлен $34x^7 - 6x^5 + 14x^4 + +8x^3 + 4x^2 + 12ax - 4b$ ділиться без остачі на многочлен $2x^2 - 6x - 10$. У відповідь записати суму значень a і b.

2. Спростити та обчислити його значення $\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}\right)^{-1} - \frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, при $x = 13$.

3. Розв'язати рівняння $log_x \sqrt{5} + log_x 5x - 2{,}25 = {log_x}^2 \sqrt{5}$.

4. Розв'язати нерівність:

$|65 - 5x| - |7 - x| + 5|12x + 6| - 6|5x^2 - 125| \leq |4x - 8|$.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 10^{1+lg(x+y)} = 50, \\ lg(x+y) + lg(x-y) = 2\,lg\,5\,. \end{cases}$

6. Обчислити значення виразу $(15+3^{1+log_3 4})\cdot log_2\sqrt{3}\cdot log_3 4$.

7. Довести тригонометричну тотожність $\frac{1}{1+sin\,x\cdot cos\,x}=\frac{1+tg^2x}{1+tg\,x+tg^2x}$.

8. Побудувати графік тригонометричної функції $y=tg\,\left|7x-\frac{3\pi}{7}\right|-6$.

9. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$sin^x\,x-4\,sin\,x\cdot cos\,x++3\,cos^2\,x=0$.

10. Розв'язати тригонометричну нерівність $cos\,2x+cos\frac{3x}{2}\geq 2$.

11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{cos\,5x-cos\,3x}$.

12. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{c}=14\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{d}=-2\vec{a}-5\vec{b}$ якщо $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=28$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b})=120°$.

13. У сферу вписаний правильний тетраедр. Довести, що точка, діаметрально протилежна одній з вершин тетраедра, рівновіддалена від площин його граней.