Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Місце і роль дисципліни «Диференціальні рівняння з частинними похідними» при підготовці фахівців спеціальності Середня освіта (Математика)

Виконав: студент 2 курсу магістратури групи М-2
Спеціальності : 014 Середня освіта (Математика)
Коханевич Ольга Василівна

Науковий керівник:
доктор технічних наук, професор Бичков О.С.

Рецензент: доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики НУВГП Мартинюк П.М.

Рівне-2021

Зміст

Вступ

Математичний опис різноманітних законів у природі найбільш адекватно здійснюється за допомогою диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь з частинними похідними зокрема.

Вперше математично моделювати властивості навколишнього середовища спробували І. Ньютон і Г. Лейбніц, саме тоді Горфід Вільям застосував термін „диференціальні рівняння”. А в XVIII столітті „диференціальні рівняння” розглядали як самостійну наукову дисципліну. Велику роль у розвитку теорії „диференціальних рівняння” відіграв Л. Ейлер. Саме він ввів поняття „повного ”, „ часткового” та „ особливого” розв’язку звичайного диференціального рівняння. Леонард широко розвинув метод інтегруючого множника, метод розв’язання однорідного лінійного диференціального рівняння за допомогою характеристичного рівняння та метод наближеного обчислення звичайного диференціального рівняння.

Із історією розвитку диференціальних рівнянь з частинними похідними, в цій області Л. Ейлер мав значні успіхи. Велика частина досліджень була присвячена рівнянням першого порядку. Паралельно з цим багато задач механіки і фізики часто підводило Ейлера до рівнянь другого і вищих порядків. Особливістю рівнянь з частинними похідними було те, що в розв’язку з’явилася похідна функція. Це вперше помітив Жан ле Рон Даламбер, але саме Ейлер використовував похідну функцію для початкових даних, завдяки цьому вдалося дослідити до кінця поставлені задачі.

Великий вплив на розвиток математичної фізики здійснив Д. Бернуллі. Йому належить загальний метод розв’язання задач про коливання струни. Розквіт математичної фізики припадає на початок століття пов’язано з іменами Пуассона, Фур’є, Коші і Остроградського.

Загальна увага була присвячена існуванню розв'язку диференціального рівняння. По відношенню до звичайного рівняння перші результати отримані Коші, а по відношенню до рівнянь в частинних похідних - С. Ковалевської.

В кінці минулого століття в зв'язку з потребами механіки і астрономії з'явилися дослідження якості теорії звичайних диференціальних рівнянь.

В останній час збільшився вплив на рівняння з частинними похідними з сторони молодих аналітичних дисциплін – теорії функціональних змінних і функціонального аналізу. Цей вплив привів до важливих конкретних результатів даної теорії рівнянь.

Актуальність теми полягає у необхідності в умовах КТСОНП впроваджувати навчально-методичне забезпечення, як один із засобів для підвищення якості знань студентів, активізація їх пізнавальної діяльності, самопідготовки.

Мета і завдання: **Метою** дослідження була розробка навчально-методичного забезпечення з теми «Рівняння з частинними похідними» у вищій школі в умовах кредитно-трансферної системи організації навчального процесу, що містить по два розв'язаних приклади та по 25 варіантів до кожної з тем для індивідуальної роботи студентів при вивченні курсу «Рівняння з частинними похідними» в умовах кредитно-трансферної системи Болонського процесу та провести аналіз отриманих результатів.

У відповідність з метою були поставлені такі **завдання:**

- систематизувати теоретичний аналіз літератури з даної теми;
- проаналізувати і узагальнити передовий досвід роботи викладачів математики РДГУ та провідних вузів України;
- розробити електронну версію методичного посібника.

Об'єктом даної роботи є зміст і методика занять з дисципліни в умовах кредитно-трансферної системи організації навчання.

Предмет – навчально-методичне забезпечення викладання теми «Рівняння з частинними похідними».

Об'єм і зміст роботи: Магістерська робота складається із змісту, вступу, трьох розділів, висновку та списку використаних джерел.

У вступі розкривається актуальність магістерської роботи.

У першому розділі роботи міститься основні положення кредитно-трансферної системи Болонського процесу та його перспективи для студентів.

У другому розділі роботи міститься короткий опис робочих навчальних програм з теми «Рівняння з частинними похідними» та курсу «Диференціальні рівняння».

У третьому розділі роботи – теоретичні відомості даного курсу, приклади розв'язування типових задач, 25 індивідуальних завдань до кожної наведеної теми, що розкривають робочі програми, які відповідають навчальному матеріалу курсу для студентів. Аналіз успішності з дисципліни в рамках кредитно-трансферної системи організації навчального матеріалу.

Апробація роботи: Результати роботи доповідалися на звітно-наукових конференціях студентів та викладачів 2020-2021 років, проведення лекційних та практичних занять під час асистентської практики за матеріалами методичного посібника.

РОЗДІЛ І КРЕДИТНО-ТРАНСФЕРНА СИСТЕМА ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ – ФУНДАМЕНТАЛЬНА СКЛАДОВА БОЛОНСЬКОГО ПРОЦЕСУ

1.1. Основні положення кредитно-трансфеної системи організації навчального процесу (КТСОНП)

Процеси європейської інтеграції охоплюють дедалі більше сфер життєдіяльності, включно вищу освіту. Україна чітко визначила орієнтир на входження в освітній і науковий простір Європи, здійснює модернізацію освітньої діяльності в контексті європейських вимог, дедалі наполегливіше працює над практичним приєднанням до Болонського процесу.

Подальші соціально-економічні й політичні зміни в суспільстві, зміцнення держави України, входження її в цивілізоване світове співтовариство неможливе без структурної реформи національної системи вищої освіти, спрямованої на забезпечення мобільності, працевлаштування та конкурентної спроможності фахівців з вищою освіти.

Однією із передумов входження України до єдиної Європейської зони вищої освіти є реалізація системою вищої освіти України ідей Болонського процесу [1].

Поступово створювалися умови для інтеграційних процесів у сфері вищої освіти європейських країн. Україна була і є активним учасником цих процесів. Обрані шляхи модернізації вищої освіти України співзвучні загальноєвропейським підходам. Принципи Болонської декларації повною мірою вирішено запровадити у 2010 році, а 2005-й визначено як проміжний етап моніторингу зробленого.

Загалом визначальними критеріями освіти в рамках Болонського процесу є: якість підготовки фахівців; зміцнення довіри між суб`єктами освіти; відповідність європейському ринку праці; мобільність; сумісність кваліфікації на вузівському та післявузівському етапах підготовки; посилення конкурентоспроможності Європейської системи освіти.

Участь системи вищої освіти України в Болонських перетвореннях має бути спрямована лише на її розвиток і набуття нових якісних ознак, а не на втрату кращих традицій, зниження національних стандартів її якості. Орієнтація на Болонський процес не має призводити до надмірної перебудови вітчизняної системи освіти. Навпаки, її стан треба глибоко осмислити, порівнявши з європейськими критеріями і стандартами, та визначити можливості її вдосконалення на новому етапі. При цьому еволюцію системи освіти не слід відокремлювати від інших сфер суспільства. Вона має розвиватися в гармонійному взаємозв'язку з суспільством в цілому, беручи на себе роль його провідника [9].

Положення про кредитно-трансферну систему організації навчального процесу в РДГУ визначає особливості організації навчального процесу в умовах впровадження ідей Болонського процесу [20].

Метою реалізації Європейської кредитно трансферної системи є підвищення якості вищої освіти фахівців і забезпечення на цій основі конкурентоспроможності випускників та престижу української вищої освіти на освітньому і науковому європейському і світовому просторі, запровадження стандартів, рекомендацій і основних інструментів Європейської вищої освіти після 2010 року, що сприятимуть сумісності, порівнянності, визнанню періодів та термінів навчання у вищих навчальних закладах України.

Основними завданнями, реалізація яких передбачається в рамках Європейської кредитно трансферної системи є:

- адаптація ідей ЄКТС до системи вищої освіти України для забезпечення мобільності студентів у процесі навчання та гнучкості підготовки фахівців, враховуючи швидкозмінні вимоги національного та міжнародного ринків праці;

- забезпечення прозорості навчальних програм і створення умов для можливості порівняння навчальних програм в різних університетах та різних країнах Європейського Союзу;

- реалізація ЄКТС як базового інструменту для зарахування навчальних дисциплін, опрацьованих студентами в інших університетах або базовому навчальному закладі;

- забезпечення можливості навчання студента за індивідуальною варіативною частиною освітньо-професійної програми, що сформована на основі вимог замовників та побажань студента і сприяє його саморозвитку і, відповідно, підготовці до життя у вільному демократичному суспільстві;

- стимулювання учасників навчального процесу з метою досягнення високої якості вищої освіти;

- унормування порядку надання студентові можливості отримати професійні кваліфікації відповідно до ринку праці.

Європейська кредитно трансферна система забезпечує прозорість та можливість порівняння навчальних програм наступними засобами:

1. Введенням Кредитів ЄКТС, які є числовими еквівалентами для окреслення обсягу навчального навантаження студентів, необхідного для повного засвоєння відповідної навчальної дисципліни.

2. Створенням Інформаційного пакету, який надає письмову ін- формацію студентам і працівникам про навчальні заклади, факультети, організації, структуру навчальної програми та окремих дисциплін.

3. Забезпечення кожного студента Описом навчальних досяг- нень (академічною довідкою), який показує здобутки студентів у на- вчанні у спосіб, який є загальноприйнятим та загальнозрозумілим, і може легко передаватися від одного закладу до іншого.

4. Підписанням Академічної угоди, яка стосується навчальної програми і кредитів ЄКТС, які будуть присвоюватись за успішне її закінчення. Навчальний контракт є обов'язковим як для навчального закладу, що

скеровує студента на навчання, так і для приймаючого, а також і для студентів.

Суть всеєвропейської системи трансферу та накопичення кредитів у забезпеченні прозорості та взаємозв'язків поміж різними освітніми системами, що означає:

- можливість застосування для всіх секторів та рівнів вищої освіти; охоплення всіх форм навчання;
- доступ на ринок праці з різних рівнів; узгодження із іншими, неєвропейськими освітніми системами;
- сприяння мобільності студентів, громадян та їх кваліфікацій;
- сприяння використанню навчальних технологій, орієнтованих на студента;
- визнання та зарахування попередньої освіти та попереднього практичного досвіду;
- можливість інтегрування нових програм та методів навчання;
- забезпечення чіткого визначення рівнів та типів кредитів;
- збереження національної та інституційної академічної автономії [48].

Європейська *кредитно-трансферна система (European Credit Transfer System – ECTS)* – це система, яка розроблена для забезпечення єдиного загальноєвропейського підходу до оцінювання та порівняння навчальних досягнень студентів (слухачів та курсантів), що навчаються в різних вищих навчальних закладах, та їхнього академічного визнання. За своєю суттю ECTS не регулює змісту, структури або еквівалентності освітньо-професійних програм. Ці питання відносяться до питань якості і визначаються самими навчальними закладами. ECTS забезпечує прозорість і сприяє визнанню освіти [51].

Кредит – одиниця вимірювання часу, необхідного студенту для засвоєння певної складової навчальної програми. Кредит враховує всі форми навчального навантаження студента: аудиторні заняття, самостійну роботу, індивідуальну роботу, підготовку до іспитів, науково-дослідницьку роботу тощо.

Заліковий кредит (ЗК) – одиниця виміру навчального навантаження студента, необхідного для засвоєння змістових модулів або блоку змістових модулів. Кредит є відносною одиницею і вимірює час, в середньому необхідний студенту для засвоєння змістового модуля. Кредит враховує всі форми навчального навантаження студента: аудиторні заняття, самостійну роботу, підготовку до екзаменів, науково-дослідницьку роботу, олімпіади тощо. Для денної форми навчання загальна кількість кредитів за навчальний рік становить 60.

Куратор ЄКТС від університету – особа, яка відповідає за виконання вищим навчальним закладом норм ЄКТС, сприяє практичному втіленню ЄКТС та координує роботу кураторів ЄКТС від факультетів.

Куратор ЄКТС від факультету – науково-педагогічний працівник, який координує роботу кураторів, відповідає за підготовку інформаційного пакету за навчальними напрямами і спеціальностями [45].

Рейтингова система оцінювання – система визначення якості виконаної студентом навчальної роботи та рівня набутих ним знань і вмінь, що передбачає оцінювання в балах усіх результатів, досягнутих під час поточного, модульного та семестрового контролю.

Трансфер кредитів – «перенесення кредитів» присвоєних з однієї програми на іншу, запропоновану тим самим або іншим навчальним закладом у розумінні визнання вищим навчальним закладом залікових одиниць або кваліфікацій отриманих студентом (в тому числі закладі іншої країни) раніше.

Враховуючи вище наведений термінологічний ряд, можна назвати основні принципи впровадження європейської кредитно-трансферної системи освіти в навчальний процес університету.

Принцип порівняльної трудомісткості кредитів – досягнення кожним студентом встановлених ЄКТС норм, які забезпечують академічну мобільність студентів, державне й міжнародне визнання результатів освіти на конкретних етапах виконання індивідуального навчального плану.

Принцип кредитності - декомпозиція змісту освіти й навчання на відносно єдині та самостійні за навчальним навантаженням студентів сегменти, які забезпечують:

а) на рівні індивідуального навчального плану – набір (акумулювання) відповідної трудомісткості кількості кредитів, які узгоджені з установленою нормою виконання студентом навчального навантаження в умовах кредитно-модульної організації навчального процесу;

б) на рівні вивчення навчальної дисципліни – набір (акумуляція) відповідної для цієї дисципліни кількості кредитів, що включає в себе виконання необхідних видів діяльності, які передбачені програмою вивчення навчальної дисципліни.

Принцип модульності – організація процесу оволодіння студентом змістовими модулями і виявлення специфічного для модульного навчання використання методів і прийомів навчально-виховних заходів, основним змістом яких є активна самостійно-творча пізнавальна діяльність студента.

Принцип методичного консультування – наукове та інформаційно-методичне забезпечення діяльності учасників освітнього процесу.

Принцип організаційної динамічності – забезпечення можливостей зміни змісту навчання з урахуванням динаміки соціального замовлення і потреб ринку праці.

Принцип гнучкості та партнерства передбачає побудову системи освіти таким чином, щоб зміст навчання і шляхи досягнення цілей освіти та професійної підготовки відповідали індивідуальним потребам і можливостям студента.

Принцип пріоритетності змістової і організаційної самостійності та зворотного зв'язку ґрунтується на створенні умов організації навчання, що вимірюється та оцінюється результатами самостійної пізнавальної діяльності студентів.

Принцип науковості та прогностичності полягає у побудові (встановленні) стійких зв'язків змісту навчання з науковими дослідженнями.

Принцип технологічності та інноваційності потребує використання ефективних педагогічних та інформаційних технологій, що сприяє якісній підготовці фахівців із вищою освітою та входженню в єдиний інформаційний та освітній простір.

Принцип усвідомленої перспективи забезпечується створенням умов для глибокого розуміння студентом цілей освіти та професійної підготовки, а також можливості їх успішного досягнення.

Принцип діагностичності - можливість оцінювання рівня досягнення та ефективності, цілей освіти та професійної підготовки, сформульованих і реалізованих у КМСОНП [51].

1.1.1. Інформаційно-освітнє середовище університету в умовах дистанційного навчання

Відповідно до положень що створені в університеті які ґрунтуються на основних засадах положень «Положення про організацію освітнього процесу у Рівненському державному гуманітарному університеті», «Положення про систему внутрішнього забезпечення якості вищої освіти в РДГУ» та «Положення про змішане навчання» розроблено Положення про інформаційне освітнє середовище.

Інформаційне освітнє середовище університету – це системно організована сукупність інформаційного, технічного, навчально-методичного забезпечення у вигляді технічних і програмних засобів накопичення, зберігання, обробки та передачі інформації, що забезпечує оперативний доступ до навчальних ресурсів і здійснює освітні чи наукові комунікації між адміністрацію університету, науково-педагогічними працівниками, студентами та слухачами.

Метою створення інформаційного освітнього середовища університету є:

– сприяння реалізації місії університету щодо широкої доступності до одержання якісної освіти;

– залучення нового контингенту студентів та користувачів освітніх послуг;

– організація навчального процесу за денною, заочною, дистанційною формами навчання для студентів і слухачів системи підвищення кваліфікації за сучасними інформаційними технологіями;

– доступ споживача до відкритих навчальних матеріалів та відповідної документації з будь якого місця в зручний час для забезпечення гнучкості процесу навчання;

– забезпечення умов для самостійної роботи і самонавчання;

– підтримка широкого впровадження принципів академічної мобільності студентів;

– підвищення конкурентоспроможності університету в українському та міжнародному науково-освітянському просторі, що дозволить забезпечити позитивну динаміку рейтингу університету в світі та підвищить його вебометричні показники [52].

Відповідно до даного положення та у зв’язку з дистанційною формою навчання студентів, викладачі університету працюють на різних онлайн платформах таких як: Moodle, Zoom, Google meet, Google Classroom і т.ін..

1.2. Організаційно-методичне забезпечення КТСОНП

Для підготовки фахівців при кредитно-трансферній системі організації навчального процесу можуть бути використані традиційні форми занять: лекції, практичні, лабораторні та семінарські заняття, курсове та дипломне проектування, навчальні і виробничі практики, консультації, заліки, екзамени. Однак усі ці організаційні форми навчання в умовах КТСОНП набувають певної специфіки, яку потрібно зрозуміти і реалізувати.

Основними принципами побудови ECTS є:

– дотримання автономії країн і ЗВО у сфері освітньої політики;

– поліпшення міжнародної «прозорості» існуючих національних освітніх систем і кваліфікацій;

– сумісність з будь-якою національною-регіональною освітньою системою, в якій може діяти або не діяти система кредитів;

– застосування до всіх видів програм і форм навчання у ЗВО (денна, заочна, вечірня, дистанційна, екстернат), а також навчання протягом усього життя;

– використання і розвиток існуючих параметрів системи ECTS: кредитів, міжнародного перезарахування залікових кредитів, інформаційного пакета, реєстрації оцінок та ін.;

– сумісність із загальноєвропейським «Додатком до диплома» (Diploma Supplement), що пояснює і робить прозорими академічні та професійні кваліфікації ЗВО.

Ключовими елементами КТСОНП є залікові кредити як міра трудомісткості та якості навчальної роботи студента і стимулююча бально-рейтингова система оцінювання в сполученні з прогресивними принципами педагогічного менеджменту. Основними принципами педагогічного менеджменту є:

–чітко поставлені ідеали і цілі освіти;

–педагогічне проектування навчального процесу;

–компетентна консультація;

–оперативний, надійний (об'єктивний), повний, точний і постійний контроль навчальних досягнень та їх облік;

–справедливе ставлення до студентів;

–взаємна дисциплінованість викладачів і студентів;

–заохочення студентів (у балах та з використанням моральних засобів, що стимулюють мотивацію до навчання) за якісне і своєчасне виконання навчальних завдань;

–наявність у викладачів і студентів чітко відпрацьованих стандартних інструкцій та їх суворе дотримання, що сприяє підвищенню якості спільної роботи студентів і викладачів, об’єктивності взаємного контролю, передбачуваності одержуваних студентом оцінок.

З погляду функціональних аспектів система залікових кредитів є основою:

–індивідуально-орієнтованої організації навчального процесу, що надає студентам можливість самостійного складання індивідуального змісту навчання, визначення послідовності засвоєння певних дисциплін, складання особистих семестрових розкладів навчальних занять;

–формування і постійного розвитку навчальних планів, програм і стандартів вищої освіти;

–розширення академічних свобод викладачів.

Нормативний термін навчання визначається на підставі галузевих стандартів вищої освіти. Граничний термін може перевищувати нормативний на 1 рік. Різниця між граничним і нормативним термінами не фінансується з державного бюджету. Формами організації навчального процесу в умовах кредитно-трансферної системи є лекційні, практичні, семінарські, лабораторні, індивідуальні заняття, всі види практик та консультацій, виконання самостійних завдань та інші форми і види навчальної та науково-дослідницької діяльності студентів. На основі навчального плану спеціальності формується індивідуальний навчальний план студента, який включає нормативні та вибіркові змістові модулі, що можуть, поєднуватися у певні навчальні дисципліни.

Нормативні змістові модулі необхідні для виконання вимог нормативної частини освітньо-кваліфікаційної характеристики.

Вибіркові змістові модулі забезпечують підготовку згідно з варіативною частиною освітньо-кваліфікаційної характеристики, у тому числі відповідність обсягу підготовки, передбаченому нормативним терміном навчання. Вони дають можливість здійснювати підготовку за спеціалізацією певної спеціальності та академічній мобільності і поглибленій підготовці в напрямах, визначених характером майбутньої діяльності.

Сукупність нормативних змістових модулів визначає обов'язкову складову індивідуального навчального плану студента. Змістові модулі нормативних навчальних дисциплін гуманітарного та соціально-економічного циклу і природничо-наукового циклу при підготовці студентів на споріднених напрямах повинні бути уніфікованими у встановленому порядку.

Спорідненість напрямів підготовки визначається спільністю переліку змістових модулів, які відносяться до нормативної складової індивідуального навчального плану студента цих напрямів підготовки, різниця між обсягами необхідних змістових модулів може бути засвоєна студентом у межах граничного терміну підготовки.

Поділ навчального матеріалу дисципліни на залікові модулі, їх кількість, види поточного контролю та терміни його проведення визначаються та ухвалюються відповідною кафедрою, затверджуються методичною комісією факультету і доводяться до відома студентів та викладачів. Система оцінювання якості освіти студента (зарахування залікових кредитів) має бути стандартизованою та формалізованою.

Тривалість навчального року складає 52 тижні, з яких не менше 8 тижнів становить сумарна тривалість канікул. Тривалість теоретичного навчання, обов’язкової практичної підготовки, семестрового контролю та виконання індивідуальних завдань складає 40 тижнів на рік. Решта, 4 тижні на рік, відводиться на державну атестацію (на останньому році навчання), а також може бути використана для перескладання та повторного вивчення дисциплін тощо.

Максимальний тижневий бюджет часу студента денної форми навчання становить 54 години (вимоги до галузевих стандартів вищої освіти, затверджені постановою Кабінету Міністрів України від 7 серпня 1998 р. № 1247).

Таким чином, тижневий бюджет часу на виконання індивідуального навчального плану становить 45 академічних годин. З урахуванням тривалості теоретичного навчання, обов’язкової практичної підготовки, семестрового контролю та виконання індивідуальних завдань в 40 тижнів на рік річний бюджет часу студента складає 45×40=1800 годин. 60 кредитів ЄКТС відповідають навчальному навантаженню повного навчального року, на семестр - 30 кредитів.

Відповідно обсяг одного кредиту ЄКТС складає 1800/60=30 годин. Нормативна кількість залікових одиниць для підготовки бакалавра з терміном навчання 4 роки становить не менше 240 кредитів без державної атестації. На державну атестацію кредити відводяться окремо.

Навантаження студента з дисципліни (модуля) впродовж періоду семестру складається з контактних годин (лекцій, практичних, семінарських, лабораторних занять, консультацій), самостійної роботи, підготовки та проходження контрольних заходів, на які розподіляються кредити, встановлені для навчальних дисциплін. Якщо формою підсумкового контролю з дисципліни є екзамен(и), то на підготовку та проходження кожного з них виділяється один кредит. Якщо курсова робота планується як окремий модуль дисципліни, то на нього виділяється не менше одного кредиту. Решта встановлених для дисципліни кредитів перераховується в години, які розподіляються на контактні години та самостійну роботу.

Максимальна кількість контактних годин на один кредит становить: для студентів освітньо-кваліфікаційних рівнів молодшого спеціаліста та бакалавра — 16 годин, спеціаліста — 14 годин, магістра — 10 годин. Решта часу відводиться на самостійну роботу. Загальна кількість заліків та екзаменів на заліковоекзаменаційну сесію - не більше 5 екзаменів і 6 заліків.

Розподіл кредитів між циклами дисциплін та встановлення мінімальної кількості кредитів нормативним дисциплінам (практикам, курсовим та кваліфікаційній роботам) визначається галузевим стандартом вищої освіти. Університет самостійно встановлює кредити вибірковим дисциплінам (практикам та курсовим роботам), а також може спрямувати частину кредитів вибіркової частини змісту освіти на збільшення кількості кредитів нормативних дисциплін (практикам, курсовим та кваліфікаційній роботам).

Формування компонентів навчального плану та встановлення кредитів вибіркової частини змісту освіти є виключною прерогативою вищого навчального закладу. Встановлення кредитів компонентам навчального плану не повинно порушувати кількості кредитів навчального плану, навчального року та періодів навчання. Встановлення кредитів студентам зі складових навчального плану (навчальних дисциплін, практик, курсових та кваліфікаційних робіт) здійснюється на підставі отримання позитивних оцінок підсумкового контролю. Встановлення кредитів студентам здійснюється в повному обсязі відповідно до кредитів, встановлених навчальній складовій і лише після повного їх виконання. Встановлення студентам кредитів в цілому, за навчальним планом, або циклу дисциплін здійснюється на підставі встановлених кредитів усім його навчальним складовим.

Трансфер кредитів може здійснюватись у порядку перезарахування кредитів, які були встановлені студентам під час навчання на інших освітніх програмах, та можливого визнання результатів неофіційного та неформального навчання.

Перезарахування кредитів, які були встановлені під час навчання на інших освітніх програмах, здійснюється за рішенням керівника вищого навчального закладу або його підрозділу на підставі документів про раніше здобуту освіту (додаток до диплома, академічна довідка, свідоцтво про підвищення кваліфікації), витягу із навчальної картки, у разі одночасного навчання за декількома програмами або академічної довідки ЄКТС.

Університет інформує Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України про всі випадки трансферу кредитів у випадку визнання результатів неофіційного та неформального навчання в обсязі понад 30 кредитів.

Важливою особливістю КТСОНП є обов'язкове планування змісту самостійної роботи студентів, диференціація її обсягу за формами навчальних занять та індивідуальних завдань, принципова можливість диференціації співвідношення між годинами аудиторної і самостійної роботи з навчальних дисциплін залежно від педагогічної методики, що застосовується викладачем, регулярний контроль виконання завдань для самостійної роботи.

1.2.1.Самостійна робота студентів

Методологія процесу навчання та, відповідно, оцінювання знань студента в КМСОНП полягає у його переорієнтації з лекційно-інформативної на індивідуально-диференційовану, особистісно-орієнтовану форму та на організацію самоосвіти.

Усі світові та пропоновані останнім часом національні стандарти в основу навчання ставлять самостійну, творчу роботу того, хто навчається. На цьому принципі базуються і новітні, включно інформаційні, технології навчання. У структурі навчального навантаження студента за системою ECTS самостійна робота розглядається як один з основних компонентів навчальної діяльності і повинна займати значну частину його навчального навантаження.

Творча, евристична, наближена до наукового осмислення і узагальнення робота можлива лише як результат організації самостійного навчання. Така робота повинна бути індивідуалізованою з врахуванням рівня творчих можливостей студента, його навчальних здобутків, інтересів, навчальної активності.

Самостійна робота є основним засобом засвоєння студентом навчального матеріалу в час, вільний від обов’язкових навчальних занять.

Час, відведений для самостійної роботи студента, має становити біля 25% академічного кредиту і в навчальну та індивідуальну роботу викладача не обліковується.

Самостійна робота студента — це основний засіб оволодіння навчальним матеріалом під керівництвом викладача у час, вільний від обов’язкових навчальних занять. Навчальний час, відведений для цього, визначається навчальним планом і залежить від загального обсягу годин, відведених для вивчення конкретної дисципліни [7].

Тематика самостійної роботи має охоплювати всю навчальну програму з зазначенням кількості годин, відведених на виконання кожної теми. Кількість тем для самостійного опрацювання повинна перевищувати кількість студентів в академгрупі, щоб запобігти можливих повторень чи списування.

Самостійна робота студентів забезпечується всіма навчально-методичними засобами, необхідними для вивчення конкретної навчальної дисципліни чи окремої теми: підручниками, навчальними та методичними посібниками, конспектами лекцій, навчально-лабораторним обладнанням, інтерактивними навчально-методичними комплексами дисциплін, електронно-обчислювальною технікою тощо.

Студентам також рекомендується для самостійного опрацювання відповідна наукова література та періодичні видання.

Методичне забезпечення самостійної роботи студентів повинне передбачати й засоби самоконтролю (тести, пакет контрольних завдань тощо).

Самостійна робота студента над засвоєнням навчального матеріалу з конкретної навчальної дисципліни може виконуватися у бібліотеці, навчальних кабінетах і лабораторіях, комп’ютерних класах, а також у домашніх умовах.

Викладач визначає обсяг і зміст самостійної роботи, узгоджує її з іншими видами навчальної діяльності, розробляє методичні засоби проведення поточного та підсумкового контролю, здійснює діагностику якості самостійної роботи студента (як правило, на індивідуальних заняттях), аналізує результати самостійної навчальної роботи кожного студента.

В умовах КТСОНП значна увага має бути приділена консультаціям, які супроводжують самостійну роботу студентів [9-14].

Консультації мають за мету надання педагогічної допомоги студентам в їх самостійній роботі з кожної дисципліни, навчального плану, а також при розв’язанні різних завдань теоретичного або практичного характеру. Звичайно консультації пов’язують з лекційними, семінарськими і практичними заняттями, лабораторними роботами, підготовкою до заліків та екзаменів.

Консультації можуть бути обов'язковими, проводитися за бажанням студентів або з ініціативи викладача. Студентів потрібно привчати до думки, що до консультації потрібно готуватися, пропрацювати конспект, спеціальну літературу. Не потрібно перетворювати консультацію в „натаскування" студентів, вони повинні сприяти поглибленню знань.

Питання, які вирішуються на консультаціях, можна розділити на чотири групи:

– обумовлені прогалинами в знаннях;

– викликані неточними, неадекватними сприйняттями і осмисленням матеріалу;

– націлені на отримання додаткової інформації;

– проблемні, орієнтовані на обговорення, полеміку.

В сучасних умовах, коли самостійній, індивідуальній роботі студентів надається все більше уваги, роль консультації стає все важливішою і цього вимагає КТСОНП.

Індивідуальна робота студента є формою організації навчального процесу, яка передбачає створення умов для якнайповнішої реалізації творчих можливостей студентів через індивідуально-спрямований розвиток їх здібностей, науково-дослідну роботу і творчу діяльність.

Індивідуальні заняття проводяться під керівництвом викладача в позааудиторний час за окремим графіком, складеним кафедрою (предметною або цикловою комісією) з урахуванням потреб і можливостей студента. Організація та проведення індивідуальних занять доручається найбільш кваліфікованим викладачам. Індивідуальні заняття на молодших курсах спрямовуються здебільшого на поглиблення вивчення студентами окремих навчальних дисциплін, на старших вони мають науково-дослідний характер і передбачають безпосередню участь студента у виконанні наукових досліджень та інших творчих індивідуальних завдань.

Індивідуальні заняття з певної навчальної дисципліни проводяться з одним або декількома студентами за окремим графіком, затвердженим деканом факультету. Контроль за дотриманням графіка покладається на деканат факультету та куратора від КТСОНП.

Види індивідуальних занять:

Консультація — один із видів навчальних занять (індивідуальні або групові), який проводиться з метою отримання студентом відповіді на окремі теоретичні чи практичні питання та для пояснення певних теоретичних положень чи аспектів їх практичного застосування (проводяться протягом семестру — поточні семестрові та передекзаменаційні). У процесі консультацій (особливо поточного консультування) допускається діагностичне тестування знань студентів (як правило, з ПЕОМ) для виявлення ступеня засвоєнності окремих теоретичних положень, теорій, закономірностей, рівня сформованості, практичних умінь і навичок та перевірки ефективності методів і технологій навчання, які використовувалися під час аудиторних занять.

Індивідуальне завдання — форма організації навчального процесу, яка має на меті поглиблення, узагальнення та закріплення знань, які студенти отримують у процесі навчання, а також застосування цих знань на практиці.

Індивідуальні завдання виконують студенти самостійно під керівництвом викладачів. Як правило, індивідуальні завдання виконуються окремо кожним студентом. У тих випадках, коли завдання мають комплексний характер, до їх виконання можуть залучатися кілька студентів, у тому числі студенти, які навчаються на різних факультетах і спеціальностях.

Відповідною інноваційним технологіям навчання різновидністю індивідуальних занять є індивідуальні навчально-дослідні завдання (ІНДЗ).

Індивідуальне навчально-дослідне завдання є видом поза удиторної індивідуальної роботи студента навчального, навчально-дослідницького чи проектно-конструкторського характеру, яке використовується в процесі вивчення програмного матеріалу навчального курсу і завершується складанням підсумкового екзамену чи заліку.

Мета ІНДЗ. Самостійне вивчення частини програмного матеріалу, систематизація, поглиблення, узагальнення, закріплення та практичне застосування знань студента з навчального курсу та розвиток навичок самостійної роботи.

Зміст ІНДЗ. Завершена теоретична або практична робота в межах навчальної програми курсу, яка виконується на основі знань, умінь і навичок, отриманих у процесі лекційних, семінарських, практичних та лабораторних занять, охоплює декілька модулів або зміст навчального курсу в цілому.

Структура ІНДЗ:

– вступ: тема, мета, завдання роботи та основні її положення;

– теоретичне обґрунтування: виклад базових теоретичних положень, законів, принципів, алгоритмів тощо, на основі яких виконується завдання;

– методи: вказуються і коротко характеризуються;

– основні результати роботи: подаються результати, схеми, малюнки, моделі, описи, систематизована реферативна інформація та її аналіз;

– висновки;

– список використаної літератури;

– рецензія одного з викладачів випускової кафедри.

Види ІНДЗ:

– конспект з теми (модуля) за заданим планом або планом, який студент розробив самостійно;

– реферат або контрольна робота з теми (модуля) або вузької проблематики студентів заочної форми навчання;

– розв’язування та складання розрахункових або практичних (наприклад, ситуативних) задач різного рівня з теми (модуля) або курсу;

– розроблення теоретичних або прикладних функціональних моделей явищ, процесів, конструкцій тощо;

– комплексний опис будови, властивостей, функцій, явищ, об’єктів, конструкцій тощо;

– анотація прочитаної додаткової літератури (есе) з курсу, бібліографічний опис, історичні розвідки тощо.

1.3. Шкала оцінювань

Положення про систему оцінювання з дисциплін кафедри, які встановлюють особливості рейтингу з кредитних модулів, методику його розрахунку та принципи використання, обговорюється й ухвалюється на засіданні кафедри, надається в деканати відповідних інститутів і факультетів, на початку навчального року доводиться до студентів і протягом навчального року залишається незмінним.

Положення про систему оцінювання є додатком до робочої навчальної програми дисципліни.

Підґрунтям для розробки системи оцінювання з кредитних модулів є розподіл аудиторного часу на певні види навчальних занять, які заплановані в робочих навчальних планах, модульні контрольні роботи (МКР), індивідуальні завдання. Якщо навчальний матеріал кредитного модуля містить окремі навчальні (змістовні) модулі, це необхідно врахувати при розробці. системи оцінювання

Важливим елементом системи контролю знань є встановлення межі кількісної оцінки рейтингу студента. Вважається за логічне прийняти 100-бальну оцінювальну шкалу.

Доцільним є прийняття загального та щосеместрового рейтингу, який визначається як середньоарифметичне значення рейтингу всіх дисциплін, у томучислі диференційованих заліків та курсових проектів (робіт).

Рейтинг студентів повинен складатися тільки з балів, отриманих ним на проміжному контрольному заході та семестровому екзамені, а сума балів, одержаних ним за поточну роботу, повинна розглядатися лише як допуск студента до вказаних екзаменів.

Якщо дисципліна передбачає виконання курсового проекту, семестрового завдання, здачу колоквіуму, ректорського контролю, то кафедра встановлює для певного переліку елементів, які підлягають контролю, їх оцінку в балах.

По кожному з вказаних в табл.1 елементів модуля студент отримує оцінку в балах. Кожен вид робіт оцінюється, виходячи з максимальної кількості балів.

Умовою допуску студента до КЗ є мінімальна сума балів, яку студент повинен набрати у разі виконання всіх елементів модуля.

Студент, який отримав за всі КЗ не менше 60 балів, за його бажанням може бути звільнений від курсового екзамену за умови, що він набрав за виконання всіх видів навчальних робіт по всім модулям певну суму балів, яка складається з суми балів по кожному модулю. Ця певна сума балів повинна перевищувати суму встановлених мінімумів.

Таблиця 1.1

Оцінка ECTS	**Визначення**	**Оцінка в балах**	**Традиційна оцінка (залікова книжка)**
A	ВІДМІННО – відмінне виконання лише незначною кількістю помилок	90-100	**ВІДМІННО**
B	ДУЖЕ ДОБРЕ – вище середнього рівня з кількома помилками	80-89	**ДУЖЕ ДОБРЕ**
C	ДОБРЕ – в загальному правильна робота з певною кількістю помилок	70-79	**ДОБРЕ**
D	ЗАДОВІЛЬНО – непогано, але зі значною кількістю недоліків	60–69	**ЗАДОВІЛЬНО**
E	ДОСТАТНЬО – виконання задовольняє мінімальні критерії	50-59	**ДОСТАТНЬО**
FX	НЕЗАДОВІЛЬНО – потрібно попрацювати перед тим, як досягти мінімального	31-49	**НЕЗАДОВІЛЬНО**

	критерію		
X	НЕЗАДОВІЛЬНО Студент, який набрав за всі КЗ менше 60 балів, здає підсумковий семестр	1-39	**НЕЗАДОВІЛЬНО**

РОЗДІЛ ІІ. ВИВЧЕННЯ ТЕМИ „РІВНЯННЯВ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ” В КУРСІ „ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ” В УМОВАХ КРЕДИТНО – МОДУЛЬНОЇ СИСТЕМИ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Навчально-методична документація з дисциплін розробляється кафедрами, що здійснюються викладачами цих дисциплін. Робочі і навчальні програми кожної дисципліни узгоджуються з кафедрами, де читаються курси, що забезпечуються цією навчальною дисципліною, та з випускаючою кафедрою зі спеціальності, розглядаються методичною комісією факультету.

Програми повинні затверджуватися не пізніше, ніж за 3місяці до початку навчального року, протягом якого вивчаються відповідні дисципліни. Навчально-методична документація з дисциплін зберігається на кафедрах, які забезпечують викладання цих дисциплін.

Робоча програма дисципліни складається на основі навчальної програми дисципліни та навчального плану і є нормативним документом вузу. Робочі програми дисципліни повинні щорічно розглядатися на кафедрі щодо відповідності до останніх досягнень науки і техніки у галузі знань та до навчального плану. У робочі програми викладено конкретний зміст навчальної дисципліни, організаційні форми її вивчення, розподіл навчальних годин за видами занять, форми і засоби поточного та підсумкового контролю, інформаційно-методичне забезпечення дисципліни.

Структурними складовими робочої програми є такі розділи:

1. *Розподіл загальних навчальних годин на дисципліну* за семестрами і видами навчальних занять (лекції, практичні, семінарські, лабораторні,

індивідуальна робота, самостійна робота студентів) відповідно до навчальних планів.

2. Мета і завдання дисципліни, її місце в навчальному процесі. Мета вивчення дисципліни має бути настільки конкретною, щоб можна було вивчити необхідний рівень оволодіння навчальним матеріалом. Завдання вивчення дисципліни повинні чітко визначити, що необхідно знати та вміти, про що мати уявлення студенти, щоб була забезпечена можливість розробки засобів поточного й підсумкового контролю у вигляді контрольних завдань, тестів тощо.

3. Зміст навчального матеріалу. В основній частині робочої програми викладається зміст курсу з розподілом за видами занять. Лекційна частина матеріалу викладає зміст курсу з розподілом за видами занять. Після кожного розділу наводиться перелік навчальних і наочних посібників та рекомендованої літератури із зазначенням розділів і сторінок.

Аналогічно має бути розбивка матеріалу, який вивчається на практичних заняттях, із зазначенням стислого змісту кожного заняття, методичного матеріалу, навчальних, наочних та інших посібників, рекомендованої літератури (окремо - для використання під час самостійної роботи). Окремо наводиться перелік тем лабораторних і семінарських занять, контрольних заходів, їх обсяг у годинах.

У самостійній частини цього розділу робочої програми доцільно виділити розділи і теми (їх стислий зміст), що пропонується для самостійного вивчення: індивідуальні завдання (курсові роботи , типові розрахунки, реферати та ін.), виконання яких контролюється викладачем; розділи і теми за вибором студента, призначені для поглибленого вивчення дисципліни.

4. Навчально методичні матеріали з дисципліни. Список літератури складається з двох частин - основної і додаткової. До списку основної літератури входять підручники, навчальні посібники, тексти лекції і конспекти, методичні вказівки до лабораторних та ігрових занять, плани семінарських занять та ін. Список додаткової літератури призначений для більш поглибленого вивчення окремих розділів чи курсу в цілому. В окремій частині цього розділу вміщується перелік технічних засобів навчання до різних видів занять: інформаційні засоби (кодограми, діапозитиви, діафільми, плакати), наочні посібники(макети та ін.), автоматизовані навчальні курси та навчальні системи тощо. Складовою програми є засоби для проведення запланованих контрольних заходів.

На факультеті математики та інформатики диференціальні рівняння вивчаються в другому семестрі. Робоча програма складена проф. Петрівським Б. П. на основі ,,Галузевого стандарту вищої освіти ГСВО МЩН ХХ-02. Освітньо – професійна програма підготовки бакалавра за спеціальністю 6.010100 Педагогіка і методика середньої освіти. Математика” та затверджено на засіданні кафедри вищої математики РДГУ. Навчальна програма з диференціальних рівнянь містить два модуля: І модуль – звичайні диференціальні рівняння першого порядку; диференціальні рівняння вищих порядків та системи ДР. ДР в частинних похідних, математичні моделі та ДР, ІІ модуль – індивідуальні науково-дослідні завдання. Загальна кількість годин 162, кредитів: національних – 3, європейських 6. В першому модулі 112годин, в яких Згідно якої кількість годин: лекції – 40, семінарські заняття –40, самостійна робота – 32, індивідуальні – 12. В другому модулі 50 годин і всі відводяться на самостійну роботу.

Протягом вивчення дисциплін контроль знань здійснюється у вигляді самостійних робіт, контрольних робіт, колоквіумів, індивідуальних довгострокових завдань. Підсумковий контроль – екзамен.

Максимальна кількість балів, які студент може набрати за два модулі - 100. І модуль – 60 балів, ІІ модуль - 40 балів.

Мета та завдання дисципліни, її місце в підготовці майбутнього фахівця

У сучасній теорії управління математичні моделі, дослідження, моделювання і проектування відіграють все більшу роль. Це вимагає від фахівців широкої фундаментальної підготовки. Одне з найважливіших місць належить курсу диференціальних рівнянь.

Курс диференціальних рівнянь формує у студентів розуміння математичного моделювання фізичних процесів, законів природи, розвиває логічне та алгоритмічне мислення, виробляє навички математичного дослідження прикладних задач, прищеплює уміння самостійно вивчати навчальну літературу; дає необхідну математичну підготовку та знання для вивчення інших дисциплін, зокрема рівнянь з рівнянь з частинними, методи оптимізації та інші.

У процесі вивчення курсу диференціальних рівнянь перед студентами ставимо такі завдання:

- глибоко оволодіти матеріалом курсу диференціальні рівняння;
- виробляти навички систематично і цілеспрямовано працювати над навчальною та науковою літературою, постійно розширювати свій математичний світогляд та підвищити математичну культуру;
- вміти складати диференціальні рівняння за конкретними задачами фізики, біології, хімії;
- вміти розв’язувати найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, n- го порядку зі сталими коефіцієнтами, системи диференціальних рівнянь;
- застосовувати диференціальні рівняння до вивчення коливних процесів;
- вміти самостійно проводити математичний аналіз прикладних та теоретичних задач.

<u>Перелік знань, умінь і навичок, які формуються в процесі викладення дисципліни</u>

Студент повинен знати: диференціальні рівняння, рівняння з відокремленими та відокремлюючими змінними, метод Лагранжа, Бернуллі, теорему єдності та існування розв’язку задачі Коші, формулу Коші, рівняння Бесселя, Чебишева, теорему Коші.

Студенти повинні вміти:

1) складати математичні моделі реальних процесів, всебічно вивчати ці процеси і на основі знайдених результатів прогнозувати якісні характеристики;

2) розв'язувати найпростіші диференціальні рівняння I-порядку, n-порядку, системи диференціальних рівнянь;

3) формулювати та доводити теорему Коші єдності та існування розв'язку.

Між предметні зв'язки та їх реалізація при викладання дисципліни

Основні положення курсу диференціальних рівнянь мають широке застосування у процесі вивчення широкого спектру дисциплін спеціальностей інформатика та приклада математика. Апарат диференціальних рівнянь необхідний при вивченні методів оптимізації, теорії ймовірностей та математичної статистики, рівнянь математичної фізики, інтегральних рівнянь, математичного моделювання.

РОЗДІЛ ІІІ
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КУРСУ „РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ”

3.1. Методичний посібник „Рівняння в частинних похідних”

З підвищенням вимог до якості підготовки студентів виникає потреба у створенні нових технологій навчання, які можуть забезпечити необхідний рівень підготовки в оптимальних умовах організації навчально-виховного процесу. У таких технологіях чітке місце посідає навчально методична література, основними компонентами якої є підручники, навчальні посібники, методичні вказівки дидактичні матеріали, наочні посібники, комп’ютерні програми з дисципліни та ін.

Методичне забезпечення є невід’ємною складовою частиною навчального процесу та сприяє чіткому засвоєнню програм підготовки.

Посібник є комплексна інформаційна модель, повинен відображати елементи педагогічної системи – мету навчання, викладання змісту навчання, вибір та розробку дидактичних процесів, орієнтацію на визначення організації форми навчання, які сприяють впровадженню їх у практику. При цьому посібник повинен враховувати можливості свого користувача і водночас бути одним із технічних засобів навчання.

Метою посібника повинні бути систематизація теоретичних положень для глибокого засвоєння означень, тверджень, розвиток математичного мислення студентів, прищеплення їм навичок аналізу умов задач та набуття методів їх розв’язування.

Навчально-методичним забезпеченням курсу ,,Рівняння в частинних похідних” є розроблений методичний посібник в об’ємі матеріалу передбаченого робочою навчальною програмою.

Навчально методичний посібник складається з п’яти розділів:

І розділ –Класифікація рівнянь з частинними похідними ІІ порядку. Зведення до канонічної форми;

ІІ розділ – Задача Штурма-Ліувілля. Спеціальні Функції;

III розділ – Застосування методу Фур’є до розв’язування мішаної задачі для рівняння гіперболічного типу.

IV розділ – Застосування методу Фур’є до розв’язування мішаної задачі для рівняння параболічного типу.

V розділ – Застосування методу Фур’є до розв’язування крайової задачі для рівняння еліптичного типу. Задача Діріхле ля круга.

Кожен з перерахованих розділів має наступний вигдял:

§1. Класифікація рівнянь з частинними похідними II порядку. Зведення до канонічної форми

Означення 1.1. ***Рівнянням з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними*** $x,\ y$**,** називається відношення між невідомою функцією $u(x,y)$ та її частинними похідними до другого порядку включно.

Рівняння з частинними похідними другого порядку має наступний вигляд:

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=0, \tag{1.1}$$

де F – задана функція своїх аргументів.

Означення 1.2. Диференціальне рівняння називається ***лінійним*** відносно вищих похідних, якщо його можна записати у наступній формі:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F_1(x,y,u,u_x,u_y)=0, \tag{1.2}$$

де $a_{11}(x,y),\ \ a_{12}(x,y),\ \ a_{22}(x,y)$ - функції, неперервні разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно, причому $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0$.

Означення 1.3. Диференціальне рівняння називається ***квазілінійним,*** якщо коефіцієнти $a_{11},\ a_{12},\ a_{22}$ залежать не тільки від x і y, а є функціями від $u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ a_{11}(x,y,u,u_x,u_y),\ a_{12}(x,y,u,u_x,u_y),\ a_{22}(x,y,u,u_x,u_y).$

Означення 1.4. Диференціальне рівняння називається ***лінійним,*** якщо воно є лінійне відносно функції, похідних першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}$ та похідних вищих порядків $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

В загальному випадку лінійне рівняння другого порядку має наступний вигляд:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu+f=0, \tag{1.3}$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f - є функціями лише x і y. Якщо коефіцієнти рівняння (1.3) не залежать від x і y, тоді рівняння буде лінійним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Означення 1.5. Диференціальне рівняння називається ***однорідним,*** якщо $f(x,y)=0$.

Покажемо, що рівняння (1.3) можна звести до канонічного вигляду заміною змінних

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y), \tag{1. 4}$$

де $\varphi(x,y)$ та $\psi(x,y)$ функції, неперервні разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно. Припускатимемо також, що якобіан перетворення (1.4) задовольняє умову

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\det\begin{Vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{Vmatrix}\neq 0, \tag{1.5}$$

в області G(область, в якій розглядається рівняння).

З умови (1.5) випливає, що рівняння (1.3) можна однозначно розв’язати відносно змінних x і y, а отже, виразити функцію $u(x,y)$ через змінні ξ та η.

Тоді, згідно правил диференціювання складеної функції отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta},\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\xi_y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial u}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\xi_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\xi_x\eta_x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\eta_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\xi_{xx}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_{xx}\frac{\partial u}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\xi_x\xi_y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+\eta_x\eta_y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\xi_{xy}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_{xy}\frac{\partial u}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\xi_y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\xi_y\eta_y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\eta_y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\xi_{yy}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_{yy}\frac{\partial u}{\partial \eta}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Підставляючи знайдені похідні (1.6) у рівняння (1.3) і групуючи у доданки відносно похідних, матимемо

$$\tilde{a}_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\tilde{a}_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\tilde{a}_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\overline{F}=0, \tag{1.7}$$

де

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$
$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$
$$\tilde{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

якщо

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu + f,$$

то

$$\overline{F}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = \beta_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u + \delta.$$

Для спрощення рівняння (1.7) виберемо змінні ξ і η так, щоб коефіцієнт $\tilde{a}_{11}$ дорівнював нулю. У цьому випадку маємо рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \tag{1.8}$$

Нехай $z = \varphi(x, y)$ - будь – який частковий розв’язок даного рівняння. Якщо вважати, що $\xi = \varphi(x, y),$ тоді коефіцієнт $\tilde{a}_{11}$, буде дорівнювати нулю.

Таким чином, вибір змінних залежить від розв’язку рівняння (1.8).

Розглянемо наступні леми.

Лема 1.1. Якщо $z = \varphi(x, y)$ є частинним розв’язком рівняння $a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0,$ тоді співвідношення $\varphi(x, y) = C$ буде загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \tag{1.9}$$

Лема 1.2. Якщо $\varphi(x, y) = C$ є загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння $a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$, тоді функція $z = \varphi(x, y)$ буде задовольняти рівняння (1.8).

Означення 1.6. Рівняння (1.9) називатиметься ***характеристичним*** для рівняння (1.2), а його інтеграли – характеристиками.

Якщо $\xi = \varphi(x, y),$ де $\varphi(x, y) = const$ є загальним інтегралом рівняння (1.9), то коефіцієнт при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ дорівнюємо нулю. Якщо $\psi(x, y) = const$ буде другим загальним інтегралом (1.9), незалежно від $\varphi(x, y)$, тоді, якщо $\eta = \psi(x, y)$, коефіцієнт при $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ також дорівнює нулю.

З рівняння (1.9) отримаємо два рівняння:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2+a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{1.10}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.11}$$

В залежності від знаку дискримінанту $\Delta = a^2{}_{12} - a_{11}a_{22}$, в точці $M_0(x_0, y_0)$ рівняння (1.2) належить до одного з трьох типів:

-гіперболічного, якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ $a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} > 0$;

- еліптичного, якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ $a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} < 0$;

-параболічного, якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ $a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} = 0$.

Розглянемо область G, в усіх точках область рівняння має один і той самий тип. Через кожну точку області проходять дві характеристики, причому для рівняння гіперболічного типу характеристики дійсні і різні, для рівняння еліптичного типа – комплексні і різні, а для рівняння параболічного типа дві характеристики дійсні і співпадають між собою.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

1. Для рівняння гіперболічного типу $a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} > 0$ ліві і праві частини рівнянь (1.10) і (1.11) дійсні і різні. Загальний інтеграл $\varphi(x, y) = C$ і $\psi(x, y) = C$ визначають сім'ю характеристик. Якщо

$$\xi = \varphi(x, y),\ \ \eta = \psi(x, y), \tag{1.12}$$

Отримаємо рівняння (1.7) після ділення на коефіцієнт $2\bar{a}_{12}$ перейдемо до виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}),$$

де $\Phi = -\dfrac{\overline{F}}{2\tilde{a}_{12}}$

Таким чином, отримали канонічну форму рівняння гіперболічного типу.

Рівняння гіперболічного типу має другу канонічну форму, яку можна отримати за допомогою наступної заміни змінних:

$$\xi = \alpha + \beta,\ \ \eta = \alpha - \beta,\ \ \alpha = \frac{\xi + \eta}{2},\ \ \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

де α і β - нові змінні. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}),\ \ \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{\partial u}{\partial \beta}),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2})$$

В результаті рівняння (1.7) матиме наступний канонічний вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}=\Phi_1,$$

де $\Phi_1 = 4\Phi$.

2. Для рівняння параболічного типу $a^2{}_{12}-a_{11}a_{22}=0,$ характеристики (1.10) і (1.11) співпадають в результаті отримаємо загальний інтеграл $\varphi(x,y)=const.$ Нехай

$$\xi=\varphi(x,y) \text{ і } \eta=\psi(x,y),$$

де $\eta(x,y)-$ будь – яка функція, незалежна від φ. При такому виборі змінних коефіцієнт $\tilde{a}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y)^2=0$, так як $\bar{a}_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$, то

$$\begin{aligned}\bar{a}_{12}&=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_x\right)+a_{22}\xi_y\eta_y=\\&=\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x+\sqrt{a_{22}}\eta_y\right)=0.\end{aligned}$$

Таким чином, після ділення рівняння (1.7) на коефіцієнт при $u_{\eta\eta}$ отримаємо канонічну форму для рівняння параболічного типа

$$u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,,(\Phi=-\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}).$$

3. Для рівняння еліптичного типа $a^2{}_{12}-a_{11}a_{22}<0$ ліві і праві частини рівняння (1.10) і (1.11) є комплексними. Нехай $\varphi(x,y)=C$ - комплексний інтеграл рівняння (1.10). Тоді

$$\varphi^*(x,y)=C,$$

де φ^*- спряжена з функцією φ, буде загальним інтегралом спряженого рівняння (1.11). Перейдемо до комплексних змінних, припустимо

$$\xi=\varphi(x,y),\ \ \eta=\varphi^*(x,y).$$

Для того, щоб від комплексних змінних перейти до дійсних, введемо нові змінні α і β, які визначаються згідно формул:

$$\alpha=\frac{\varphi+\varphi^*}{2},\ \ \beta=\frac{\varphi-\varphi^*}{2i},$$

так, що $\xi=\alpha+i\beta,\ \ \eta=\alpha-i\beta$.

Отримаємо:

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0,$$

$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$ і $\bar{a}_{12} = 0.$

Рівняння (1.7) після ділення на коефіцієнт при $u_{\alpha\alpha}$ приймає наступний канонічний вигляд

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \ \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{a_{22}}\right).$$

Таким чином, в залежності від знака у виразі $a^2{}_{12} - a_{11}a_{22}$ має місце наступні канонічні форми рівняння (1.2):

1) $a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} > 0$ (гіперболічний тип) $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ або $u_{xy} = \Phi;$

2) $a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} = 0,$ (параболічний тип) $u_{xx} = \Phi;$

3) $a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} < 0$ (еліптичний тип) $u_{xx} + u_{yy} = \Phi.$

Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними. Розглянемо лінійне рівняння з частинними похідними другого порядку з багатьма незалежними змінними та дійсними коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_i s_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \ (a_{ij} = a_{ji}), \tag{1.13}$$

де a, b, c, f є функціями $x_1, x_2, ..., x_n$. Введемо нову незалежну змінну ξ_k

$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, ..., x_{n\_})$ (k=1, …, n).

Тоді

$$u_{xi} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ik} \qquad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n}\ \sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k\xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{ji} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_i x_j},$$

де $\alpha_{ik} = \dfrac{\partial\xi_k}{\partial x_i}.$

Підставимо вирази для похідних у початкове рівняння, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{kj}u_{\xi_k\ \xi_l} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_{ki}u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

де $\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}$, $\bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_k)_{x_i x_j}.$

Розглянемо квадратичну форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{0} y_i y_j, \tag{1.14}$$

Коефіцієнти форми рівні коефіцієнтам a_{ij} початкового рівняння в деякій точці $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$. Виконується над змінним у лінійне перетворення

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k ,$$

тоді квадратична форма отримає наступний вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{a}_{kl}^{0}\eta_k\eta_l,$$

де $\overline{a}^0{}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{0}\alpha_{ik}\alpha_{jl}$.

Таким чином, коефіцієнти головної частини рівняння змінюються аналогічно коефіцієнтам квадратичної форми при лінійному перетворенні.

Як відомо, для вибору відповідних лінійних перетворень можна перетворити матрицю (a_{li}^0) квадратичної форми до діагонального виду, в якому

$\left|\overline{a}_{il}^0\right| = 1$, або 0;

$\overline{a}_{il}^0 = 0 \ \ (i \neq j, i, j = 1,2,...n)$.

Згідно закону інерцій, число додатних і від'ємних, рівних нулю коефіцієнтів a_{li}^0 в канонічній формі інваріантного відносно лінійного перетворення.

Означення 1.7 .Рівняння (1.13) називається ***рівнянням еліптичного типу*** в точці $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$, якщо всі n коефіцієнти a_{li}^0 є одного знаку.

Означення 1.8 .Рівняння (1.13) називається ***рівнянням гіперболічного типу***, або ***нормального гіперболічного типу***, якщо всі n-1 коефіцієнта $\overline{a}_{li}^0$ є одного знаку, а один коефіцієнт є протилежний їм по знаку.

Означення 1.9. Рівняння (1.13) називається ***рівнянням ультрагіперболічного типу***, якщо поміж $\overline{a}_{li}^0$ є існує m коефіцієнт одного знаку і n- m протилежного знаку $(m, n-m > 1)$.

Означення 1.10. Рівняння (1.13) називається ***рівнянням параболічного типу***, якщо хоча б один із коефіцієнтів $\overline{a}_{li}^0$ рівний нулю, всі інші мають один знак.

Підбираючи нові незалежні і змінні ξ_i так, щоб в точці $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$

$$\alpha_{ik}=\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}=\alpha_{ik}^0,$$

де α_{ik}^0 – коефіцієнти похідних, перетворюють квадратичну форму (1.14) до канонічного виду, отримаємо, що в точці $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ рівняння в залежності від типу утворює одну із наступних канонічних форм:

1) $u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}+\Phi=0$ (еліптична форма);

2) $u_{x_1x_1}=\sum\limits_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}+\Phi$ (гіперболічна форма);

3) $\sum\limits_{i=1}^{m}u_{x_ix_i}=\sum\limits_{i=m+1}^{n}u_{x_ix_i}+\Phi$ ($m>1, n-m>1$) (ультрагіперболічний тип);

4) $\sum\limits_{i=1}^{n-m}(\pm u_{x_ix_i})+\Phi=0$ ($m>1$) (параболічний тип).

Канонічні форми лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами. У випадку двох незалежних змінних лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами має наступний вигляд:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f(x,y)=0. \tag{1.15}$$

Йому відповідає характеристичне рівняння з постійними коефіцієнтами. Тому характеристики будуть прямі лінії, які задаються наступним чином:

$$y=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C_1,\quad y=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C_2.$$

З допомогою відповідного перетворення змінних рівняння (1.15) перетворюється в одну із найпростіших форм:

1) $\frac{\partial u^2}{\partial\xi\partial\xi}+\frac{\partial u^2}{\partial\eta\partial\eta}+b_1\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu+f=0$ (еліптичний тип); (1. 16)

2) $\frac{\partial u^2}{\partial\xi\partial\eta}+b_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu+f=0$(гіперболічний типу) (1. 17)

3) $\frac{\partial u^2}{\partial\xi^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu+f=0$ (параболічний типу) (1.18)

Для спрощення записів введемо замість u нову функцію v: $u=e^{\lambda\xi+\mu\eta}v$, де λ і μ - невизначені поки що сталі. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\lambda v\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu v\right),$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial \xi^2} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} + 2\lambda\frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda^2 v\right),$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial \xi\partial \eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \xi\partial \eta} + \lambda\frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu\frac{\partial v}{\partial \xi} + \lambda\mu v\right),$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial \eta^2} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \eta^2} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu^2 v\right).$$

Підставляючи дані співвідношення замість похідних у рівняння (1.15) і скорочуючи на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, отримаємо:

$$\frac{\partial u^2}{\partial\xi\partial\xi} + \frac{\partial u^2}{\partial\eta\partial\eta} + (b_1 + 2\lambda)\frac{\partial u}{\partial\xi} + (b_2 + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial\eta} + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c) + f_1 = 0.$$

Параметри λ та μ підбираємо так, щоб два коефіцієнти при перших похідних перетворювались в нуль. Отже, отримаємо:

$$\frac{\partial u^2}{\partial\xi\partial\xi} + \frac{\partial u^2}{\partial\eta\partial\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

де γ - стала, що виражається через c, b_1, b_2, $f_1 = fe^{-\lambda\xi+\mu\eta}$. Аналогічно для рівнянь (1.17) і (1.18).

Використовуючи ці вирази отримаємо наступні канонічні форми для рівнянь з сталими коефіцієнтами:

1) $\frac{\partial u^2}{\partial\xi\partial\xi} + \frac{\partial u^2}{\partial\eta\partial\eta} + \gamma v + f_1 = 0$ (еліптичний тип);

2) $\frac{\partial u^2}{\partial\xi\partial\eta} + b_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + \gamma v + f_1 = 0$ (гіперболічний тип);

3) $\frac{\partial u^2}{\partial\xi^2} + b_2\frac{\partial v}{\partial\eta} + f_1 = 0$ (параболічний тип).

Приклади

1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння
$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням гіперболічного типу, оскільки дискримінант

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot 1 = \frac{1}{4} > 0.$$

За формулами (1.10) і (1.11) знаходимо характеристики:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2};\ 2dy=dx;\ 2y=x+C_1;\ C_1=2y-x;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2}=1;\ \ dy=dx;\ y=x+C_2;\ C_2=y-x.$$

Відповідно нові змінні мають вигляд

$\xi=2y-x;\ \ \eta=y-x.$

Знайдемо значення похідної, що фігурують у рівнянні відносно нових змінних ξ, η.

$$\begin{array}{r|l} -2 & u=u(\xi,\eta); \\ 7 & u_x=u_\xi(-1)+u_\eta(-1); \\ 4 & u_y=u_\xi\cdot 2+u_\eta\cdot 1; \\ 2 & u_{xx}=u_{\xi\xi}(-1)^2+2u_{\xi\eta}(-1)^2+u_{\eta\eta}(-1)^2; \\ 1 & u_{yy}=u_{\xi\xi}(2)^2+2u_{\xi\eta}\cdot 2+u_{\eta\eta}; \\ 3 & u_{xy}=u_{\xi\xi}(-2)-3u_{\xi\eta}-u_{\eta\eta}. \end{array}$$

Після знаходження коефіцієнтів, що стоять зліва біля відповідних похідних та зведення відносно похідних отримаємо:

$$u_{\xi\xi}(2+4-6)+u_{\xi\eta}(4+2-8)+u_{\eta\eta}(2+1-3)+u_\xi(-7+8)+u_\eta(-7+4)+u(-2)=0,$$

$$-u_{\xi\eta}+u_\xi-3u_\eta-2u=0.$$

Дане рівняння дозволяє подальше спрощення:

$$\begin{array}{r|l} -2 & u=e^{\alpha\xi+\beta\eta}v(\xi,\eta); \\ 1 & u_\xi=\alpha e^{\alpha\xi+\beta\xi}v(\xi,\eta)+v_\xi e^{\alpha\xi+\beta\eta}; \\ -3 & u_\eta=\beta e^{\alpha\xi+\beta\eta}v(\xi,\eta)+v_\eta e^{\alpha\xi+\beta\eta}; \\ -1 & u_{\xi\eta}=\alpha\beta e^{\alpha\xi+\beta\eta}v(\xi,\eta)+v_\eta\alpha e^{\alpha\xi+\beta\eta}+\beta v_{\xi\eta}e^{\alpha\xi+\beta\eta}. \end{array}$$

Звідси отримаємо

$$-v_{\xi\eta}+v_\xi(1-\beta)+v_\eta(-3-\alpha)+v(-2+\alpha-3\beta-\alpha\beta)=0;$$

знайдемо α і β

$$1-\beta=0\Rightarrow\beta=1;$$

$$-3-\alpha=0\Rightarrow\alpha=-1.$$

Отже, дане рівняння матиме наступний канонічний вигляд $v_{\xi\eta}+5v=0$.

2. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$2u_{xx}+4u_{xy}+2u_{yy}+3u_x+u_y+u=0;$

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням параболічного типу, оскільки дискримінант

$\Delta=2^2-2^2=0.$

За формулами (1.10) і (1.11) знаходимо характеристики:

$dy = dx$; $y - x = C_1$; $C_1 = y - x$; $C_2 = x$, тоді $J = -1 - 0 = -1 \neq 0$

Відповідно нові змінні мають вигляд

$\xi = y - x$; $\eta = x$.

Знайдемо значення похідної, що фігурують у рівнянні відносно нових змінних ξ, η.

$$\begin{array}{r|l} 1 & u = u(\xi, \eta); \\ 3 & u_x = u_\xi(-1) + u_\eta(1); \\ 1 & u_y = u_\xi(1); \\ 2 & u_{xx} = u_{\xi\xi}(-1)^2 + 2u_{\xi\eta}(-1)^2 + u_{\eta\eta}(1)^2; \\ 2 & u_{yy} = u_{\xi\xi}(1)^2; \\ 4 & u_{xy} = u_{\xi\xi}(-1) + u_{\xi\eta} \end{array}$$

Після знаходження коефіцієнтів, що стоять зліва біля відповідних похідних та зведення відносно похідних отримаємо:

$$u_{\xi\xi}(2 + 2 - 4) + u_{\xi\eta}(-4 + 4) + u_{\eta\eta}(2) + u_\xi(-3 + 1) + u_\eta(3) + u(1) = 0,$$

$$2u_{\eta\eta} - 2u_\xi + 3u_\eta + u = 0.$$

Дане рівняння дозволяє подальше спрощення:

$$\begin{array}{r|l} 1 & u = e^{\alpha\xi + \beta\eta} v(\xi, \eta); \\ -2 & u_\xi = \alpha e^{\alpha\xi + \beta\xi} v(\xi, \eta) + v_\xi e^{\alpha\xi + \beta\eta}; \\ 3 & u_\eta = \beta e^{\alpha\xi + \beta\eta} v(\xi, \eta) + v_\eta e^{\alpha\xi + \beta\eta}; \\ 2 & u_{\xi\eta} = \beta^2 e^{\alpha\xi + \beta\eta} v(\xi, \eta) + 2\beta v_{\eta\eta} e^{\alpha\xi + \beta\eta} + v_{\eta\eta} e^{\alpha\xi + \beta\eta}. \end{array}$$

Звідси отримаємо

$$v_{\eta\eta}(2) + v_\eta(3 + 2\beta) + v_\xi(-2) + v(1 - 2\alpha + 3\beta + 2\beta^2) = 0;$$

знайдемо α і β

$$3 + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2};$$

$$1 - 2\alpha + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 \cdot \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Отже, дане рівняння матиме наступний канонічний вигляд $v_{\eta\eta} - v_\xi = 0$.

§2 **Задача Штурма- Ліувілля. Спеціальні функції**

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad x \in (0, l), \tag{2.1}$$

$$\alpha_0 y'(0) + \beta_0 y(0) = 0, \quad \alpha_1 y'(l) + \beta_1 y(l) = 0, \tag{2.2}$$

де λ - довільний числовий параметр. Очевидно, задача (2.1)-(2.2) має тривіальний розв'язок $y \equiv 0$.

(2.1)-(2.2) називається задачею Штурма- Ліувілля, яку формулюється так: обчислити такі значення параметра λ, для яких задача (2.1)- (2.2) має ненульові розв'язки. Такі значення λ називаються ***власними значеннями*** (власними числами), а відповідні їм ненульові розв'язки - ***власними функціями*** задачі (2.1)-(2.2).

Якщо для функцій $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ виконуються наступні умови:

а) $p(x) \in C^1([0,l]),\ p(x) > 0,\ q(x), \rho(x) \in C([0,l]),\ q \geq 0,\ \rho > 0;$

б) $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$, $\alpha_0\beta_0 \leq 0,\ \alpha_1\beta_1 \leq 0$.

То для задачі (2.1.)-(2.2) є справедливими наступні властивості:

1)множина власних значень є зчисленна

$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...,\ \lambda_n \to +\infty$,

$n \to \infty;$

2) кожному власному значенню λ_n відповідає тільки одна лінійно-незалежна власна функція $y_n(x)$ (усі власні значенім прості), тобто існує нескінченна послідовність лінійно-незалежних власних функцій

$$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), ...; \tag{2.3}$$

3)послідовність власних функцій є ортогональною на відрізку $[0,l]$ з вершиною $\rho(x)$, тобто

$$\int_0^l \rho(x) y_n(x) y_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \|y_m\|^2 & n = m. \end{cases}$$

4) Кожному власному значення відповідає з точністю до постійного тільки одна власна функція.

5) (Теорема розкладу В. А. Стєклова). Довільна, двічі неперервна диференційована функція $F(x) \in C^1([0,l])$, яка задовольняв крайові умови (2.2), розкладається на $[0,l]$ в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є за власними функціями $\{y_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x),\ c_n = \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^l p(x) F(x) y_n(x) dx, \tag{2.4}$$

де $\|y_n\|^2 = \int_0^l y_n^2 \rho(x) dx.$

Очевидно, послідовність власних функцій задачі (2.1)-(2.2) можна завжди вважати ортонормованою, бо якщо $\|y_n\| \neq 1$, то послідовність (2.3) замінимо послідовністю ортонормованих власних функцій

$$\frac{y_1(x)}{\|y_1(x)\|},\ \frac{y_2(x)}{\|y_2(x)\|},\ ...,\ \frac{y_n(x)}{\|y_n(x)\|},\ \ldots .$$

Задача Штурма- Ліувілля є важливою ланкою у методі відокремлених змінних розв'язування задач математичної фізики і рівнянь з частинними похідними.

Зауважимо, що задачу (2.1)-{2.2) можна розглядати на будь - якому проміжку $[a,b]$ і всі твердження у цьому випадку є аналогічними.

У класичній задачі Штурма- Ліувілля (2.1)-(2.2) суттєвими для існування власних значень і власних функцій та їхніх властивостей, що накладаються коефіцієнти рівняння. Однак є непоодиноким випадком задачі математичної фізики зводяться до спеціальних задач про власні значення та власні функції для лінійного рівняння, в якому коефіцієнти задовольняють не всі умови, а сформульовані вище. Зокрема, найчастіше порушується умова $p(x) > 0$, а саме: коефіцієнт $p(x)$ дорівнює нулю на одному або обох кінцях інтервалу, в якому розглядають задачу. У цьому випадку рівняння (2.1) поряд з обмеженими розв'язками в цьому інтервалі може мати, взагалі кажучи, і необмежені там розв'язки. З метою їх вилучення замість умови (2.2) у відповідній точці сформулюємо умову обмеженості розв'язку в околі цієї точки. Якщо, наприклад, $p(0) = 0,$то крайову умову (2.2) в точці $x = 0$ необхідно замінити умовою $|y(0)| < +\infty$; якщо $p(x) = 0$, $p(l) = 0$, то замість обох умов (2.2) маємо умови $|y(0)| < +\infty, \ |y(l)| < +\infty$.

Дослідження задачі про власні значення і власні функції для рівняння (2.1) за умов обмеженості на кінцях інтервалу $(0, l)$ приводить до спеціальних класів власних функцій, які використовують під час розв'язування багатьох задач математичної фізики.

Функції Бесселя, або циліндричні функції. Розглянемо задачу: обчислити такі значення параметра λ, для яких рівняння

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0, \ \ 0 < x < l \tag{2.5}$$

має нетривіальні розв'язки, що задовольняють крайові умови

$$|y(0)| < +\infty, \ \ \alpha y'(l) + \beta y(l) = 0 \tag{2.6}$$

(ν - числовий параметр).

Рівняння (2.11) заміною $\sqrt{\lambda} x = t, \ \ y(x) = z(x)$ зводимо до класичного рівняння Бесселя

$$t^2 z'' + tz' + (t^2 - \nu^2) z = 0, \tag{2.7}$$

загальний розв'язок якого записуємо у вигляді

$$z(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 J_{-\nu}(t),$$

де ν- неціле число. Якщо ν-ціле, то $J_{-\nu}(t) = (-1)^\nu J_\nu(t),$тобто $J_\nu(t)$ і $J_{-\nu}(t)$лінійно залежні, і загальний розв'язок рівняння (2.7) можна записати у вигляді

$$z(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 N_\nu(t),$$

де $J_\nu(t)$ і $N_\nu(t)$ - відповідні функції Бесселя і Неймана:

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}}{\tilde{A}(n+1)\tilde{A}(\grave{o} + \nu + 1)},$$

$$N_\nu(t) = \frac{2}{\pi} J_\nu(t) \ln\frac{t}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu+2n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2n}$$

де A_n, B_n- деякі числові коефіцієнти, $\Gamma -$відома гамма- функція, $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p > 0$.

Зауважимо, що $N_\nu \to \infty$, коли, $t \to 0$, водночас функція $J_\nu(t)$ обмежена в околі точки $t = 0$.

Виявляється, що функції Бесселя і Неймана мають такі властивості нулів:

а) усі нулі функцій $J_\nu(t)$, $N_\nu(t)$ (крім $x = 0$) ізольовані і прості для $\nu \geq 0$;

б) нулі функції $J_\nu(t)$ з дійсним індексом $\nu \geq -1$ є дійсні;

в) функції $J_\nu(t)$, $N_\nu(t)$, $tJ'_\nu(t) + hJ_\nu(t)$ для кожного дійсного ν мають безмежну послідовність нулів, які збільшуються зі збільшення ν.

Повернувшись до змінних $x, \ y$, одержуємо загальний розв'язок рівняння (2.5) у вигляді

$$y(x) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + C_2 N_\nu(\sqrt{\lambda}x). \tag{2.8}$$

З умови $|y(0)| < +\infty \Rightarrow C_2 = 0$, тоді друга умова (2.6) приводить до рівності $C_1\left[\sqrt{\lambda}J'_\nu(\sqrt{\lambda}l) + hJ_\nu(\sqrt{\lambda}l)\right] = 0.$

Оскільки нас цікавлять нетривіальні розв'язки задачі (2.11)-(2.12), то вибираємо $C_1 \neq 0$ і одержуємо рівняння $\alpha\sqrt{\lambda}J'_\nu(\sqrt{\lambda}l) + \beta J_\nu(\sqrt{\lambda}l) = 0,$ яке повинно задовольняти значення параметра λ. Приймемо $\sqrt{\lambda}l = \mu$ й одержимо рівняння $\alpha\mu J'_\nu(\mu) + \beta l J_\nu(\mu) = 0,$ яке має безмежну послідовність коренів $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$.

Тому задача (2.11)-(2.12) мав безмежну послідовність власних значень $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2$, $n \in N$ і відповідно власних функцій $y_n = J_n\left(\frac{\mu_n}{l}x\right)$, які одержуємо із загального розв'язку (2.8).

Власні функції задачі (2.11)-(2.12) мають такі властивості:

а) власні функції $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}x\right)$ ортогональні на проміжку $[0, l]$ з вагою, x а саме:

$$\int\limits_0^l xJ_\nu\left(\frac{\mu_n}{l}x\right)J_\nu\left(\frac{\mu_m}{l}x\right)dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{l^2}{2}\left\{J'^2_\nu\left(\dfrac{\mu_m}{l}x\right) + \left[1 - \dfrac{\nu^2}{(\mu_m)^2}\right]J^2_\nu(\mu_m)\right\}, & n = m; \end{cases} \tag{2.9}$$

б) якщо $F(x) \in C^1([0, l])$ і задовольняє крайові умови (2.6), то вона розкладається на $[0, l]$ в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є за власними функціям задачі (2.11)-(2.12), тобто

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu\left(\frac{\mu_n}{l^2}x\right),$$

де

$$c_n=\frac{2}{l^2}\left\{J_\nu'^2(\mu_n)+\left[1-\frac{\nu^2}{(\mu_n)^2}\right]J_\nu^2(\mu_n)\right\}^{-1}\int_0^l xF(x)J_\nu\left(\frac{\mu_n}{l}x\right)dx,$$

що випливає з формули ортогональності (2.15).

Поліноми Лежандра. Рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'\right]+\lambda y=0,\ \ 0<x<l \tag{2.10}$$

має особливі точки $x=\pm1$.Розглянемо задачу: обчислити значення параметра λ, для яких рівняння (2.10) має нетривіальні й обмежені розв'язки в інтервалі $(-1,\ +1)$, тобто які задовольняють умови

$$|y(-1)|<+\infty,\ \ |y(+1)|<+\infty. \tag{2.11}$$

Шукаємо розв'язки рівняння (2.10) у вигляді степеневого ряду

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n. \tag{2.12}$$

Підставивши ряд (2.12) у рівняння (2.10) і домагаючись виконання тотожності

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n+1)a_n+\lambda a_n\right]x^n\equiv 0, \tag{2.13}$$

одержимо рекурентне співвідношення

$$a_{n+2}=\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n,\ \ n\in N\cup\{0\} \tag{2.14}$$

для визначення коефіцієнтів a_n, з якого видно, що всі коефіцієнти ряду (2.12), починаючи з a_2, виражаються через a_0, a_1. Якщо $\lambda\neq m(m+1)$, то фундаментальна система розв'язків рівняння (2.10) виражається рядами, і ми не можемо гарантувати існування обмежених розв'язків задачі (2.16)-(2.17). Якщо $\lambda=m(m+1)$, то для будь-якого $n\geq m,\ \ a_{n+2}=0$, і ми одержуємо розв'язки рівняння (2.16) у вигляді многочленів, які обмежені в інтервалі $(-1,\ +1)$. Звідси маємо висновок: власні значення задачі (2.16)-(2.17) є $\lambda=n(n+1),\ n\in N\cup\{0\}$. Власні функції цієї задачі запишемо у вигляді

$$y=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n=P_n(x). \tag{2.15}$$

Вони називаються ***поліномами Лежандра***.

Сформулюємо основні властивості поліномів Лежандра.

1. Поліноми Лежандра $P_n(x)$ є функціями тієї парності, що й число n, тобто $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$

2. Значення поліномів Лежандра в точці $x = 0$

$P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{2n!}{2^{2n}(n!)^2}$.

3. На кінцях відрізка $[-1, \ +1]$поліном Лежандра має значення $P_n(1) = 1,$ $P_n(-1) = (-1)^n$.

4. Поліном Лежандра $P_n(x)$ має в інтервалі$[-1, \ +1]$ n дійсних і різних нулів.

5. Поліноми Лежандра $P_n(x)$ ортогональні на проміжку $[-1, \ +1]$, а саме:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{2}{2m+1}, & n = m. \end{cases} \tag{2.16}$$

Поліноми Лежандра утворюють повну систему функцій і якщо $F(x)$ розкладається в ряд Фур'є за власними функціями $P_n(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

то коефіцієнти

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} F(x) P_n(x) dx,$$

що випливає з формули ортогональності (2.16).

Приклади

1. Обчислити значення параметра λ, для яких рівняння

$$y'' + \lambda y = 0, \ \ 0 < x < l \tag{2.17}$$

має ненульові розв'язки, що задовольняють умови

а) $y(0) = 0, \ \ y(l) = 0$; (2.18)

б) $y'(0) = 0, \ \ y'(l) = 0.$ (2.19)

Розв'язання. Оскільки λ - числовий параметр, то рівняння (2.17) зі сталими коефіцієнтами і його загальний розв'язок шукаємо за методом Ейлера. Якщо $\lambda <$ 0, то корені відповідного характеристичного рівняння $\sigma^2 + \lambda = 0$ дійсні. Загальний розв'язок $y = C_1(\lambda) e^{\sqrt{-\lambda x}} + C_2(\lambda) e^{-\sqrt{-\lambda x}}$ рівняння (2.5) відставимо у крайові умови. У випадку а одержимо для $C_1(\lambda)$ і $C_2(\lambda)$ систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1(\lambda) e^{\sqrt{-\lambda l}} + C_2(\lambda) e^{-)-\lambda l} = 0, \end{cases}$$

визначник якої

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}l} - e^{\sqrt{-\lambda}l} \neq 0$$

для будь-яких $\lambda < 0$. Тому $C_1 = C_2 = 0$ і задача (2.5)-(2.6) має тільки нульовий розв'язок $y(x) \equiv 0$. У випадку 6) маємо для $C_1(\lambda)$ і $C_2(\lambda)$ систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}(C_1 - C_2) = 0, \\ \sqrt{-\lambda}(C_1(\lambda)e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_2(\lambda)e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0, \end{cases}$$

яка рівносильна системі

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_1(\lambda)e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_2(\lambda)e^{-)-\lambda l} = 0, \end{cases}$$

бо $\sqrt{-\lambda} > 0$. Остання система рівнянь також має тільки нульовий розв'язок $C_1 = C_2 = 0$, бо її визначник $\Delta = -e^{-\sqrt{\lambda}l} + e^{\sqrt{-\lambda}l} \neq 0.$ Отже, жодне із значень $\lambda < 0$ не

є власним значенням крайових задач (2.5)-(2.6) і (2.5)-(2.7).

Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок $y = C_1 x + C_2$ рівняння (2.17) задовольняє крайові умови (2.18), якщо $C_1 = C_2 = 0$, а з крайових умов (2.19) одержимо, що $C_1 = 0$. Звідси маємо висновок, що $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі (2.17)-(2.18), але є власним значенням задачі (2.17)-(2.19). Власному значенню $\lambda = 0$ задачі (2.17)-(2.19) відповідають власні функції $y = C_2 \neq 0$, найпростішою з яких є $y(x) \equiv 1$ (для $C_2 = 1$).

Для $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння (2.17) запишемо у вигляді

$$y = C_1(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x + C_2(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x.$$

З крайових умов (2.18) одержимо, що $C_1 = 0$, $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Оскільки вибрати $C_2 = 0$ не можемо, бо тоді $y(x) \equiv 0$, то задовольняємо рівність вибором λ: $\sqrt{\lambda}l = n\pi \Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in N$. У результаті маємо ненульові розв'язки $y(x) = C_2 \sin\frac{n\pi}{l}x$, $C_2 \neq 0$ задачі (2.17)-(2.18). *У* випадку 6) для визначення $C_1(\lambda)$ і $C_2(\lambda)$ одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}C_2 = 0, \\ \sqrt{\lambda}(-C_1 \sin\sqrt{\lambda}l + C_2 \cos\sqrt{\lambda}l) = 0, \end{cases}$$

з якої $C_2 = 0,\ C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$ (пам'ятаємо, що $\sqrt{\lambda} > 0$). Щоб розв'язок задачі (2.17)-(2.18) був ненульовим, ми повинні вибрати $C_1 \neq 0,\ \sqrt{\lambda}l = n\pi \Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in N$. Тоді всі ненульові розв'язки задачі (2.17)-(2.18) запишемо у вигляді $y(x) = C_1 \cos\frac{n\pi}{l}x.$

Висновок. Задача (2.17)-(2.18) має послідовність власних значень $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in N$ і відповідну їй послідовність лінійно-незалежних власних функцій, а задача (2.17)-(2.19) - послідовність власних значень $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in$

$y_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$, $N \cup \{0\}$ і відповідну їй послідовність власних функцій $y_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x.$

Зауважимо, що всі власні значення задачі (2.17)-(2.18) додатні, а задачі (2.17)- (2.19)- невід'ємні. В обох випадках $\|y_n\|^2 = \frac{l}{2}$.

2.Довести рекурентну формулу

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

Розв'язання. Рекурентну формулу можна довести безпосереднім диференціюванням ряду для функції Бесселя:

$$x^\nu \frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = x^\nu \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{2^\nu\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)}\right] =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} 2n\frac{1}{2}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n+\nu+1)}.$$

В останній сумі замінимо n на $n+1$. Маємо

$$x^\nu \frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+(\nu+1)}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+(\nu+1)+1)} = -J_{\nu+1}(x),$$

звідси одержуємо рекурентну формулу.

§ 3.Застосування методу Фур'є до розв'язування мішаної задачі для рівнянь гіперболічного типу

Розглянемо мішану задачу: знайти розв'язок рівняння

$$\rho(x)u_{tt} = [p(x)u_x]_x - q(x)u + f(t,x) \tag{3.1}$$

в області $Ш_\infty = \{(t,x) | t > 0, 0 < x < l\}$, який задовольняв початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x),\ u_t|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{3.2}$$

і крайові (граничні) умови

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = \mu_0(t),\ (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=1} = \mu_1(t). \tag{3.3}$$

Будемо вважати, що коефіцієнти рівняння і крайових умов задовольняють вимогам, сформульованим у **§2**.

Випадок однорідного рівняння і нульових крайових умов. Нехай $f(t,x)\equiv 0,\ \ \mu_0(t)\equiv\mu_1(t)\equiv 0$. У цьому випадку задачу (3.1)-(3.2)-(3.3) розв'язуємо методом відокремлення змінних (методом Фур'є), схему якого наводимо нижче.

Спочатку знайдемо розв'язок допоміжної задачі: про знаходження всіх нетривіальних розв'язків рівняння (3.1), які задовольняють крайові умови (3.3) та мають вигляд

$$u(t,x)=T(t)X(x)\neq 0\,. \tag{3.4}$$

Підставляючи (3.4) у рівняння (3.1) і крайові умови (3.3), маємо

$$\rho(x)T''(t)X(x)\equiv T(t)\big[\rho(x)X'(x)\big]-q(x)T(t)X(x,) \tag{3.5}$$

$$T(t)\big[\alpha_0X'(a)+\beta_0X(a)\big]\equiv 0,\ \ T(t)\big[\alpha_1X'(b)+\beta_1X(b)\big]\equiv 0, \tag{3.6}$$

З тотожності (3.5) одержуємо, що

$$\frac{T''(t)}{T(t)}\equiv\frac{\big[p(x)X'(x)\big]'-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=-\lambda=const,$$

(ми прирівняли співвідношення до $const$ тому, що рівність двох функцій, які залежать від різних незалежних змінних, можлива тоді і тільки тоді, коли ці функції дорівнюють одній і тій же сталій величині).

Звідси одержуємо, що функція (3.4) є розв'язком однорідного рівняння і задовольняє нульові крайові умови тоді і тільки тоді, коли $T=T(t)$, $X=X(x)$ є відповідно розв'язками звичайних диференціальних рівнянь

$$T''+\lambda T=0, \tag{3.7}$$

$$\big[p(x)X'\big]'-q(x)X+\lambda\rho(x)X(x)=0. \tag{3.8}$$

З тотожностей (3.6) одержуємо умови для *X(x):*

$$\alpha_0X'(0)+\beta_0X(0)=0,\ \ \alpha_1X'(l)+\beta_1X\big(l\big)=0 \tag{3.9}$$

($T(t)\neq 0,$ бо у протилежному випадку $u(t,x)\equiv 0$). Отже, добуток (3.4) є розв'язком допоміжної задачі, якщо $T=T(t)$- нетривіальний розв'язок рівняння (3.7), а $X=X(x)$- нетривіальний розв'язок рівняння (3.8), що задовольняє умови (3.9), тобто $X=X(x)$ повинна бути розв'язком задачі Штурма- Ліувілля. Як було зазначено в **§**2, задача (3.8)-(3.9) має нескінченну послідовність власних значень

$$0\le\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$$

і нескінченну послідовність лінійно- незалежних власних функцій

$$X_1(x),\ \ X_2(x),\ \ldots,\ \ X_n(x),\ \ \ldots\,.$$

Розв'язок рівняння (3.7) має місце для власних значень (3.8),(3.9) $\lambda=\lambda_n$:

$$T''+\lambda_nT=0\Rightarrow T=T_n(t)=A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t,$$

якщо всі $\lambda_n > 0$. У результаті маємо послідовність розв'язків допоміжної задачі

$$u_n(t,x) = \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t\right)X_n(x), \ \ n \in N$$

Щоб задовольнити початкові умови (3.2), підсумуємо всі розв'язки допоміжної задачі:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t\right)X_n(x). \qquad (3.10)$$

Якщо ряд (3.10) є рівномірно збіжним то як відомо, його можна почленно диференціювати один раз для $t \ge 0$, $a \le x \le b$та двічі для $t > 0, 0 < x < l$, то сума $u(t,x)$ цього ряду є неперервною функцією, що також задовольняє рівняння (3.1) і умови (3.3). Згідно початкових умов функція $u(t,x)$ повинна задовольняти початкові умови (3.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi_0(x), \ \ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x) = \varphi_1(x). \qquad (3.11)$$

Якщо $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ розкладаються в ряди Фур'є за власними функціями $X_n(x)$, то рівності (3.11) справджуються, і користуючись ортогональністю власних функцій $X_n(x)$ (теорема Стєклова), знайдемо коефіцієнти A_n і B_n за формулами

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \rho(x)\varphi_0(x)X_n(x)dx, \ B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\|X_n\|^2}\int_0^l \rho(x)\varphi_1(x)X_n(x)dx.$$

Підставивши обчислені значення A_n і B_n в ряд (3.10), одержимо формальний розв'язок задачі (3.1)-(3.3).

Доведено, що одержаний розв'язок класичний, якщо виконуються такі умови:

1) коефіцієнти $p(x) \in C^2([0,l]), \ p > 0, \ q(x) \in C^1([0,l]), \ q \ge 0,$
$\rho \in C^1([0,l]), \ \rho > 0;$

2) $\varphi_0(x) \in C^3([0,l]), \ \varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \ \left\{[p(x)\varphi_0'(x)]' - q(x)\varphi_0(x)\right\}\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0;$

3) $\varphi_1(x) \in C^2([0,l]), \ \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0.$

Зауважимо, що коли $\lambda_0 = 0$ є власним значенням задачі Штурма- Ліувілля і йому відповідає власна функція $X_0(x)$ то рівняння (3.7), для цього власного значення має вигляд $T'' = 0 \Rightarrow T = T_0(t) = B_0 t + A_0$.Тоді допоміжна задача (3.1)-(3.3) має послідовність розв'язків

$$u_0(t,x) = (B_0 t + A_0)X_0(x),$$
$$u_n(t,x) = \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}l\right)X_n(x),$$

і ряд (3.10) набуває вигляду

$$u(t,x)=\left(B_0t+A_0\right)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,l+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,l\right)X_n(x).$$

Зауваження. За наведеною схемою можна шукати розв'язок мішаної задачі для більш загального рівняння

$$\rho(x)\left[A(t)u_{tt}+B(t)u_t+C(t)u\right]=N(t)\left[\Phi(x)u_{xx}+Q(x)u_x+R(x)u\right].$$

У цьому випадку для визначення функцій $T=T(t)$ і $X=X(x)$ одержуємо рівняння

$$A(t)T''+B(t)T'+\left[C(t)+\lambda N(t)T\right]=0,$$
$$\Phi(x)X''+Q(x)X'+\left[R(x)+\lambda\rho(x)\right]X=0.$$

Випадок неоднорідного рівняння і нульових крайових умов. Нехай $\mu_0(t)=\mu_1(t)\equiv 0$. Розв'язок задачі (3.1)-(3.3) в цьому випадку можна шукати двома способами.

Перший спосіб. Нехай $v(t,x)$ - будь-який частковий розв'язок рівняння (3.1), який задовольняє нульові крайові умови (3.3), тобто

$$\rho(x)v_{tt}=\left[p(x)v_x\right]_x-q(x)v+f(t,x), \tag{3.12}$$
$$\left.\left(\alpha_0v_x+\beta_0v\right)\right|_{x=0}=0,\ \left.\left(\alpha_1v_x+\beta_1v\right)\right|_{x=1}=0. \tag{3.13}$$

Приймаємо $\omega=u-v,$ де u - розв'язок задачі (3.1)-(3.3). Легко перевірити, що ω є розв'язком мішаної задачі

$$\rho(x)\omega_{tt}=\left[p(x)\omega_x\right]_x-q(x)\omega,\ \ t>0,\ \ 0<x<l\,,$$
$$\left.\omega\right|_{t=0}=\varphi_0(x)-v(0,x),\ \ \omega_t(0,x)=\varphi_1(x)-v_t(0,x),$$
$$\left.\left(\alpha_0\omega_x+\beta_0\omega\right)\right|_{x=0}=0,\ \left.\left(\alpha_1\omega_x+\beta_1\omega\right)\right|_{x=l}=0,$$

яку розв'язуємо методом відокремлення змінних.

Описаний метод вдається реалізувати, якщо знайдений частковий розв'язок задачі (3.12)-(3.13). Вигляд його можна часом передбачити за виглядом функції $f(t,x)$. Якщо $f(t,x)=f(x)$, то розв'язок $v(t,x)$ можна шукати у вигляді $v(t,x)=v(x)$; якщо $f(t,x)=f_1(x)\cos\omega_1t+f_2(x)\sin\omega_2t$, то існує розв'язок $v(t,x)$ рівняння (3.12) вигляду $v(t,x)=v_1(x)\cos\omega_1t+v_2(x)\sin\omega_2t$.

Другий спосіб. Шукаємо розв'язок задачі (3.1)-(3.2)-(3.3) у вигляді ряду Фур'є за власними функціями $X_n(x)$ відповідної задачі Штурма- Ліувілля з довільними $T_n(t)$ - коефіцієнтами Фур'є:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x). \tag{3.14}$$

Якщо ряд (3.14) рівномірно збігається, і його можна почленно диференціювати двічі по $t,\ x$ то, по-перше, сума його $u(t,x)$ для довільних $T_n(t)$ задовольняє нульові крайові умови (3.3), а, по-друге, підставляючи (3.14) у рівняння (3.1) і початкові умови (3.2), можна визначити $T_n(t)$ і в результаті сума ряду (3.14) буде розв'язком мішаної задачі. Справді:

$$\rho(x)\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\left[p(x)X_n'\right]'-\sum_{n=1}^{\infty}q(x)X_n+f(t,x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho(x)\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\left\{\left[p(x)X_n'\right]'-q(x)X_n\right\}+f(t,x).$$

Тепер врахуємо, що

$$\left[p(x)X_n'(x)\right]'-q(x)X_n=-\lambda_n\rho(x)X_n$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\lambda_nT_n(t)\right]X_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}f(t,x).$$

тепер (3.14) у початкові умови (3.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=\varphi_0(x),\ \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)X_n(x)=\varphi_1(x).$$

Останні рівності справджуються, якщо $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x)$ розкладаються у ряд Фур'є за функціями $X_n(x)$. Тоді Остання рівність справджується, якщо $\frac{1}{\rho(x)}f(t,x)$ розкладається як функція x у ряд Фур'є за функціями $X_n(x)$, і тоді, користуючись ортогональністю функцій $X_n(x)$, для $T_n(t)$ одержимо рівняння

$$T_n''(t)+\lambda_nT_n(t)=f_n(t), \tag{3.15}$$

де $f_n(t)=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l f(t,x)X_n(x)dx$.

Підставимо

$$T_n(0)=\varphi_{0n},\ T_n'(0)=\varphi_{1n} \tag{3.16}$$

де $\varphi_{0n}=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l\varphi_0(x)\rho(x)X_n(x)dx,\quad \varphi_{1n}=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l\varphi_1(x)\rho(x)X_n(x)dx.$

Розв'яжемо задачу Коші (3.15)-(3.1б) (розв'язок її існує для неперервних функції $f_n(t)$) і, відставивши знайдені $T_n(t)$ у (3.14), одержимо розв'язок мішаної задачі .

Випадок неоднорідного рівняння і ненульових крайових умов. У загальному випадку задачу (3.1)-(3.3) можна звести до мішаної задачі з нульовими крайовими умовами. Справді, нехай $v(t,x) \in C^2(\text{Ш}_\infty) \bigcap C^1(\Pi_\infty)$ - довільна функція, яка задовольняє крайові умови (3.3):

$$\left.(\alpha_0 v_x + \beta_0 v)\right|_{x=0} = \mu_0(t), \ \left.(\alpha_1 v_x + \beta_1 v)\right|_{x=1} = \mu_1(t).$$

Таку функцію можна шукати у вигляді $v(t,x) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$. Приймемо $\omega = u - v(t,x)$, де u - розв'язок задачі (3.1)-(3.2)-(3.3). Тоді функція ω повинна бути розв'язком мішаної задачі

$$\rho(x)\omega_{tt} = \left[p(x)\omega_x\right]_x - q(x)\omega + \overline{f}(t,x), \tag{3.17}$$

$$\overline{f}(t,x) = f(t,x) - \left[p(x)v_x\right]_x - q(x)v - \rho(x)v_{tt},$$

$$\left.\omega\right|_{t=0} = \varphi_0(x) - v(0,x), \ \left.\omega_t\right|_{t=0} = \varphi_1(x) - v_t(0,x), \tag{3.18}$$

$$\left.(\alpha_0\omega_x + \beta_0\omega)\right|_{x=0} = 0, \left.(\alpha_1\omega_x + \beta_1\omega)\right|_{x=1} = 0. \tag{3.19}$$

Ми одержали мішану задачу (3.17)-(3.18)-(3.19) з нульовими крайовими умовами, яку розглянули у попередньому пункті.

Зауважимо, що коли $\overline{f}(t,x) \equiv 0$ (це рівносильно тому, що $v(t,x)$ є ще розв'язком рівняння (3.1)), то задача (3.17)- (3.19) буде найпростішою і її можна розв'язати методом відокремлення змінних.

Приклади

1. Однорідна струна, закріплена на кінцях $x = 0$ і $x = l$, має у початковий момент часу форму параболи з вершиною у точці $\left(\frac{l}{2}, h\right)$. Знайти відхилення точок струни від прямолінійного положення рівноваги, якщо початкових швидкостей нема.

Розв'язання. Позначимо через $u(t,x)$ відхилення точки x струни від прямолінійного положення рівновага в момент часу t. Функція $u(t,x)$,яка описує цей коливний процес, є розв'язком мішаної задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < l \tag{3.20}$$

$$u(0,x) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \ u_t(0,x) = 0, \tag{3.21}$$

$$u(t,0) = 0, \ u(t,l) = 0. \tag{3.22}$$

Спочатку знайдемо всі розв'язки рівняння (3.20), які задовольняють крайові умови (3.22) і мають вигляд

$$u(t,x) = T(t)X(x) \neq 0. \tag{3.23}$$

Підставимо (3.23) у рівняння (3.20) і крайові умови (3.22):

$$T''(t)X(x) \equiv a^2 T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \equiv \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const;$$

$$T(t)X(0) \equiv 0, \ T(t)X(l) \equiv 0 \Rightarrow X(0) = 0, \ X(l) = 0.$$

Звідси випливав, що функція $T = T(t)$ повинна бути нетривіальним розв'язком рівняння

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \tag{3.24}$$

а функція $X = X(x)$ - розв'язком задачі Штурма- Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3.25}$$

Власні значення задачі (3.25) $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in N$, а власні функції $X_n = \sin\frac{n\pi}{l}x$. Підставимо $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ у рівняння (3.24) і знайдемо, що загальний його розв'язок має вигляд

$$T = T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at.$$

У результаті маємо послідовність розв'язків допоміжної задачі (3.20)-(3.22)

$$u_n(t,x) = (A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at)\sin\frac{n\pi}{l}x, n \in N.$$

Щоб задовольнити початкові умови (3.21), підсумуємо $u_n(t,x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{3.26}$$

Якщо ряд (3.26) рівномірно збігається для $t \ge 0, 0 \le x \le l$ і його можна двічі почленно диференціювати для $t > 0, \quad 0 < x < l$, то його сума $u(t,x)$ є також розв'язком рівняння (3.20) і задовольняє крайові умови (3.22). Підставимо тепер (3.26) у початкові умови (3.21):

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{4hx(l-x)}{l^2},\ u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} aB_n \frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = 0. \tag{3.27}$$

Початкові функції задачі розкладаються в ряди Фур'є за власними функціями $\sin\frac{n\pi}{l}x$ в проміжку $[0,l]$, із рівностей (3.27) на підставі ортогональності власних функцій визначимо коефіцієнти A_n і B_n:

$$A_n = \frac{8h}{l^3}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = -\frac{8h}{l^2 n\pi}\int_0^l x(l-x)d\cos\frac{n\pi}{l}x =$$

$$= -\frac{8h}{l^2 n\pi}\left[x(l-x)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l - \int_0^l (l-2x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\right] =$$

$$= \frac{8h}{l(n\pi)^2}\int_0^l (l-2x)d\sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{8h}{n^2\pi^2 l}\left[(l-2x)\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \right.$$

$$+2\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}xdx] = -\frac{16}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l = \frac{16h}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right];$$

$$A_n = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \dfrac{32h}{n^3\pi^3}, & n = 2m+1, \quad m \in N \cup \{0\}; \end{cases} \quad B_n = 0, \quad n \in N.$$

Підставимо значення коефіцієнтів A_n, B_n у ряд (3.26) і одержимо формальний розв'язок мішаної задачі (3.20)-(3.22) у вигляді

$$u(t,x) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{2n+1}{l}\pi at\sin\frac{2n+1}{l}\pi x. \qquad (3.28)$$

Покажемо, що сума $u(t,x)$ ряду (3.28) є класичним розв'язком задачі (3.20)-(3.22). Для цього достатньо обґрунтувати рівномірну збіжність ряду (3.28) і можливість його диференціювання двічі по t і x.

Ряд (3.28) і ряди для $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$в області $(t \ge 0, \quad 0 \le x \le l)$ мажоруються відповідно числовими рядами

$$\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}, \quad \frac{32ha}{\pi^2 l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \frac{32h}{\pi^2 l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

які збігаються, тому ряд (3.28) рівномірно збіжний і його можна диференціювати один раз по t і x у пій області. Ряди для похідних другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{32ha^2}{\pi l^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cos\frac{2n+1}{l}\pi at\sin\frac{2n+1}{l}\pi x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{32h}{\pi l^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cos\frac{2n+1}{l}\pi at\sin\frac{2n+1`}{l}\pi x$$

рівномірно збігаються в області $(0 < t < T, \quad 0 < x < l)$ за ознакою Діріхле, тому ряд (3.28) можна двічі диференціювати в цій області.

2. Дослідити малі повздовжні коливання пружного однорідного стержня $0 \le x \le l$ з вільними кінцями, якщо у початковому положенні він перебував у стані спокою і його кінець $x = 0$ збурений імпульсом I.

Розв’язання. Функція $u(t,x)$, яка означає переміщення від положення рівноваги поперечного перерізу стержня з абсцисою x у момент часу t, є розв'язком мішаної задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ \ 0 < x < l,$$

$$u(0,x) = 0,\ \ u_t(0,x) = \frac{I}{\rho}\delta(x),\ \ u_x(t,0) = 0,\ \ u_x(t,l) = 0,$$

де ρ - лінійна густина маси; $\delta(x)$ - функція Дірака.

Оскільки рівняння однорідне і крайові умови нульові, то задачу розв'язуємо методом відокремлення змінних. Шукаємо розв'язки $u(t,x)=T(t)X(x)\neq 0$ допоміжної задачі:

$$T''(t)X(x)\equiv a^2T(t)X''(x)\Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)};$$

$$T(t)X'(0)=0\Rightarrow X'(0)=0,\ T(t)X'(l)=0\Rightarrow X'(l)=0.$$

Звідси маємо, що функція $T=T(t)$ повинна бути розв'язком рівняння $T''+\lambda a^2T=0$, а функція $X=X(x)$- розв'язком крайової задачі Штурма-Ліувілля

$$X''+\lambda X=0,\ 0<x<l,\ X'(0)=0,\ X'(l)=0,$$

власні значення якої $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n\in N\cup\{0\}$ і власні функції $X_n=\cos\frac{n\pi}{l}x$

Рівняння для $T(t)$ має загальний розв'язок

$$T=T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi}{l}at+B_n\sin\frac{n\pi}{l}at,\ n\in N;$$

$$T=T_0(t)=A_0+B_0t,\ n=0.$$

У результаті мамо послідовність

$$u_0(t,x)=A_0+B_0t,\ u_n(t,x)=\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}at+B_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

Підсумуємо ці розв’язки

$$u(t,x)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}at+B_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\cos\frac{n\pi}{t}x,$$

і визначимо коефіцієнти A_n, B_n з початкових умов:

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{l}x=0\Rightarrow A_0=0,\ A_n=0,n\in N;$$

$$B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x=\frac{I}{\rho}\delta(x)\Rightarrow B_0=\frac{I}{\rho l}\int_0^l\delta(x)dx=\frac{I}{L\rho},$$

$$B_n=\frac{2I}{n\pi\rho a}\int_0^l\delta(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2I}{n\pi\rho a}.$$

Тут ми скористалися формулами означення функції Дірака $\delta(x)$, за яким

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\psi(x)dx=\psi(x_0),$$

якщо $\psi(x)$ - будь – яка неперервна функція.

Отже, одержуємо формальний розв’язок задачі у вигляді

$$u(t,x)=\frac{I}{\rho l}t+\frac{2I}{a\pi\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}at\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

Отриманий ряд збігається рівномірно для $t\geq 0,\ 0\leq x\leq l,$ але має ряди, які одержуємо після почленного його диференціювання є вже розбіжними. Тому розв’язок не є класичним.

§4. Застосування методу Фур’є до розв’язування мішаної задачі для рівнянь параболічного типу

Мішана задача для параболічного рівняння

$$\rho(x)u_t=\left[p(x)u_x\right]_x-q(x)u+f(t,x)\,. \tag{4.1}$$

Полягає у знаходженні розв'язку $u(t,x)$ рівняння (4.1) в області $Ш_\infty=\{(t,x)|\quad t>0,\ 0<x<l\}$, який задовольняє початкову умову

$$u(0,x)=\varphi(x) \tag{4.2}$$

і крайові умови

$$\alpha_0 u_x(t,0)+\beta_0 u(t,0)=\mu_0(t),\ \alpha_1 u_x(t,l)+\beta_1 u(t,l)=\mu_1(t). \tag{4.3}$$

Функції $\rho(x),\ p(x),\ q(x)$ і числа $\alpha_0,\ \beta_0,\ \alpha_1,\ \beta_1$ задовольняють вимоги, сформульовані у **§2**.

Мішану задачу (4.1)-(4.2)-(4.3) розв'язують за такою схемою, як і задачу (3.1)-(3.2)-(3.3). Відмінність у схемі полягає тільки в тому, що для відшукання функції $T(t)$ замість рівняння (3.7) дістаємо рівняння

$$T'+\lambda_n T=0\,,$$

загальний розв'язок якого

$$T=T_n(t)=A_n e^{-\lambda_n t}\,.$$

Розв'язки допоміжної задачі (4.I)-(4.3) записують у вигляді послідовності

$$u_n(t,x)=A_n e^{-\lambda_n t}X_n(x),\ (\lambda_n\geq 0)$$

і в результаті

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\lambda_n t}X_n(x)\,.$$

Тепер за рахунок вибору коефіцієнтів A_n задовольняємо початкову умову (4.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n X_n(x)=\varphi(x)\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l\varphi(x)X_n(x)dx=\overline{A_n}$$

і формальний розв'язок задачі (4.1)-(4.2)-(4.3

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n e^{-\lambda_n t}X_n(x). \qquad (4.4)$$

Зрозуміло, що сума $u(t,x)$ ряду (4.4).в класичним розв'язком мішаної задачі, якщо $\varphi(x)$ розкладається в ряд Фур'є за власними функціями $X_n(x)$, ряд (4.4) рівномірно збігається і його можна почленно диференціювати двічі по t, x. Для цього досить, щоб коефіцієнти $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, задовольняли умови існування власних значень і власних функцій, а $\varphi(x) \in C^2([0,l])$, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

Приклади

1. Визначити температуру $u(t,x)$ стержня довжиною l, з бічної поверхні якого йде випромінювання у навколишнє середовище з нульовою температурою, на кінцях стержня підтримується температура u_0, u_1, а його початкова температура дорівнює $\varphi(x)$.

Розв'язування. Функція $u(t,x)$ є розв'язком мішаної задачі

$$u_t=a^2u_{xx}-h^2u,\ \ h=const,\ \ t>0,\ \ 0<x<l, \qquad (4.5)$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \qquad (4.6)$$

$$u(t,0)=u_0,\ \ u(t,l)=u_1 \qquad (4.7)$$

де h^2 - коефіцієнт теплопровідності.

Оскільки крайові умови (4.7) не є нульовими, то спочатку визначимо функцію $v(t,l)$ таку, що

$$v_t=a^2v_{xx}-h^2v;\ \ v(t,0)=u_0,\ \ v(t,l)=u_1.$$

Шукаючи її у вигляді $v(t,x)=v(x)$, маємо

$$a^2v_{xx}-h^2v=0 \Rightarrow v(x)=C_1e^{\left(\frac{h}{a}\right)x}+C_2e^{-\left(\frac{h}{a}\right)x};$$

$$v(0)=0 \Rightarrow C_1+C_2=u_0,\ \ v(l)=u_1 \Rightarrow C_1e^{\left(\frac{h}{a}\right)l}+C_2e^{-\left(\frac{h}{a}\right)l}=u_1.$$

З отриманої системи рівнянь

$$C_1=\frac{u_1-u_0e^{-\left(\frac{h}{a}\right)l}}{2sh\frac{h}{a}l},\ C_2=\frac{-u_1+u_0e^{\left(\frac{h}{a}\right)l}}{2sh\frac{h}{a}l},$$

і тому

$$v(x)=\frac{u_1 sh\frac{h}{a}x-u_0 sh\frac{h}{a}(x-l)}{sh\frac{h}{a}l}.$$

Приймемо $w=u-v(x)$, де u - розв'язок задачі (4.5)- (4.6)- (4.7), і для функції w одержимо мішану задачу $w_t=a^2w_{xx}-h^2w,\quad w(0,x)=\varphi(x)-v(x),$ $w(t,0)=0,\ \ w(t,l)=0,$ яку розв'яжемо методом відокремлення змінних.

Шукаємо розв'язки $w=T(t)X(x)\neq 0$ рівняння, які задовольняють крайові умови. Дістанемо, що функція $T=T(t)$ повинна бути розв'язком рівняння $T'+\lambda a^2T=0,$ а функція $X=X(x)$ - розв'язком задачі Штурма- Ліувілля

$$X''-\frac{h^2}{a^2}X+\lambda X=0,\ \ X(0)=0,\ \ X(l)=0.$$

Вважаючи, що $\lambda-\left(\frac{h}{a}\right)^2>0,$ (коли $\lambda-\left(\frac{h}{a}\right)^2\leq 0,$ то $X(0)\equiv 0$), знайдемо загальний розв'язок рівняння для X у вигляді

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda-\left(\frac{h}{a}\right)^2}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda-\left(\frac{h}{a}\right)^2}\,x.$$

З крайових умов маємо

$$X(0)=0\Rightarrow C_1=0,\ \ X(l)=0\Rightarrow C_2\sin\sqrt{\lambda-\left(\frac{h}{a}\right)^2}\,l=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{\lambda-\left(\frac{h}{a}\right)^2}\,l=n\pi$$

$\left(C_2\neq 0,\ \text{бо тоді}\ X(x)\equiv 0\right)\ \Rightarrow\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{h}{a}\right)^2,\quad n\in N$ - власні значення. Власні функції $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x.$ Тепер визначаємо функцію $T(t)$ з рівняння

$$T'+\lambda_n a^2T=0\Rightarrow\ T=T_n(t)=A_ne^{-\lambda_n a^2t}.$$

У результаті дістаємо послідовність розв'язків допоміжної задачі для w:

$$w_n(t,x)=A_ne^{-\lambda_n a^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Користуючись принципом суперпозиції, одержуємо, що функція

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\lambda_n a^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

також задовольняв рівняння для w і крайові умови, якщо отриманий ряд рівномірно збігається і його можна відповідне число раз почленно диференціювати по t і x. За рахунок вибору A_n задовольняємо початкову умову

$$w(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x\Rightarrow A_n=\frac{2}{l}\int_0^l[\varphi(x-v(x))]\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Врахуємо, що

$$\int_0^l v(x)\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{1}{sh\frac{h}{a}l}\left[u_1\int_0^l sh\frac{h}{a}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx-u_0\int_0^l sh\frac{h}{a}(x-l)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{n\pi}{l}xdx\right]=\frac{1}{sh\frac{h}{a}l}\left[(-1)^{n-1}u_1\frac{l}{n\pi}sh\frac{h}{a}l-u_0\frac{l}{n\pi}sh\frac{h}{a}l\right]=$$

$$=-\frac{l}{n\pi}\left[u_0+(-1)^n u_1\right],$$

обчислимо

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx+\frac{2}{k\pi}\left[u_0+(-1)^n u_1\right]=\bar{A}_n+\frac{2}{n\pi}\left[u_0+(-1)^n u_1\right].$$

Отже, вихідна задача (4.5)- (4.6)- (4.7) має розв'язок

$$u=\frac{u_1 sh\frac{h}{a}x-u_0 sh\frac{h}{a}(x-l)}{sh\frac{h}{a}l}+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n e^{-\lambda_n a^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[u_0+(-1)^n u_1\right]e^{-\lambda_n a^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

2. Усередині кулі радіусом r_0 з менту часу $t=0$ починають діяти теплові джерела з густиною $q=const$. Визначити температуру внутрішніх точок кулі, якщо поверхня її теплоізольована, а початкова температура є відомою функцією від r (r - відстань точки від центра кулі).

Розв'язування. Помістимо початок координат у центр кулі і сформулюємо математичну модель задачі у сферичних координатах, бо тоді шукана температура $\bar{u}(t,x,y,z)=u(t,r)$. Враховуючи, що оператор Лапласа $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ у сферичних координатах має вигляд

$$\Delta=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})+\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})\right],$$

функція $u = u(t,r)$ повинна бути розв'язком мішаної задачі

$$u_t = a^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r) + \frac{q}{c\rho},\ t > 0,\ 0 \le r < r_0, \qquad (4.8)$$

$$u(0,r) = \varphi(r), \qquad (4.9)$$

$$|u(t,0)| < +\infty,\ u_r(t,r_0) = 0. \qquad (4.10)$$

Крайова умова $|u(t,0)| < +\infty$ випливає з того, що точка $r = 0$ особлива для рівняння (4.8), і воно має в її околі необмежені розв'язки, які підлягають вилученню.

Рівняння (4.8) перетворюємо до вигляду

$$ru_t = a^2(ru_{rr} + 2u_r) + \frac{q}{c\rho}r \Rightarrow (ru)_t = a^2(ru)_{rr} + \frac{q}{c\rho}r$$

і, заміну $ru = w$, одержимо мішану задачу виконавши

$$w_t = a^2 w_{rr} + \frac{q}{c\rho}r,\ t > 0,\ 0 \le r < r_0, \qquad (4.8')$$

$$w(0,r) = r\varphi(r), \qquad (4.9')$$

$$w(t,0) = 0,\ w_r(t,r_0) - \frac{1}{r_0}w(t,r_0) = 0. \qquad (4.10')$$

Відповідна мішаній задачі (4.8')-(4.9')-(4.10') задача Штурма- Ліувілля має вигляд

$$R''(r) + \lambda R(r) = 0,\ 0 \le r < r_0,\ R(0) = 0,\ R'(r_0) - \frac{1}{r_0}R(r_0) = 0. \qquad (4.11)$$

Задача (4.11) має власні значення $\lambda \ge 0$. Для $\lambda = 0$ маємо $R'' = 0 \Rightarrow$ $R(r) = A_0 r + B_0$, $R(0) = 0 \Rightarrow B_0 = 0;$ $R'(r_0) - \frac{1}{r_0}R(r_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_0 - \frac{1}{r_0}A_0 r_0 = 0.$ Тому власна функція задачі (4.11), яка відповідає власному значенню $\lambda = 0$, є $R_0(r) = r$ (ми вибрали $A_0 = 1$). Для $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння задачі (4.11) запишемо у вигляді

$$R(r) = C_1(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}r + C_2(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}r.$$

З крайових умов $(4.10')$ маємо:

$$R(0) = 0 \Rightarrow C_1(\lambda) = 0,\ R'(r_0) - \frac{1}{r_0}R(r_0) = 0 \Rightarrow C_2(\lambda)\Big(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}r_0 -$$

$$- \frac{1}{r_0}\sin\sqrt{\lambda}r_0\Big) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}r_0 - \frac{1}{r_0}\sin\sqrt{\lambda}r_0 = 0 \Rightarrow\ tg\sqrt{\lambda}r_0 =$$

$$= \sqrt{\lambda}r_0\ (C_2 \ne 0).$$

Отже, власні значення $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2$, $\kappa \in N$, де $\mu = \mu_k > 0$ - корені рівняння $tg\mu = \mu$, *а* відповідні їм власні функції $R_k = \sin \frac{\mu_k}{r_0} r.$

Тепер розв'язок мішаної задачі $(4.8')$ - $(4.9')$ - $(4.10')$ шукаймо у вигляді

$$w(t,r) = T_0(t)R_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)R_k(r) = T_0(t)r + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{\mu_k}{r_0}r.$$

Підставивши $w(t,r)$ у рівняння $(4.8')$, маємо

$$T_0'(t)r + \sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k'(t) + \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 T_k(t)\right]\sin\frac{\mu_k}{r_0}r = \frac{q}{c\rho}r,$$

звідси

$$T_0'(t) = \frac{q}{c\rho},\ T_k'(t) + \left(\frac{\mu_k}{r_0}a\right)^2 T_k(t) = 0,\ k \in N. \qquad (4.12)$$

З вимоги, що ряд для w має задовольняти початкову умову

$$w(0,r) = T_0(0)r + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\frac{\mu_k}{r_0}r = r\varphi(r).$$

На підставі ортогональності власних функцій $R_0(r),\ R_k(r),\ k \in N$

$$\int_0^{r_0} R_k(r)R_m(r)dr = \begin{cases} 0, & k \neq m; \\ \frac{r_0}{2}\frac{\mu_m^2}{\mu_m^2+1}, & k = m \neq 0; \\ \frac{r_0^3}{3}, & k = m = 0. \end{cases}$$

знайдемо, що

$$T_0(0) = \frac{3}{r_0^3}\int_0^{r_0} r^2\varphi(r)dr = \bar{A}_0,$$

$$T_k(0) = \frac{2}{r_0}\frac{\mu_k^2+1}{\mu_k^2}\int_0^{r_0} r\varphi(r)\sin\frac{\mu_k}{r_0}rdr = \bar{A}_k,\ k \in N. \qquad (4.13)$$

Загальні розв’язки рівнянь (4.12)

$$T_0(t) = \frac{q}{c\rho}t + A_0,\ T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k}{r_0}a\right)^2 t}$$

підставимо у початкові умови (4.13):

$T_0(0) = \bar{A}_0 \Rightarrow A_0 = \bar{A}_0,\ T_k(0) = A_k \Rightarrow A_k = \bar{A}_k.$

У результаті задача (4.8')-(4.9')-(4.10') має розв’язок

$$w(t,r) = \left(\frac{q}{c\rho}t + \bar{A}_0\right)r + \sum_{k=1}^{\infty}\bar{A}_k e^{-\left(\frac{\mu_k}{r_0}a\right)^2 t}\sin\frac{\mu_k}{r_0}r,$$

а розв’язок задачі (4.8)- (4.9)- (4.10) має вигляд

$$u(t,r)=\frac{q}{c\rho}t+\overline{A}_0+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k e^{-\left(\frac{\mu_k}{r_0}a\right)^2 t}\frac{1}{r}\sin\frac{\mu_k}{r_0}r.$$

§5.Кранова задача для рівнянь еліптичного типу. Задача Діріхле для круга

Схему методу розв'язування мішаної задачі для гіперболічних і параболічних рівнянь без суттєвих змія переносимо на крайові задачі для рівнянь еліптичного тину в прямокутнику, паралелепіпеді, крузі, циліндрі та кулі. Відмінність полягав лише в тому, що у випадку крайових задач для еліптичних рівнянь початкових умов нема, замість них користуємося крайовими умовами. Крім того, у випадку кругових областей виникав спеціальна задача Штурма- Ліувілля: дістати такі значення параметра λ, для яких рівняння

$$\Phi''+\lambda\Phi=0,\ \ 0<\varphi<2\pi \tag{5.1}$$

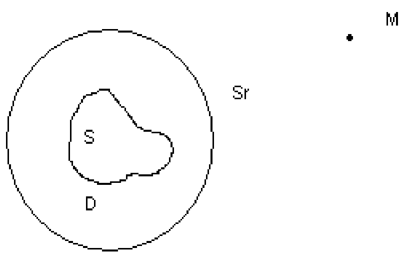
має нетривіальні розв’язки, які задовольняють умови періодичності

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \tag{5.2}$$

Досліджуючи задачу (5.1)- (5.2), дістаємо, що жодне з дійсних чисел $\lambda<0$ не є власним значенням задачі. Власному значенню $\lambda=0$ відповідає власна функція $\Phi_0(\varphi)=C_0\neq 0$, а $\lambda=n^2$, $n\in N$- власні функції $\Phi_n(\varphi)=C_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi$.

Задача Діріхле для круга. Для постановки задачи Діріхле розглянемо декілька означень.

Нехай існує S замкнута поверхня. Позначимо через D кінцеву область цієї поверхні, а через D- нескінченну область зовнішню до, D також обмеженою поверхнею S. Нехай на поверхні s задані неперервні функції $f_1(P),\ f_2(P)$ і $f_3(P)$.



Мал.1

Розглянемо крайову задачу для круга. Знайти функцію u, яка задовольняє рівняння

$$\Delta u=0 \tag{5.3}$$

всередині круга і граничну умову

$$u=f \tag{5.4}$$

на межі круга, де f - задана функція.

Будемо вважати, що функція f неперервна і диференціальна і розв'язок $u(M)$ неперервна в замкнутій області; в подальшому ми звільнимося від умови диференційованості і неперервності функції f. Поряд з внутрішньою крайовою задачею ми будемо розглядати також зовнішню крайову задачу.

Введемо полярну систему координат (ρ,φ) з початком в центрі круга. Рівняння (5.3) в полярних координатах має вигляд

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (5.5)$$

Розв'яжемо задачу методом відокремлення змінних, будемо шукати частковий розв'язок рівняння (5.3) виду

$u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0.$

Підставимо уявний вигляд розв'язку в рівняння (5.5), отримаємо

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

де $\lambda = const$. Звідси отримаємо два розв'язки:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\ \Phi \neq 0, \qquad (5.6)$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0,\ \ R \neq 0. \qquad (5.7)$$

З першого з цих рівнянь отримаємо:

$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$.

При зміні кута φ на величину 2π однозначна функція $u(\rho,\varphi)$ повинна повернутися до початкового значення $u(\rho,\varphi+2\pi) = u(\rho,\varphi)$ (умова періодичності).

Звідси слідує, що $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$, $\Phi(\varphi)$ є періодичною функцією кута φ з періодом. Це можливо тоді, коли $\sqrt{\lambda} = n$, де n - ціле число, і

$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi.$

Функцію $R(\rho)$ будемо шукати у вигляді

$R(\rho) = \rho^{\mu}$.

Підставимо у рівняння (5.7) і скоротимо на ρ^{μ}, знайдемо:

$n^2 = \mu^2$ або $\mu = \pm n$ $(n > 0)$.

Звідси слідує, $R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$, де C і D - сталі.

Для розв'язання внутрішньої задачі треба покласти $R = C\rho^n$ $(\mu = n)$, так якщо $D \neq 0$, тоді функція $u = R(\rho)\Phi(\varphi)$ перетворюється в нескінченність при $\rho = 0$ і не є гармонічною функцією всередині круга. Для розв'язання внутрішньої задачі, навпаки треба взяти $R = D\rho^{-n}$ $(\mu = -n)$, так як розв'язок задачі повинно бути обмеженим і нескінченним.

Отже, частковий розв’язок нашої задачі знайдено:

$u_n(\rho,\varphi)=\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$ для $\rho\le a$,

$u_n(\rho,\varphi)=\frac{1}{\rho^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$ для $\rho\ge a$.

Сума даних розв’язків

$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$ для внутрішньої задачі,

$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$ для зовнішньої задачі

будуть також гармонійними функціями.

Для визначення коефіцієнтів A_n і B_n використовується гранична умова

$$u(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=f. \tag{5.8}$$

Вважатимемо, що f задана як функція кута φ, візьмемо її розкладемо в ряд Фур ’є

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi), \tag{5.9}$$

де $\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)d\psi$, $\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\cos n\psi d\psi$ ($n=1,2,\dots$),

$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\sin n\psi d\psi$ ($n=1,2,\dots$).

Порівнюючи ряди (5.8) і (5.9), отримаємо:

$A_0=\frac{\alpha_0}{2}$, $A_n=\frac{\alpha_n}{a^n}$, $B_n=\frac{\beta_n}{a^n}$ для внутрішньої задачі

$A_0=\frac{\alpha_0}{2}$, $A_n=\alpha_n a_n$, $B_n=a^n\beta_n$ для зовнішньої задачі.

Таким чином, ми отримали розв’язок першої внутрішньої задачі для круга у виді ряду

$$u(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi), \tag{5.10}$$

а розв’язок зовнішньої задачі

$$u(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi). \tag{5.11}$$

Приклади

1. Визначити стаціонарну температуру внутрішніх точок тонкої прямокутної пластини розмірами $p\times s$, якщо на бічних її сторонах температура дорівнює $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, а на основах - $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$.

Розв'язування. Виберемо декартову систему координат Oxy таким чином, щоб $0 \le x \le p,\ 0 \le y \le s$. Якщо $u(x, y)$ - стаціонарна температура точки (x, y) пластини, то вона повинна бути розв'язком крайової задачі

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < p,\ 0 < y < s, \tag{5.12}$$

$$u(0, y) = \varphi_0(y),\ u(p, y) = \varphi_1(y),$$

$$u(x,0) = \psi_0(x),\ u(x, s) = \psi_1(x). \tag{5.13}$$

Легко перевірити, що розв'язок задачі (5.3)- (5.4) можна записати у вигляд $u = v + w,$ де $v-$розв'язання задачі

$$v_{xx} + v_{yy} = 0,\ 0 < x < p,\ 0 < y < s, \tag{5.14}$$

$$v(0, y) = 0,\ v(p, y) = 0, \tag{5.15}$$

$$v(x,0) = \psi_0(x),\ v(x, s) = \psi_1(x),$$

а w- розв'язок задачі

$$w_{xx} + w_{yy} = 0,\ 0 < x < p,\ 0 < y < s, \tag{5.16}$$

$$w(0, y) = \varphi_0(y),\ \ w(p, y) = \varphi_1(y),\ w(x,0) = 0,\ w(x, s) = 0. \tag{5.17}$$

Кожна із задач (5.14)- (5.15) і (5.16)- (5.17) можна розв'язати методом відокремлених змінних.

Знайдемо всі розв'язки $v(x, y) = X(x)Y(y) \ne 0$ рівняння (5.14), які задовольняють нульові умови по змінній x:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) \equiv 0\ \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda;$$

$$X(0)Y(0) \equiv 0 \Rightarrow X(0) = 0,\ X(p)Y(y) \equiv 0 \Rightarrow X(p) = 0.$$

Звідси одержуємо, що функція $X = X(x)$ повинна бути розв'язком задачі Штурма- Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X(p) = 0, \tag{5.18}$$

а функція $Y = Y(y)$- ненульовий розв'язок рівняння

$$Y'' - \lambda Y = 0. \tag{5.19}$$

Власні значення задачі (5.18) $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2$, $n \in N$ і власні функції $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{p}x$. Підставимо $\lambda = \lambda_n$ у рівнянні (5.19) і знайдемо його загальний розв'язок у вигляді

$$Y = Y_n(y) = A_n e^{\sqrt{\lambda_n}y} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n}y},$$

або

$$Y = Y_n(y) = C_n ch\sqrt{\lambda_n}y + D_n sh\sqrt{\lambda_n}y.$$

У результаті маємо таку послідовність розв'язків допоміжної задачі:

$$v_n(x, y) = \left(C_n ch\sqrt{\lambda_n}y + D_n sh\sqrt{\lambda_n}y\right)\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

Щоб задовольнити умови (5.13) по змінній y, підсумуємо всі розв'язки допоміжної задачі:

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n ch\sqrt{\lambda_n}\, y+D_n sh\sqrt{\lambda_n}\, y\right)\sin\sqrt{\lambda_n}\, x. \quad (5.20)$$

Якщо ряд -(5.19) збігається рівномірно, і його, можна двічі диференціювати по x і y, то сума $v(x,y)$ ряду є також розв'язком допоміжної задачі. Припускаючи, що ця вимога виковується, підставимо (5.17) в умови (5.15) по змінній y отримаємо A_n і B_n :

$$A_n=\frac{2}{p}\int_0^p \psi_0(x)\sin\sqrt{\lambda_n}\, x dx=\psi_{0n},$$

$$A_n ch\sqrt{\lambda_n}\, s+B_n sh\sqrt{\lambda_n}\, s=\frac{2}{p}\int_0^p \psi_1(x)\sin\sqrt{\lambda_n}\, x dx=\psi_{1n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{\psi_{1n}-\psi_{0n} ch\sqrt{\lambda_n}\, s}{sh\sqrt{\lambda_n}\, s}.$$

Підставивши значення A_n і B_n у ряд (5.19), маємо

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{0n} ch\sqrt{\lambda_n}\, y+\frac{\psi_{1n}-\psi_{0n} ch\sqrt{\lambda_n}\, s}{sh\sqrt{\lambda_n}\, s} sh\sqrt{\lambda_n}\, y\right)\sin\sqrt{\lambda_n}\, x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sh\sqrt{\lambda_n}\, s}\left[\psi_{0n} sh\sqrt{\lambda_n}\,(s-y)+\psi_{1n} sh\sqrt{\lambda_n}\, y\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\, x.$$

Аналогічно знайдемо розв’язок задачі (5.16)- (5.17) у вигляді

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sh\sqrt{\lambda_n}\, p}\left[\varphi_{0n} sh\sqrt{\lambda_n}\,(p-x)+\varphi_{1n} sh\sqrt{\lambda_n}\, x\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\, y,$$

де $\varphi_{0n}=\frac{2}{s}\int_0^s \varphi_0(y)\sin\sqrt{\lambda_n}\, y dy,\ \varphi_{1n}=\frac{2}{s}\int_0^s \varphi_1(y)\sin\sqrt{\lambda_n}\, y dy.$

Отже, задача (5.12)-(5.13) має розв’язок

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sh\sqrt{\lambda_n}\, p}\left[\varphi_{0n} sh\sqrt{\lambda_n}\,(s-y)+\varphi_{1n} sh\sqrt{\lambda_n}\, y\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\, x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sh\sqrt{\lambda_n}\, p}\left[\varphi_{0n} sh\sqrt{\lambda_n}\,(p-x)+\varphi_{1n} sh\sqrt{\lambda_n}\, x\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\, y.$$

2. Провідник з прямокутним поперечним перерізом нагрівається сталим струмом, який виділяв *в* одиниці об'єму тепло Q. Визначити стаціонарну температуру провідника, якщо на його поверхні відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю.

Розв'язування. Виберемо декартову систему координат $Oxyz$ так, щоб вісь Oz збігалася із середньою лінією провідника. Очевидно, шукана температура u провідника в однаковою у кожному поперечному перерізі, перпендикулярному до осі Oz, тобто $u = u(x, y)$ і вона є розв'язком крайової задачі

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{Q}{k}, \; -a < x < a, \; -b < y < b, \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} &(u_x - hu)\big|_{x=-a} = 0, \qquad (u_x + hu)\big|_{x=a} = 0, \\ &(u_y - hu)\big|_{y=-b} = 0, \qquad (u_y + hu)\big|_{y=b} = 0, \end{aligned} \tag{5.22}$$

де k- коефіцієнт внутрішньої теплопровідності; $h = \frac{k_1}{k}$, k_1- коефіцієнт теплопровідності середовища.

Будемо шукати розв'язок задачі (5.21)- (5.22) у вигляді ряду

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x), \tag{5.23}$$

де $X = X_n(x)$ - власні функції задачі Штурма- Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0, \; -a < x < a; \tag{5.24}$$

$$X'(-a) - hX(-a) = 0, \;\; X'(a) + hX(a) = 0, \tag{5.25}$$

а $Y = Y_n(y)$ відберемо таким чином, щоб ряд (5.23) задовольняв рівняння (5.21) і крайові умови на сторонах $y = \pm b$.

Обчислимо власні значення і власні функції задачі (5.24)-(5.25), які, очевидно, є невід'ємні.

Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок рівняння (5.24) запишемо у вигляді $X = B_0 x + A_0$. З крайових умов (5.25) дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (1 + ah)B_0 - hA_0 = 0 \\ (1 + ah)B_0 + hA_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_0 = B_0 = 0,$$

тобто $X \equiv 0$. Отже, $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі (5.24)- (5.25).

Для $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння (5.24) має вигляд

$$X = C_1(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x + C_2(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x,$$

і з крайових умов (5.1725) випливає, що

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a - h\cos\sqrt{\lambda}a\right)C_1 + \left(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a + h\sin\sqrt{\lambda}a\right)C_2 = 0, \\ \left(-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a + h\cos\sqrt{\lambda}a\right)C_1 + \left(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a + h\sin\sqrt{\lambda}a\right)C_2 = 0. \end{cases} \tag{5.26}$$

Система рівнянь (5.26) має ненульовий розв'язок (C_1, C_2) тоді і тільки тоді, якщо

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a - h\cos\sqrt{\lambda}a & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a + h\sin\sqrt{\lambda}a \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a + h\cos\sqrt{\lambda}a & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a + h\sin\sqrt{\lambda}a \end{vmatrix} = 0,$$

звідси дістаємо, що $\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a - h\cos\sqrt{\lambda}a = 0$ або $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a + h\sin\sqrt{\lambda}a = 0,$ тобто параметр λ повинен бути коренем одного з таких рівнянь:

$$tg\sqrt{\lambda}a = \frac{h}{\sqrt{\lambda}}, \; tg\sqrt{\lambda}a = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}.$$

Якщо $\lambda=\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2$, $n\in N$, де $\mu=\mu_n>0$ - корінь першого рівняння $tg\mu=\frac{ah}{\mu}$, то з тих рівнянь (5.26) випливає, що $C_2=0$ і маємо послідовність власних функцій $X_n=\cos\frac{\mu_n}{a}x$ (ми вибрали $C_1(\lambda)=1$); якщо $\lambda=\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2$, $n\in N$, де $\mu=\mu_n>0$ - корінь другого рівняння $tg\mu=-\frac{ah}{\mu}$, то $C_1=0$ і маємо послідовність власних функцій $X_n=\sin\frac{\mu_n}{a}x$ (тут ми вибрали $C_2(\lambda)=1$).

Розглянемо перший варіант власних значень і власних функцій, тобто розв'язок задачі (5.21)-(5.22) шукатимемо у вигляді

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\cos\frac{\mu_n}{a}x. \tag{5.23'}$$

Переконаємося, що власні функції ортогональні на $[-a,a]$, і обчислимо їхню норму:

$$I_{nm}=\int_{-a}^{+a}X_n(x)X_m(x)dx=\int_{-a}^{+a}\cos\frac{\mu_n}{a}x\cos\frac{\mu_m}{a}dx=$$

$$=\frac{a}{\mu_m}\int_{-a}^{+a}\cos\frac{\mu_n}{a}xd\sin\frac{\mu_m}{a}x=\frac{a}{\mu_m}\left(\cos\frac{\mu_n}{a}x\sin\frac{\mu_m}{a}x\Big|_{-a}^{+a}-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_n}{\mu_m}\int_{-a}^{+a}\sin\frac{\mu_n}{a}xd\cos\frac{\mu_m}{a}x\right)=\frac{a}{\mu_m}\Big[2\cos\mu_n\sin\mu_m-$$

$$-\frac{\mu_n}{\mu_m}\left(\sin\frac{\mu_n}{a}x\cos\frac{\mu_m}{a}x\Big|_{-a}^{+a}-\frac{\mu_n}{a}\int_{-a}^{+a}\cos\frac{\mu_n}{a}x\cos\frac{\mu_m}{a}xdx\right)\Big]=$$

$$=\frac{2a}{\mu_m}\left(\cos\mu_n\sin\mu_m-\frac{\mu_n}{\mu_m}\sin\mu_n\cos\mu_m\right)+\frac{\mu_n^2}{\mu_m^2}I_{nm}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{\mu_n^2}{\mu_m^2}\right)I_{nm}=\frac{2a}{\mu_m^2}\left(\mu_m\cos\mu_n\sin\mu_m-\mu_n\sin\mu_n\cos\mu_m\right).$$

Враховуючи, що $\sin\mu_n=\frac{ah}{\mu_n}\cos\mu_n$ і $\sin\mu_m=\frac{ah}{\mu_m}\cos\mu_m$, з останньої рівності маємо

$$\left(1-\frac{\mu_n^2}{\mu_m^2}\right)\int_{-a}^{+a}X_n(x)X_m(x)dx=0,$$

звідси випливає рівність

$$\int_{-a}^{+a} X_n(x) X_m(x) dx = 0, \;\; n \neq m .$$

Далі

$$\left\| X_m \right\|^2 = \int_{-a}^{+a} \cos^2 \frac{\mu_m}{a} x = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \left(1 + \cos \frac{2\mu_m}{a} x \right) dx =$$

$$= \frac{a}{2\mu_m} \left(2\mu_m + \sin 2\mu_m \right).$$

Тепер підставимо $(5.23')$ у рівняння (5.21) і умови (5.22) на сторонах $y = \pm b$:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{a^2} Y_n \cos \frac{\mu_n}{a} x + \sum_{k=1}^{\infty} Y_n''(y) \cos \frac{\mu_n}{a} x = -\frac{Q}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[Y''(y) - \frac{\mu_n^2}{a^2} Y_n(y) \right] \cos \frac{\mu_n}{a} x = -\frac{Q}{k};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[Y_n'(-b) - hY_n(-b) \right] \cos \frac{\mu_n}{a} x = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[Y_n'(b) + hY_n(b) \right] \cos \frac{\mu_n}{a} x = 0.$$

Звідси, користуючись ортогональністю власних функцій $\cos \frac{\mu_n}{a} x, n \in N$, одержимо. Що функція $Y_m = Y_m(y)$ для кожного $m \in N$ повинна бути розв'язком крайової задачі

$$Y_m'' - \frac{\mu_m^2}{a^2} Y_m = -\frac{2Q\mu_m}{ak(2\mu_m + \sin 2\mu_m)} \int_{-a}^{+a} \cos \frac{\mu_m}{a} x dx =$$

$$= -\frac{4Q \sin \mu_m}{k(2\mu_m + \sin 2\mu_m)} = Q_m; \tag{5.26}$$

$$Y_m'(-b) - hY(-b) = 0, \;\; Y_m'(b) + hY(b) = 0. \tag{5.27}$$

Загальний розв'язок рівняння (5.26)

$$Y_m = A_m ch \frac{\mu_m}{a} y + B_m sh \frac{\mu_m}{a} y - \frac{a^2}{\mu_m^2} Q_m$$

підставимо у крайові умови (5.27) і дістанемо для визначення коефіцієнтів A_m і B_m систему рівнянь

$$\begin{cases} -\left(\frac{\mu_m}{a} sh\frac{\mu_m}{a}b + hch\frac{\mu_m}{a}b\right)A_m + \left(\frac{\mu_m}{a} ch\frac{\mu_m}{a}b + hsh\frac{\mu_m}{a}b\right)B_m = -\frac{a^2 h}{\mu_m^2}Q_m, \\ \left(\frac{\mu_m}{a} sh\frac{\mu_m}{a}b + hch\frac{\mu_m}{a}b\right)A_m + \left(\frac{\mu_m}{a} ch\frac{\mu_m}{a}b + hsh\frac{\mu_m}{a}b\right)B_m = \frac{a^2 h}{\mu_m^2}Q_m, \end{cases}$$

з якої випливає, що

$$B_m = 0,\ \ A_m = \frac{a^3 h}{\mu_m^2}\frac{Q_m}{\mu_m sh\frac{\mu_m}{a}b + ahch\frac{\mu_m}{a}b}.$$

У результаті

$$Y_m = \frac{4Qa^2 \sin\mu_m}{k\mu_m^2(2\mu_m + \sin 2\mu_m)}\left(1 - \frac{ahch\frac{\mu_m}{a}y}{\mu_m sh\frac{\mu_m}{a}b + ahch\frac{\mu_m}{a}b}\right)$$

і розв'язок задачі (5.21)- (5.22) має вигляд

$$u(x,y) = \frac{4Qa^2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n}{\mu_n^2(2\mu_n + \sin 2\mu_n)}\left(1 - \frac{ahch\frac{\mu_n}{a}y}{\mu_n sh\frac{\mu_n}{a}b + ahch\frac{\mu_n}{a}b}\right)\cos\frac{\mu_n}{a}x.$$

Зауваження. Цю задачу можна розв'язати іншим способом. Нехай $v(t,x)$ - розв'язок рівняння (5.21), який задовольняє крайові умови на сторонах $x = \pm a$. Його можна знайти у вигляді $v(t,x) = v(x)$:

$$v''(x) = -\frac{Q}{k} \Rightarrow v'(x) = -\frac{Q}{k}x + C_1 \Rightarrow v(x) = -\frac{Q}{k}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Підставимо $v(x)$ у крайові умови на сторонах $x = \pm a$:

$$\begin{cases} \frac{Q}{k}a + C_1 - h\left(-\frac{Q}{k}\frac{a^2}{2} - C_1 a + C_2\right) = 0, \\ -\frac{Q}{k}a + C_1 + h\left(-\frac{Q}{k}\frac{a^2}{2} + C_1 a + C_2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(1+ah) - hC_2 = -\dfrac{Qa}{k}\left(1+\dfrac{ah}{2}\right), \\ C_1(1+ah) + hC_2 = \dfrac{Qa}{k}\left(1+\dfrac{ah}{2}\right). \end{cases}$$

З останньої системи рівнянь

$$C_1 = 0,\ C_2 = \frac{Qa}{2k}\frac{(2+ah)}{1+ah}$$

і

$$v(x) = \frac{Q}{k}\left(a\frac{(2+ah)}{1+ah} - \frac{x^2}{2}\right).$$

Приймемо $w = u - v(x)$, і для нової невідомої функції w дістаємо крайову задачу

$$w_{xx} + w_{yy} = 0,\ -a < x < a,\ -b < y < b;$$

$$(w_x - hw)\Big|_{x=-a} = 0,\ (w_x + hw)\Big|_{x=a} = 0;$$

$$(w_y - hw)\Big|_{y=-b} = -hv(x),\ (w_y + hw)\Big|_{y=-b} = hv(x),$$

яку розв’язуємо методом відокремлення змінних.

Навчально-методичний посібник містить теоретичні відомості, тобто означення, основні терміни і поняття, формулювання і доведення теорем, а також різні види рівнянь з частинними похідними.

У посібнику передбачено систему індивідуальних семестрових завдань, які виконувались у позаурочний час самостійно кожним студентом протягом тривалого терміну під керівництвом і консультуванням викладача. Структура такого індивідуального семестрового заняття, відображає програмовий матеріал із курсу „Рівняння в частинних похідних” , основні його поняття , теореми, факти, методи розв’язування типових і нестандартних задач.

На початку кожен студент отримує індивідуальне семестрове завдання, обумовлюються строки його поетапного виконання, форми консультацій і умови здачі. Це сприяє систематизації умінь і навичок розв’язування математичних задач, глибокому засвоєнню програмового матеріалу, формує творчий підхід до вивчення математики.

Така технологія доволі успішно реалізована при вивчення дисципліни «Диференціальні рівняння» студентами II курсу групи КН- факультету математики та інформатики.

Розроблені розв'язки прикладів і задач до кожної з тем методичного посібника, складає 25 варіантів.

Методичний посібник «Рівняння з частинними похідними» була використана така література: [14-65].

3.2. Інформаційні технології

Використання інформаційних можливостей сучасних технологій (комп'ютерної графіки, гіпертексту, мультимедіа, віртуальної реальності), а також їх різноманітних поєднань утворює прорив у методиці, організації та практичній реальності навчального процесу під час вивчення різних дисциплін на всіх рівнях системи освіти. Студенти з пасивних спостерігачів перетворюються в учасників навчального процесу, розкривають свої творчі здібності та індивідуальні можливості, набувають навичок самовираження.

Аналіз опублікованих праць, присвячених використання телекомунікаційних технологій в освіті (В. Ю. Биков, Б. С. Гершунський, Р. С. Гуревич, М. І. Жалдак, Ю. І. Машбиць та ін.), свідчить, що нині увага приділяється розробленню електронних підручників і навчальних посібників, автоматизованих навчальних систем для дистанційної освіти, тестів лабораторних-практичних занять з електронним моделюванням виробничих процесів, електронних версій курсів дисциплін та їх упровадження в освітню практику.[28]

Даний навчально-методичний посібник є розроблений і в електронному варіанті. У процесі апробації та використання він, безумовно, буде вдосконалюватися, поповнюватися новими матеріалами, а також модифікуватися зі зміною програмного забезпечення. Доступ до цього посібника можливий із будь-якого комп’ютера локальної мережі університету, оскільки, він розміщений на мереженому диску H:\ в папці

		Навчальна робота

«Вища математика», а також за допомогою сайту університету – і засобами мережі Internet.

Сьогодні самостійна робота студентів набуває особливого значення, отже, роль, яка відводиться електронному посібнику, стає більш значною – він приймає все більше навчальних функцій, перетворюючись в активну дидактичну систему.

3.3. Результати експерименту

Запропоновані завдання були випробувані під час навчального процесу при виконанні довгострокових завдань з дисципліни «Диференціальні рівняння», яка читається для студентів II курсу групи КН-21 факультету математики та інформатики. Результати позитивні, в середньому студенти отримали 4-5. Також було проведено колоквіум контрольна робота. Студенти виявили вміння розв’язувати диференціальні рівняння. За результатами навчання успішність добра.

Успішність студентів по вивченні дисциплін наведена в таблиці:

КН-21

№ п/з	**Прізвище, ініціали студентів**	**Фактичний рейтинговий бал зі змістових модулів**								
		Модуль 1	**Модуль 2**	**Модуль 3**	**Модуль 4**	**Модуль 5**	**Модуль 6**	**Колоквіум**	**Контрольна робота**	Підсумкова оцінка
1.	Бурма О. С.	3	5	5	4	5	5	4	5	5
2.	Волощук В. О.	5	5	3	5	5	4	5	5	5
3.	Рябчинський О. Р.	3	3	2		3	4	3	3	3
4.	Сорокіна І. В.	3	5	3	4	5	5	4	4	4
5.	Твердун Р. О.	4	5	4	2		4	4	4	4
6.	Ушаков М. А.	4	5	3	5	5	5	4	5	5
7.	Шупрудько В.С.	3	4		3	2	3	4	3	3
8	Щербатюк Л.М.	3	4		4	4	3	4	3	4
9	Леміч М. І.	4	3		3	3	3	4	3	3

ВИСНОВОК

Оновлення суспільства пов’язане з пошуком нових способів здійснення перетворень, і в першу чергу у сфері освіти. У цивілізованому суспільстві розвиток особистості, її творчих можливостей стає самоціллю усіх суспільних відносин. Діяльність навчальних закладів потребує творчих можливостей кожного студента, і як перший крок, самореалізації його особистості у процесі навчання. Цьому може і повинно сприяти навчально методичне-забезпечення.

В результаті дослідження теми «Рівняння з частинними похідними» було розроблено методичне забезпечення до даної теми. Навчально методичний посібник складається з п’яти розділів: І розді –Класифікація рівнянь з частинними похідними ІІ порядку. Зведення до канонічної форми; ІІ розділ – Задача Штурма-Ліувілля. Спеціальні Функції;ІІІ розділ – Застосування методу Фур’є до розв’язування мішаної задачі для рівняння гіперболічного типу; IV розділ – Застосування методу Фур’є до розв’язування мішаної задачі для рівняння параболічного типу; розділ –Застосування методу Фур’є до розв’язу-вання крайової задачі для рівняння еліптичного типу. Задача Діріхле для круга. В кожному розділі є по два розв’язаних приклади та двадцять п’ять прикладів для самостійного розв’язання студентами.

Даний посібник має подвійне призначення – для проведення практичних, лекційних та організації самостійної роботи студентів. Застосування посібник на лекціях та практичних заняттях успішно реалізовано під час проходження асистентської практики.

Дослідження математичних моделей сприятиме не тільки свідомому засвоєнню математичних знань, а і розумінню місця математики у системі наук та її ролі у пізнанні реальної дійсності. Разом з тим, майбутній вчитель математики познайомиться з одним із ефективних наукових методів сучасної математики – обчислювальним експериментом.

Так як на сучасному етапі в організації самостійної роботи студентів при вивченні вищої математики дедалі активним стає використання освітньої технології, то даний методичний посібник є в електронному вигляді на мережевому диску H:\ в папці «Вища математика»,а також в глобальній мережі.

Вивчення дисципліни сприяє розвитку в студентів раціонального стилю мислення з такими характеристиками для нього рисами, як обґрунтованість, критичність, абстрактність, алгоритмічність. Ці риси необхідні для того щоб іти з розвитком цивілізованого суспільства „в ногу”.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Банах С. Диффереციальное и интегральное исчисление. М.: Физматгиз, 1958. 404с.

2. Бохан К. А. Курс математического анализа Ч 2. М.: Просвещение, 1966. 380с.

3. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Т. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука , 1985. 310с.

4. Будак Б. М., Самарський А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физики. М.: Наука, 1980. 686с.

5. Вірченко Н. О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. К.: Вид-во КПІ, 1997. 370 с.

6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 327с.

7. Владимиров В. С. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1974. 272 с.

8. Ван дер Венде М.К. Болонская декларация: расширение доступности и повышение конкурентоспособности высшего образования в Европе. *Высшее образование в Европе*. 2000. Том XXV.- № 3.

9. Головань М. С. Європейська кредитно-трансферна система як інструмент підвищення якості вищої освіти в контексті Болонського процесу / М. С. Головань // Гуманітарний вісник – Додаток 1 до вип.. 27, том I (34) : Тематичний випуск «Вища освіта України в контексті інтеграції до європейського освітнього простору» [Текст]. К.: Гнозис, 2012. с. 100-105

10. Годунов С. К.Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. - 391с.

11. Годунов С. К., Запотарева Е. В. Сборник по уравнениям математической физики. Н.: Наука, 1974.- 74с.

12. Гончаренко В. М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. - К.: Вища школа,1996. 350с.

13.Гой Т.П., Махней О.В.. Навчальний посібник: Диференціальні рівняння. ІваноФранківськ, 2010. с. 12-22.

14.Громов М. П. Дифференциальные соотношения с частными производными. - М.: Мир, 1990. - 536с.

15.Гудименко Ф. С. Збірник задач з диференціальних рівнянь.-К.: - Вища школа, 1972.- 154с.

16. Егоров Ю. В. Лекции по уравнениям с частными производными. - М.: Узд- во МГУ. 1985.- 164с.

17.Журавський В. С. Болонський процес: головні принципи входження в Європейський простір вищої освіти: наук- метод. Видання. К: Політехніка, 2003.

18.Згуровський М. Вища освіта в Україні: реалії, тенденції, перспективи розвитку. К.,1996.

19. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Ч 2.- К.: Вища школа, 1990. – 365с.

20.Кредитно-модульна система підготовки фахівців у контексті Болонської декларації. Методичний посібник / Постоловський Р.М., Воробйов А.М.- Р-РДГУ-2004.

21.Колупаєва Т.Є., Жеруха З.В. Навчальний посібник:Самостійна робота студентів за умов КМСОНП.-Р, РДГУ, 2005.

22. Корсак К.В. Світова вища освіта. Порівняння і визнання закордонних кваліфікацій і дипломів. / За. заг. ред. *проф.* Г.В. Щокіна: Монографія. - К.: МАУП-МКА, 1997. - 208 с.

23.Кривошия А. С., Перестюк М. О., Бурим В. М.- К.: Либідь, 2004. - 408с.

24. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики.- М.: Высш. шк.,1970. - 710с.

25. Кошляков Н. С. Э.Б. Глинер, М. М. Смирнов. Дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Физмитгиз, 1962. - 767с.

26. Кошелев А. И. Регулярность эллиптических уравнений и систем. - М.: Наука, 1986.- 238с.

27. Камке Э. В. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. -М.: Наука, 1966.- 260с.

28. Крилов А. Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики , имеющих приложения в технических вопросах. - М.: Гостехиздат, 1950. -386с.

29. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967. - 736с.

30. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - М.: «Наука»,1973. - 576с.

31. Ладыженская О. А. . Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М.: Гостехиздант - 1953. - 279с.

32. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типа. - М. Наука, 1971. - 287с.

33. Лопатинський Я. Б. Введения в современную теорію дифференциальных уравнения в частных производных. - К.: Наукова думка, 1980. - 216с.

34. Ляшко И. И. и др. Дифференциальные уравнения. - К.: Высш. шк., 1981. - 504с.

35.Матеріали науково практичного семінару „Кредитно - модульна система підготовки фахівців в контексті Болонської декларація”. - Л: ЛПІ, 2003.- 111с.

36.Модернізація вищої освіти України і Болонського процесу: Матеріал до першої лекції / Уклад М.Ф. Степко, Я.Л. Болюбаш, К. М. Левківський, Ю.В. Сухарніков, відп. Ред.. М.Ф. Степко. -К.: Изд.,2004.- 24с.

37.Моторіна В.Г., Пуди А.Ю., Прокопенко А.І., Стогній Н.П.. Навчально-методичний посібник «диференціальні рівняння» для студентів природничо-математичних спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів. Харків. 2012. с. 211.

38.Мотова Г.Н., Наводнов В.Г., Куклин В.Ж., Савельев Б.С. Системы акредитацій за рубежем. - М., 1998.-180 с.

39.Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. -М.: Просвещение, 1988. - 254с.

40. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. - К.: Наука, 1977.- 424с.

41. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1976. - 3223с.

42. Михлин С. Г. Курс математической физики. 2-изд СПБ:Лань, 2002.- 324 с.

43. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. - М.: «Мир», 1977. - 504с.

44.Наказ Міністерства освіти і науки України «Про затвердження Концептуальних засад розвитку педагогічної освіти в Україні та її інтеграції в європейський освітній простір // Освіта. – 2005. – № 2-3. – С. 2-4.

45.Наказ Міністерства освіти і науки України від 16.10.2009 року №943 «Про запровадження у вищих навчальних закладах України Європейської кредитно-трансферної системи.

46.Науменко У. Європейський вектор розвитку: стратегія для України / Вища освіта Україна . 2008 №3. С. 31-36.

47.Перелік необхідних умов для запровадження кредитно-модульної системи організації навчального процесу у навчальних закладах III-IV рівнів акредитації/ Додаток до Рішення колегії Міністерства освіти і науки України від 24.04.2003 р. Протокол № 5/5-4.

48.Програма дій щодо реалізації положень Болонської декларації в системі вищої освіти і науки України на 2004-2005 роки/ Додаток до Наказу МОН України № 49 від 23.01.2004 р.

49.Перестюк М. О., Маринец В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. - К.: Либідь, 1993. -575с.

50.Перестюк М.О., Свіщун М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь .- К.: Либідь, 2000.- 420с.

51.Положення про організацію навчального процесу в кредитно-трансферній системі підготовки фахівців у Рівненському державному гуманітарному університеті / Постоловський Р.М., Воробйов А.М., Петрівський Я.Б., Поніманська Т.І., Мосієвич О.С., Павелків Р.В., Сілков В.В., Шахрайчук М.І., Янцур М.С., Байло О.А., Колосюк О.А., Кусік Г.М. – Рівне: РДГУ, 2012. – 31 с.

52.Положення про інформаційне освітнє середовище Рівненського державного гуманітарного університету. Введено в дію рішенням Вченої ради Рівненського державного гуманітарного університету від «30» червня 2021 р. Протокол № 6

53.Положий Г. Н. Уравнения математической физики. - М.: Высш. шк., 1964. - 560с.

54.Петровський И. Г. Лекции об уравнениям с частными производными. - М.: Гостехиздандат, 1953.- 360с.

55.Рейтингова система оцінювання знань студентів . / Методичний посібник /Постоловський Р.М., Вороб йов А.М.- Р-РДГУ-2004.

56.

57. Самойленко А. М., Перестук Н. А. Дифференциальные уравнения с воздействиям.-К.: Высш. шк., 1987.- 286с.

58. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підручник. 2-е вид., перероб. і доп. - К.: Либідь, 2003. - 600с.

59. Сисоєва С.О., Батечко Н.Г.. Вища освіта України: реалії сучасного розвитку. МОН України. – К.:ВД ЕКМО , 2011. – 368с.

60. Соболев С. А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1966. - 443с.

61.Сологуб В. С. Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII-XIX ст. - К.: Наукова думка, 1975.- 280с.

62. Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Учебное пособие для механико-математических и физико-математических факультетов университетов.- М.: Наука, 1964.- 208с.

63. Скоробагатько В. Я. Исследования по качеству дифференциальных уравнений с частными производными.- К.: Наукова думка, 1980.- 243с.

64. Степанов В. В. Курс диференціальних рівнянь. - К.: _____, 1953.- 444с.

65. Смирнов В. И. Курс Высшей математики. - М.: Наука, 1981. - Т. 4; Ч. 2. - 552 с.

66. Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. - М.: 1964. - 208с.

67. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. - М.: Физматгиз,1961.-112.

68. Скоробагатько В. Я. Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. - К.: Наукова думка, 1972. - 175с.

69. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 2004. - 375с.

70. Товажнянський Л.Л., Сокол Є.І., Клименко Б.В. Болонський процес: цикли, ступені, кредити. - Харків: НТУ „ХПІ", 2004. - 144с.

71. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1979.- 128с.

72. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа Ч 2.- М.:. Лань, 2005. – 463с.

73. Шестопал А.Ф. Геометрия оператора Лапласа. - К.: Высш. шк., 1991.- 158с.

74. Школьник А.Г. Дифференциальные уравнения. - М.: Учпедгиз, 1963.- 199с.

75. Шадріков В., Геворкян Е., Калабін З., Кірінюк А., Наводнов В., Мотова Р., Петропавловській М.. Про процедуру комплексної оцінки вузу // Вища освіта

в Росії. - 2001. - № 1.- С. 29-38.