

Рівненський державний гуманітарний університет  
Факультет математики та інформатики  
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота  
магістерського рівня

на тему:

Метод Ліндстеда-Пуанкаре та його застосування до знаходження  
розв'язку слабо нелінійних задач

Виконала: студентка II курсу  
магістратури групи М-2  
спеціальності: 014 Середня освіта  
(Математика)

Левченко Марія Андріївна

**Керівник:** доктор технічних наук,  
професор Бичков О.С.

**Рецензент:** доктор технічних наук,  
професор, завідувач кафедри  
прикладної математики НУВГП  
Мартинюк П.М.

Рівне – 2021 року

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ.....	5
1.1. Основні поняття і моделі теорії лінійних коливань.....	5
1.2. Нелінійні коливання. Рівняння Дуфінга.....	7
1.3. Методи розв’язування диференціальних рівнянь, що описують нелінійні коливання.....	10
1.3.1. Загальна інформація про диференціальні рівняння та методи їх розв’язування.....	10
1.3.2. Розклад в ряд за параметром нелінійності.....	12
1.3.3. Метод Ліндстеда-Пуанкаре.....	15
РОЗДІЛ 2. КАРТА ПУАНКАРЕ ЯК МЕТОД ВИЯВЛЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ ХАОТИЧНИХ СИСТЕМ .....	21
2.1. Періодичні розв’язки і карта Пуанкаре.....	21
2.2. Граничні множини і теорія Пуанкаре – Бендіксона.....	28
2.3. Ряд Ліндстеда та перигелій Меркурія.....	42
РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА РІВНОМІРНО ПРИДАТНОГО РОЗКЛАДУ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗКУ РІВНЯННЯ ДУФІНГА ЗА МЕТОДИКОЮ ЛІНДСТЕДА-ПУАНКАРЕ.....	53
ВИСНОВКИ.....	58
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	59
ДОДАТОК А.....	62

## ВСТУП

*Актуальність теми.* У багатьох дисциплінах природничо-математичного циклу при вивченні різноманітних процесів і явищ доводиться мати справу з тими чи іншими значеннями, які змінюються з плином часу. Такі зміни прийнято називати коливаннями.

Існують закономірності, притаманні для коливань довільної природи. У цьому випадку кажуть про ізоморфізм явища коливань (хімічних, біологічних, економічних, механічних). Ця обставина покладена в основу теорії коливань – специфічної дисципліни з єдиним математичним апаратом та універсальною термінологією.

Розвиток таких дисциплін, як квантова електроніка, фізика твердого тіла, астрофізика, біофізика та ін. суттєво розширили сферу застосування теорії коливань. Суттєві зміни також пов'язані з появою і великим поширенням комп'ютерів, що дозволило формулювати і розв'язувати задачі, які до цього були недоступними. У зв'язку з цим виник великий інтерес до вивчення нелінійних систем, здатних описувати складну, в тому числі й хаотичну, поведінку.

Одним із відомих рівнянь в теорії нелінійних коливань є рівняння Дуфінга. З його допомогою описуються коливання математичного маятника при невеликих кутах відхилення, рухи частинки в потенціальному полі та інші системи з нерегулярними коливаннями. Крім того, з допомогою рівняння Дуфінга зручно вивчати такі ефекти коливних систем як ангармонічність, неізохронність та мультистабільність.

Як відомо, розв'язок рівняння Дуфінга у замкнутій формі отримати не вдається. В той же час, доведено, що воно має велику кількість різноманітних періодичних розв'язків. Тому для пошуку розв'язків рівняння Дуфінга використовують різноманітні наближені методи, одним з яких є метод Ліндстеда-Пуанкаре.

Метод Ліндстеда-Пуанкаре є модифікацією методу малого параметру. Ліндстед зауважив, що секулярні члени з'являються в ряді для збуреного періодичного розв'язку, оскільки не враховується залежна від параметрів частота

періодичної траєкторії. Він показав, що секулярні члени можна усунути, якщо увести в розгляд нову часову змінну  $\tau = \omega t$ , а розв'язок рівняння шукати у вигляді розкладів у степеневий ряд як для змінної  $x$ , так і для частоти  $\omega$ .

**Об'єкт дослідження.** Математичні моделі коливних процесів.

**Предмет дослідження.** Метод Ліндстеда-Пуанкаре та його застосування до розв'язування періодичних задач.

**Мета роботи.** З'ясувати суть методу Ліндстеда-Пуанкаре та можливості його використання до дослідження математичних моделей коливних процесів.

**Завдання дослідження:**

- ▶ виявити та опрацювати фахову літературу з теми магістерської роботи;
- ▶ узагальнити та систематизувати наявний теоретичний матеріал з теми;
- ▶ систематизувати інформацію про методологію Пуанкаре із пошуку розв'язків періодичних задач;
- ▶ підібрати комплекс вправ за вказаною методикою;
- ▶ з'ясувати суть методу Пуанкаре-Ліндстеда;
- ▶ продемонструвати застосування методу Ліндстеда-Пуанкаре на прикладі пошуку рівномірно придатного розкладу для розв'язку рівняння Дуфінга.

**Обсяг роботи.** Робота складається зі вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

**Апробація роботи.** Результати дослідження доповідались на звітних науково-практичних конференціях співробітників, студентів та аспірантів РДГУ.

## РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

### 1.1. Основні поняття і моделі теорії лінійних коливань

Коливання – це процеси, характерною особливістю яких є повторюваність у часі. В свою чергу, теорія коливань є розділом прикладної теорії диференціальних рівнянь. Ця теорія пов'язана з вивченням явища коливань у природознавстві та техніці. Розрізняють теорію лінійних та теорію нелінійних коливань.

Класичною моделлю теорії лінійних коливань є система, що складається із маси та пружини. Якщо в системі відсутні сили збурення і тертя, то вона коливається із частотою, яка не залежить від амплітуди коливань [5]

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

У цьому стані енергія по чергово переходить із пружної енергії пружини (електричної енергії конденсатора  $C$ ) в кінетичну енергію маси (магнітну енергію індуктивності  $L$ ), і навпаки. Введення згасання у систему робить вільні коливання затухаючими. У зв'язку з цим, амплітуда коливань маси (або заряд в ланцюгу) мають наступну залежність від часу:

$$x(t) = A_0 e^{-gt} \cos \sqrt{\omega_0^2 - g^2} t + j_0,$$

де

$$g = \frac{c}{2m}, \quad \text{або} \quad g = \frac{R}{2L}.$$

Слід зазначити, що згасання називають докритичним, якщо  $g^2 < \omega_0^2$ , критичним, якщо  $g^2 = \omega_0^2$ , і надкритичним, якщо  $g^2 > \omega_0^2$ .

Класичним явищем у лінійних коливних системах є резонанс при гармонічному збуренні. Резонанс – це частотно-вибіркова реакція коливної системи на періодичній зовнішній вплив, при якому відбувається різке зростання амплітуди стаціонарних коливань. Дане явище спостерігається при наближенні частоти зовнішнього впливу до типових для даної системи значень. У лінійних

коливних системах число таких резонансних частот відповідає числу ступенів свободи і вони співпадають з частотами власних коливань [20].

Диференціальне рівняння, яке описує систему в умовах резонансу, має вигляд:

$$\ddot{x} + 2g\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$

Якщо при сталій амплітуді  $f_0$  змінювати частоту  $\omega$ , то абсолютна величина стаціонарного зміщення маси (після згасання перехідних збурень) досягає максимуму поблизу природної частоти  $\omega_0$ , тобто при  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - g^2}$ . Якщо ж лінійна механічна система має багато ступенів свободи, то її часто моделюють системою зв'язаних осциляторів із пружин і мас. При цьому під час гармонічного збурення спостерігають появу множини резонансних частот. Такого роду поведінка показує, що кожен максимум у спектрі коливань відповідає принаймні одному ступеню свободи.

Ще одним поняттям теорії лінійних коливань є параметричний резонанс – це явище розкачування коливань при періодичній зміні параметрів тих елементів коливної системи, у яких зосереджується енергія коливань. Параметричний резонанс спостерігається у коливних системах різної фізичної природи.

При вивченні явища параметричного резонансу, використовується звичайне диференціальне рівняння з дійсними коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a - 2q \cos(2x)y = 0, \quad (1.1)$$

де  $i$  – параметри, від яких залежить поведінка розв'язку (стійкий чи нестійкий).

Рівняння (1.1) називається рівнянням Мат'є. Це рівняння використовується також і у нелінійних коливаннях, у різних розділах теоретичної та експериментальної фізики.

Найвідоміший приклад вияву явища параметричного резонансу – це дитина, яка розгойдує гойдалку. У цьому випадку, висота центру маси, яка постійно змінюється, означає періодичну зміну моменту інерції, що призводить до збільшення параметру амплітуди коливань гойдалки. Іншим прикладом

механічного параметричного осцилятора є фізичний маятник, точка підвісу якого здійснює періодичний рух у вертикальному напрямку або математичний маятник, довжина нитки якого може періодично змінюватись.

У нелінійних коливних системах усе відбувається зовсім інакше. На відміну від лінійного аналогу, нелінійна система з одним ступенем свободи може збурити багато частот. Математична теорія лінійних систем досить добре розроблена і запрограмована у математичних пакетах прикладного програмного забезпечення для комп'ютерів. Зовсім інша ситуація із нелійними задачами [1, 26].

## 1.2. Нелінійні коливання. Рівняння Дуфінга

Нелінійні явища можуть проявлятися різноманітними способами. Класичний приклад – це нелінійна пружина, у якої відновлювальна сила нелінійно залежить від розтягу [1].

Осцилятор Дуфінга або осцилятор із кубічною нелінійністю є однією із найбільш поширених моделей нелінійних коливань. Особливістю осцилятора Дуфінга є можливість опису хаотичної динаміки. Рівняння для осцилятора з кубічною нелінійністю уперше було виведене 1918 року німецьким інженером Георгом Дуфінгом, після чого було вивчене теоретичним і експериментальним шляхом багатьма вченими [8, 30].

Задача для рівняння Дуфінга, як правило, формулюється наступним чином:

$$u'' + au' + bu + gu^3 = f(x), \quad (1.2)$$

$$u(0) = g_1, \quad u'(0) = g_2. \quad (1.3)$$

Тут (1.2) – рівняння Дуфінга, (1.3) – початкові умови,  $a, b, g$  – деякі сталі,  $f(x)$  – функція, яка характеризує зовнішній вплив,  $g_1, g_2$  – задані функції.

Рівняння (1.2) можна отримати, якщо розглядати коливання математичного маятника при невеликих кутах відхилення; коливання важка на пружині з нелінійною відновлювальною силою, розміщеною на плоскій горизонтальній поверхні; при опису руху частинки в потенціалі із двох. Крім того, за допомогою

рівняння Дуфінга зручно вивчати такі ефекти коливних систем як неізохронність, ангармонічність і мультистабільність.

З іншої точки зору, стійкий стан, керований рівнянням Дуфінга (1.2), також може бути періодичним рухом. Його основний період буде дорівнювати періоду зовнішньої сили або її цілочислового множнику. У багатьох інших стандартних динамічних системах стійкий стан може бути квазіперіодичним рухом, але у випадку рівняння (1.2) додатний коефіцієнт згасання усуває таку можливість. Тому можна зробити висновок, що для даних систем регулярний рух є періодичним стійким станом. Регулярний рух широко вивчається протягом багатьох років, але, через повністю детерміновану природу рівняння, на існування хаотичного руху довгий час не звертали уваги. Характерною особливістю хаотичного руху є його довгострокова поведінка. Ця поведінка не може бути не відтворена у повторних дослідах при абсолютно однакових початкових умовах. Ця обставина суттєво відрізняється від ідеального короткочасного передбачуваного результату, який гарантується детермінованістю природи рівняння (1.2) [14].

Ще у 1970 році діяла теорія, що існують лише три класичних типи динамічного руху:

- 1) рівновага;
- 2) періодичний рух;
- 3) квазіперіодичний рух.

Дані стани називаються атракторами, оскільки при наявності будь-якого згасання перехідні відхилення знищуються і система притягується до одного із трьох перерахованих станів.

Схожа теорія існувала також і серед фізиків. Припускалось, що турбулентність (завихрення) рідких середовищ є складною формою квазіперіодичного руху. Це твердження було піддано сумніву у 1971 році Руелом і Такенсом, які припустили, що нерегулярні рухи керуються дивними атракторами, які не зводяться до жодного з перерахованих вище класичних атракторів. Дана обставина дає найкраще пояснення турбулентності.



Класичним аттракторам відповідають класичні геометричні об'єкти у фазовому просторі: стану рівноваги – точка, періодичному руху – замкнена крива, а квазіперіодичному – поверхня у тривимірному фазовому просторі. Теорія дивних аттракторів широко використовується у синергетиці і сучасній прикладній теорії керування [13].

Самозбурювані коливання – інший важливий клас нелінійних явищ. Це коливні процеси, які відбуваються у системах без періодичних зовнішніх впливів чи періодичних сил. Одним із таких є осцилятор Ван дер Поля, у якому наявні стаціонарне джерело енергії і джерело розсіювання. В цьому випадку джерелом енергії є стала напруга. У математичну модель цього ланцюга джерело енергії входить у вигляді від'ємного опору:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (1.4)$$

Енергія може надходити в систему при малих амплітудах, але при збільшенні амплітуди її ріст обмежується нелінійним згасанням. У осцилятора Ван дер Поля існують два режими: при  $\mu = 0$  і при  $\mu > 0$ . Очевидно, що третього режиму ( $\mu < 0$ ) не існує, оскільки тертя в системі не може бути від'ємним.

При  $\mu = 0$  осцилятор розраховується без згасання і тоді рівняння (1.4) набуває вигляду

$$\ddot{x} + x = 0. \quad (1.5)$$

(1.5) – рівняння гармонічного осцилятора.

При  $\mu > 0$  система має деякі граничні цикли. Чим далі від нуля, тим коливання осцилятора менше схожі на гармонічні.

У випадку маятника Фроуда [1, 28], підведення енергії здійснюється стаціонарним обертанням осі. При малих коливаннях нелінійне тертя здійснює роль від'ємного згасання. У той час як при сильних коливаннях амплітуда обмежується нелінійним членом  $b\dot{q}^2$ :

$$\ddot{q} + a \sin q = T_0 + g\dot{q}(1 - b\dot{q}^2).$$

Коливні рухи таких систем часто називають граничними циклами (замкненими траєкторіями даного векторного поля) [20, 24].

### **1.3. Методи розв'язування диференціальних рівнянь, що описують нелінійні коливання**

#### **1.3.1. Загальна інформація про диференціальні рівняння та методи їх розв'язування**

Інженерні та наукові задачі часто приводять до розв'язування диференціальних рівнянь, оскільки з їх допомогою описуються багато фізичних явищ. Як наслідок, процеси, що відбуваються у технічних пристроях, також описуються диференціальними рівняннями.

Природа цих процесів різноманітна. При аналізі теплових режимів апаратури розраховують теплові потоки, при вивченні електромагнітних процесів – електричні і магнітні поля, при оцінці міцності виробів – обчислюють механічні напруження і деформації. Як правило, диференціальні моделі багатьох важливих прикладних задач є досить складними, і знайти їх точний розв'язок дуже складно (або і неможливо). Ці труднощі можуть бути пов'язані з видом рівняння, наприклад, із його нелінійним характером. Однак розв'язати подібні складні задачі, як і простіші, можна за допомогою комп'ютера. Тому методи розв'язування диференціальних рівнянь на ЕОМ широко застосовуються в інженерній практиці [2, 7, 17].

Диференціальні рівняння діляться на два класи – звичайні диференціальні рівняння та диференціальні рівняння з частинними похідними. У даній роботі розглядаються звичайні диференціальні рівняння та методи їх розв'язування.

Диференціальні рівняння також можуть доповнюватися додатковими умовами, які є головним елементом задач. Ці умови необхідні для отримання числового розв'язку. Стосовно звичайних диференціальних рівнянь розрізняються два види задач: задачу з початковими умовами (задачу Коші) та задачу з крайовими умовами (крайову задачу).

Методи розв'язування диференціальних рівнянь поділяються на точні та наближені.

Точні (аналітичні) методи дозволяють отримати розв'язок у вигляді формули шляхом аналітичних перетворень. При цьому є можливість дослідити аналітичним шляхом властивості загального розв'язку і отримувати з нього часткові розв'язки. Такі методи добре розроблені для ряду рівнянь першого порядку (з відокремлюваними змінними, однорідних, лінійних, у повних диференціалах), а також для деяких типів рівнянь вищих порядків (наприклад, лінійних зі сталими коефіцієнтами) [4, 16, 25, 27].

Зауважимо, що точного розв'язку рівняння Дуфінга (1.2) не існує, проте, в частковому випадку рівняння (1.2) при заданих умовах:

$$a = 0, b = 1, g = 1, u(0) = u_0, u'(0) = 0.$$

має аналітичний розв'язок [13]:

$$u = cn(\sqrt{1 + u_0^2} m), \text{ де } m = \sqrt{\frac{u_0^2}{2(1 + u_0^2)}}.$$

Наближені методи розв'язування ґрунтуються на різних спрощеннях самих рівнянь шляхом обґрунтованого відкидання деяких їх членів. У окремих випадках спочатку знаходять точний розв'язок спрощеної задачі, а потім наближено обчислюють поправки, зумовлені малими членами, відкинутими на першому етапі. На цьому ґрунтуються методи теорії збурень. Інший підхід пов'язаний із представленням розв'язку у вигляді розкладу за малим параметром, що міститься в задачі. До цієї групи відносяться асимптотичні методи, за допомогою яких отримують розв'язки, що описують деяку граничну картину явища, що розглядається.

У теорії коливань існує багато наближених чи асимптотичних методів [6, 12, 21].

### 1.3.2. Розклад в ряд за параметром нелінійності

Розглянемо асимптотичний метод розкладу в ряд за параметром нелінійності на прикладі осцилятора з квадратичною нелінійністю [10]:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x} + \alpha x^2 = 0. \quad (1.6)$$

Нехай, у даному випадку, відомий деякий характерний масштаб коливань . Введемо безрозмірні час і координату наступним чином:

$$t' = \omega_0 t, \quad x' = \frac{x}{A}. \quad (1.7)$$

Тоді рівняння (1.6) набуде вигляду (штрихи у безрозмірних змінних опускаємо):

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0, \quad (1.8)$$

де  $\varepsilon = \frac{\alpha A}{\omega_0^2}$ . Розглянемо випадок слабкої нелінійності, коли  $\varepsilon \ll 1$ , тобто рівняння (1.8) містить малий параметр. Загалом, слід зазначити, що умовою застосовності будь-якого асимптотичного методу є наявність у рівнянні малого (чи великого) параметру.

Рівняння (1.8) нагадує рівняння лінійного консервативного осцилятора, але відрізняється від нього малим доданком порядку  $\varepsilon$ . Тому інтуїтивно зрозуміло, що розв'язок буде мати вигляд квазігармонічних коливань [3].

Побудуємо наближений розв'язок рівняння (1.8). Напротіший спосіб, очевидно, полягає у тому, щоб шукати розв'язок у вигляді ряду за степенями малого параметру  $\varepsilon$ :

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots, \quad (1.9)$$

вважаючи  $x_1, x_2, \dots$  величинами порядку одиниці. В літературі такий прийом називають методом розкладу за малим параметром, або прямим розкладом.

Підставивши ряд (1.9) у рівняння (1.8), отримаємо

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon^2 \ddot{x}_3 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0. \quad (1.10)$$

Прирівнявши у (1.10) до нуля члени при однакових степенях  $\varepsilon$ , приходимо до системи рівнянь

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (1.11)$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0, \quad (1.12)$$

$$\varepsilon^2 : \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1x_2 = 0, \quad (1.13)$$

...

Рівняння (1.11) є рівнянням гармонічного осцилятора, розв'язок якого має вигляд

$$x_1 = a \cos(t + \varphi), \quad (1.14)$$

де амплітуда  $a$  і початкова фаза  $\varphi$  – сталі, що визначаються з початкових умов.

Далі підставимо розв'язок (1.14) у рівняння (1.12):

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos 2(t + \varphi). \quad (1.15)$$

Рівняння (1.15) формально співпадає з рівнянням лінійного консервативного осцилятора під зовнішнім впливом. Його розв'язок слід шукати у вигляді

$$x_2 = x_2^{(o)} + x_2^{(h)},$$

де

$$x_2^{(o)} = a_1 \cos(t + \varphi_1)$$

– розв'язок однорідного рівняння, що описує власні коливання осцилятора. Його амплітуда  $a_1$  і початкова фаза  $\varphi_1$ , як і раніше, визначаються початковими умовами. Другий доданок  $x_2^{(h)}$  є частковим розв'язком неоднорідного рівняння. Він являє собою вимушені коливання осцилятора, тобто відгук на зовнішній вплив. Як відомо з теорії лінійних коливань, у спектрі вимушених коливань будуть міститись ті частоти, які присутні у спектрі діючої сили. В даному випадку це нульова (стала складова) і друга гармоніки. Неважко знайти, що

$$x_2^{(h)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi).$$

Тоді

$$x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi). \quad (1.16)$$

Розв'язок (1.16) містить чотири незалежні сталі:  $a_1, \varphi_1, a, \varphi$ , для визначення яких є лише дві початкові умови. Тому дві з цих сталих можна вибрати довільно. Найзручніше покласти  $a_1 = 0$ . Надалі у всіх вищих порядках малості складові, що відповідають власним коливанням, вважатимемо рівними нулю.

Таким чином, остаточний вигляд розв'язку з точністю до членів порядку  $\varepsilon^2$  наступний [15, 18]:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left( -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi) \right) + \dots \quad (1.17)$$

Як видно із (1.17), у спектрі коливань з'являються вищі гармоніки: нульова і друга, амплітуди яких мають порядок  $\varepsilon a^2$ , тобто набагато менші за амплітуду основної складової. Можна продовжити описану процедуру, рухаючись у все вищі порядки малості. У розв'язку з'являться й інші гармоніки: третя, четверта і т. д. Однак їх амплітуди будуть ще меншими (порядку  $\varepsilon^{n-1} a^n$ , де  $n$  – номер гармоніки). Дійсно, оскільки нелінійність являється слабкою, амплітуди вищих гармонік повинні швидко зменшуватись із ростом їх номеру.

Залишається лише знайти константи  $a$  та  $\varphi$ . Нехай початкові умови мають вигляд

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0.$$

Тоді, використовуючи (1.17), отримуємо

$$\begin{cases} a \cos \varphi - \varepsilon \left( \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2\varphi \right) = x_0, \\ a \sin \varphi + \frac{\varepsilon a^2}{3} \sin 2\varphi = -y_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

(1.18) є системою трансцендентних рівнянь, знайти точний розв'язок якої у загальному випадку не вдасться. Проте, враховуючи, що у (1.18) міститься малий параметр, можна представити її розв'язок у вигляді рядів:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.19)$$

У розкладах (1.19) потрібно враховувати те саме число членів, що і в розв'язку (1.17). Намагатись знайти  $a$  і  $\varphi$  з більш високим ступенем точності, очевидно, не має сенсу.

Підставимо (1.19) у (1.18) і виділимо члени однакових порядків. В нульовому порядку по  $\varepsilon$  отримаємо

$$\begin{cases} a_0 \cos \varphi_0 = x_0, \\ a_0 \sin \varphi_0 = -y_0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \\ \varphi_0 = -2 \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \end{cases}$$

Члени порядку  $\varepsilon$  дають

$$\begin{cases} a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{6} \cos 2\varphi_0 = 0, \\ a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + \frac{a_0^2}{3} \sin 2\varphi_0 = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

(1.20) є системою лінійних рівнянь відносно  $a_1$  і  $\varphi_1$ , розв'язати яку не складає труднощів. Підставивши знайдені значення  $a_0, \varphi_0, a_1$  та  $\varphi_1$  у (1.19), знайдемо  $a$  та  $\varphi$ , підставивши які у (1.17), отримаємо наближений розв'язок вихідної задачі [12, 23].

### 1.3.3. Метод Ліндстеда-Пуанкаре

Асимптотичний метод розкладу в ряд за параметром нелінійності – це досить простий метод, який приводить до найбільшої точності, однак не завжди є успішним у застосуванні. Продемонструємо це на прикладі його застосування до розв'язування рівняння Дуфінга, яке цього разу запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + gx^3 = 0. \quad (1.21)$$

Знову використаємо заміну змінних (1.7). Тоді рівняння (1.21) набуде вигляду

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (1.22)$$

де  $\varepsilon = \frac{gA^2}{\omega_0^2}$ . Як і раніше, будемо розглядати випадок слабкої нелінійності, тобто

$\varepsilon \ll 1$ . Шукаючи розв'язок у вигляді (1.9), замість рівнянь (1.11) – (1.13) отримаємо

$$\varepsilon^0: \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (1.23)$$

$$\varepsilon^1: \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0. \quad (1.24)$$

В нульовому порядку, як і раніше, отримаємо рівняння гармонічного осцилятора, розв'язок якого має вигляд (1.14). Після підстановки (1.14) у (1.24) отримаємо

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -\frac{a^3}{4} (3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)). \quad (1.25)$$

Потрібно знайти розв'язок цього рівняння, що відповідає вимушеним коливанням у членах вищого порядку. Оскільки нелінійність кубічна, то в даному випадку у спектрі зовнішнього впливу містяться перша і третя гармоніки. Розв'язок шукатимемо у вигляді суперпозиції відгуків на ці впливи:

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(3)},$$

де  $x_2^{(1)}$  і  $x_2^{(3)}$  задовольняють рівняння

$$\ddot{x}_2^{(1)} + x_2^{(1)} = -\frac{3a^3}{4} \cos(t + \varphi), \quad (1.25)$$

$$\ddot{x}_2^{(3)} + x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{4} \cos 3(t + \varphi). \quad (1.26)$$

Розв'язок рівняння (1.26) шукається досить легко і має вигляд гармонічних коливань на частоті зовнішньої діючої сили:

$$x_2^{(3)} = \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi). \quad (1.27)$$



А от у рівнянні (1.25) зовнішня діюча сила має частоту, що дорівнює частоті власних коливань осцилятора. Як відомо з теорії лінійних коливань, у цьому випадку виникає резонанс, що виявляється у необмеженому зростанні амплітуди коливань за лінійним законом. Відповідний розв'язок має вигляд

$$x_2^{(1)} = -\frac{3a^3 t}{32} \sin(t + \varphi). \quad (1.28)$$

(1.28) – це, так званий, секулярний або віковий член. Остаточний вигляд розв'язку із точністю до членів другого порядку малості такий:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left( -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \cos(t + \varphi) \right) + \dots \quad (1.29)$$

Слід зауважити, що, яким би малим не був параметр  $\varepsilon$ , із плином часу другий член у розв'язку (1.29), необмежено зростаючи, стає більшим за перший. Таким чином, справедливість розкладу (1.9) при великих  $t$  порушується, або, як кажуть, розклад не є рівномірно придатним по  $t$ . Це явно не фізичний результат. Справді, розв'язки рівняння Дуфінга мають вигляд періодичних нелінійних коливань, і ніякого зростання амплітуди немає [22, 28].

Причиною невдалого результату є те, що коливання осцилятора Дуфінга є неізохронними, тобто їх період залежить від амплітуди. Розклад (1.9) принципово не враховує неізохронність: у спектрі коливань можуть з'явитись лише власна частота лінійних коливань та її гармоніки [29].

Тому виникає необхідність модифікувати схему пошуку розв'язку таким чином, щоб можна було врахувати неізохронність. Найпростіший спосіб це зробити було запропоновано А. Ліндстедом та А. Пуанкаре [3, 10, 27].

Введемо у рівнянні (1.22) нову часову змінну  $\tau = \omega t$ . Оскільки  $\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}$ , отримуємо

$$\omega^2 x'' + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (1.30)$$

де штрихами позначено похідні по  $\tau$ .

Шукатимемо розв'язок рівняння (1.30) у вигляді розкладів у степеневий ряд як для змінної  $x$ , так і для частоти  $\omega$ :

$$\begin{aligned}x &= x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots, \\ \omega &= 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Перший член у розкладі для  $\omega$  повинен являти собою частоту лінійних коливань, яка у прийнятому нормуванні дорівнює одиниці. Наступні поправки  $\omega_1, \omega_2, \dots$  будуть описувати ефекти неізохронності.

Підставимо розклади (1.31) у рівняння (1.30):

$$(1 + 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_2) + \dots)(x_1'' + \varepsilon x_2'' + \dots) + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots = 0,$$

звідки

$$x_1'' + x_1 + \varepsilon(x_2'' + x_2 + 2\omega_1 x_1'' + x_1^3) + \dots = 0.$$

Прирівнюючи до нуля члени нульового і першого порядків малості, отримаємо:

$$x_1'' + x_1 = 0,\tag{1.32}$$

$$x_2'' + x_2 = -2\omega_1 x_1'' - x_1^3.\tag{1.33}$$

Розв'язок рівняння (1.32) запишемо у вигляді

$$x_1 = a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi).\tag{1.34}$$

Підставивши (1.34) у праву частинну (1.33), отримуємо

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^3}{4}(3\cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)).\tag{1.35}$$

Далі необхідно вибрати  $\omega_1$  таким чином, щоб усунути члени, пропорційні  $\cos(\tau + \varphi)$ , які приводять до секулярного росту розв'язку для  $x_2$ . Для цього, очевидно, слід покласти

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8}.$$

Тепер рівняння (1.35) набуде вигляду

$$x_2'' + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \varphi).$$

Його розв'язок

$$x_2 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \varphi)$$

не містить секулярних складових і розклад залишається рівномірно придатним при усіх  $t$ .

Таким чином, шуканий розв'язок із точністю до членів порядку  $\varepsilon^2$  має вигляд:

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\omega t + \varphi), \quad (1.36)$$

де  $\omega \approx 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8}$ .

Якщо параметр  $\varepsilon$  вважається додатнім, то частота коливань росте з ростом амплітуди; при  $\varepsilon < 0$  частота зменшується.

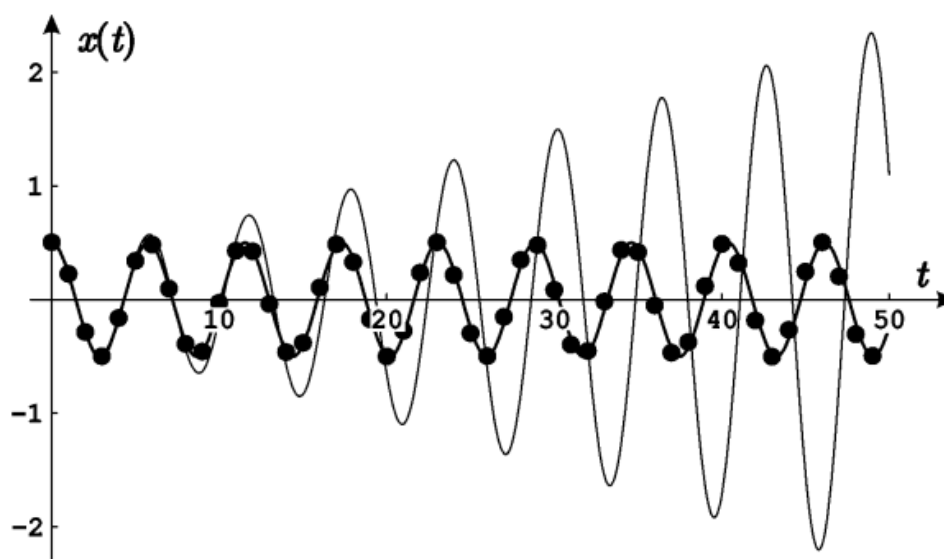


Рис. 1.1. Розв'язки рівняння Дюфінга: напівжирна суцільна лінія – точний розв'язок; тонка лінія – метод прямого розкладу за малим параметром; кружки – метод Ліндстеда-Пуанкаре

Зауважимо, що на відміну від осцилятора із квадратичною нелінійністю в спектрі коливань, у першу чергу, з'являється не друга, а третя гармоніка. Якщо продовжувати розклад далі, то можна переконатись, що спектр буде містити лише

непарні гармоніки. Це є наслідком симетрії рівняння Дуфінга відносно заміни  $x$  на  $-x$ .

На рисунку 1.1 наведено залежності  $x(t)$ , отримані за різними наближеними методиками, і точний розв'язок рівняння Дуфінга. Параметр  $a$  вибрано рівним 0,5, тобто нелінійність є досить сильною. Тим не менш, розв'язок (1.36), отриманий методом Ліндстеда-Пуанкаре, досить добре узгоджується із точним розв'язком. В той же час, залежність  $x(t)$ , побудована згідно формули (1.29), демонструє очевидне зростання амплітуди за лінійним законом, і уже для часу, рівного періоду коливань, розбіжність стає досить суттєвою [5, 19].

## РОЗДІЛ 2. КАРТА ПУАНКАРЕ ЯК МЕТОД ВИЯВЛЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ХАОТИЧНИХ СИСТЕМ

### 2.1. Періодичні розв'язки і карта Пуанкаре.

Як відомо [11, 29], стійкість точки спокою часто може бути визначена лінеаризацією або застосуванням прямого методу Ляпунова. В обох випадках стійкість може бути визначена шляхом аналізу в довільній відкритій кулі, що містить точку спокою. З цієї причини кажуть, що стійкість точки спокою – це локальна проблема. З іншого боку, щоб визначити стійкість періодичного розв'язку, слід розглянути поведінку відповідного векторного поля в околі всієї періодичної траєкторії. Оскільки необхідно використовувати глобальні методи, аналіз періодичних розв'язків є набагато важчим (і цікавішим), ніж аналіз точок спокою. У цьому розділі будуть представлені деякі з основних ідей, які використовуються для вивчення існування і стійкості періодичних розв'язків.

Дуже потужним поняттям у вивченні періодичних траєкторій є відображення Пуанкаре. Це наріжний камінь «геометричної теорії» Анрі Пуанкаре

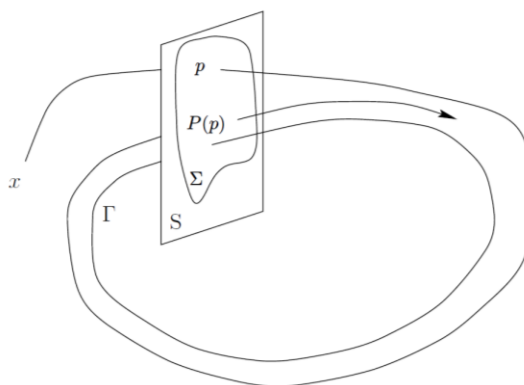


Рис. 2.1. Перетин Пуанкаре  $\Sigma$  і відповідна карта повернення Пуанкаре

На рисунку 2.1 траєкторія, що починається в точці  $x$ , асимптотичної періодичної траєкторії  $\Gamma$  проходить через перетин  $\Sigma$  в точці  $p$  і спочатку повертається до перетину в точці  $P(p)$ .

Щоб визначити відображення Пуанкаре, також зване відображенням повернення, нехай  $\phi_t$  позначає потік диференціального рівняння  $\dot{x} = f(x)$ , а припустимо, що  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  є  $(n-1)$  - розмірна підмноговидність. Якщо  $p \in S$  і

$(p, f(p)) \notin T_p S$ , то кажуть, що вектор  $(p, f(p))$  поперечний  $S$  в  $p$ . Якщо  $(p, f(p))$  поперечно  $S$  в кожному  $p \in S$ , то  $S$  є перетином для  $\phi_t$ . Якщо  $p$  належить  $S$ , то крива  $t \rightarrow \phi_t(p)$  «проходить через»  $S$ , коли  $t$  проходить через  $t=0$ .

Припустимо, існує деякий  $T = T(p) > 0$  такий, що  $\phi_T(p) \in S$ . В цьому випадку кажуть, що точка  $p$  повертається в  $S$  в момент  $T$ . Якщо існує відкрита підмножина  $\Sigma \subseteq S$  така, що кожна точка з  $\Sigma$  повертається в  $S$ , то  $\Sigma$  називається перетином Пуанкаре. В цьому випадку визначимо  $R: \Sigma \rightarrow S$  наступним чином:  $P(p) := \phi_{T(p)}(p)$ , де  $T(p) > 0$  - час першого повернення в  $S$ . Карта  $P$  називається відображенням Пуанкаре, або відтворення повернення на  $\Sigma$  і  $T: \Sigma \rightarrow R$  називається картою часу повернення (див. рис. 2.1). Оскільки розв'язок диференціального рівняння гладко залежить від його початкового значення, теорема про неявну функцію може використовуватися як доказ того, що і  $P$ , і  $T$  є гладкими функціями на  $\Sigma$ .

Наступна фундаментальна ідея Пуанкаре: нерухомі точки оберненого відображення лежать на періодичних траєкторіях. У більш загальному сенсі періодичні точки відображення Пуанкаре відповідають періодичним розв'язкам диференціального рівняння.

Якщо  $P$  позначає відображення повернення, то кажуть, що  $p$  є фіксованою точкою точки  $P$  за умови, що  $P(p) = p$ . Періодична точка з періодом  $k$  є нерухомою точкою  $k$ -ї ітерації  $P$  - вона проходить через перетин Пуанкаре  $k-1$  раз перед закриттям. Що стосується динамічних систем,  $P^1 := P$  - перша ітерація; більш точно, перше ітераційне відображення, пов'язане з  $P$ , і  $k$ -та ітерація індуктивно визначаються як  $P^k := P \circ P^{k-1}$ . Використовуючи це позначення,  $p \in \Sigma$  є періодичною точкою з періодом  $k$ , якщо  $P^k(p) = p$ .

Часто замість вивчення нерухомих точок  $k$ -ї ітерації відображення Пуанкаре зручніше вивчати нулі відповідної функції зміщення  $\delta: \Sigma \rightarrow R^n$ , яка визначається рівністю  $\delta(p) = P^k(p) - p$ . За цим визначенням періодичні точки періоду  $k$  для відображення Пуанкаре відповідають кореням рівняння  $\delta(p) = 0$ .

Якщо  $p \in \Sigma$  - періодична точка відображення Пуанкаре періоду  $k$ , то стійкість відповідної періодичної траєкторії диференціального рівняння визначається шляхом обчислення власних значень лінійного відображення  $DP^k(p)$ . Фактично, якщо  $P^k(p) = p$  і  $DP^k(p)$  має всі свої власні значення всередині одиничного кола, то періодична траєкторія з початковою точкою  $p$  є асимптотично стійкою.

Хоча в цілому дуже складно знайти підходящий перетин Пуанкаре і проаналізувати відповідне відображення Пуанкаре, існує безліч ситуацій, в яких ці ідеї можуть бути використані з великою користю. Наприклад, припустимо, що існує перетин Пуанкаре  $\Sigma$  і замкнута куля  $B \subseteq \Sigma$  такі, що  $P: B \rightarrow B$ . Нагадаємо теорему Брауера про нерухому точку [28].

*Теорема Брауера (про нерухому точку).* Кожне неперервне відображення замкнутої (евклідової) кулі має принаймні одну нерухому точку.

За цією теоремою, відображення  $P$  повинно мати хоча б одну нерухому точку. Іншими словами, пов'язане диференціальне рівняння має періодичну траєкторію, що проходить через множину  $B$ . Ця ідея використовується в наступному «іграшковому» прикладі.

Розглянемо неавтономне диференціальне рівняння

$$\dot{y} = (a \cos t + b)y - y^3, \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (2.1)$$

причому відповідне векторне поле є періодичним за часом з періодом  $2\pi$ . Щоб скористатися цією властивістю періодичності, переробимо це диференціальне рівняння, використовуючи стандартний "трюк" - в якості першого порядку система

$$\begin{cases} \dot{y} = (a \cos_\tau + b)y - y^3; \\ \dot{\tau} = 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Також для кожного  $\xi \in R$  нехай  $t \rightarrow (\tau(t, \xi), y(t, \xi))$  позначає розв'язок системи (2.2) з початковим значенням

$$\tau(0, \xi) = 0, \quad y(0, \xi) = \xi$$

і зауважимо, що  $\tau(t, \xi) = t$ . Тут порядок змінних зворотний, щоб відповідати двом умовам: кутова змінна записується другою в системах цього типу, але фазовий портрет зображений на площині, де вісь кутових координат горизонтальна.

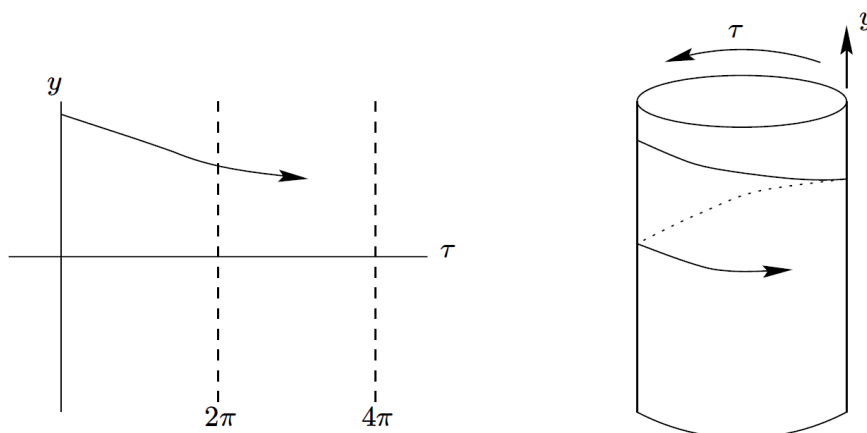


Рис. 2.2. Фазовий циліндр для диференціального рівняння (2.1)

Векторне поле, відповідне системі (2.2), однакове у кожній вертикальній смужі шириною  $2\pi$  на розглянутій площині з координатами  $(\tau, y)$ .

Таким чином, з геометричній точки зору, систему (2.2) зручно розглядати як диференціальне рівняння, задане на циліндрі  $T \times R$ , отриманому ототожненням прямої  $\Sigma := \{(\tau, y) : \tau = 0\}$  з кожною лінією  $\{(\tau, y) : \tau = 2\pi\ell\}$ , де  $\ell$  - ціле число (див. рисунок 2.2). На цьому циліндрі  $\Sigma$  є перетином потоку. Більш того, якщо  $\xi \in R$  - координата точки на  $\Sigma$ , то асоційоване відображення Пуанкаре задається формулою

$$P(\xi) = y(2\pi, \xi)$$

всякий раз, коли розв'язок  $t \rightarrow (\tau(t, \xi), y(t, \xi))$  визначено на інтервалі  $[0, 2\pi]$ .

За визначенням відображення Пуанкаре, нерухомі точки  $P$  відповідають періодичним траєкторіям диференціального рівняння, заданого на фазовому циліндрі. Доведемо, що нерухомі точки  $P$  відповідають періодичним розв'язкам вихідного диференціального рівняння (2.1). Фактично, досить показати, що якщо  $y(2\pi, \xi_0) = \xi_0$  для деякого  $\xi_0 \in R$ , то  $t \rightarrow y(t, \xi_0)$  являється  $2\pi$ -періодичним розв'язком диференціального рівняння (2.1) [14, 27].



По теоремі про продовження існує таке  $t_* > 0$ , що функція  $t \rightarrow z(t)$ , задана формулою  $z(t) := y(t + 2\pi, \xi_0)$ , визначена на інтервалі  $[0, t_*)$ .

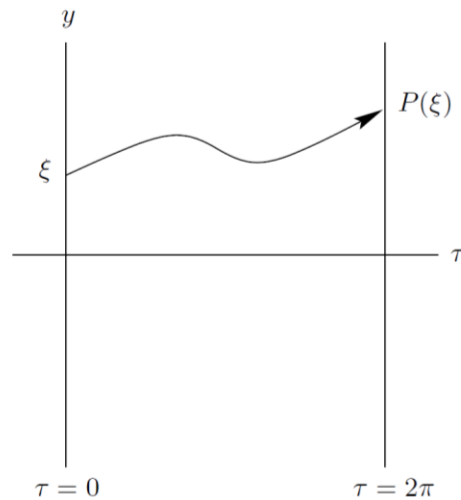


Рис. 2.3 Карта Пуанкаре для системи (2.2)

Помічаємо, що

$$z(0) = y(2\pi, \xi_0) = \xi_0$$

і

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{y}(t + 2\pi, \xi_0) = \\ &= (a(\cos(t + 2\pi)) + b)y(t + 2\pi, \xi_0) - y^3(t + 2\pi, \xi_0) = \\ &= (a \cos t + b)y(t + 2\pi, \xi_0) - y^3(t + 2\pi, \xi_0) = \\ &= (a \cos t + b)z(t) - z^3(t). \end{aligned}$$

Таким чином,  $t \rightarrow z(t)$  є розв'язком диференціального рівняння (2.1) з тим же початковим значенням, що і рішення  $t \rightarrow y(t, \xi_0)$ . По теоремі єдиності випливає, що  $z(t) = y(t, \xi_0)$  для  $0 \leq t < t_*$ . Отже, якщо  $t \rightarrow y(t + 2\pi, \xi_0)$  роздувається на інтервалі  $t_* \leq t \leq 2\pi$ , то спрацьовує і функція  $t \rightarrow y(t, \xi_0)$ , всупереч гіпотезі. Таким чином,  $t \rightarrow y(t, \xi_0)$  визначено на інтервалі  $[0, 4\pi]$  і  $y(t + 2\pi, \xi_0) = y(t, \xi_0)$  для  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Повторюючи аргумент індуктивно з  $z(t) = y(t + k2\pi, \xi_0)$  для цілих чисел  $k = 2, 3, \dots$ , то виходить, що  $t \rightarrow y(t, \xi_0)$  являється  $2\pi$ -періодичним розв'язком диференціального рівняння (2.1), що і слід було довести [11].

Оскільки  $y(t,0) = 0$ , відразу випливає, що  $P(0) = 0$ ; то є точка  $\xi = 0$  відповідає періодичній траєкторії. Щоб знайти нетривіальний періодичний розв'язок, слід помітити, що  $a \cos t + b \leq a + b$ , і розглянути пряму, задану формулою  $y = a + b + 1$  в фазовому циліндрі.  $y$ -компонента векторного поля на цій лінії дорівнює

$$(a + b + 1)(a \cos \tau + b - (a + b + 1)^2).$$

Оскільки

$$a \cos \tau + b - (a + b + 1)^2 \leq (a + b + 1) - (a + b + 1)^2 < 0,$$

то векторне поле, відповідне системі першого порядку, «вказує» в область, яка лежить нижче лінії. Зокрема, якщо  $0 \leq \xi \leq a + b + 1$ , то  $0 \leq P(\xi) \leq a + b + 1$ ; тобто  $P$  відображає відрізок  $[0, a + b + 1]$  в себе. Але оскільки  $P(0) = 0$ , це додаток теореми Брауера про нерухому точку не дає ніякої інформації про існування нетривіальних періодичних розв'язків. Вихід із цієї ситуації полягає в побудові  $P$ -інваріантного відрізка, що не містить  $\xi = 0$ .

Припустимо, що  $P'(0) > 0$ ; тобто тривіальний періодичний розв'язок нестійкий. Тоді існує таке число  $c$ , що  $0 < c < a + b + 1$  і  $P'(\xi) > 0$ , доки  $0 \leq \xi \leq c$ . По теоремі про середнє значення  $P(c) = P'(\xi)c$  для деякого  $\xi, 0 < \xi < c$ . Таким чином,  $P(c) > c$ . Оскільки  $P$  є відображенням Пуанкаре, легко побачити, що інтервал  $c \leq \xi \leq a + b + 1$  відображається в себе за допомогою  $P$  і, як результат, існує хоча б одна фіксована точка в цьому інтервалі. Ця нерухома точка відповідає періодичному розв'язку диференціального рівняння (2.1).

Щоб довести, що  $P'(0) > 1$ , скористаємося рівнянням у варіаціях. Цей метод дуже часто використовується при аналізі диференціальних рівнянь. Справжній елементарний приклад - гарне місце для вивчення базової техніки. Ідея проста: похідна розв'язку диференціального рівняння щодо його початкового значення сама по собі є розв'язком диференціального рівняння.

Нагадаємо, що  $P(\xi) = y(2\pi, \xi)$ . З

$$\frac{d}{dt} y(t, \xi) = (a \cos t + b) y(t, \xi) - y^3(t, \xi)$$

впливає

$$\frac{d}{dt} y(t, \xi) = (a \cos t + b) y_{\xi}(y, \xi) - 3y^2(t, \xi) y_{\xi}(t, \xi).$$

Оскільки  $y(0, \xi) = \xi$ , також маємо початкову умову  $y_{\xi}(0, \xi) = 1$ . Крім того, в точці  $\xi = 0$  функція  $t \rightarrow y(t, \xi)$  має вигляд тотожного нуля. Таким чином, якщо  $t \rightarrow \omega(t)$  є розв'язком варіаційної початкової задачі

$$\dot{\omega} = (a \cos t + b)\omega, \quad \omega(0) = 1,$$

тоді  $P'(0) = \omega(2\pi)$

Варіаційне диференціальне рівняння лінійне. Його розв'язок має вигляд

$$\omega(t) = e^{\int_0^t (a \cos s + b) ds} = e^{a \sin t + bt}.$$

Зокрема,

$$P'(0) = \omega(2\pi) = e^{2\pi b} > 1$$

як і має бути. Більш того, це обчислення показує, що періодичний розв'язок, заданий рівнянням  $y(t) = 0$ , нестійкий [18].

Ми довели, що існує хоча б один  $2\pi$ -періодичний розв'язок диференціального рівняння (2.1) з початковою умовою в інтервалі  $0 < \xi < a + b + 1$ . Але навіть більше вірно: ця періодична траєкторія стійка і єдина. Щоб довести цей факт, припустимо, що  $0 < \xi_0 < a + b + 1$  і  $P(\xi_0) = \xi_0$ , так що відповідний розв'язок  $t \rightarrow y(t, \xi_0)$   $2\pi$ -періодичний.

Щоб визначити тип стійкості розв'язку з початковим значенням  $\xi_0$ , досить обчислити  $P'(\xi_0)$ . Як і раніше,  $P'(\xi_0) = \omega(2\pi)$ , де  $t \rightarrow \omega(t)$  – розв'язок варіаційної початкової задачі

$$\dot{\omega} = [(a \cos t + b) - 3y^2(t, \xi_0)]\omega, \quad \omega(0) = 1.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
 P'(\xi_0) = \omega(2\pi) &= e^{\int_0^{2\pi} a \cos t + b - 3y^2(t, \xi_0) dt} = \\
 &= e^{2\pi b - 3 \int_0^{2\pi} y^2(t, \xi_0) dt}.
 \end{aligned}$$

щоб обчислити  $\int_0^{2\pi} y^2 dt$ , оскільки  $y(t, \xi_0) > 0$  для всіх  $t$ , маємо наступну рівність

$$\frac{\dot{y}(y, \xi_0)}{y(t, \xi_0)} = a \cos t + b - y^2(t, \xi_0). \quad (2.3)$$

Використовуючи формулу (2.3) і періодичність розв'язку  $t \rightarrow y(t, \xi_0)$ , маємо, що

$$\int_0^{2\pi} y^2(t, \xi_0) dt = 2\pi b - \int_0^{2\pi} \frac{\dot{y}(t, \xi_0)}{y(t, \xi_0)} dt = 2\pi b$$

і, як наслідок,

$$P'(\xi_0) = e^{2\pi b - 3(2\pi b)} = e^{-4\pi b} < 1. \quad (2.4)$$

Отже, будь-який періодичний розв'язок в інтервалі  $[0, a+b+1]$  є стійким. Єдиність періодичного розв'язку є наслідком цього результату. фактично відображення  $P$  матеріально аналітичне. Таким чином, якщо  $P$  має нескінченно багато нерухомих точок в компактному інтервалі, то  $P$  є одиницею. Це не вірно, тому  $P$  має тільки скінченне число нерухомих точок. Якщо  $\xi_0$  і  $\xi_1$  - координати двох послідовних нерухомих точок, то функція зсуву, тобто  $\xi \rightarrow P(\xi) - \xi$ , має від'ємний нахил в двох послідовних нулях [19, 28].

## 2.2. Граничні множини і теорія Пуанкаре – Бендіксона

Загальна проблема пошуку періодичних розв'язків для диференціальних рівнянь все ще є активною областю математичних досліджень. Можливо, найбільш добре розроблена теорія періодичних розв'язків відноситься до диференціальних рівнянь, визначених на площині. Але навіть в цьому випадку

теорія далека від завершення. Як приклад розглянемо клас плоских диференціальних рівнянь виду

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y),$$

де  $f$  і  $g$  - квадратичні многочлени. Існують приклади таких "квадратичних систем", які мають чотири ізольовані періодичні траєкторії. "Ізольована" означає, що кожна періодична траєкторія міститься у відкритій підмножині площини, яка не містить ніяких інших періодичних траєкторій. Але ніхто в даний час не знає, чи існує квадратична система з більш ніж чотирма ізольованими періодичними траєкторіями. Загальне питання про кількість ізольованих періодичних траєкторій для поліноміальної системи на площині відкрите з 1905 р.; це називається 16-ю проблемою Гільберта [16].

Хоча, безумовно, існує багато складних проблем, пов'язаних з періодичними траєкторіями плоских систем, була розроблена велика теорія, яка успішно застосовується для визначення динаміки багатьох математичних моделей. Деякі з основних результатів цієї теорії будуть пояснені пізніше в цьому розділі після обговорення деяких важливих загальних властивостей потоків автономних, не обов'язково планарних, систем.

Властивості, які розглядатимемо нижче, дозволяють почати відповідати на питання «Яка довгострокова поведінка динамічної системи?». Це часто є найважливішим питанням про математичну модель. Запитайте інженера, що він хоче знати про модель, яка є звичайним диференціальним рівнянням. Часто його відповіддю буде питання: «Що станеться, якщо ми запустимо систему, а потім почекаємо довгий час?» або, на інженерному жаргоні: "Яка поведінка системи в усталеному режимі?". Вище з'ясовано, якою буде відповідь на ці питання за деяких особливих обставин, коли стійкий стан відповідає точці спокою або періодичній траєкторії. Наступні викладки будуть використовуватися для точного опису граничної поведінки довільної траєкторії.

Припустимо, що  $\phi_t$  - потік на  $R^n$  і  $p \in R^n$ . Точка  $x$  в  $R^n$  називається омега-граничною точкою ( $\omega$ -граничною точкою) орбіти, що проходить через  $p$ , якщо

існує послідовність чисел  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$  така, що  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$  і  $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{t_i}(p) = x$ . Сукупність усіх таких омега-граничних точок позначається  $\omega(p)$  і називається граничною множиною омеги ( $\omega$ -граничною множиною) точки  $p$ . Аналогічно  $\alpha$ -гранична множина  $\alpha(p)$  визначається як множина всіх границь  $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{t_i}(p) = x$ , де  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$  і  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = -\infty$ .

Траєкторія точки  $p$  щодо потоку  $\phi_t$  називається прямою повної, якщо  $t \rightarrow \phi_t(p)$  визначено для всіх  $t \geq 0$ . Також в цьому випадку множина  $\{\phi_t(p) : t \geq 0\}$  називається прямою траєкторією точки  $p$ . Траєкторія називається зворотною повної, якщо  $t \rightarrow \phi_t(p)$  визначено для всіх  $t \leq 0$ , а зворотна траєкторія дорівнює  $\{\phi_t(p) : t \leq 0\}$ .

*Теорема 1.* Межа омега точки замкнута і інваріантна.

*Доведення.* Порожня множина замкнута і інваріантна.

Припустимо, що  $\omega(p)$  не порожня для потоку  $\phi_t$  і  $x \in \omega(p)$ . Розглянемо  $\phi_T(x)$  для деякого фіксованого  $T \in \mathbb{R}$ . Існує послідовність  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$  з  $t_i \rightarrow \infty$  і  $\phi_{t_i}(p) \rightarrow x$  при  $i \rightarrow \infty$ . Слід зауважити, що  $t_1 + T \leq t_2 + T \leq t_3 + T \leq \dots$  і що  $\phi_{t_i + T}(p) = \phi_T(\phi_{t_i}(p))$ . За неперервності потоку маємо  $\phi_T(\phi_{t_i}(p)) \rightarrow \phi_T(x)$  при  $i \rightarrow \infty$ . Таким чином,  $\phi_T(x) \in \omega(p)$ , а значить,  $\omega(p)$  є інваріантною множиною.

Щоб показати замкнутість  $\omega(p)$ , досить показати, що  $\omega(p)$  є перетином замкнутих множин. Фактично у нас є це

$$\omega(p) = \bigcap_{\tau \geq 0} \text{закриті } \{\phi_t(p) : t \geq \tau\}.$$

*Теорема 2.* Припустимо, що  $p \in \mathbb{R}^n$  і орбіта потоку  $\phi_t$  через точку  $p$  повна вперед. Якщо пряма траєкторії точки  $p$  має компактне замикання, то  $\omega(p)$  непорожня, компактна і зв'язна.

*Доведення.* Послідовність  $\{\phi_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$  міститься в компактному замиканні траєкторії, що проходить через  $p$ . Таким чином, вона має хоча б одну граничну

точку  $x$ . Фактично, існує нескінченна послідовність цілих чисел  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$  така, що  $\phi_{n_i}(p) \rightarrow x$  при  $i \rightarrow \infty$ . Отже,  $x \in \omega(p)$ , а значить,  $\omega(p) \neq \emptyset$ .

Оскільки  $\omega(p)$  - замкнута підмножина компактного замикання траєкторії через  $p$ , множина  $\omega(p)$  - компактна.

Щоб довести зв'язність  $\omega(p)$ , припустимо протилежне, тобто що існують дві відкритих множини  $U$  і  $V$ , які не перетинаються і об'єднання яких містить  $\omega(p)$ , такі що  $\omega(p) \cap U \neq \emptyset$  і  $\omega(p) \cap V \neq \emptyset$ . Існує деяке  $t_1 > 0$  таке, що  $\phi_{t_1}(p) \in U$ , і деяке  $t_2 > t_1$  таке, що  $\phi_{t_2}(p) \in V$ . Але множина  $K = \{\phi_t(p) : t_1 \leq t \leq t_2\}$  є неперервним зображенням інтервалу, отже, пов'язаної множини. Таким чином,  $K$  не може міститися в  $U \cup V$ . Зокрема, існує принаймні одне  $\tau_1 > 0$  таке, що  $\phi_{\tau_1}(p)$  не входить до цього об'єднання [21].

Аналогічним чином можна побудувати послідовність  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$  таку, що

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \infty$$

і для кожного  $i$  точка  $\phi_{\tau_i}(p)$  знаходиться в доповненні до  $U \cup V$ . В силу компактності послідовність  $\{\phi_{\tau_i}(p)\}_{i=1}^{\infty}$  має граничну точку  $x$ . Ясно, що  $x$  належить також в  $\omega(p)$  і в доповненні до  $U \cup V$ . отримали протиріччя.

Припустимо, що диференціальне рівняння  $\dot{x} = f(x)$  з потоком  $\phi_t$  має компактну інваріантну множину  $K$ , а  $V : K \rightarrow \mathbb{R}$  - неперервно диференційована функція така, що  $\dot{V}(x) \leq 0$  для будь-якого  $x \in K$ . Якщо  $\Omega$  - найбільша інваріантна множина в  $\{x \in K : \dot{V}(x) = 0\}$ , то кожен розв'язок в  $K$  прямує до  $\Omega$  при  $t \rightarrow \infty$ .

$\omega$ -граничні множини точки для потоку  $R^n$  в  $n \geq 3$  можуть бути дуже складними; наприклад, це може бути фрактал. Але ситуація в  $R^2$  набагато простіша. Причина в факті про геометрію площини, викладеному в наступній теоремі.

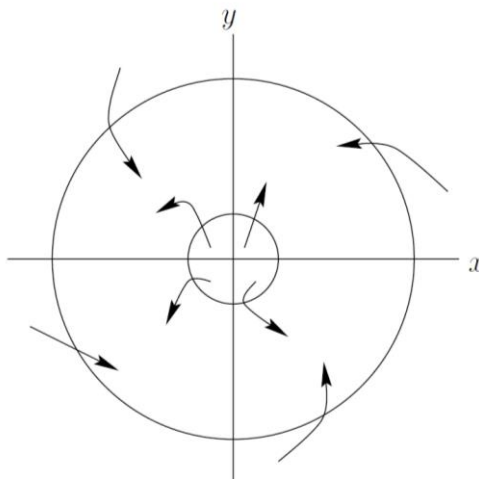


Рис. 2.4. Додатно інваріантна кільцева область для потоку на площині

*Теорема 3 (про Жорданову криву).* Проста замкнена (неперервна) крива на площині ділить площину на дві компоненти зв'язності, одну обмежену і одну необмежену, кожна з кривою в якості межі.

Сучасні доведення цієї теореми, які використовують алгебраїчну топологію, можна знайти, наприклад, у [7].

Цей результат буде грати центральну роль в подальшому.

Основним результатом про граничні множини для потоків плоских диференціальних рівнянь є теорема Пуанкаре – Бендіксона. Є кілька версій цієї теореми; ми вкажемо дві з них. Основні складові їх доведень будуть представлені нижче в цьому розділі, починаючи з теореми 6.

*Теорема (Пуанкаре – Бендіксона).* Якщо  $\Omega$  – непорожня компактна  $\omega$ -гранична множина потоку в  $R^2$  і якщо  $\Omega$  не містить точки спокою, то  $\Omega$  – це періодична траєкторія.

Множина  $S$ , що містить пряму траєкторію кожного з її елементів, називається додатно інваріантною. Траєкторія, чия множина,  $\alpha$ -межі є точкою спокою  $p$ , а  $\omega$ -межа якої є точкою спокою  $q$ , називається з'єднанням  $p$  і  $q$ .

*Теорема 4.* Припустимо, що  $\phi_t$  – потік на  $R^2$  і  $S \subseteq R^2$  – додатно інваріантна множина з компактним замиканням. Якщо  $p \in S$  і  $\phi_t$  мають щонайбільше скінченну кількість точок спокою в замиканні  $S$ , то  $\omega(p)$  або  $(i)$  точкою спокою,



(ii) періодичною орбіта, або (iii) об'єднання скінченної кількості точок спокою та непорожньої скінченної чи зліченної нескінченної множини сполучних орбіт.

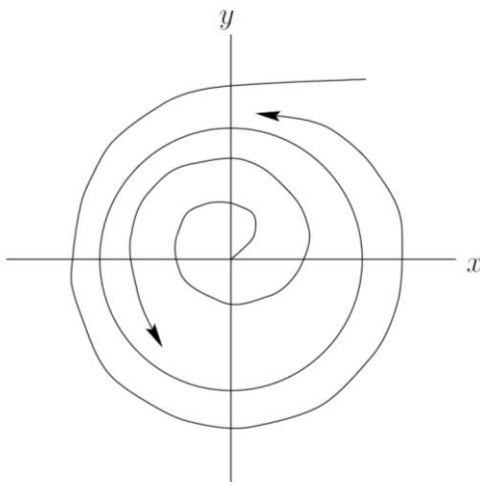


Рис. 2.5. Граничний цикл у площині

Граничний цикл  $\Gamma$  – це періодична орбіта, яка є або  $\omega$ -граничною множиною, або,  $\alpha$ -граничною множиною деякої точки, що знаходиться у фазовому просторі, але не в  $\Gamma$ .

"Концептуальний" граничний цикл проілюстрований на рисунку 2.5. На цьому рисунку граничний цикл – це  $\omega$ -гранична сукупність точок у його внутрішній частині (обмежена частина площини з вилученим граничним циклом) та її зовнішня сторона (відповідна необмежена частина площини). Граничний цикл, який генерується шляхом чисельного інтегрування плоского диференціального рівняння, зображено на рисунку 2.6. Дві траєкторії, чисельно обчислені для системи

$$\dot{x} = 0.5x - y + 0.1(x^2 - y^2)(x - y),$$

$$\dot{y} = x + 0.5y + 0.1(x^2 - y^2)(x + y):$$

одна із початковим значенням  $(x, y) = (0.5, 0)$ , інша – із початковим значенням  $(x, y) = (0, 5)$ . Обидві траєкторії наближаються до стабільного граничного циклу. [].

Іноді дають наступне альтернативне визначення граничного циклу. Граничний цикл – це ізольована періодична траєкторія; тобто унікальна періодична траєкторія у деякій відкритій підмножині фазового простору.

Це визначення не є еквівалентом загалом до наведеного вище. Однак ці два визначення є еквівалентними для реальних аналітичних систем на площині.

Кільцеподібна область – це підмножина площини, гомеоморфна замкненому кільцю, обмеженому одиничним колом у початку координат та концентричним колом, радіус якого дорівнює двом одиницям.

Наступний безпосередній наслідок теореми Пуанкаре – Бендіксона часто застосовується для доведення існування граничних циклів для плоских систем.

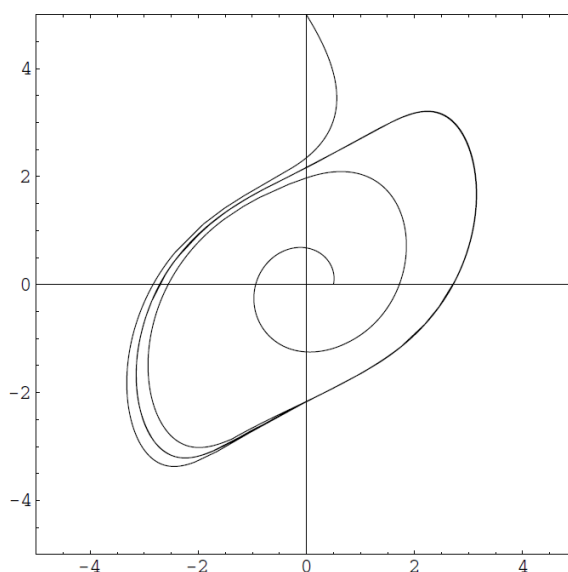


Рисунок 2.6. Граничний цикл плоского рівняння

*Теорема 5.* Якщо потік у площині має додатно інваріантну кільцеву область  $S$ , яка не містить точок спокою потоку, то  $S$  містить принаймні одну періодичну траєкторію. Якщо додатково деяка точка в  $S$  знаходиться на прямій траєкторії точки на межі  $S$ , то  $S$  містить принаймні один граничний цикл.

Розглянемо два застосування теореми 5, де основна ідея – знайти вільну кільцеву область точки спокою, зображену на рисунку 2.4.

Перший приклад подано системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2); \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (2.5)$$

Зауважимо, що кільце  $S$ , обмежене колами з радіусами  $\frac{1}{2}$  і 2 відповідно не містить точок спокою системи. Покажемо, що  $S$  додатно інваріантне. Щоб

довести цей факт, розглянемо зовнішній вектор нормалі  $N$  на  $\partial S$ , що є межею векторного поля  $N(x, y) = (x, y, x, y) \in R^2 \times R^2$  на  $\partial S$  і обчислимо скалярний добуток  $N$  з векторним полем, що відповідає диференціальному рівнянню. Насправді, скалярний добуток

$$x^2(1-x^2-y^2) + y^2(1-x^2-y^2) = (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)$$

є додатним на колі з радіусом  $\frac{1}{2}$  і від'ємним на колі з радіусом 2. Отже  $S$  додатно інваріантне, і згідно теореми 5 існує принаймні один граничний цикл у  $S$  [15].

Система (2.5) настільки проста, що можна знайти формулу для її потоку. Перейшовши до полярних координат  $(r, \theta)$  систему (2.5) зведемо до вигляду

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2); \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

а її потік задається за виразом

$$\phi_t(r, \theta) = \left( \left( \frac{r^2 e^{2t}}{1-r^2+r^2 e^{2t}} \right)^{\frac{1}{2}}, \theta + t \right). \quad (2.6)$$

Зауважимо, що  $\phi_t(1, \theta) = (1, \theta + t)$  і, зокрема,  $\phi_{2\pi}(1, \theta) = (1, \theta + 2\pi)$ . Отже, одиничному колу на площині відповідає періодична траєкторія з періодом  $2\pi$ . Тут, звичайно, ми повинні розглядати  $\theta$  як визначену за модулем  $2\pi$ , або, що ще краще, ми повинні розглядати полярні координати як координати на циліндрі  $T \times R$ .

Якщо формулу потоку (2.6) переписати у прямокутних координатах, то періодичність одиничного кола очевидна. Фактично, періодичний розв'язок, починаючи з точки  $(\cos \theta, \sin \theta) \in R^2$  (у прямокутних координатах) при  $t=0$ , задається формулою

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (\cos(\theta + t), \sin(\theta + t)).$$

Легко бачити, що якщо  $r \neq 0$ , то  $\omega$ -гранична множина  $\omega((r, \theta))$  це все одиничне коло. Отже, одиничне коло є граничним циклом.

Якщо розглядати додатну піввісь  $x$  як переріз Пуанкаре, то маємо

$$P(x) = \left( \frac{x^2 e^{4\pi}}{1 - x^2 + x^2 e^{4\pi}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тут  $P(1)=1$  і  $P'(1)=e^{-4\pi} < 1$ . Іншими словами, точка перетину граничного циклу з перерізом Пуанкаре є гіперболічно нерухома точка карти Пуанкаре; тобто лінеаризоване відображення Пуанкаре не має власного значення на одиничному колі комплексної площини. Фактично, тут єдине власне значення лінійного перетворення  $R$ , задане через  $x \rightarrow P'(1)x$ , знаходиться всередині одиничного кола. Очевидно, що в цьому випадку граничний цикл є асимптотично стабільною періодичною траєкторією. Таку траєкторію ще називають гіперболічним стабільним граничним циклом [14, 23].

Як другий приклад застосування теореми 5 розглянемо дуже важливе диференціальне рівняння

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \sin \theta = \mu,$$

де  $\lambda > 0$  і  $\mu$  - константи, а  $\theta$  - кутова змінна; тобто  $\theta$  визначено за модулем  $2\pi$ . Це диференціальне рівняння є моделлю для неврівноваженого ротора або маятника з в'язким демпфуванням  $\lambda \dot{\theta}$  і зовнішнім моментом  $\mu$ .

Розглянемо еквівалентну йому систему першого порядку

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v; \\ \dot{v} = -\sin \theta + \mu - \lambda v, \end{cases} \quad (2.7)$$

і зауважимо, що, оскільки  $\theta$  - кутова змінна, природним фазовим простором для цієї системи є циліндр  $T \times R$ .

З цією інтерпретацією ми покажемо такий результат: якщо  $|\mu| > 1$ , то система (2.7) має глобально притягуючий цикл обмеження. Фраза "глобально притягуючий граничний цикл" означає, що на циліндрі існує граничний цикл  $\Gamma$ , а  $\Gamma$  - множина  $\omega$ -границь кожної точки циліндра. Іншими словами, стаціонарна поведінка неврівноваженого ротора з в'язким демпфуванням та достатньо великим крутним моментом є стабільним періодичним рухом [29].

Система (2.7) із  $|\mu| > 1$  не має точок спокою. Також величина  $-\sin \theta + \mu - \lambda v$  є від'ємною для досить великих додатних значень  $v$  і вона є додатною для від'ємних значень  $v$ , які є достатньо великими в абсолютному значенні. Отже, існують числа,  $v_- < 0$  і  $v_+ > 0$  такі, що кожна пряма траєкторія міститься у компактній підмножині циліндра  $A := \{(r, \theta) : v_- \leq v \leq v_+\}$ . Крім того,  $A$  диференційно морфологічна до кільцевої області на площині. З цього випливає, що теорема Пуанкаре – Бендіксона справедлива в  $A$ , і тому  $\omega$ -межа кожної точки циліндра є граничним циклом.

Хоча існує кілька способів довести, що граничний цикл є унікальним, розглянемо доведення на основі таких тверджень:

(I) Якщо дивергенція векторного поля скрізь від'ємна, то його потік додатний.

(II) Кожна періодична траєкторія в площині оточує точку спокою.

Щоб застосувати твердження, слід зауважити, що векторним полем для системи (2.7) є від'ємне число  $-\lambda$ . Також, якщо  $|\mu| > 1$ , то ця система не має точок спокою. Відповідно до другого твердження, жодна періодична орбіта системи не може бути стиснута на циліндрі (див. рис. 2.7а). Таким чином, якщо є дві періодичні траєкторії, вони повинні обмежувати інваріантну кільцеву область на циліндрі, як на рисунку 2.7b. Але це суперечить тому факту, що площа кільцевої області стискається потоком. Звідси випливає, що на циліндрі існує унікальна періодична траєкторія, яка є глобально притягуючим граничним циклом.

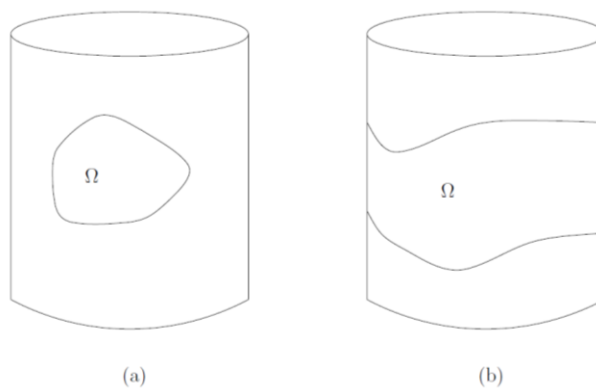


Рис. 2.7. Стискувана періодична траєкторія на циліндрі (а) та дві періодичні траєкторії, які не стискаються (b).

Наступні дві теореми використовуються для доведення теореми Пуанкаре Бендіксона. Перша з них є наслідком теореми про жорданову криву.

*Теорема 6.* Якщо  $\Sigma$  є перерізом для потоку  $\phi_t$  і якщо  $p \in R^2$ , то траєкторія, що проходить через точку  $p$ , перетинає  $\Sigma$  у монотонній послідовності; тобто, якщо  $\phi_{t_1}(p)$ ,  $\phi_{t_2}(p)$ , і  $\phi_{t_3}(p)$  лежать на  $\Sigma$  і якщо  $t_1 < t_2 < t_3$ , то  $\phi_{t_2}(p)$  лежить строго між  $\phi_{t_1}(p)$  і  $\phi_{t_3}(p)$  на  $\Sigma$  або  $\phi_{t_1}(p) = \phi_{t_2}(p) = \phi_{t_3}(p)$ .

Для доведення досить розглянути лише випадок, коли  $t_1$ ,  $t_2$  і  $t_3$  відповідають послідовним точкам перетину та розглянути криву, утворену об'єднанням  $\{\phi_t(t) : t_1 \leq t \leq t_2\}$  та підмножиною  $\Sigma$  між  $\phi_{t_1}(p)$  і  $\phi_{t_2}(p)$ .

*Теорема 7.* Якщо  $\Sigma$  - є перерізом для потоку  $\phi_t$  і якщо  $p \in R^2$ , то  $\omega(p) \cap \Sigma$  містить щонайбільше одну точку.

*Доведення (від супротивного).* Припустимо, що  $\omega(p) \cap \Sigma$  містить принаймні дві точки,  $x_1$  та  $x_2$ . Виправляючи потік при  $x_1$  та при  $x_2$ , тобто, відповідно до леми випрямлення, легко побачити, що є послідовності  $\{\phi_{t_i}(p)\}_{i=1}^{\infty}$  і  $\{\phi_{s_i}(p)\}_{i=1}^{\infty}$  в  $\Sigma$  такі, що  $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{t_i}(p) = x_1$  і  $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{s_i}(p) = x_2$ . Згідно з лемою випрямлення, такі послідовності можна знайти в  $\Sigma$ . Дійсно, ми можемо вибрати випрямляючий мікрорайон таким чином, щоб зображення ділянки Пуанкаре було відрізком прямої, поперечної до випрямленого потоку. У цьому випадку зрозуміло, що якщо траєкторія має одну зі своїх точок у випрямляючому околі, то ця траєкторія проходить через перетин Пуанкаре.

Вибравши локальні координати на  $\Sigma$ , припустимо, що  $\Sigma$  - це відкритий інтервал. Працюючи на цій локальній діаграмі, є відкриті субінтервали  $J_1$  в  $x_1$  і  $J_2$  в  $x_2$  такі, що  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ . Крім того, за визначенням граничних множин існує ціле число  $m$  таке, що  $\phi_{t_m}(p) \in J_1$ ; ціле число  $n$  таке, що  $s_n > t_m$  і  $\phi_{s_n}(p) \in J_2$ ; і ціле число  $\ell$  таке, що  $t_\ell > s_n$  і  $\phi_{t_\ell}(p) \in J_1$ . Згідно з теоремою 6, точка  $\phi_{s_n}(p)$  повинна знаходитися між точками  $\phi_{t_m}(p)$  і  $\phi_{t_\ell}(p)$  на  $\Sigma$ . Але це неможливо, оскільки точки  $\phi_{t_m}(p)$  і  $\phi_{t_\ell}(p)$  лежать в  $J_1$ , а  $\phi_{s_n}(p)$  - в  $J_2$  [4, 10].

Тепер ми готові довести теорему Пуанкаре – Бендікссона: якщо  $\Omega$  – непорожня компактна  $\omega$ -гранична множина потоку в  $R^2$ , і, якщо  $\Omega$  гранична множина потоку в  $\Omega$  - періодична траєкторія.

Припустимо, що  $\omega(p)$  непорожня, компактна і не містить точок спокою. Виберемо точку  $q \in \omega(p)$ . Спочатку покажемо, що траєкторія через  $q$  замкнута.

Розглянемо  $\omega(q)$ . Зауважимо, що  $\omega(q) \subseteq \omega(p)$  та  $\omega(q)$  не порожні.

Нехай  $x \in \omega(q)$ . Оскільки  $x$  не є точкою спокою, існує переріз  $\Sigma$  в точці  $x$  і послідовність на  $\Sigma$ , що складається з точок на орбіті через  $q$ , що збігається до  $x$ . Ці точки знаходяться в  $\omega(p)$ . Але, за останнім наслідком, це неможливо, якщо кожна точка цієї послідовності не є точкою  $x$ . Оскільки  $q$  не є точкою спокою, це означає, що  $q$  лежить на замкненій орбіті  $\Gamma$ . Зокрема, обмежений набір  $\omega(p)$  містить замкнену орбіту  $\Gamma$ .

Щоб завершити доведення, ми повинні показати  $\omega(p) \subseteq \Gamma$ . Якщо  $\omega(p) \neq \Gamma$ , то ми будемо використовувати зв'язність  $\omega(p)$ , щоб знайти послідовність  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \omega(p) \setminus \Gamma$  що збігається до точки  $z$  на  $\Gamma$ . Для цього розглянемо об'єднання  $A_1$  усіх відкритих куль з одиничним радіусом з центром у певній точці  $\Gamma$ . Множина  $A_1 \setminus \Gamma$  має містити точку в  $\omega(p)$ . Якщо ні, розглянемо об'єднання  $A_{1/2}$  (відповідно  $A_{1/4}$ ) усіх відкритих куль з радіусом  $\frac{1}{2}$  (відповідно  $\frac{1}{4}$ ) з центром у певній точці в  $\Gamma$ . Тоді множина  $A_{1/4}$  разом із доповненням замикання  $A_{1/2}$  “роз'єднується”  $\omega(p)$ , в суперечності. Повторюючи аргумент з кулями, радіуси яких прямують до нуля, можемо побудувати послідовність точок у  $\omega(p) \setminus \Gamma$ , відстань яких від  $\Gamma$  прямує до нуля. З компактності  $\omega(p)$  випливає, що існує підпослідовність  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\omega(p) \setminus \Gamma$ , що збігається до точки  $z \in \Gamma$ .

Нехай  $U$  позначає відкриту множину в  $z$  таку, що потік випрямляється у диференційованому зображенні  $U$ . Існує таке ціле число  $n$  таке, що  $p_n \in U$ . Але, використовуючи, використовуючи лему випрямлення, легко побачити, що траєкторія через  $p_n$ , має точку у перетині з деяким перерізом Пуанкаре  $\Sigma$  в точці

$z$ . Оскільки  $p_n$  не належить  $\Gamma$ , точки  $y$  і  $z$  є різними елементами множини  $\omega(p) \cap \Sigma$ , що суперечить теоремі 6 [15].

Наступну теорему часто можна використовувати, щоб показати, що періодичних траєкторій не існує.

*Теорема (Критерій Дюлака).* Розглянемо рівняння плоского диференціала на площині

$$\dot{x} = g(x, y),$$

$$\dot{y} = h(x, y).$$

Якщо є гладка функція  $B(x, y)$ , визначена на просто сполученій області  $\Omega \subseteq R^2$  така, що величина  $(Bg)_x + (Bh)_y$  не є тотожно нулем і фіксованим знаком на  $\Omega$ , то періодичних траєкторій у  $\Omega$  немає.

*Доведення.* Доведемо критерій Бендіксона, який є окремим випадком теореми, де  $B(x, y) = 1$ . Іншими словами ми доведемо, що якщо розбіжність  $f := (g(x, y), h(x, y))$ , задана формулою

$$f(x, y) := g_x(x, y) + h_y(x, y),$$

не є тотожно нулем і фіксованим знаком у просто пов'язаній області  $\Omega$ , то періодичних траєкторій у  $\Omega$  нема.

Припустимо, що  $\Gamma$  - є замкненою траєкторією в  $\Omega$ , і нехай  $G$  позначає область площини, обмежену  $\Gamma$ . Зауважимо, що криволінійний інтеграл  $gdy - hdx$  над  $\Gamma$  дорівнює нулю. З іншого боку, за теоремою Гріна інтеграл можна обчислити як подвійний інтеграл від  $(\operatorname{div} f) dx dy$  над  $G$ . Оскільки, згідно з гіпотезою, розбіжність  $f$  не зникає, то подвійний інтеграл над  $G$  не дорівнює нулю. Прийшли до суперечності. Таким чином, не може існувати така періодична орбіта.

Функція  $B$ , згадана в останньому твердженні, називається функцією Дюлака [11].

Наступна теорема говорить про глобальну асимптотичну стабільність на площині.



*Теорема 8.* Розглянемо гладке диференціальне рівняння на площині

$$\dot{x} = g(x, y),$$

$$\dot{y} = h(x, y),$$

для якого початок координат є точкою спокою. Нехай  $J$  позначає матрицю Якобі для перетворення  $(x, y) \rightarrow (g(x, y), h(x, y))$ , і нехай  $\phi_t$  позначає потік диференціального рівняння. Якщо виконуються три умови, то початок координат глобально асимптотично стабільний

Умова 1. Для кожного  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  слід  $J$ , заданий  $g_x(x, y) + h_y(x, y)$ , є від'ємним.

Умова 2. Для кожного  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  визначник  $J$ , рівний

$$g_x(x, y)h_y(x, y) - g_y(x, y) + h_x(x, y)$$

є додатним.

Умова 3. Для кожного  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  пряма траєкторія  $\{\phi_t(x, y) : 0 \leq t < \infty\}$  обмежена.

*Доведення.* З гіпотез на матриці Якобі, якщо є точка спокою, усі власні значення її асоційованої лінеаризації мають від'ємні дійсні частини.

Отже, кожна точка спокою є гіперболічним атрактором; тобто басейн притягання точки спокою містить відкритий окіл точки спокою. Цей факт впливає з теореми Хартмана або теореми 6. Зокрема, початок координат є гіперболічним атрактором.

Згідно з гіпотезами, сліди якобіана (розбіжність поля вектора) від'ємні по всій площині. Таким чином, за критерієм Бендіксона, немає періодичних розв'язків.

Нехай  $\Omega$  позначає басейн притягання початку. Використовуючи неперервність потоку, легко довести, що  $\Omega$  відкрита. Крім того, легко довести, що межа  $\Omega$  замкнута і не містить точок спокою.

Покажемо, що межа  $\Omega$  додатно інваріантна. Якщо ні, то на межі є точка  $p$  і час  $T > 0$  такий, що або  $\phi_T(p)$  знаходиться в  $\Omega$ , або такий, що  $\phi_T(p)$  є доповненням до замикання  $\Omega$  на площині. У першому випадку, оскільки  $\phi_T(p)$  знаходиться в  $\Omega$ ,

зрозуміло, що  $p \in \Omega$ ; тобто отримали суперечність. У іншому випадку існує відкрита множина  $V$  у доповненні замикання множини  $\Omega$ , що містить  $\phi_t(p)$ . Обернене відображення  $V$  до неперервного відображенням  $\phi_t$  - це відкрита множина  $U$ , що містить граничну точку  $p$ . За визначенням межі,  $U$  містить точку  $q \in \Omega$ . Але тоді  $q$  відображається до точки доповнення замикання  $\Omega$ , що суперечить тому, що  $q$  знаходиться у басейні притягання початку координат.

Якщо межа  $\Omega$  не порожня, розглянемо одну з її точок (обмежена) пряма траєкторія через точку є попередньо компактною і міститься у (замкненій) межі  $\Omega$ . Таким чином, його  $\omega$ -межовий набір міститься на межі  $\Omega$ . Оскільки межа  $\Omega$  не містить точок спокою, застосування теореми Пуанкаре – Бендікссона показує, що цей  $\omega$ -граничний набір є періодичною траєкторією (суперечність). Таким чином, межа є порожньою, а  $\Omega$  - ціла площина [2, 18].

### 2.3. Ряд Ліндстеда та перигелій Меркурія

У попередніх підрозділах детально розглянуто, як шляхом продовження довести існування періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. У цьому розділі розглянемо процедуру, винайдену Андерсом Ліндстедом у 1882 р., яку можна використати для пошуку корисних наближень рядів для цих періодичних розв'язків. Метод Ліндстеда буде застосовано до проблеми прецесії перигелію Меркурія – найвідомішої перевірки загальної теорії відносності. Також буде коротко обговорено обмеження методу Ліндстеда.

Почнемо з проблеми перигелію Меркурія. Якщо декартова система зафіксована на Сонці, то спостерігається прецесія коливального еліпса, вистеженого за рухом Меркурія. Це означає, що перигелій Меркурія – точка найбільшого наближення до Сонця – змінюється після кожного оберту, рухаючись у напрямку руху планети. Насправді спостерігається, що точка перигелію просувається приблизно на 43 секунди дуги за століття. Жодного задовільного пояснення цього явища не було відомо до введення загальної теорії відносності Альбертом Ейнштейном. Зокрема, у 1915 р., Ейнштейн виявив, що

його теорія дійсно передбачає прецесію 43 секунд дуги на століття - приголомшливе підтвердження його теорії [9, 13]. Незабаром після цього Карл Шварцшильд (1916) знайшов розв'язок рівнянь гравітаційного поля для круговосиметричного тіла – Сонця, і він дав чітке виведення тієї ж релятивістської поправки до Ньютонівського розв'язку для орбіти Меркурія [27].

Виявляється, що поворотна  $\rho$  відстані  $r$  від центру Сонця до Меркурія, коли Меркурій рухається по геодезичній щодо метрики простору-часу, отриманої Сонцем, близько апроксимується розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d^2 \rho}{d\phi^2} = \gamma - \rho + \delta \rho^2 \quad (2.8)$$

де

$$\gamma := \frac{G_0 M \left( 1 - \frac{G_0 (m + M)}{ac^2} \right)}{G_0 (m + M) a (1 - e^2)}, \quad \delta := \frac{3G_0 M}{c^2}, \quad (2.9)$$

$M$  - маса Сонця,  $m$  - маса Меркурія,  $G_0$  - ньютонівська гравітаційна константа,  $a$  - велика вісь еліптичної орбіти Меркурія,  $e$  - ексцентриситет еліпса, а  $c$  - швидкість світла. Прецесію перигелію Меркурія розраховують за диференціальним рівнянням (2.8).

Розміри параметрів у рівнянні (2.8) залежать від вибору одиниць виміру. Таким чином, немає сенсу говорити, що  $\alpha$  - малий параметр. Ця основна проблема є всюдисущою у прикладній математиці. Хоча деякі автори не турбуються про одиниці виміру, існує лише один правильний спосіб продовжити: змінити масштаб змінних, щоб нова система була безрозмірною.

Для рівняння (2.8), якщо ми визначимо нову залежну змінну  $\eta := \rho / \gamma$ , то диференціальне рівняння буде змінено у вигляді

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \eta = 1 + \epsilon \eta^2, \quad (2.10)$$

де відношення  $\epsilon := \delta \gamma$  безрозмірне. Слід зауважити, що для наближення

$$\epsilon = \frac{3GM/c^2}{a(1-e^2)} \frac{GM}{G(m+M)} \left( 1 - \frac{G(m+M)}{ac^2} \right)$$

т набагато менше, ніж  $M$ , і  $GM/(ac^2)$  невеликий, щоб отримати

$$\epsilon \approx \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)}$$

і використовувати фізичні константи

$$G_0 = 6.668 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot sec^2}, \quad a = (387)(149,598,845)m,$$

$$c = 3 \times 10^8 \frac{m}{sec}, \quad m_{Sun} = (332700)(5.977) \times 10^{24} kg, \quad e = 0.206$$

для обчислення наближення

$$\epsilon \approx 7.973 \times 10^{-8} \quad (2.11)$$

Диференціальне рівняння (2.10) має дві точки спокою у фазовій площині: центр поблизу точки з координатами (1,0) та сідло поблизу  $1/\epsilon, 0$ . Крім того, орбіта, що відповідає збуреному рухові Меркурія, відповідає одній із періодичних орбіт, що оточують центр.

Як ми можемо знайти корисне наближення збуреної періодичної орбіти, що відповідає руху Меркурія? Щоб відповісти на це запитання, розглянемо  $\epsilon$  параметр і зауважимо, що диференціальне рівняння (2.10) є аналітичним. Таким чином, періодичний розв'язок  $\phi \rightarrow \eta(\phi, \epsilon)$ , який ми хочемо наблизити, задається аналітичною функцією  $\eta$  двох змінних. Також це рішення є аналітичною функцією початкових умов. Таким чином, збурений розв'язок може бути розкладено як збіжний степеневий ряд у  $\epsilon$ ; принаймні це вірно для досить малих  $\epsilon$ . Припустимо, що форма  $\eta(\phi, \epsilon)$  розкладається в ряд виду

$$\eta(\phi, \epsilon) = \eta_0(\phi) + \eta_1(\phi)\epsilon + \eta_2(\phi)\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \quad (2.12)$$

Природною ідеєю є підстановка ряду (2.12) у диференціальне рівняння (2.10), а потім спроба пошуку невідомих коефіцієнтів Тейлора шляхом прирівнювання відповідних степенів  $\epsilon$ . Насправді, якщо це буде зроблено, то (за допомогою крапок для позначення похідних по  $\phi$ ) рівняння нульового порядку є

$$\ddot{\eta}_0 + \eta_0 = 1. \quad (2.13)$$

Зауважимо, що ми маємо деяку свободу у виборі вихідних даних для розв'язку диференціального рівняння (2.13). Наприклад, якщо розглядати систему у фазовій площині, то на осі  $\eta$  існує інтервал, що лежить праворуч від не збуреної точки спокою в точці  $(1,0)$  і містить одну з точок перетину нашої збуреної періодичної орбіти з віссю  $\eta$ . Насправді, цей інтервал можна обрати як переріз Пуанкаре. Таким чином, можна припустити, що шукана періодична траєкторія, що відповідає розв'язку  $\phi \rightarrow \eta(\phi, \epsilon)$ , починається з  $\phi = 0$  на цьому перетині в точці з координатою  $1+b$  для деяких  $b = b(\epsilon) > 0$ . Іншими словами, для досить малого  $\epsilon > 0$  ми маємо початкові умови  $\eta(0, \epsilon) = 1+b$  і  $\dot{\eta}(0, \epsilon) = 0$ . Зокрема,  $\eta_0(0) = 1+b$ ,  $\dot{\eta}_0(0) = 0$ , а відповідний розв'язок або диференціальне рівняння порядку нуля

$$\eta_0(\phi) = 1 + b \cos \phi.$$

Зауважимо, що усічення в цьому порядку передбачає еліптичний рух Меркурія. Насправді, наближення нульового порядку є лише розв'язком гармонічної моделі осцилятора руху Кеплера [22].

Використовуючи тригонометричну тотожність та деякі алгебраїчні маніпуляції, член першого порядку у розкладі ряду  $\eta$  розглядається як розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + \eta_1 &= \left( \frac{1}{\beta^2} + \frac{b^2}{2} \right) + \frac{2b}{\beta^2} \cos \phi + \frac{b^2}{2} \cos 2\phi; \\ \eta_1(0) &= 0; \\ \dot{\eta}_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

і, застосувавши формулу Лагранжа, розв'язок цієї задачі має вигляд

$$\eta_1(\phi) = c_1 + c_2 \phi \sin \phi + c_3 \cos 2\phi,$$

де  $c_1$ ,  $c_2$  і  $c_3$  - ненульові константи.

Тепер у нас є проблема: наближення першого порядку

$$\eta(\phi) \approx \eta_0(\phi) + \epsilon \eta_1(\phi)$$

не є періодичним. Дійсно, оскільки один з режимів Фур'є форсувальної функції в диференціальному рівнянні (2.14) перебуває в резонансі з власною частотою гармонічного осцилятора, вираз для  $\eta_1(\phi)$  містить віковий (або секулярний) доданок  $c_2\phi \sin \phi$ . Дійсно, функція  $\phi \rightarrow c_2\phi \sin \phi$  є необмеженою при  $\phi \rightarrow \infty$ .

Слово «віковий» означає подію, яка відбувається раз на століття. Висновок очевидний: навіть якщо його коефіцієнт невеликий, віковий доданок матиме доволі великі значення. Зокрема, якщо  $u \in$  віковий доданок наближається скінченною кількістю доданків, то наближення не буде періодичним, якщо не буде випадкового скасування [1, 9].

Ми розпочали з періодичною функцією  $\phi \rightarrow \eta(\phi, \epsilon)$ , але член першого порядку у своєму розкладі по ряду за ступенем параметра  $\epsilon$  збурення не є періодичні. Як це може бути?

Як приклад, щоб проілюструвати причину появи секулярних доданків, розглянемо гармонічний осцилятор з невеликим розстроюванням, заданий

$$\ddot{u} + (1 + \epsilon)^2 u = 0$$

з початковими умовами

$$u(0) = b \quad \text{та} \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Для цього прикладу ми маємо, що

$$u(t, \epsilon) = b \cos((1 + \epsilon)t) = b \cos t - (bt \sin t) \epsilon - \frac{1}{2}(bt^2 \cos t) \epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Отже, не зважаючи на те, що ряд являє собою періодичну функцію, кожне скінченне наближення порядку, отримане шляхом скорочення ряду, є необмеженим. Очевидно, що ці наближення скінченного порядку не є корисними протягом тривалого часу в інтервалах. Крім того, доданки в цьому розширенні ряду мають "неправильний" період. Якщо розв'язок є періодичним з періодом  $2\pi/(1 + \epsilon)$ , то тригонометричні члени праворуч мають період  $2\pi$ .

Ліндстед зауважив [27], що секулярні члени з'являються в ряді для збуреного періодичного розв'язку, оскільки не враховується залежна від параметрів частота періодичної орбіти. Він показав, що секулярні члени можна

усунути, якщо розв'язок та його частоту одночасно розширити за степенями параметра збурення.

Як ілюстрацію методу Ліндстеда розглянемо збурену лінійну система виду

$$\ddot{u} + \lambda^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}, \epsilon)$$

що має сімейство періодичних розв'язків  $t \rightarrow u(t, \epsilon)$  з початковою умовою  $u(0, \epsilon) = b$  і  $\dot{u}(0, \epsilon) = 0$ . Іншими словами, відповідні періодичні траєкторії у фазовій площині всі проходять через точку з координатами  $(b, 0)$ . Також визначимо функцію  $\omega$ , задану за допомогою  $\epsilon \rightarrow \omega(\epsilon)$ , так що частота періодичного розв'язку  $t \rightarrow u(t, \epsilon)$  дорівнює  $\omega(\epsilon)$ .

Ліндстед вводить нову незалежну змінну

$$\tau = \omega(\epsilon)t$$

так що шуканий періодичний розв'язок  $t \rightarrow u(t, \epsilon)$  задається через

$$u(t, \epsilon) = v(\omega(\epsilon)t, \epsilon)$$

де  $\tau \rightarrow v(\tau, \epsilon)$  -  $2\pi$ -періодичний розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} \omega^2(\epsilon)v'' + \lambda^2 v &= \epsilon f(v, \omega(\epsilon)v', \epsilon); \\ v(0, \epsilon) &= b; \\ v'(0, \epsilon) &= 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

а  $v'$  позначає похідну від  $v$  по  $\tau$ .

Чисельний метод Ліндстеда такий: записати  $2\pi$ -періодичну функцію  $\tau \rightarrow v(\tau, \epsilon)$  та частоту  $\epsilon \rightarrow \omega(\epsilon)$  у вигляді рядів

$$\begin{aligned} v(\tau, \epsilon) &= v_0(\tau) + v_1(\tau)\epsilon + v_2(\tau)\epsilon^2 + \dots, \\ \omega(\epsilon) &= \lambda + \omega_1 \epsilon + \omega_2 \epsilon^2 + \dots, \end{aligned}$$

підставити ці ряди у диференціальне рівняння (2.15), а потім рекурсивно обчислити невідомі коефіцієнти, прирівнюючи доданки з відповідними степенями  $\epsilon$ . Крім того, диференціальні рівняння для коефіцієнтів Тейлора  $v$  можна обчислити безпосередньо з диференціального рівняння (2.15) як варіаційні рівняння.

Щоб визначити коефіцієнт нульового порядку, слід покласти  $\epsilon=0$  у рівнянні (2.15) на і врахувати, що  $v_0$  - це розв'язок задачі з початковими умовами

$$\begin{aligned} \lambda^2(w'' + w) &= 0; \\ w(0) &= b; \\ w'(0) &= 0 \end{aligned} ,$$

і таким чином

$$v_0(\tau) = b \cos \tau. \quad (2.16)$$

Далі зазначимо, що  $v_1(\tau) = v_\epsilon(\tau, 0)$ . Отже, диференціюючи обидві сторони рівняння (2.15) по  $\epsilon$  та оцінивши при  $\epsilon=0$ , функція  $v_1$  буде розглядатися як розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} \lambda^2(w'' + w) &= f(b \cos \tau - \lambda b \sin \tau, 0) + 2\lambda\omega_1 b \cos \tau; \\ w(0) &= 0; \\ w'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Оскільки функція  $\tau \rightarrow v(\tau, \epsilon) \in 2\pi$ -періодичною, не залежить від  $\epsilon$ , функція  $\tau \rightarrow v_\epsilon(\tau, 0)$  також  $\epsilon$ , і тому точка  $(b, 0)$  є продовженням точка періодичних розв'язку у фазовій площині для (звичайної) системи першого порядку, що відповідає диференціальному рівнянню у (2.17). Змінивши масштаб, а потім застосувавши теорему 5 до цієї системи першого порядку, отримуємо

$$\int_0^{2\pi} (f(b \cos \tau, -\lambda b \sin \tau, 0) + 2\lambda\omega_1 b \cos \tau) \sin \tau d\tau = 0.$$

Отже, ряд Фур'є для функції  $\tau \rightarrow f(b \cos \tau, -\lambda b \sin \tau, 0)$ , який має вигляд

$$A_0 + A_1 \cos \tau + B_1 \sin \tau + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos n\tau + B_n \sin n\tau)$$

має бути таким, щоб  $B_1 = 0$ . Якщо ми накладемо цю умову, а також виберемо  $\omega_1 = A_1 / (2\lambda b)$ , то функція форсування з правого боку лінійної системи (2.17) не має резонансного доданку. Таким чином, відповідний розв'язок  $v_1$  не містить секулярних доданків і є періодичним з періодом  $2\pi$ .



Використовуючи варіаційне рівняння другого порядку, теорему 5.1 та відповідний вибір  $\omega_2$ , усі світські доданки можна усунути у відповідній лінійній системі, тому функція  $v_2$  є періодичною з періодом  $2\pi$ . Насправді цю процедуру можна повторити, щоб визначити всі коефіцієнти ряду Тейлора для  $\epsilon$  збуреної частоти  $\omega(\epsilon)$  та рішення  $v$ . Більше того, це впливає з наших припущень що отримані ряди збігаються.

Початковий періодичний розв'язок має вигляд ряду

$$u(t, \epsilon) = v(\omega(\epsilon)t, \epsilon) = b \cos(\omega(\epsilon)t) + v_1(\omega(\epsilon)t) \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (2.18)$$

де  $v_1$  визначається вище, а частота вихідного періодичного розв'язку визначається значенням

$$\omega(\epsilon) = \lambda + \frac{A_1}{2\lambda b} \epsilon + O(\epsilon).$$

Зазначимо, що оскільки коефіцієнти ряду (2.18) залежать від  $\epsilon$ , розширення ряду Ліндстеда для  $u$  не є рядом Тейлора [16, 21]

Якщо процедура Ліндстеда виконується з певним скінченним порядком – єдина можливість у більшості прикладних задач – то, щоб отримати наближення до бажаного періодичного розв'язку, потрібно підставити усічення ряду для частоти  $\omega$  у скорочення ряду Ліндстеда для періодичного розв'язку. Це призводить до запитання "Наскільки добре усічений ряд Ліндстеда наближається до вихідного періодичного розв'язку?" Відповідь на випадок, який розглядається тут, полягає в тому, що різниця між усіченням  $n$ -го порядку та розв'язком становить  $O(\epsilon^{n+1})$  на часовому інтервалі довжини  $C/\epsilon$  для деякої сталої  $C > 0$  [8].

Для одновимірних осциляторів оцінку похибки, щойно згадану для ряду Ліндстеда, можна отримати з відповідного ряду Тейлора для того ж розв'язку. Аналіз для багатовимірних диференціальних рівнянь складніший. Наприклад, для гамільтонових збурень багатовимірних гамільтонових систем ряди Ліндстеда взагалі розбігаються! Цей відомий результат Пуанкаре дуже важливий в історії математики. Розбіжність цих рядів свідчить про те, що динаміка, що лежить в їх основі, має бути дуже складною. Насправді це спостереження привело Пуанкаре до кількох значних результатів, наприклад, до відкриття хаотичної динаміки в

гамільтонових динамічних системах [29, 30]. З іншого боку, ряди Ліндстеда корисні для апроксимації періодичних розв'язків, які отримуються як продовження періодичних траєкторій типу, розглянутого в цій главі. Функції біфуркації (які називаються визначальними рівняннями в контексті ряду Ліндстеда) можна використовувати для отримання наближень Ліндстеда для продовжуваних періодичних розв'язків у кожному випадку, який ми обговорювали вище.

Повернемося до перигелію Меркурія.

Щоб застосувати ряд Ліндстеда для отримання наближення до прецесії перигелію, вводять нові змінні

$$\begin{aligned} \nu &:= \eta - 1, \\ \tau &= \omega(\epsilon)\phi \end{aligned}$$

у рівняння (2.10) так, що

$$\omega^2(\epsilon)\nu'' + \nu = \epsilon(1 + \nu)^2$$

де  $\nu'$  позначає  $d\nu/d\tau$ , а також використовуючи рівняння (2.16) та (2.17), щоб показати, що  $\nu_0(\tau) = b \cos \tau$  і  $\nu_1$  є розв'язком задачі Коші

$$w'' + w = \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) + 2b(1 + \omega_1) \cos \tau + \frac{b^2}{2} \cos 2\tau$$

з початковими умовами  $w(0) = w'(0) = 0$ . Таким чином, згідно з процедурою Ліндстеда, якщо  $\omega_1 := -1$ , то секулярні доданки усуваються. Фактично, у вихідних змінних маємо

$$\rho(\phi) = \gamma + b\gamma \cos((1 - \epsilon)\phi) + O(\epsilon). \quad (2.19)$$

Більш того, усічення найнижчого порядку ряду Ліндстеда (2.19), що включає релятивістську поправку, дає наближення

$$\rho(\phi) \approx \gamma + b\gamma \cos((1 - \epsilon)\phi) \quad (2.20)$$

З огляду на рівняння (2.20), відстань  $r = 1/\rho$  Меркурія до центру Сонця наближається до

$$r \approx \frac{1}{\gamma(1 + b \cos((1 - \epsilon)\phi))}.$$

Також перигелій для цієї еліптичної орбіти має місце, коли аргумент косинуса кратний  $2\pi$ . Таким чином, якщо орбіта починається з перигелію на  $\phi = 0$ , то після одного обертання вона повертається до перигелію, коли  $(1 - \epsilon)\phi = 2\pi$ , тобто коли  $\phi$  просунувся приблизно на

$$2\pi \epsilon = \frac{6\pi G_0 M}{a(1 - e^2)}$$

радіанів від неперешкодженого значення  $\phi = 2\pi$ .

Використовуючи вираз для третього закону Кеплера та фізичні константи, орбітальний період Меркурія буде рівним

$$T \approx 7.596 \times 10^6 \text{ sec}.$$

Іншими словами, за століття Меркурій обертається навколо Сонця приблизно 414,9 рази. Використовуючи оцінку для (2.11), орбітальне просування перигелію за століття, таким чином, дорівнює  $2.08 \times 10^{-4}$  радіанів, або приблизно 43 секунди дуги на століття [9, 10].

Метод Ліндстеда можна застосувати, наприклад, щоб знайти наближення першого порядку для розв'язку вимушеного осцилятора

$$\ddot{u} + u = \epsilon (\alpha \cos(\omega t) + bu^3).$$

Періодичні розв'язки цього рівняння очікуємо знайти, коли параметр  $\omega$  знаходиться поблизу резонансу, скажімо  $\omega(\epsilon) = 1 + \omega_1 \epsilon$ . У цьому випадку припустимо значення налаштування  $\omega_1$  відоме, і слід шукати розв'язки (гармоніки) з частотою  $\omega$ . Цей пошук можна проводити в межах геометрії стробоскопічної карти Пуанкаре. На відміну від випадку автономного збурення, тут частота відома, але початкове положення розв'язку в розділі Пуанкаре невідоме. Швидше, початкове положення, крива продовження, є функцією від  $\epsilon$ . Це передбачає введення нової змінної часу  $\tau = \omega(\epsilon)t$  так, щоб можна було шукати періодичні розв'язки з періодом  $2\pi$  масштабованого диференціального рівняння

$$\omega^2(\epsilon)v^n + v = \epsilon(\alpha \cos(\tau) - \beta u^3).$$

Щоб застосувати метод Ліндстеда, слід розкласти  $v(t, \epsilon)$  в степенний ряд як  $\epsilon$  раніше, але, оскільки початкове положення періодичної орбіти невідоме, ми слід також розкласти початкові значення  $v(0, \epsilon)$  та  $v'(0, \epsilon)$ . Коефіцієнти для цих розширень ряду вихідних даних та функції  $v$  мають визначатися за допомогою рівняння коефіцієнтів. Якщо

$$v(0, \epsilon) = \zeta_{10} + \zeta_{11} \epsilon + O(\epsilon^2),$$

$$v'(0, \epsilon) = \zeta_{20} + \zeta_{21} \epsilon + O(\epsilon^2),$$

то  $2\pi$ -періодичне наближення нульового порядку дорівнює

$$v_0(\tau) = \zeta_{10} \cos \tau + \zeta_{20} \sin \tau.$$

Для знаходження значень  $\zeta_{10}$  та  $\zeta_{20}$  потрібно обчислити наближення першого порядку, розглянути умову, необхідну для того, щоб зробити наближення  $2\pi$ -періодичним, і порівняти отриманий результат із рівняннями біфуркації, отриманими вище [13].

### РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА РІВНОМІРНО ПРИДАТНОГО РОЗКЛАДУ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ДУФІНГА ЗА МЕТОДИКОЮ ЛІНДСТЕДА-ПУАНКАРЕ

Розглянемо рівняння Дуфінга виду

$$\ddot{x} + 4x + 0,3x^3 = 0. \quad (3.1)$$

Побудуємо рівномірно придатний розклад першого порядку для розв'язку рівняння (3.1), використовуючи описану у розділі 1 методику Ліндстеда-Пуанкаре. Також знайдемо з точністю до чотирьох знаків після коми частковий розв'язок цього рівняння, що задовольняє початковим умовам

$$x(0) = 1; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (3.2)$$

Згідно даної методики, введемо у рівнянні (3.1) частоту  $\omega$ , що залежить від малого параметра  $\varepsilon$ . З цією метою виконаємо заміну

$$\tau = \omega t. \quad (3.3)$$

Заміна (3.3) зведе рівняння (3.1) до вигляду

$$\omega^2 x'' + 4x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (3.4)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (3.4) і величину  $\omega$  у вигляді розкладів у степеневий ряд за степенями  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2), \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

У якості  $\omega_0$  виберемо частоту, що відповідає незбуреному (при  $\varepsilon = 0$ ) рівнянню  $x'' + 4x = 0$ , тобто  $\omega_0 = 2$ .

Підставляючи (3.5) у (3.4), отримуємо:

$$(2 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^2 (x_0'' + \varepsilon x_1'' + \dots) + 4x_0 + 4\varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^3 = 0,$$

звідки

$$4x_0'' + 4x_0 + \varepsilon(4x_1'' + 4x_1 + 4\omega_1 x_0'' + x_0^3) + \dots = 0.$$

Прирівнюючи до нуля члени нульового і першого порядків малості, отримаємо:

$$x_0'' + x_0 = 0, \quad (3.6)$$

$$x_1'' + x_1 = -\frac{1}{4}x_0^3 - \omega_1 x_0'' \quad (3.7)$$

Розв'язок рівняння (3.7) має вигляд

$$x_0 = a \cos(\tau + \varphi), \quad (3.8)$$

де  $a$  і  $\varphi$  – деякі довільні сталі.

Підставивши (3.8) у праву частинну (3.7), отримуємо

$$x_1'' + x_1 = -\frac{a^3}{4} \cos^3(\tau + \varphi) + \omega_1 a \cos(\tau + \varphi),$$

звідки

$$x_1'' + x_1 = \left( \omega_1 a - \frac{3}{16} a^3 \right) \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^3}{16} \cos(3\tau + 3\varphi). \quad (3.9)$$

Очевидно, що поява секулярного члена у частковому розв'язку рівняння (3.9) зумовлена доданком  $\left( \omega_1 a - \frac{3}{16} a^3 \right) \cos(\tau + \varphi)$ . Тому для виключення секулярного члена у розкладі покладаємо рівним нулю коефіцієнт при  $\cos(\tau + \varphi)$ , тобто

$$\omega_1 a - \frac{3}{16} a^3 = 0,$$

звідки

$$\omega_1 = \frac{3}{16} a^2. \quad (3.10)$$

Тепер рівняння (3.9) набуде вигляду

$$x_1'' + x_1 = -\frac{a^3}{16} \cos 3(\tau + \varphi),$$

а його частковий розв'язок має вигляд

$$x_1 = \frac{a^3}{128} \cos 3(\tau + \varphi). \quad (3.11)$$

Підставивши (3.11) та (3.8) у перше рівняння (3.5), отримаємо

$$x = a \cos(\tau + \varphi) + \frac{a^3 \varepsilon}{128} \cos 3(\tau + \varphi) + \dots \quad (3.12)$$

Підставивши тепер значення із (3.10) у друге рівняння (3.5), отримуємо:

$$\omega = 2 + \frac{3}{16} a^2 \varepsilon + \dots$$

Враховуючи, що  $\tau = \omega t$ , (3.12) можна переписати у вигляді

$$x = a \cos\left(\left(2 + \frac{3}{16} a^2 \varepsilon\right)t + \varphi\right) + \frac{a^3 \varepsilon}{128} \cos 3\left(\left(2 + \frac{3}{16} a^2 \varepsilon\right)t + \varphi\right) + \dots \quad (3.13)$$

Розклад (3.13) буде рівномірним розкладом першого порядку, оскільки секулярні члени в ньому відсутні, а поправка (член, пропорційний  $\varepsilon$ ) є малою, порівняно із головним членом розкладу.

При  $\varepsilon = 0,3$  рівномірно придатний розклад першого порядку (3.13) набуде вигляду

$$x = a \cos\left(\left(2 + \frac{9}{160} a^2\right)t + \varphi\right) + \frac{3a^3}{1280} \cos\left(\left(6 + \frac{27}{160} a^2\right)t + 3\varphi\right) + \dots \quad (3.14)$$

Для визначення довільних сталих  $a$  і  $\varphi$ , скористаємось початковими умовами (3.2).

Знайдемо, спочатку,

$$\begin{aligned} x' = & -a\left(2 + \frac{9}{160} a^2\right) \sin\left(\left(2 + \frac{9}{160} a^2\right)t + \varphi\right) - \\ & - \frac{3a^3}{1280} \left(6 + \frac{27}{160} a^2\right) \sin\left(\left(6 + \frac{27}{160} a^2\right)t + 3\varphi\right) + \dots \end{aligned}$$

Тепер знайдемо значення  $x(t)$  та  $x'(t)$  у точці  $t = 0$ :

$$x(0) = a \cos \varphi + \frac{3}{1280} a^3 \cos 3\varphi,$$

$$x'(0) = -a\left(2 + \frac{9}{160} a^2\right) \sin \varphi - \frac{3a^3}{1280} \left(6 + \frac{27}{160} a^2\right) \sin 3\varphi.$$

З урахуванням початкових умов (3.2) отримуємо:

$$\begin{cases} a \cos \varphi + \frac{3a^3}{1280} \cos 3\varphi = 1; \\ a \left( 2 + \frac{9}{160} a^2 \right) \sin \varphi + \frac{3a^3}{1280} \left( 6 + \frac{27}{160} a^2 \right) \sin 3\varphi = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} a \cos \varphi + \frac{3a^3}{1280} \cos 3\varphi = 1; \\ \sin \varphi + \frac{9a^2}{1280} \sin 3\varphi = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Для розв'язування нелінійної системи (3.15) застосуємо чисельний метод Ньютона. Алгоритм методу описується формулами:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)})f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

де  $x = (a, \varphi)^T$  – вектор невідомих,  $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi + \frac{3a^3}{1280} \cos 3\varphi - 1 \\ \sin \varphi + \frac{9a^2}{1280} \sin 3\varphi \end{pmatrix}$

– вектор-функція, що описує нелінійну систему рівнянь;  $W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$  –

матриця Якобі, у якій:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial a} &= \cos \varphi + \frac{9a^2}{1280} \sin 3\varphi; & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= -a \sin \varphi - \frac{9a^3}{1280} \sin 3\varphi; \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} &= \frac{9a}{640} \sin 3\varphi; & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} &= \cos \varphi + \frac{27a^2}{1280} \cos 3\varphi. \end{aligned}$$

У якості початкового наближення виберемо вектор  $x = (1, 0)^T$ .

В результаті обчислень уже після трьох ітерацій з точністю більше шести знаків після коми отримуємо  $a = 0,9977$  і  $\varphi = 0,000$ .



Таким чином, з урахуванням (3.14), частковий розв'язок рівняння (3.1) у формі рівномірно придатного наближення має вигляд:

$$x = 0,9977 \cos 2,0560t + 0,002327 \cos 6,1680t + \dots$$

## ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто математичні моделі теорії нелінійних і хаотичних коливань. Зокрема, виділено рівняння Дуфінга як найбільш відоме при описанні коливних процесів такого виду. Досліджено основні методи розв'язування таких рівнянь, серед яких особливу увагу приділено методу розкладу в ряд за параметром нелінійності та методу Ліндстеда-Пуанкаре як його узагальненню. Розглянуто технологію застосування методу Ліндстеда-Пуанкаре для знаходження розв'язку звичайних нелінійних диференціальних рівнянь.

В роботі також наведено методику Пуанкаре виявлення періодичних розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, розкрито зміст понять «карта Пуанкаре», «граничні множини» та теорії Пуанкаре-Бендіксона. Розглянуто спосіб застосування ряду Ліндстеда до вивчення знаменитої проблеми перигелію Меркурія. Підібрано та запропоновано (додаток А) комплекс вправ для глибшого розуміння та застосування цієї теорії.

В якості практичного застосування методу Ліндстеда-Пуанкаре, побудовано рівномірно придатний розклад першого порядку для розв'язку рівняння Дуфінга.

Матеріал даної бакалаврської роботи може бути використаний при викладанні предмету диференціальні рівняння у вищому навчальному закладі. Наукові положення, висновки і рекомендації, сформульовані в бакалаврській є достовірними і всебічно обгрунтованими, що підтверджується використанням широкого спектру сучасних методів досліджень, повнотою джерел використаної інформації.

Матеріали даної роботи можуть бути використані при вивченні та викладанні таких дисциплін як «диференціальні рівняння» та «методи нелінійного аналізу».

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Москва : ГИФМЛ. – 1979.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва : Гос. изд-во физико-мат. лит., 1988. – 408 с.
3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие. – Москва : Мир, 1986. – 463 с.
4. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні та інтегральні рівняння: навч. посіб. Вид. 2-ге, випр. та доп. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. – 360 с.
5. Головатий Ю.Д., Кирилич В.М., Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь : навч. посіб. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.
6. Гутер Р.С. Ямпольський А.Р. Диференціальні рівняння. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 1996. – 304 с.
7. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ю.К. Рудавський та ін. – Львів : Вища школа, 2001. – 244с.
8. Егоров В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Изд. 2-е. – Москва : ФИЗМАЛИТ, 2005. – 384с.
9. Жегалов В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения в научных теориях. – Казань : Казанское математическое сообщество, 2003. – 100с.
10. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва : ФИЗМАЛИТ, 2001. – 576 с.
11. Клочко Т.В., Кондратьев Б.В., Лесік Н.І. Дослідження особливих розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку : навч.-метод. посіб. – Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2012. – 44 с.
12. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння : навч. посіб. – Київ : Либідь, 2004. – 408с.
13. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. – Москва : Издательство физико-математической литературы, 2002. – 292 с.
14. Мун Ф. Хаотические колебания. – Москва : Мир, 1990. – 311 с.

15. Найфе А.Х. Методы возмущений. – Москва : Мир, 1996. – 456 с.
16. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособ. Изд. 6-е. – Москва : УРСС, 2003. – 272с.
17. Самойленко А. М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения : примеры и задачи : учеб. пособ. – Москва : Высш. шк., 1989. – 383с.
18. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / Филиппов А.В. – Москва : Изд-во РХД, 2000. – 175с.
19. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – Москва : ГИТТЛ. – 1981. – 486 с.
20. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М. : изд. ин. лит., 1998. – 264 с.
21. Тихонов А., Васильева, А Дифференциальные уравнения: учебник для вузов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256с.
22. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений : учебник. – Москва : КомКнига, 2007. – 204с
23. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – Москва : Мир, 1999. – 685 с.
24. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. – Москва : изд. ин. лит. – 2007. – 204 с.
25. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння : навч. посіб. – Київ : Техніка, 2003. – 368с.
26. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний : учебное пособие. – Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2003. – 256 с.
27. Chicone C. Ordinary Differential Equations with Applications. – New York : Springer, 2006. – 603 p.

28. Curtain R., Zwart H. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear System Theory. – Waterloo : CIAM, 1996. – 210 p.
29. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. – New York : Springer, 1993. – 660 p.
30. Ueda Y. Survey of Regular and Chaotic Phenomena in Forced Duffing Oscillator. – Huston : Kluwer Academic Publishers – 1991. – 300 p.

## ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Доведіть, що відображення часу повернення  $T$  гладке.

Підказка: знайдіть функцію  $F: R^n \rightarrow R$  так, щоб  $F(u) = 0$ , якщо і тільки якщо  $u \in \Sigma$ , і визначте  $G(t, u) = F(\phi_t(u))$ . Якщо  $p \in \Sigma$  и  $T$  - час його першого повернення, то застосуйте теорему про неявну функцію до  $G$  в точці  $(T, p)$ , щоб знайти  $T$  як функцію від  $p$ .

2. Припустимо, що  $A$  - матриця  $2 \times 2$ , і розглянемо лінійне перетворення  $R^2$ , вказане  $x \rightarrow Ax$ , як динамічну систему.

(a) Доведіть: якщо спектр оператора  $A$  лежить всередині одиничному колі на комплексній площині, то  $A^k x \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для будь-якого  $x \in R^2$ .

(b) Доведіть: якщо хоча б одне власне значення матриці  $A$  лежить поза одиничному колі, то існує точка  $x \in R^2$  така, що  $\|A^k x\| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

(c) Визначте поняття стійкості і асимптотичної стійкості для дискретних динамічних систем і покажіть, що початок координат асимптотично стійкий для лінійних динамічних система, пов'язана з  $A$ , тоді і тільки тоді, коли спектр  $A$  лежить всередині одиничному колі.

(d) Припустимо, що спектр оператора  $A$  не лежить всередині одиничному колі. Введіть умови, що має на увазі, що початок координат стабільно.

3. [Одновимірна динаміка] Дискретна динамічна система не обов'язково повинна бути оборотною. Наприклад, розглянемо квадратичне сімейство  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  певне формулою  $f(x) = \lambda x(1-x)$  для  $\lambda$  в інтервалі  $(0, 4]$ . Він визначає динамічну систему через  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

(a) Доведіть: якщо  $\lambda < 1$ , то  $f$  має глобально притягуючу нерухому точку.

(b) Якщо  $1 < \lambda < 3$ , то  $f$  має глобально притягуючу не нульову нерухому точку.

(c) Доведіть: біфуркація відбувається при  $\lambda = 3$ , така що при  $\lambda > 3$  існує періодична орбіта з періодом два і ця орбіта асимптотично стійка при  $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$ .

(d) Доведіть: біфуркація відбувається при  $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ , так що при  $\lambda > 1 + \sqrt{6}$  існує періодична орбіта з періодом чотири.

(e) Фактично, зліченна послідовність таких біфуркацій відбувається при  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$ , ... так що періодична орбіта періоду  $2^n$  народжується в  $\lambda_n$ . Послідовність  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходиться до числа  $\lambda_{\infty} \approx 3.57$ . Виявляється, показує, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) / (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 4.67\dots$ . Це універсальна константа для родин, графіки яких мають єдине значення не генерувати максимум, наприклад,  $x \rightarrow \lambda \sin(\pi x)$  для  $x \in [0, 1]$  називається числом Фейгенбаума. Перевірте ці твердження за допомогою чисельних експериментів.

(f) При  $\lambda = \lambda_{\infty}$  динамічна система має періодичні точки всіх періодів. Не важко довести, що система хаотична при  $\lambda = 4$ . Принаймні, неважко довести, що динаміка випадкова, як підкидання монети. Ідеї, доведення містяться в наступних декількох вправах.

(g) Доведіть, що намет відображає  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , задане формулою  $h(x) = 2x$ , для  $0 \leq x \leq 1/2$  і  $h(x) = 2 - 2x$ , для  $1/2 \leq x \leq 1$  є напівсполученим з квадратним відображенням  $f(x) = 4x(1-x)$  через  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , задане  $g(x) = \sin^2 \pi x$ ; тобто  $f(g(x)) = g(h(x))$  для  $x \in [0, 1]$ .

(h) Доведіть: кожна точка в  $[0, 1]$  може бути представлена двійковим десятковим розкладанням  $x = x_1 x_2 x_3 \dots$ , де  $x_n = 0$  або  $x_n = 1$ .

(i) Доведіть: відображення  $h$  діє на виконавчі послідовності за правилом  $h(x_1 x_2 x_3 \dots) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \oplus x_3)(x_1 \oplus x_4)\dots$ , де  $\oplus$  - складання з підставою два.

(j) Використовуйте двійкове подання  $h$ , щоб довести, що для довільної послідовності підкидань монети, скажімо, *ННТТНТ*..., існує точка в  $[0, 1]$ , така, що її ітерації під  $h$  потрапляють в інтервали  $H = [0, 1/2)$  и  $T = [1/2, 1]$  в порядку, заданому підкиданням монети.

**4.** Доведіть теорему Брауера про нерухому точку для відрізка в  $\mathbb{R}$ . Підказка: використовуйте теорему про проміжне значення.

**5.** Знайдіть початкову точку нетривіального періодичного рішення в інтервалі  $0 < \xi < a+b+1$  для (2.1) як функцію від  $a$  і  $b$ . Чи є рівно періодичні рішення?

**6.** Знайдіть умови на  $a(t)$  і  $f$ , забезпечують існування хоча б одного (нетривіального) періодичного рішення диференціального рівняння виду

$$\dot{y} = a(t)y + f(y)$$

**7.** Розглянемо диференціальне рівняння (2.1) на циліндрі і перетворення  $u = (y+1)\cos\tau$ ,  $v = (y+1)\sin\tau$ , яке відображає частину циліндр, який визначається нерівністю  $y > -1$ , в площину. Що являє собою зображення цього перетворення? Знайдіть диференціальне рівняння в нових координатах і намалюйте його фазовий портрет.

**8.** Знайдіть явну формулу для розв'язку диференціального рівняння (2.1) і використовуйте її, щоб дати прямий доказ існування нетривіального періодичного розв'язку.

**9.** Доведіть, що  $P''(\xi) < 0$  при  $\xi > 0$ , де  $P$  - відображення Пуанкаре для диференціального рівняння (2.1). Використовуйте цей результат і нерівність (2.4), щоб довести єдиність нетривіального періодичного рішення диференціального рівняння.

**10.** Покажіть, що (стробоскопічне) відображення Пуанкаре для диференціального рівняння (2.1) має рівно одну нерухому точку на інтервалі  $(0, \infty)$ . Скільки фіксованих точок на  $(-\infty, \infty)$ ?

**11.** Припустимо, що  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  являється  $T$ -періодична функція і  $0 < h(t) < 1/4$  для будь-якого  $t \in \mathbb{R}$ . Покажемо, що диференціальне рівняння  $\dot{x} = x(1-x) - h(t)$  має рівно два  $T$ -періодичних рішення. Диференціальне рівняння можна інтерпретувати як модель зростання популяції в обмеженій середовищі, яка піддається періодичній збиранню врожаю.

**12.** Чи може відображення Пуанкаре для скалярного диференціального рівняння не бути тотожним відображенням на фіксованому компактному інтервалі і в той же час мати в інтервалі нескінченно багато нерухомих точок?



**13. [Крайова задача]**

(а) Доведіть, що крайова задача Діріхле

$$x'' = 1 - x^2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 0$$

має розв'язок. Примітка: використовуйте фазову площину. Доведіть, що перше позитивне час  $T$  таке, що орбіта з початковими умовами  $x(0) = 0$  і  $x'(0) = 0$  досягає осі  $x$ , рівна  $T < 2$  і для початкових умов  $x(0) = 0$  і  $x'(0) = 2/\sqrt{3}$ ,  $T > 2$ . Щоб показати цей факт, використовуючи ідею з підказки до вправи 1, щоб побудувати інтегральне уявлення для  $T$ .

(б) Знайдіть розв'язок крайової задачі методом стрільби і методом Ньютона. Примітка: використовуйте фазову площину з  $x' = y$ . Розглянемо розв'язок  $t \rightarrow (x(t, \eta), y(t, \eta))$  з початковими умовами  $x(0) = 0$  і  $y(0) = \eta$  і скористаємося методом Ньютона для розв'язування рівняння  $y(2, \eta) = 0$ . Примітка. Розв'язки з різним вибором швидкості розглядаються як постріли. Швидкість регулюється до тих пір, поки ціль не буде вражена.

**14. Розглянемо лінійну систему**

$$\dot{x} = ax, \quad \dot{y} = -by$$

де  $a > 0$  і  $b > 0$  у відкритому першому квадраті фазової площини, і нехай  $\phi_t$  позначає його потік.

(а) Доведіть, що  $L := \{(\xi, 1) : \xi > 0\}$  і  $M := \{1, \eta) : \eta > 0\}$  є поперечними перетинами системи.

(б) Знайдіть формулу для карти перетину  $h$  від  $L$  до  $M$ .

(с) Знайдіть формулу для  $T : L \rightarrow R$ , названу картою часу прольоту, яка визначається формулою  $\phi_{T(\xi)}(\xi, 1) = (1, h(\xi))$ .

**15. Обчислити час, необхідний для розв'язування системи**

$$\dot{x} = 1 - xy \quad \dot{y} = 2xy^2 + y^3,$$

з початковою умовою  $(x, y) = (1, 0)$ , щоб прибути в точку  $(x, y) = (2, 0)$ . Зверніть увагу, що ця система має карту перетину  $y \rightarrow h(y)$ , певну з околиці  $(x, y) = (1, 0)$  на лінії, заданої  $x = 1$  для рядка, заданої  $x = 2$ . Обчислити  $h'(0)$ .

**16. Зверніть увагу, що вісь  $x$  інваріантна для системи**

$$\dot{x} = 1 + xy \quad \dot{y} = 2xy^2 + y^3$$

і траєкторія, що починається в точці  $(1, 0)$ , перетинає лінію  $x=3$  в точці  $(3, 0)$ . Таким чином, є карта перетину  $h$  і карта часу прольоту  $T$  із лінії  $x=1$  для прямої  $x=3$  з обома функціями, визначеними на деякому відкритому інтервалі навколо точки  $(1, 0)$  на прямій  $x=1$ . Обчислити  $T'(0)$  і  $h'(0)$ .

**17.** Дано диференціальне рівняння другого порядку.

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

де  $f$  і  $g$  -  $2\pi$ -періодичні функції. Визначте умови на  $f$  і  $g$ , які забезпечують існування періодичного розв'язку.

**18.** Покажіть, що повторна параметризація потоку не змінює його омега-граничні набори. Таким чином, набір меж омега визначається орбітою і її напрямком, а не параметризацією орбіти.

**19.** Припустимо, що  $x_0$  - точка спокою диференціального рівняння  $\dot{x} = f(x)$  з потоком  $\phi_t$ , а  $V$  - функція Ляпунова в точці  $x_0$ . Якщо, крім того, існує така орбіта  $W$  точки спокою  $x_0$ , що для кожної точки  $p \in W \setminus \{x_0\}$ , функція  $V$  не є постійною на прямій орбіті  $p$ , то  $x_0$  асимптотично стійке. Підказка: точка  $x_0$  стійка по Ляпунову. Якщо вона не є асимптотично стійкою, тоді існує точка  $p$  в області визначення  $V$ , чиє граничне омега-множина  $\omega(p)$  також в області визначення  $V$ , таке що  $\omega(p) \neq \{x_0\}$ . Покажіть, що  $V$  постійна на цьому граничному наборі омеги (константа - це найбільша нижня межа діапазону  $V$  на прямій траєкторії через точку  $p$ ).

**20.** Ми припустили, що всі потоки плавні. Чи потрібна ця гіпотеза для всіх теорем цього розділу про  $\omega$ -граничні множини?

**21.** Наведіть пряме доведення того, що точка  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  на одиничному кола є  $\omega$ -граничною точкою точки для потоку системи (2.21).

**22.** Обговоріть фазовий портрет системи (2.7) для  $|\mu| < 1$ .

**23.** (а) Показати, що множина, що містить "граничні цикли", визначені як ізольовані періодичні траєкторії, є належною підмножиною набору граничних циклів. Крім того, якщо диференціальне рівняння є дійсною аналітичною площинною автономною системою, то ці два поняття однакові.

Підказка: уявіть кільцеву область, яка повністю складається з періодичних орбіт. Межа кільця складається з двох періодичних траєкторій, які можуть бути граничними циклами, але жоден з них не є ізольованим. Щоб довести, що ізольована періодична орбіта  $\Gamma$  є граничним циклом, покажіть, що кожна ділянка потоку в точці  $P \in \Gamma$  має підмножину, яка є перерізом Пуанкаре в  $p$ . Для аналітичної системи знову розгляньте переріз Пуанкаре та пов'язане з ним відображення Пуанкаре  $P$ . Нулі аналітичної функції зсуву  $\xi \rightarrow P(\xi) - \xi$  відповідають періодичним орбітам.

(b) Покажіть, що поліноміальна (отже, реальна аналітична) система в  $R^3$ , задана формулою

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{z} &= 1 - x^2 - y^2\end{aligned}$$

має граничні цикли, які не є ізольованими.

(c) Визначте довгострокову поведінку цієї системи. Зокрема, покажіть це

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z(0) - \frac{1}{2} 1n(x^2(0) + y^2(0)).$$

**24.** Покажіть, що система

$$\dot{x} = ax - y + xy^2, \quad \dot{y} = x + ay + y^3$$

має нестабільний граничний цикл для  $a < 0$  і не має обмежувального циклу для  $a > 0$ .

Підказка: перейдіть до полярних координат.

**25.** Покажіть, що система

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1},$$

$$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

має нескінченну кількість граничних циклів на одиничному диску.

**26.** Доведіть: аналітична плоска система не може мати нескінченно багато граничних циклів, які накопичуються на періодичній траєкторії.

Примітка: Ця (легка) вправа є особливим випадком глибокого результату: аналітична плоска система не може мати нескінченно багато обмежених циклів у компактній підмножині площини; і поліноміальна система не може мати нескінченно багато граничних циклів.

**27.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = -ax(x^2 + y^2)^{-1/2}, \quad \dot{y} = -ay(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

де  $a$  і  $b$  - додатні параметри. Модель являє собою політ снаряда зі швидкістю  $a$  і прямуванням до початку координат, який переміщується з постійною силою  $b$ . Визначте умови щодо параметрів, які забезпечують розв'язання, починаючи з точки  $(x, y) = (p, 0)$ , для  $p > 0$ , досягають початку координат.

Підказка: перейдіть до полярних координат та вивчіть фазовий портрет диференціального рівняння на циліндрі. Поясніть свій результат геометрично. Диференціальне рівняння не визначене у початку координат.

**28.** Припустимо, що  $\gamma$  - це періодична траєкторія гладкого потоку, визначена на  $R^2$ . Використовуйте лему Зорна, щоб довести, що  $\gamma$  оточує точку спокою потоку. Тобто, обмежена складова площини з видаленою періодичною траєкторією містить точку спокою.

**29.** Використовуючи вправу 28, доведіть теорему фіксованої точки Брауера для замкнутого одиничного диска  $D$  в  $R^2$ .

Підказка: Спочатку доведіть результат для гладкої функції  $f: D \rightarrow D$ , розглянувши векторне поле  $f(x) - x$ , а потім використовуйте такий результат: неперервне перетворення  $D$  є рівномірна границя плавних перетворень.

**30.** Припустимо, що замкнута куля в  $R^n$  позитивно інваріантна для потоку автономного диференціального рівняння на  $R^n$ . Доведіть, що куля містить точку спокою або періодичну орбіту.

Підказка: застосуйте теорему про фіксовану точку Брауера до карти потоку час-один. Поясніть відмінності між цим результатом і теоремою Пуанкаре-Бендіксона.

**31.** Побудуйте приклад (автономного) диференціального рівняння, визначеного на всіх  $R^3$ , що має (ізолюваний) граничний цикл, але не має точок спокою.

**32.** Доведіть, що непорожній  $\omega$ -граничний набір траєкторії градієнтної системи повністю складається з точок спокою.

**33.** Чи ізолюваний граничний цикл від усіх інших періодичних траєкторій?

Підказка: розгляньте плоскі векторні поля класу  $C^1$  і поля класу  $C^\omega$  - дійсні аналітичні векторні поля. Вивчіть карту Пуанкаре на пов'язаному поперечному перерізі.

**34.** Доведіть: якщо  $\delta > 0$ , то початок координат є глобальним атрактором для системи

$$\dot{u} = (u-v)^3 - \delta u, \quad \dot{v} = (u-v)^3 - \delta v.$$

Похідна також є глобальним атрактором орбіт у першому квадранті системи

$$\dot{u} = uv(u-v)(u+1) - \delta u, \quad \dot{v} = vu(v-u)(v+1) - \delta v.$$

**35.** [Критерій Дюлака]

Використовуючи критерій Дюлака, доведіть результат, отриманий Н. Баугінім: система

$$\dot{x} = x(a + bx + cy), \quad \dot{y} = y(\alpha + \beta x + \gamma y)$$

не має обмежених циклів.

Підказка: покажіть, що жодна періодична траєкторія не перетинає осі координат. Зведіть проблему до показу, що в першому квадранті немає обмежених циклів.

Знайдіть функцію Дюлака у формі  $x^r y^s$ . Після деякої алгебри проблема зводиться до показу, що певне двопараметричне сімейство ліній завжди має члена, який не проходить через (відкритий) перший квадрант.

**36.** (а) Припустимо, що система  $\dot{x} = f(x, y)$ ,  $\dot{y} = g(x, y)$  має періодичну орбіту  $\Gamma$  з періодами  $T$ , а  $B$  - є додатною дійснозначною функцією, визначеною на деяка відкритий окіл  $\Gamma$  (як у критерії Дюлака). Доведіть, що  $\Gamma$  є періодичною траєкторією системи  $\dot{x} = B(x, y)f(x, y)$ ,  $\dot{y} = B(x, y)g(x, y)$  з періодом

$$\tau = \int_0^T \frac{1}{B(x(t), y(t))} ds,$$

де  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  - періодичний розв'язок вихідної системи, орбіта якої  $\Gamma$ .

(б) Як змінюється період граничного циклу системи (2.26), якщо її векторне поле помножити на  $(1 + x^2 + y^2)^\alpha$ ?

Підказка: розв'язок задачі Коші

$$\dot{\rho} = B((x(\rho), y(\rho))), \quad \rho(0) = 0$$

задовольняє тотожність  $\rho(t + \tau) = \rho(t) + T$ .

**37.** [Унікальність граничних циклів] (а) Доведіть наступне твердження: Якщо розбіжність плоского векторного поля має фіксований знак у кільцевій області  $\Omega$  площини, то відповідне диференціальне рівняння має не більше однієї періодичної орбіти в  $\Omega$ .

Підказка: Використовуйте теорему Гріна.

(б) Згадайте критерій Дюлака та зауважте, що якщо розбіжність векторного поля площини  $F$  не є фіксованим знаком у  $\Omega$ , то можна знайти невід'ємну функцію  $B: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  таке, що розбіжність  $BF$  має фіксований знак у  $\Omega$ . Наприклад, розглянемо осцилятор Ван дер Поля,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \lambda(1 - x^2)y$$

і функція Дюлака  $B(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{-1/2}$ . Покажіть, що система Ван дер Поля має не більше одного граничного циклу на площині. (Чудова функція Дюлака  $B$  була відкрита Л. А. Черкасом.)

(с) Чи можна довести, що осцилятор Ван дер Поля має принаймні один граничний цикл у площині?

Підказка: перейдіть до нових координат за допомогою перетворення Лієнарда

$$u = x, \quad v = y - \lambda \left( x - \frac{1}{3} x^3 \right)$$

та отримайте систему Лієнарда

$$\dot{u} = v + \lambda \left( u - \frac{1}{3} u^3 \right), \quad \dot{v} = -u$$

**38. (а)** Доведіть, що система

$$\dot{x} = x - y - x^3, \quad \dot{y} = x + y - y^3$$

має унікальний глобально приваблюючий граничний цикл на площині проколу.

**(б)** Знайдіть усі точки рівноваги системи

$$\dot{x} = x - y - x^n, \quad \dot{y} = x + y - y^n$$

де  $n$  - додатне непарне ціле число і дослідіть їх на стійкість.

**(в)** Доведіть, що система має унікальний стабільний граничний цикл.

**(д)** Якою є обмежувальна форма граничного циклу при  $n \rightarrow \infty$ ?

**39.** Показати, що існує унікальний обмежувальний цикл для системи (2.7) з  $|\mu| > 1$  шляхом доведення існування нерухомої точки для карти Пуанкаре та доведення, що кожен граничний цикл стабільний.

Підказка: пригадайте аналіз системи (2.2) та розгляньте  $dv/d\theta$ .

**40.** Чи може система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x) - \alpha f'(x)$$

де  $f$  - гладка функція,  $\alpha$  - параметр, мають граничний цикл?

Підказка: розгляньте перетворення Лієнара.

**41.** Намалюйте фазовий портрет системи

$$\dot{x} = y + 2x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = -x$$

**42. (а)** Доведіть, що початок координат є центром системи  $\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$ .

**(б)** Покажіть, що ця система має необмежені траєкторії.

**(в)** Опишіть межу між обмеженою та необмеженою траєкторіями?

**43.** Накресліть фазовий портрет для системи  $\ddot{x} = x^2 - x^3$ . Чи є періодичним розв'язок з початковими умовами  $x(0) = \frac{1}{2}$  та  $\dot{x}(0) = 0$ ?

**44.** Намалюйте фазовий портрет гамільтонової системи  $\ddot{x} + x - x^2 = 0$ . Дайте явну формулу для гамільтоніана та використовуйте її для обґрунтування особливостей фазового портрета.

**45.** Нехай  $t \rightarrow x(t)$  позначає розв'язання задачі на початкове значення

$$\ddot{x} + \dot{x} + x + x^3 = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Визначити  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$

**46.** Покажіть, що система

$$\dot{x} = x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x, \quad \dot{y} = x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y$$

має унікальний граничний цикл.

**47.** Знайдіть точки спокою у фазовій площині диференціального рівняння  $\ddot{x} + (\dot{x}^2 + x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  та визначте їх стійкість. Також покажіть, що система має унікальний стабільний граничний цикл.

**48.** Визначте  $\omega$ -граничну множину розв'язку системи

$$\dot{x} = 1 - x + y^3, \quad \dot{y} = y(1 - x + y)$$

з початковою умовою  $x(0) = 10, y(0) = 0$

**49.** Покажіть, що система

$$\dot{x} = -y + xy, \quad \dot{y} = x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

має періодичні розв'язки, але без обмежень циклів.

**50.** Розглянемо рівняння Ван дер Поля

$$\ddot{x} + (x^2 - \varepsilon)\dot{x} + x = 0$$

де  $\varepsilon$  реальний параметр. Як змінюється стабільність тривіального розв'язку  $\varepsilon$ . Покажіть, що рівняння Ван дер Поля має унікальний стабільний граничний цикл для  $\varepsilon = 1$ . Що ви очікуєте, що станеться з цим граничним циклом при скороченні до  $\varepsilon = 0$ . Що станеться для  $\varepsilon < 0$ ?

**51.** Знайдіть явний ненульовий розв'язок диференціального рівняння

$$t^2 x^2 \ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Визначте нові змінні  $u = 2(3tx^2)^{-1/2}$ ,  $v = -4\dot{x}(3x^3)^{-1/2}$  і покажіть, що



$$\frac{dv}{du} = \frac{3v(v-u^2)}{2u(v-u)}.$$

Намалюйте фазовий портрет відповідної системи першого порядку

$$\dot{u} = 2u(v-u), \quad \dot{v} = 3v(v-u^2)$$

**52.** [Індекс Пуанкаре] Нехай  $C$  - проста замкнута крива, що не проходить через точку спокою векторного поля  $X$  на площині з компонентами  $(f, g)$ . Індекс Пуанкаре  $X$  щодо  $C$

$$I(X, C) = \frac{1}{2\pi} \int_C \arctan\left(\frac{g}{f}\right)$$

це загальна зміна кута  $(f(x, y), g(x, y))$  щодо (додатної) осі  $x$ , коли  $(x, y)$  перетинає  $C$  точно один раз проти годинникової стрілки.

(a) Доведіть: Індекс є цілим числом.

(b) Довести: індекс не змінюється з деформацією  $C$  (якщо деформована крива не проходить через точку спокою).

(c) Доведіть: якщо  $C$  гладкий, а  $T$  - безперервний вибір дотичного вектора уздовж цієї кривої, то  $I(T, C) = 1$ . Зокрема, індекс а векторне поле щодо однієї з його замкнутих траєкторій є одиницею.

(d) Індекс точки по відношенню до  $X$  визначається як індекс  $X$  по відношенню до допустимої кривої  $C$ , що оточує цю точку, і жодної іншої точки спокою  $X$ . Доведіть: індекс звичайної точки (точки, яка не є точкою спокою) дорівнює нулю.

(e) Доведіть: Періодична траєкторія оточує щонайменше одну точку спокою.

**53.** Константа  $\gamma$  у (2.9) зазвичай задається у вигляді

$$\gamma := \frac{c^2 b^2}{G_0 M}$$

де  $b := r^2 d\theta/ds$  і  $s$  - належний час вздовж орбіти Меркурія. Покажіть, що ця формула узгоджується з визначенням  $\gamma$  згідно (2.9).

Підказка:

$$\frac{ds}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

тобто належний час - це довжина дуги вздовж орбіти щодо метрики просторового часу. Скористайтеся формулою кутового моменту. Наблизьте швидкість  $v$  вздовж орбіти на  $2\pi/T$ , де  $T$  - період орбітальної, і використовуйте третій закон Кеплера.

**54.** Покажіть, що фазовий портрет системи (2.10) має рівно дві точки спокою: сідло та раковину; наблизити положення цих точок спокою з степенями в  $\epsilon$ ; і показати, що орбіта Меркурія відповідає періодичній орбіті. Зауважте, що для цієї фізичної проблеми недостатньо довести результат для "достатньо малого епсилону". Швидше, значення  $\epsilon = \gamma\delta$  має бути використано! Підказка: початкові умови для орбіти Меркурія можна наблизити за фізичними даними. Набори рівнів енергії, що відповідають диференціальному рівнянню (2.10), є інваріантними різноманіттями у фазовій площині. Фактично, один із них утворює межу періоду.

**55.** Для збуреного гармонічного осцилятора  $\ddot{y} + y = \epsilon u$  природна частота "виправляється" у першому порядку в параметрі збурень на  $\omega(\epsilon) = 1 - \epsilon$ . Яка корекція першого порядку, якщо збурення  $\epsilon u^2$  або  $\epsilon u^3$ ?