Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Застосування диференціально-різницевих рівнянь до моделювання процесів природознавства

Виконала: студентка ІІ курсу магістратури
групи М-М-21
спеціальності: 014 Середня освіта
(Математика)
Лобода Анна Петрівна

Керівник: доктор технічних наук, професор
Бичков О.С.

Рецензент: доктор технічних наук,
професор, завідувач кафедри прикладної
математики НУВГП
Матринюк П.М.

Рівне – 2021 року

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Сучасна теорія диференціальних рівнянь відіграє важливу роль серед інших математичних дисциплін. Магістерська робота присвячена диференціально-різницевим рівнянням, які ще називають рівняннями з аргументом, що відхиляється. Такі рівняння часто виникають при вивченні реальних процесів, пов'язаних із проблемами автоматичного регулювання, кібернетики та суміжних областях, а також у економіці та біології.

Диференціально-різницевим називається рівняння, що містить функцію $y_{h_1,\dots,h_k}(t)$ і деякі з її похідних по t та різниць по h. Вивчення диференціально-різницевих рівнянь розпочав ще Й. Бернуллі у 1728 році. З тих часів було написано сотні робіт, в яких розвивалась теорія цих рівнянь. Математики XVIII століття зіткнулися диференціально-різницевими рівняннями, коли намагались поширити свої знання про механіку скінченних систем на механіку суцільних середовищ, для вивчення якої в подальшому стали застосовуватись рівняння з частинними похідними.

У наш час, до того ж самого приходять з іншого боку, оскільки вивчення диференціальних рівнянь з частинними похідними веде до вивчення різницевих та диференціально-різницевих рівнянь. По-перше, сучасні обчислювальні машини оперують різницями, а не похідними. По-друге, багато складних фізичних задач, що описуються рівняннями з частинними похідними, можна апроксимувати більш простими задачами, що описуються диференціально-різницевими рівняннями.

Метою даної роботи є детально розглянути тригонометричні, гіперболічні функції та їх застосування до знаходження розв'язку звичайних диференціальних рівнянь.

З даною метою поставлені наступні **завдання** дослідження:

- здійснити огляд наявної літератури з теми;

- систематизувати знання про диференціально-різницеві рівняння та їх зв'язок із диференціальними та різницевими рівняннями;
- з'ясувати суть характеристичних рівнянь та їх асимптотичних коренів;
- вивчити методику застосування інтегральних перетворень до знаходження розв'язків диференціально-різницевих рівнянь;
- розглянути конкретні приклади застосування диференціально-різницевих рівнянь до моделювання реальних процесів.

Об'єкт дослідження: диференціально-різницеві рівняння.

Предмет дослідження: застосування диференціально-різницевих рівнянь до математичного моделювання реальних процесів.

Розділ 1. Диференціально-різницеві рівняння

1.1. Диференціальні рівняння

В загальному випадку звичайним диференціальним рівнянням називається співвідношення, що зв'язує між собою незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або її диференціали).

Якщо невідома функція залежить лише від однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називають звичайним.

Порядком диференціального рівняння називають найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить у рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння порядку n має наступний вигляд

$$f\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Розв’язком або інтегралом рівняння (1.1) називається будь яка диференційована n разів функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє дане рівняння, тобто така, яка після підстановки у рівняння перетворює його у тотожність.

Зокрема, для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яке має вигляд

$$f\left(x, y, y'\right) = 0 \tag{1.2}$$

тотожністю відносно x буде

$$f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x)\right) = 0\,. \tag{1.3}$$

Крива $y = \varphi(x)$, що визначається розв'язком рівняння (1.1) або (1.2) називається інтегральною кривою даного диференціального рівняння.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.2) називають співвідношення виду

$$\varphi(x, y, c) = 0 \text{ або } \varphi(x, y) = c \tag{1.4}$$

які включають одну довільну сталу величину і володіють тією властивістю, що розв'язуючи їх відносно y при довільних частинних значеннях сталої, отримують функції виду $y = \varphi(x)$, які є розв'язками рівняння (1.2). Рівняння (1.4) визначають сім'ю інтегральних кривих рівняння (1.2) [1].

Частинним розв'язком диференціального рівняння (1.2) називають такий розв'язок, який отримується із загального розв'язку (1.4) при деякому частинному значенні довільної сталої C. Довільна стала C, в даному випадку, визначається з додаткових умов, які називають початковими або умовами Коші. Сама задача з початковими даними має назву задачі Коші.

Задача з початковими умовами формулюється наступним чином: потрібно знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1.2) такий, щоб він приймав задане значення y_0 при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$, тобто, щоб виконувалась рівність $y_0 = \varphi(x_0)$.

З геометричної точки зору, задача з початковими умовами зводиться до того, щоб із сім'ї інтегральних кривих (1.4) виділити єдину ту, що проходить через точку (x_0, y_0) площини.

Таким чином, задача на знаходження розв'язку рівняння (1.2), що задовольняє початковим умовам $y = y_0$, при $x = x_0$ називається задачею Коші.

Особливим розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який не може бути отриманий із загального розв'язку ні при одному значенні довільної сталої, включаючи $\pm\infty$ [6].

Рівняння виду:

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy, \tag{1.5}$$

де коефіцієнти при диференціалах розпадаються на множники, які залежать тільки від x і тільки від у називаються диференціальними рівняннями, що дозволяють відокремлення змінних.

Відокремлення змінних здійснюється шляхом ділення на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ що приводить рівняння (1.5) до вигляду:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy.$$

Зауважимо, що ділення на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ може привести до втрати частинних розв'язків, які перетворюють в нуль добуток $\psi_1(y)\varphi_2(x)$, а якщо функції $\psi_1(y)$ і

$\varphi_2(x)$ можуть бути розривними, тоді можлива поява особливих розв'язків , які перетворюють в нуль добуток $\psi_1(y)\varphi_2(x)$.

Загальний інтеграл рівняння (1.1) має вигляд:

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = \text{C}.$$

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння лінійне відносно невідомої функції та її похідної. Лінійне рівняння має вигляд

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (1.6)$$

Якщо $f(x)=0$ то рівняння (1.6) називається лінійним однорідним. В лінійному однорідному рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0\,,$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Інтегруючи, знаходять

$$y = ce^{-\int p(x)dx}\ ,\ c \neq 0 \qquad (1.7)$$

При діленні на y ми загубили розв'язок $y=0$, однак його можна включити в загальний розв'язок (1.7), якщо вважати, що стала C може приймати і значення 0.

Для інтегрування неоднорідного лінійного рівняння можна застосувати метод варіації сталої.

При застосуванні даного методу знайдемо спочатку загальний інтеграл (1.7) відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.6) шукаємо за допомогою підстановки

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (1.8)$$

Підстановка (1.8) зводить (1.6) до рівняння з відокремлюваними змінними. Багато диференціальних рівнянь шляхом заміни змінних можуть бути зведені до лінійних. Наприклад, рівняння Бернуллі, яке має вигляд

$$y' + p(x)y = f(x)y^n \qquad n \neq 0, n \neq 1 \qquad (1.9)$$

Заміною $y^{1-n,} = 2$ рівняння (1.9) зводиться до лінійного рівняння.

Рівняння Ріккаті

$$y' + p(x)y + g(x)y^2 = f(x) \tag{1.10}$$

в загальному вигляді не інтегрується в квадратурах, але може бути заміною змінних перетворене у рівняння Бернуллі, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1(x)$ цього рівняння.

Рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.11}$$

у якому M і N - однорідні функції одного степеню називається однорідним рівнянням. (Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією степеню m, якщо при всіх t виконується тотожність $f(x, ty) = t^m f(x, y)$. Якщо ця тотожність виконується тільки при $t > 0$, то функція $f(x, y)$ називається додатною однорідною.*)* Відповідне рівняння (1.11) називається додатним однорідним. Дане рівняння завжди можна звести до вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однорідне рівняння зводиться до рівняння із відокремлюваними змінними за допомогою заміни шуканої функції у по формулі

$$y = zx \tag{1.12}$$

де z - нова шукана функція.

У деяких випадках доцільно замість підстановки $y = zx$ застосовувати підстановку $x = zy$.

Окремі види рівняння за допомогою відповідної підстановки зводяться до однорідних рівнянь. Наприклад рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right) \tag{1.13}$$

якщо $\left|\frac{a_1b_1}{ab}\right| \neq 0$

за допомогою підстановки

$$\begin{cases} x = \varepsilon + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases} \tag{1.14}$$

де ε і η - нові змінні, а α і β деякі сталі числа, які визначаються із системи

$$\begin{cases} a_1 a + b_1 b + c_1 = 0 \\ aa + bb + c = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

зводяться до однорідного рівняння.

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon} = f(\frac{a_1\varepsilon + b_1\eta}{a\varepsilon + b\eta}).$$

Якщо $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ ab \end{vmatrix} = 0$, то (3.3) приймає вид $y' = f\left(\frac{k(a_1x + b_1y + c_1)}{ax + by + c}\right) = f_1(ax + by).$

У випадку коли в рівнянні

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.16}$$

ліва частина є повний диференціал деякої функції $U(x, y)$, тоді рівняння (1.16) називається рівнянням в повних диференціалах. Дане рівняння можна переписати у вигляді $dU(x, y) = 0$. Загальний інтеграл має вигляд $U(x, y) = C$. Для того, щоб ліва частина рівняння (1.16) була повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, як відомо, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{dM(x, y)}{dy} = \frac{dN(x, y)}{dx} \tag{1.17}$$

Якщо умова (1.17) виконується, тоді рівняння (1.16) легко інтегруються і загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = c \tag{1.18}$$

або

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = c \tag{1.19}$$

Дійсно, в даному випадку $M(x, y) = \frac{dU(x, y)}{dx}, N(x, y) = \frac{dU(x, y)}{dy}$. Тоді, як відомо із курсу математичного аналізу, для знаходження U(*x,y)* по її повному диференціалу потрібно знайти криволінійний інтеграл II типу від

$M(x,y)dx + N(x,y)dy$ між деякою фіксованою точкою $(x_0 y_0)$ і точкою із змінними координатами (x,y) по довільному шляху інтегрування

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)} M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{1.20}$$

Якщо рівняння (1.16) не є рівнянням в повних диференціалах, але існує функція $\mu = \mu(x,y)$ така, що після множення на μ лівої та правої частин рівняння (1.16) отримаємо рівняння

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0 \tag{1.21}$$

в повних диференціалах, тобто

$$\mu(Mdx + Ndx) = d\varphi \tag{1.22}$$

тоді ця функція $\mu(x,y)$ називається інтегруючим множником, а функція $\varphi(x,y)$ відповідним йому інтегралом рівняння (1.16).

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.23}$$

або, якщо воно є розв'язаним відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{1.24}$$

Відносно функції f вважаємо, що вона визначена, однозначна і неперервна в деякій області зміни своїх аргументів.

Якщо права частина рівняння (1.24) є лінійною функцією відносно аргументів $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$,тоді це рівняння називають лінійним [3].

Функція $y = \varphi(x)$ називається розв'язком рівняння (1.23) в інтервалі (a,b), якщо вона перетворює рівняння (1.23) у тотожність, справедливу для всіх значень x із цього інтервалу. Вважається, що функція $\varphi(x)$ має в (a,b) неперервні похідні до порядку n включно і що точка $\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\right]$ належить області визначення функції f, для всіх x з (a,b). Іноді розв'язок шукають у неявному вигляді: $\varphi(x,y) = 0$ або в параметричній формі: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Графік розв'язку називається інтегральною кривою.

Задача знаходження розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початковим умовам: $y = y_0$, $y' = y'_0, ..., y^{(n-1)=y^{(n-1)}}{}_0$, при $x = x_0$ де $x_0, y_0, y'_0, ..., y^{(n-1)}{}_0$ - задані числа (початкові дані), називається задачею Коші для звичайного диференціального рівняння порядку n (1.23) Для того, щоб гарантувати існування та єдиність розв'язку задачі Коші достатньо, згідно теореми Пікара, щоб права частина рівняння (1.24) була неперервною функцією в околі точки $(x_0, y_0, y'_0, ..., y^{(n-1)}{}_0)$ і задовольняла умовам Ліпшица відносно $y, y', ..., y^{(n-1)}$ в околі цієї точки [2].

Разом із задачею Коші для рівнянь вищих порядків велике значення мають крайові задачі, в яких умови, що накладаються на шуканий розв'язок, задаються не в одній точці, а на кінцях деякого інтервалу $[a, b]$. Задачею є знаходження розв'язку, визначеного в середині даного інтервалу. Ці умови називають крайовими умовами.

Функція

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n) \tag{1.25}$$

визначена в деякій області визначення змінних $x, c_1, c_2, ..., c_n$ і яка має неперервні частинні похідні по x до порядку n включно, називається загальним розв'язком рівняння (1.24) в області D зміни змінних $y, y', ..., y^{(n-1)}$ в кожній точці якої має місце існування та єдиність розв’язку задачі Коші, якщо:

1) система рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n) \\ y' = \varphi'(x, c_1, c_2, ..., c_n) \\ .... \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, c_1, c_2, ..., c_n) \end{array}\right\} \tag{1.26}$$

розв’язна в області D відносно довільних сталих $c_1, c_2, ..., c_n$ так що

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ c_2 = \psi_2(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ .... \\ c_n = \psi_n(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \end{array}\right\} \tag{1.27}$$

2) Функція (1.25) є розв'язком рівняння (1.24) при всіх значеннях довільних сталих, що визначаються формулами (1.26), коли точка $(x, y, y',..., y^{(n-1)})$ пробігає область D.

Для знаходження розв'язку (1.25) із початковими даними $(x_0, y_0, y'_0,..., y^{(n-1)}{}_0)$ в області D за допомогою формули загального розв'язку (1.25) підставляють в систему (1.26) замість $x, y, y',..., y^{(n-1)}$ відповідні числа $x_0, y_0, y'_0,..., y^{(n-1)}{}_0$. Отриману систему:

$$\left.\begin{aligned} & y_0 = \varphi(x_0, c_1, c_2,..., c_n) \\ & y'_0 = \varphi'(x_0, c_1, c_2,..., c_n) \\ & .... \\ & y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2,..., c_n) \end{aligned}\right\}$$

розв'язують відносно довільних сталих $c_1, c_2,..., c_n$, знаходять: $c_1 = c_1^{(0)}$, $c_2 = c_2^{(0)}$, $c_n = c_n^{(0)}$. Підставляючи знайдене значення довільних сталих в формулу загального розв'язку (1.25) отримують шуканий розв'язок: $y = \varphi\left(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)},..., c_n^{(0)}\right)$. Цей розв'язок буде єдиним. Загальний інтеграл у неявній формі має вигляд $\varphi(x, y, c_1, c_2,..., c_n) = 0$.

Якщо функція (1.25) задана в параметричній формі:

$$\left.\begin{aligned} & x = \varphi(t, c_1, c_2,...., c_n), \\ & y = \psi(t, c_1, c_2,..., c_n) \end{aligned}\right\}$$

то даний розв'язок називають загальним розв'язком рівняння (1.24) у параметричній формі. Якщо (1.25) є загальним розв'язком рівняння (1.24) в області D тоді всякий розв'язок, що можна отримати із формули (1.25) при конкретних (допустимих) числових значеннях довільних сталих $c_1, c_2,..., c_n$, називають частинним розв'язком. При цьому не виключається значення $+\infty$.

Якщо в кожній точці розв'язку порушуються умови єдиності розв'язку задачі Коші, то такий розв'язок називають особливим.

В багатьох випадках, інтегруючи рівняння (1.24) отримаємо співвідношення виду:

$$\varphi\left(x, y, y',..., y^{(n-k)}, c_1,..., c_n\right) = 0 \tag{1.28}$$

Співвідношення (1.26) називають проміжним інтегралом k-го порядку рівняння (1.24). Проміжний інтеграл виду $\varphi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, c_1) = 0$ називають першим інтегралом. Знаючи k перших інтегралів, можна понизити порядок рівняння на k одиниць. Знаючи n незалежних перших інтегралів можна шляхом виключення всіх похідних отримати загальний інтеграл. Рівняння n-го порядку в багатьох випадках вдається проінтегрувати в квадратурах шляхом зведення його до рівняння більш низького порядку або за допомогою знаходження проміжного інтеграла. Пониження порядку стає можливим внаслідок того, що дане рівняння є неповним, або змінні $y, y', ..., y^n$, або $x, y, y', ..., y^n$ містяться в ньому спеціальним чином [10].

Лінійним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)_1 y' + p_n(x)y = f(x) \tag{1.29}$$

Якщо в рівнянні (1.27) права частина $f(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (1.27) є в цьому випадку лінійним однорідним рівнянням.

Відносно коефіцієнтів $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ та вільного члена $f(x)$, вважаємо, що вони визначені та неперервні в інтервалі (a,b). Тоді задача Коші для рівняння (1.27) завжди має єдиний розв'язок при довільних початкових умовах $(x \in (a,b))$.

Інтегрування неоднорідного рівняння (1.27) зводиться на першому кроці до інтегрування відповідного однорідного рівняння:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)_1 y' + p_n(x)y = 0 \tag{1.30}$$

Однорідне лінійне рівняння завжди має нульовий розв'язок $y = 0$, який задовольняє нульовим початковим умовам. Для побудови загального розв'язку однорідного рівняння достатньо знати n- лінійно-незалежних в інтервалі (a,b) часткових розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$, тобто таких для яких лінійна комбінація $a_1, y_1 + a_2 y_2 + ... + a_n y_n = 0(a < x < b)$, де a_1, a_2, a_n - сталі, може виконуватись тільки в очевидному випадку: $a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_n = 0.$ Така система розв'язків називається фундаментальною системою розв'язків. Для того, щоб система розв'язків

$y_1, y_2,..., y_n$ була фундаментальною, необхідно і достатньо, щоб її визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1, y_2,..., y_n \\ y_1', y_2',..., y_n' \\ .... \\ y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)},...y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (1.31)$$

був відмінним від нуля хоча, б в одній точці інтервалу (a,b). При вище зроблених обмеженнях відносно неперервності коефіцієнтів однорідне лінійне рівняння (1.28) має фундаментальну систему розв'язків і навіть нескінчену кількість фундаментальних систем розв'язку. Якщо знайдена фундаментальна система розв'язків $y_1, y_2,..., y_n$ однорідного рівняння (1.28), тоді формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \qquad (1.32)$$

де $C_1, C_2,..., C_n$ - довільні сталі, дає загальний розв'язок цього рівняння в області

$$a < x < b, |y| < +\infty. |y'| < +\infty,..., \left|y^{(n-1)}\right| < +\infty .$$

Побудувати фундаментальну систему розв'язків в елементарних функціях або в квадратурах від елементарних функцій вдається завжди для рівнянь з постійними коефіцієнтами і для рівнянь, що зводяться до них. Для рівнянь із змінними коефіцієнтами фундаментальна система розв'язків (за деякими виключеннями) складається із функцій більш складної конструкції [4].

1.2. **Різницеві рівняння**

Лінійне рівняння відносно сіткової функції $y_i = y(i)(i = 0,\pm 1 \pm 2,...)$

$$a_0(i)y(i) + a_1(i)y(i+1) + ... + a_m(i)y(i+m) = f(i), \qquad (1.33)$$

де $a_k(i)(k = 0,1,..., m)$, $f(i)$ — задані сіткові функції, $a_0(i) \neq 0$, $a_m(i) \neq 0$ називається лінійним різницевим рівнянням m-го порядку. Воно містить $m+1$ значень функції $y(i)$.

Користуючись формулами для різниць $\Delta y_i, \Delta^2 y_i,..., \Delta^{m-1} y_i$ можна виразити значення $y_i + 1 \cdot y_i + 2 \cdot ... \cdot y_m + 1$ через $y(i)$ і вказані різниці:

$y_{i+1} = y_1 + +\Delta y_i \cdot y_{i+2} = \Delta^2 y_i + 2y_{i+1} = \Delta^2 y_i + 2\Delta y_i + y_i$ і так далі. В результаті з (1.33) отримаємо новий запис різницевого рівняння m-го порядку:

$$a_0(i)y_i + a_1(i)\Delta y_i + \ldots + a_m(i)\Delta^m y_i = f(i),\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.34}$$

(чим і пояснюється термін «різницеве рівняння»). Якщо коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ не залежать від $i, a_0 \neq 0$ і $a_m \neq 0$, то (1.33) називається лінійним різницевим рівнянням m-го порядку з сталими коефіцієнтами.

При $m = 1$ з (1.33) отримуємо різницеве рівняння першого порядку

$$a_0(i)y_i + a_1(i)y_{i+1} = f(i), \quad a_0(i) \neq 0,\ a_1(i) \neq 0. \tag{1.35}$$

при $m = 2$ — різницеве рівняння другого порядку

$$a_0(i)y_i + a_1(i)y_{i+1} + a_2(i)y_{i+2} = f(i),\ a_0(i) \neq 0,\ a_2(i) \neq 0$$

Розглянемо різницеве рівняння першого порядку (1.35). Підставляючи $y_{i+1} = y_1 + \Delta y_i$, отримаємо

$$\bar{a}_0(i)y_i + a_1(i)\Delta y_i = f(i), \quad \bar{a}_0 = a_0 + a_1.$$

Простими прикладами різницевих рівнянь першого порядку є рівняння для членів арифметичної прогресії $y_{i+1} = y_1 + d$ і геометричної прогресії $y_{i+1} = dy_i$

Для зручності, рівняння (1.35) визначимо у вигляді

$$y_{i+1} = q_i y_i + \varphi_i \tag{1.36}$$

де $q_i = -a_0(i)/a_1(i)$, $\varphi_i = f(i)/a_1(i)$. Звідси видно, що розв'язок y_i визначено однозначно при $i > i_0$, якщо задано значення $y(t_0)$. Нехай при $i = 0$ задано $y_0 = y(0)$. Тоді можна визначити $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_i \cdot \ldots$ Послідовно виключаючи $y_i \cdot y_i - 1 \cdot \ldots \cdot y_1$ за формулою (1.4), отримаємо

$$y_{i+1} = q_i q_{i-1} \ldots q_0 y_0 + \varphi_i + q_i \varphi_{i-1} + q_i q_{i-1} \varphi_{i-2} + \ldots + q_i q_{i-1} \ldots q_1 \varphi_0$$

Або

$$y_{i+1} = \left(\prod_{k=0}^{i} q_k\right) y_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\prod_{3=k+1}^{i} q_3\right) \varphi_k + \varphi_i \tag{1.37}$$

Для рівняння з сталими коефіцієнтом $q_i = q$, звідки отримуємо

$$y_{i+1} = q^{i+1} y_0 + \sum_{k=0}^{i} q^{i-k} \varphi_k, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.38}$$

тобто розв'язок різницевого рівняння (1.4) з сталими коефіцієнтами [17].

Нехай множина $N_0 = 0,1,2,3,...$ і R — множина всіх дійсних чисел, а N — множина всіх натуральних чисел.

Лінійним різницевим рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y_{k+1} + a_k y_k = f_k \tag{1.39}$$

де a_k — задана функція $k \in N_0$, причому $a_k \neq 0$ для всіх $k \in N_0$, f_k - задана функція $k \in N_0$ і y_k — шукана функція $k \in N_0$.

Вважатимемо надалі, що всі значення функцій a_k, f_k, y_k належать множині R.

Умова $a_k \neq 0$ для всіх $k \in N_0$ є важливою у визначенні лінійного різницевого рівняння першого порядку. Наприклад, лінійне різницеве рівняння виду

$$y_{k+1} = f_k$$

не є рівнянням першого порядку, оскільки заміна $k+1=n$ дає рівняння

$$y_n = f_{n-1}$$

яке умовно можна назвати різницевим рівнянням нульового порядку.

Необхідність для рівняння (1.39) умови $a_k \neq 0$ для всіх $k \in N_0$ в подальшому буде зрозуміла і з інших міркувань [7].

Рівняння (1.39) іноді називають лінійним рекурентним рівнянням першого порядку або лінійним дискретним відображенням першого порядку, а дискретний аргумент $k \in N_0$ називають дискретним часом. Оскільки функції аргументу $k \in N_0$ прийнято називати послідовностями, то з цієї точки зору a_k і f_k в рівнянні (1.39) є заданими послідовностями, а y_k — шукана послідовність $k \in N_0$.

Простим прикладом рівняння (1.39) є арифметична прогресія, геометрична прогресія і часткові суми числового ряду. Якщо $a_k = -1$ і $f_k = d$ для всіх $k \in N_0$, то рівняння (1.39) задає арифметичну прогресію $\{y_k\}$ з різницею d. Якщо ж

$a_k = -1$ і $f_k = d$ для всіх $k \in N_0$, то рівняння (1.39) задає геометричну прогресію $\{y_k\}$ із знаменником q. Нарешті, нехай для числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

k-й частковою сумою є

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \ .$$

Тоді y_k задовольняє рівнянню виду

$$y_{k+1} = y_k + f_{k+1}$$

Якщо $f_k = 0$ для всіх $k \in N_0$, то рівняння (1.39) називається лінійним однорідним різницевим рівнянням першого порядку. Інакше рівняння (1.39) називається лінійним неоднорідним різницевим рівнянням першого порядку. Задана послідовність φ_k, $k \in N_0$, називається розв'язком рівняння (1.39), якщо вона перетворює рівняння (1.39) в числову тотожність для всіх $k \in N_0$. Графіком розв'язку (1.39) є послідовність точок площини з координатами (k, φ_k) для всіх $k \in N_0$.

Для лінійного однорідного різницевого рівняння першого порядку

$$y_{k+1} + a_k y_k = 0 \qquad (1.40)$$

Де $a_k \neq 0$ для всіх $k \in N_0$, формулу всіх розв'язків можна отримати за допомогою послідовних підстановок. З рівняння (1.40) маємо, що

$$y_1 = -a_0 y_0, \quad y_2 = -a_1 y_1 = a_0 a_1 y_0$$

$$y_2 = -a_2 y_2 = -a_0 a_1 a_2 y_0 \ , \ y_k = (-1)^k a_0 a_1 a_2 \ldots a_{k-1} y_0$$

Якщо скористатися знаком добутку $\prod$ то отримуємо формулу всіх розв'язків (1.40):

$$y_k = y_0 (-1)^k \prod_{j=1}^{k-1} a_j \ .$$

Покладемо $y_0 = C$, $A_k = (-1)^k \prod_{j=1}^{k-1} a_j$. Зазначимо, що $A_k \neq 0$ для всіх $k \in N_0$ в силу визначення рівняння (1.39). Тоді формула всіх розв'язків (1.40) набирає виду

$$y_k = C \cdot A_k \tag{1.41}$$

Де C — довільна стала з множини R, $k \in N_0$.

Формула (1.41) називається формулою загального розв'язку рівняння (1.40).

Для розв'язку лінійного неоднорідного різницевого рівняння першого порядку (1.39) застосовується метод варіації сталої.

Шукатимемо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1.39) в такому ж виді (1.41), що і розв'язок лінійного однорідного рівняння (1.40), але вважатимемо C не довільною сталою, а деякою невідомою функцією C_k, $k \in N_0$. Отже, розв'язок (1.39) шукаємо у виді

$$y_k = C_k \cdot A_k, \quad k \in N_0 \tag{1.42}$$

де функцію C_k знайдемо підстановкою y_k в рівняння (1.39). Підстановка в (1.39) дає рівність виду

$$C_{k+1}A_{k+1} + a_k C_k A_k = f_k$$

або

$$C_{k+1}A_{k+1} - C_k A_{k+1} = f_k$$

Звідси

$$C_{k+1} = C_k + \frac{f_k}{A_{k+1}}$$

Оскільки $A_{k+1} \neq 0$ для всіх $k \in N_0$ в силу визначення рівняння (1.39). Послідовними підстановками отримаємо, що [9]

$$C_k = C_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j}{A_{j+1}}$$

де $k \in N_0$, $C_0 = D$ — довільна стала з R.

Таким чином, підставляючи C_k у формулу (1.42), знаходимо формулу всіх розв'язків (1.39):

$$y_k = \left[D + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j}{A_{j+1}} \right] A_k \tag{1.43}$$

Формулу (1.43) називають формулою загального розв'язку лінійного неоднорідного різницевого рівняння першого порядку (1.39).

З формули (1.43) видно, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1.39) є сумою загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (1.40) і деякого розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (1.39).

Для знаходження будь-якого конкретного розв'язку рівняння (1.39) необхідно задати додаткову умову, наприклад, початкова умова

$$y_0 = u, \tag{1.44}$$

Де u — задане число.

Задача знаходження розв'язку рівняння (1.39), що задовольняє початковій умові (1.44), називається різницевою задачею Коші для рівняння (1.39). Розв'язок різницевої задачі Коші для рівняння (1.39) існує, єдиний при будь-якому $u \in R$ і задається формулою

$$y_k = \left[u + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j}{A_{j+1}} \right] A_k \tag{1.45}$$

Для отримання загального розв'язку рівняння (1.39) необхідно уміти обчислювати суми k доданків і добутку k співмножників. Ці суми і добутки часто не задають елементарні функції. Наприклад, доведено, що рівняння (1.39) при $a_k = -1$, $f_k = \ln k$, $k \in N$ не має розв'язку в класі елементарних функцій. У таких випадках за заданої початкової умови (1.44) формула розв'язку (1.45) різницевої задачі Коші на практиці дозволяє знайти лише значення розв'язку y_k при декількох перших значеннях $k \in N$.

Лінійним різницевим стаціонарним рівнянням порядку n називається рівняння

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_n y_k = f_k \tag{1.46}$$

де коефіцієнти $a_1, \ldots, a_n$ — задані дійсні числа, причому $a_n \neq 0$ і f_k — задана функція $k \in N_0$.

Такі рівняння є найбільш важливими для практики. Крім того, як буде нижче встановлено, для лінійних однорідних різницевих стаціонарних рівнянь

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_n y_k = 0 \qquad (1.47)$$

завжди можна побудувати фундаментальну систему розв'язків. Очевидно, рівняння (1.47) завжди має розв'язок $y_k = 0$ на N_0. Шукатимемо нетривіальний розв'язок рівняння (1.47) у виді

$$y_k = \lambda^k$$

де число $\lambda \neq 0$ підлягає визначенню. Підставляючи y_k у рівняння (1.47) і скорочуючи на λ^k, отримаємо рівняння

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1.48)$$

Рівняння (1.48) називається характеристичним рівнянням для рівняння (1.47). Відмітимо, що (1.48) не може мати нульового кореня, оскільки за умовою $a_n \neq 0$. Отже, λ^k — розв'язок (1.47) тільки тоді, коли λ — корінь рівняння (1.48). Корені характеристичного рівняння (1.48) можуть бути як прості, так і кратні. Розглянемо деякі можливі випадки.

Нехай всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рівняння (1.48) дійсні і попарно різні. В цьому випадку розв'язки рівняння (1.47)

$$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$$

є лінійно незалежними. Насправді, склавши з цих розв'язків визначник

$$D - D\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right) = \begin{vmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k & \ldots & \lambda_n^k \\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} & \ldots & \lambda_n^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k+n-1} & \lambda_2^{k+n-1} & \ldots & \lambda_n^{k+n-1} \end{vmatrix}$$

неважко побачити, що

$$D = \lambda_1^k \ldots \lambda_n^k \cdot W\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \neq 0$$

так як $W\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ - визначник Вандермонда для $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Як відомо, він відмінний від нуля для випадку попарно різних $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тому розв'язки $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ рівняння (1.47) будуть лінійно незалежними. Отже, вони утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.47) і

$$y_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + \ldots + C_n \lambda_n^k$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ - довільні сталі, є загальним розв'язком лінійного однорідного різницевого стаціонарного рівняння (1.47) [19].

Лінійним різницевим рівнянням порядку n називається рівняння виду

$$y_k + a_{1k} y_{k+n-1} + ... + a_{nk} y_k = f_k \tag{1.49}$$

де $a_{1k}, ..., a_{nk}$, f_k - задані функції цілочисельного аргументу $k \in N_0 = \{0,1,2,3,...\}$, причому $a_{nk} \neq 0$ для всіх $k \in N_0$, а y_k — шукана функція $k \in N_0$.

Вказані функції можуть бути як дійсними, так і комплекснозначними. Оскільки функції цілочисельного аргументу прийнято називати послідовностями, то з цієї точки зору $a_{1k}, ..., a_{nk}$, f_k задані послідовності, а y_k — шукана послідовність. Функції $a_{1k}, ..., a_{nk}$ називаються коефіцієнтами рівняння (1.49), а функція f_k називається правою частиною рівняння (1.49).

Рівняння (1.49) іноді називають лінійним рекурентним рівнянням порядку n або лінійним дискретним відображенням порядку n, а аргумент $k \in N_0$ називають дискретним часом. Початком відліку аргументу k може бути не тільки 0, але і будь-яке ціле число $k_0 > 0$.

Умова $a_{nk} \neq 0$ для всіх $k \in N_0$ є істотною. Наприклад, рівняння $y_{k+1} = y_{k+1}$ не вважається за лінійне різницеве рівняння другого порядку, оскільки заміна $k+1 = m$ приводить його до виду $y_{m+1} = y_m$, що є лінійним різницевим рівнянням першого порядку. Крім того, умова $a_{nk} \neq 0$ для всіх $k \in N_0$ $k \in N_0$забезпечує єдиність розв'язку різницевої задачі Коші для (1.49).

Разом ізрівнянням (1.49) іноді розглядають і більш загальні лінійні різницеві рівняння. Рівняння виду

$$\sum_{m=-n_1}^{n_2} a_{mk} y_{k+m} = f_k$$

де $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ і $a_{-n1k} \neq 0$, $a_{n2k} \neq 0$ для всіх k, називають лінійним різницевим рівнянням порядку $(n_1 + n_2)$.

Дане рівняння заміною зводиться до рівняння (1.49). Окрім таких рівнянь, на практиці зустрічається випадок, коли аргумент k пробігає лише скінченну множину значень з N — множини натуральних чисел.

Якщо $f_k \equiv 0$ для всіх $k \in N_0$, то рівняння (1.49) називається лінійним однорідним рівнянням порядку n. В іншому випадку рівняння (1.49) називається лінійним неоднорідним рівнянням порядку n.

Задана послідовність φ_k, $k \in N_0$, називається розв'язком рівняння (1.49), якщо вона перетворює (1.49) в числову тотожність для кожного $k \in N_0$. Графіком розв'язку (1.49) є послідовність точок площини з координатами (k, φ_k) для всіх $k \in N_0$.

Розв'язок лінійних різницевих рівнянь не визначається єдиним чином. Для отримання єдиного розв'язку таких рівнянь необхідно задавати додаткові умови. Якщо для рівняння (1.49) задаються додаткові умови, то говоритимемо, що задано різницеве рівняння.

Найчастіше додатковими умовами для рівняння (1.49) виступають початкові умови:

$$y_0 = u_1,\ y_1 = u_2, \ldots, y_{n-1} = u_n \tag{1.50}$$

де $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — задані числа.

Задача знаходження розв'язку рівняння (1.49), що задовольняє початковим умовам (1.50), називається різницевою задачею Коші (1.49) — (1.50).

Умова $a_{nk} \neq 0$ для всіх $k \in N_0$ при визначенні рівняння (1.49) забезпечує єдиність розв'язку різницевої задачі Коші (1.49) — (1.50) [11].

Теорема 1.1. Розв'язок різницевої задачі Коші (1.49) — (1.50) завжди існує і єдиний.

Доведемо існування розв'язку задачі (1.49) — (1.50). Вважаючи $k = 0$ і підставляючи початкові значення $u_1, u_2, \ldots, u_n$ у рівняння (1.49), знаходимо значення

$$y_n = f_0 - a_{10}u_n - \ldots - a_{n0}u_1$$

Знаючи y_n, з рівняння (1.49) при $k=1$ можна знайти значення

$$y_{n+1} = f_1 - a_{11}y_n - a_{21}u_n - \ldots - a_{n1}u_2$$

Знаючи y_{n+1}, з рівняння (1.49) при $k=2$ знаходимо значення

$$y_{n+2} = f_2 - a_{12}y_{n+1} - a_{22}y_n - a_{22}u_n - \ldots - a_{n2}u_3$$

І так далі. Ясно, що послідовні підстановки $k \in N_0$ у рівняння (1.49) і використання початкових умов (1.50) дозволяють знайти будь-яке значення розв'язку y_k різницевої задачі Коші при $k \in N_0$.

Якщо задавати початкові значення не в перших n послідовних точках, як в початкових умовах (1.50), то розв'язок різницевої задачі може або не існувати, або бути не єдиним.

Розглянемо лінійне неоднорідне різницеве рівняння (1.49) порядку n.

Перш за все покажемо, що якщо відомий який-небудь розв'язок $y_k^{(0)}$ рівняння (1.49), то заміна $y_k = z_k + y_k^{(0)}$ приводить неоднорідне рівняння (1.49) до відповідного однорідного рівняння. Дійсно, позначивши ліву частину рівняння (1.49) через Ly_k, легко перевіряється, що для такої заміни

$$Ly_k = Lz_k + Ly_k^{(0)} = f_k$$

Оскільки $y_k^{(0)}$розв'язок (1.49), то $Ly_k^{(0)} = f_k$ і, значить, $Lz_k = 0$. Це означає, що z_k — розв'язок лінійного однорідного рівняння (1.50).

Якщо $\varphi_{1k},\ldots,\varphi_{nk}$ - фундаментальна система розв'язків рівняння (1.50), то

$$z_k = C_1\varphi_{1k} + \ldots + C_n\varphi_{nk}$$

і, отже, будь-який розв'язок рівняння (1.49) має вид

$$y_k = C_1\varphi_{1k} + \ldots + C_n\varphi_{nk} + y_k^{(0)}.$$

Ця формула, де $C_1,\ldots,C_n$ - довільні сталі, називається формулою загального розв'язку лінійного неоднорідного різницевого рівняння (1.49). Вона містить всі розв'язки рівняння (1.49).

Таким чином, знаючи фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння (1.50) і отримавши розв'язок неоднорідного рівняння (1.49), можна завжди отримати загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.49).

Наприклад функції 2^k і 3^k служать фундаментальною системою розв'язків рівняння

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$$

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 2$$

Неважко перевірити, що $y_k^{(0)} = 1$ - його розв'язок і, значить, загальним розв'язком неоднорідного рівняння буде

$$y_k = C_1 \cdot 2^k + C_2 \cdot 3^k + 1,$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Наступне твердження часто застосовується для спрощення розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (1.49). Воно називається принципом суперпозиції для рівняння (1.49) [22].

Теорема 1.2. Нехай $f_k = f_k^{(1)} + f_k^{(2)}$ для всіх $k \in N_0$ і нехай $y_k^{(1)}$ - який-небудь розв'язок рівняння (1.49) при $f_k \equiv f_k^{(1)}$ і $f_k^{(2)}$ - який-небудь розв'язок рівняння (1.49) при $f_k \equiv f_k^{(2)}$. Тоді $y_k = y_k^{(1)} + y_k^{(2)}$ є розв'язком рівняння (1.49).

Позначивши, як і вище, ліву частину рівняння (1.49) через Ly_k, маємо, що для всіх $k \in N_0$

$$Ly_k = Ly_k^{(1)} + Ly_k^{(2)} = f_k^{(1)} + f_k^{(2)} = f_k$$

Якщо відома лише фундаментальна система розв'язків $\varphi_{1k},...,\varphi_{nk}$ лінійного однорідного рівняння (1.50), то методом варіації сталих завжди можна знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1.49). Для випадку $n = 2$ маємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння другого порядку

$$y_{k+z} + a_{1k}y_{k+1} + a_{2k}y_k = f_k \tag{1.51}$$

де a_{1k}, a_{2k}, f_k — задані функції $k \in N_0$, причому $a_{2k} \neq 0$ для всіх $k \in N_0$, і нехай відома фундаментальна система розв'язків $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$ відповідного лінійного однорідного різницевого рівняння

$$y_{k+z} + a_{1k}y_{k+1} + a_{2k}y_k = 0 \tag{1.52}$$

Як відомо, тоді загальний розв'язок рівняння (1.52) має вид

$$y_k = C_1\varphi_{1k} + C_2\varphi_{2k}$$

де C_1 і C_2 довільні сталі.

Шукатимемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1.51) в такому ж виді, але вважаємо вже C_1 і C_2 не довільними сталими, а деякими невідомими функціями $k \in N_0$. Іншими словами, шукаємо загальний розв'язок рівняння (1.51) у виді

$$y_k = C_{1k}\varphi_{1k} + C_{2k}\varphi_{2k}$$

Одну умову для визначення невідомих функцій C_{1k} і C_{2k} отримуємо з того, що функція y_k повинна задовольняти рівнянню (1.51). Друга умова на C_{1k} і C_{2k} у нашому розпорядженні. За Лагранжем, вимагатимемо, щоб для C_{1k} і C_{2k} на множині N_0 виконувалося співвідношення

$$C_{1k+1}\varphi_{1k+1} + C_{2k+1}\varphi_{2k+1} = C_{1k}\varphi_{1k+1} + C_{2k}\varphi_{2k+1} \tag{1.53}$$

Якщо позначити ліву частину рівняння (1.19) через Ly_k, то умова того, що y_k задовольняє рівнянню (1.19), набере виду

$$L[C_{1k}\varphi_{1k} + C_{2k}\varphi_{2k}] = f_k \tag{1.54}$$

Отже, невідомі функції C_{1k} і C_{2k} повинні задовольняти співвідношенням (1.53) і (1.54). Поклавши

$$\Delta C_{1k} = C_{1k+1} - C_{1k}, \qquad \Delta C_{2k} = C_{2k+1} - C_{2k}$$

співвідношення (1.53) можна записати так:

$$\Delta C_{1k}\varphi_{1k+1} + \Delta C_{2k}\varphi_{2k+1} = 0 \tag{1.55}$$

Спростимо тепер вираз (1.54). З (1.52) випливає, що

$$C_{1k+2}\varphi_{1k+2} + C_{2k+2}\varphi_{2k+2} = C_{1k1}\varphi_{1k+2} + C_{2k1}\varphi_{2k+2}$$

Якщо підставити праву частину цього виразу (1.54) і ввести прирости ΔC_{1k}, ΔC_{2k} то співвідношення (1.54) набуває виду

$$\Delta C_{1k\varphi 1k+2} + \Delta C_{2k\varphi 2k+2} + C_{1kL\varphi 1k} + C_{2kL\varphi 2k} = f_k$$

Оскільки φ_{1k} і φ_{2k} – розв'язок однорідного рівняння (1.52), то на множині N_0

$$L\varphi_{1k} = L\varphi_{2k} = 0$$

Отже, співвідношення (1.54) набуває виду

$$\Delta C_{1k}\varphi_{1k+2} + \Delta C_{2k}\varphi_{2k+2} = f_k \tag{1.56}$$

Отже, на множині N_0 прирости ΔC_{1k} і ΔC_{2k} задовольняють лінійній системі алгебраїчних рівнянь (1.55) (1.56). Визначником цієї системи є

$$D_k = D[\varphi_{1k+1} \cdot \varphi_{2k+1}] = \begin{vmatrix} \varphi_{1k+1} & \varphi_{2k+1} \\ \varphi_{1k+2} & \varphi_{2k+2} \end{vmatrix} \neq 0$$

для всіх $k \in N_0$ через фундаментальність системи розв'язків φ_{1k} і φ_{2k}. За правилом Крамера для всіх $k \in N_0$ отримуємо, що [14]

$$\Delta C_{1k} = -f_k \frac{\varphi_{2k+1}}{D_k}, \quad \Delta C_{2k} = f_k \frac{\varphi_{1k+1}}{D_k}$$

З цієї рівності послідовно можна визначити значення C_{1k} і C_{2k} при будь-якому $k \in N_0$. Позначивши $C_{10} = \overline{C}_1, C_{20} = \overline{C}_2$ методом математичної індукції легко встановити, що при всіх $k \in N_0$

$$C_{1k} = \overline{C}_1 - \sum_{j=0}^{k-1} f_j \frac{\varphi_{2j+1}}{D_j}, \quad C_{2k} = \overline{C}_2 + \sum_{j=0}^{k-1} f_j \frac{\varphi_{1j+1}}{D_j}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1.51) має вид

$$y_k = \left[\overline{C}_1 - \sum_{j=0}^{k-1} f_j \frac{\varphi_{2j+1}}{D_j}\right]\varphi_{1k} + \left[\overline{C}_2 + \sum_{j=0}^{k-1} f_j \frac{\varphi_{1j+1}}{D_j}\right]\varphi_{2k}$$

де $\overline{C}_1$ і $\overline{C}_2$ — довільні сталі. Наприклад, для рівняння

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 2^k$$

по отриманій формулі знаходимо наступний загальний розв'язок:

$$y_k = \xi_1 + \xi_2 \cdot 2^k + (k-2) \cdot 2^{k-1}.$$

1.3. Історичний огляд теорії диференціально-різницевих рівнянь

У той час як для звичайного диференціального рівняння

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0 \tag{1.57}$$

як було вказано у підрозділі 1.1 вище, передбачається, що аргументи функцій $y, y', \ldots$ всі рівні x, то для функціональних диференціальних рівнянь ці аргументи самі є заданими функціями від x, отже замість (1.57) з'являється рівняння виду

$$F(x, y(\omega_{01}(x)), y(\omega_{02}(x)), \ldots, y'(\omega_{11}(x)), \ldots) = 0. \tag{1.58}$$

Якщо функції $\omega_{ik}(x)$ мають вигляд $x - h_{ik}$ із постійними відхиленнями h_{ik}, то говорять про диференціально-різницеві рівняння. У разі позитивних h_{ik} застосовують також означення «диференціальні рівняння із запізнілим (відстаючим) аргументом» та «різницево-диференціальні рівняння». Надалі рівняння зі змінними відхиленнями також, називатимемо диференціально-різницевими рівняннями.

У ранній літературі диференційно-різницеві рівняння з'являються лише зрідка у зв'язку з деякими геометричними задачами. Наприклад, задача про криву, яка конгруентна своїй еволюті, призводить до рівняння.

$$y'(x) = ay(x-1).$$

Перше докладніше дослідження одного класу лінійних диференційно-різницевих рівнянь зробив Е. Шмідт [31]. Однак надалі диференціально-різницеві рівняння застосовувались випадково. Лише останнім часом кількість публікацій у цій галузі, особливо присвячених прикладним застосуванням, сильно зросла в роботами багатьох дослідників, зокрема - Є. М. Райта та О. Д. Мишкіса, якими закладено основи систематичної теорії диференціально-різницевих рівнянь.

Цей огляд відображає літературу з 1910 р. Перевага надана новітнім роботам. Чисто диференціальні та чисто різницеві рівняння не охоплено; однак іноді довелося розглядати інтегро-диференціальні рівняння типу згортки.

Ми розрізняємо рівняння з домінуючою вищою похідною, яке є лінійним диференціальним рівняння із постійними коефіцієнтами

$$y^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{q_i} a_{ik} y^{(i)}(x - h_{ik}). \tag{1.59}$$

від більш загальних рівнянь із лівою частиною

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{k=1}^{q_i} a_{ik} y^{(i)}(x - h_{ik}). \tag{1.60}$$

Зазвичай коефіцієнти a_{ik} та відхилення h_{ik} є дійсними. Одностороннім рішенням ми називаємо функцію $y(x)$,яка на пів осі $x \geq x_0$ диференційована принаймні r разів і задовольняє диференціально-різницевого рівняння. (У лівому кінці маються на увазі односторонні похідні.) Двостороннє рішення володіє цими властивостями на всій дійсній осі. (Іноді зустрічаються відхилення від цього визначення «рішення». Вимагають, щоб рівняння задовольнялося майже всюди тощо.) Лівою частиною (1.60) ставимо у відповідність характеристичну функцію.

$$A(s) \equiv \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=1}^{q_i} a_{ik} s^{(i)} \exp(-sh_{ik}). \tag{1.61}$$

Її нулі позначаються $s_j\,(j = 1,2,...)$; для розрізнення дійсних, комплексних та чисто уявних нулів іноді пишемо $r^S j$, $k^S j$, $i^S j$. Нулю s_j кратності υ_j відповідають υ_j функцій

$$u_{tj} = x^t \exp(s_j x)(t = 0,1,...,\upsilon_j - 1) \tag{1.62}$$

відповідно ${}_r u_{tj}$ і т. д.), які називаються частинними розв'язками. Головними завданнями теорії диференціально-різницевих рівнянь є:

1) Знаходження загального розв'язку;
2) виділення частинних розв'язків за допомогою додаткових вимог;
3) вивчення поведінки розв'язків при високих значеннях аргументу.

Розглянемо для роз'яснення методів знаходження розв'язку неоднорідне рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$y''(x) + a_1 y'(x - h_1) + a_2 y(x - h_2) = f(x)(h_1 > 0, h_2 > 0), \tag{1.63}$$

що належить до типу (1.59). Шукаємо односторонній розв'язок з початковими умовами (або початковими значеннями)

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= Y(x) при \quad -h_2 \le x \le 0, \\ y'(x) &= Y_1(x) при \quad -h_1 \le x \le 0, \end{aligned} \right\} \tag{1.64}$$

Y та Y_1 інтегровані на інтервалах, на яких вони визначені, а в іншому довільні (отже, не обов'язково $Y_1(x) = Y'(x)$), $f(x)$ інтегровані.

Якщо позначити через h і $\overline{h}$ відповідно менше і більше чисел h_1 і h_2, то очевидно, що розв'язок на відрізку $[0, h]$ можна подати у вигляді

$$y(x)=\int_0^x\int_0^u\left(f(\omega)-a_1Y_1(\omega-h_1)-a_2Y(\omega-h_2)\right)d\omega du+xY_1(0)+Y(0) \tag{1.65}$$

і що воно може бути продовжено кроками на відрізки $\left[h,\bar{h}\right]$, $\left[\bar{h},\bar{h}+h\right]$ і т.д. Так само можна чинити у разі загального рівняння (1.59). Воно володіє при довільних (залежних лише очевидним вимогам інтегрованості) на загальних умовах одностороннім розв'язкам, які залежать таким чином від r довільних функцій.

Коли відхилення в повному обсязі позитивні, односторонні розв'язки, як показує наступний приклад, можуть бути відсутніми:

$$y'(x)=y(x+1),\ \ Y(x)=x+1 \quad \text{при } x\le 0 .$$

Розв'язок $y(x)=1(0\le x\le 1)$, $y(x)=0(x>1)$ є розривним [20].

Застосовуємо до (1.63) перетворення Лапласа та отримуємо

$$L(y)=\int_0^\infty \exp(-px)y(x)dx=\bar{y}(p),\quad L(f)=\bar{f}(p).$$

Після нескладних перетворень отримуємо

$$\begin{aligned}A(p)\bar{y}(p)=\bar{f}(p)+Y_1(0)+py(0)+a_1\exp(-h_1p)Y_1(0)-\\ -a_1\exp(-h_1p)\int_{-h_1}^0\exp(-p\omega)Y_1(\omega)d\omega-\\ -a_2\exp(-h_2p)\int_{-h_2}^0\exp(-p\omega)Y(\omega)d\omega\end{aligned} \tag{1.66}$$

та формально

$$y(x)\sim\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{F(p)}{A(p)}\exp(px)dp\,, \tag{1.67}$$

де $F(p)$ означає праву частину (1.66). Відповідні викладки можна провести для (1.59) та (1.60). Тепер слід досліджувати, чи є комплексний інтеграл справді «справжнім» розв'язкам диференціально-різницевого рівняння [28].

Далі оцінимо інтеграл за допомогою теореми про лишки: після відповідної деформації шляху інтегрування лишок підінтегральної функції, що походять від нулів $A(p)$, дають формальний ряд

$$\sum_{t,j} C_{tj} u_{tj} , \tag{1.68}$$

збіжність якого потрібно дослідити, що призводить до таких же задач, які зустрічаються в теорії рядів Фур'є.

Майже всі висновки щодо двосторонніх розв'язків рівнянь (1.59) та (1.60) отримані за допомогою подання через комплексні інтеграли, які отримані як попередні або подібним чином. Припущення щодо дійсності a_{ik} та дійсності та позитивності h_{ik} при цьому не потрібно. Е. Шмідт [31] отримав наступний основний результат щодо рівняння (1.59) з домінуючою похідною, що відрізняється тим, що (1.61) може мати трохи більше кінцевого числа нулів ${}_i s_j$. Нехай $f(x) = O\left(|x|^{\alpha}\right)$ з постійним α. Двосторонній розв'язок, що зростає разом зі своїми похідними не швидше ніж кінцевий ступінь x, визначається з точністю до лінійної комбінації $\sum_{t,j} C_{tj} u_{tj}$. Цей розв'язок подамо як комплексний інтеграл.

Хільб [25] розглядає однорідне рівняння (1.60) у вигляді

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{q} a_{ik} y^{(i)}(x + h_k) = 0 \quad (0 = h_0 < h_1 < \ldots < hq) \tag{1.69}$$

та шукає двостороннє рішення, яке в інтервалі $\lfloor x_0, x_0 + h_q \rfloor$ є r разів неперервно диференційованим. Він показує, що цей розв'язок можна отримати як границю послідовності, що є рівномірно збіжною $y_n(x)$, де $y_n(x)$— деякі частинні суми формального ряду Фур'є (1.68), які виходять складним методом вибору. Схожість самого ряду, яка стверджується Хільбом при формулюванні остаточного результату, як зауважує Леонтьєв [19], не випливає з доказу Хільба, і може статися, що ряд (за відповідного вибору членів) є розбіжним.

Е. М. Райт [33] вивчає також рівняння виду (1.69). Він задає r похідну на інтервалі $0 \le x < h_q$ і вважає її там L-інтегрованою; крім того, задаються значення $y^{(i)}(0)$ для $i = 0,1,\ldots,r-1$. Він одержує подання цього розв'язку через частинні суми (1.68); при цьому, однак, пропонується певне розташування s_j. Потім $|\mathrm{Im}(s_j)| \le |\mathrm{Im}(s_{j+1})|$. Далі можна, як виявляється, визначити три константи A_1,

A_2, A_3 і послідовність чисел T_n таким чином, що $|T_n - nA_2| < A_1$, і для деякої послідовності індексів $R(n)$ виконуються нерівності

$$|\mathrm{Im}(s_{R(n)})| + A_3 \le T_n \le |\mathrm{Im}(s_{R(n)+1})| - A_3 .$$

При цьому $R(n) = O(n)$.) Якщо тепер $P(x, i, j)\exp(s_j x)$ є відрахування підінтегральної функції у формулі звернення

$$\exp(px)\frac{F(p)}{A(p)}(i = 0).$$

відповідний її i - похідної з x

$$p' \exp(px)\frac{F(p)}{A(p)}$$

щодо полюса $p = s_j$ то (у разі $a_{rq} \neq 0$)

$$y^{(i)}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{R(n)} P(x, i, j)\exp(s_j x)(i = 0,1,\ldots, r-1). \quad (1.70)$$

Це вірно для $x > 0$. Збіжність у кожному кінцевому інтервалі рівномірна. Якщо початкова функція неперервна і має обмежену варіацію, то рівність є вірною також і для $i = r$.

Для одного спеціального рівняння

$$y'(x) = ay(x-1) \quad (1.71)$$

О. Полосухіна [29] довела збіжність ряду Фур'є. Для цього вона докладніше досліджувала корені характеристичного рівняння,

$$A(s) \equiv s - a\exp(s) \quad (1.72)$$

їх розміщення та за допомогою цього змогла оцінити лишки. Ще докладніше Шюрер [30] вивчає рівняння (1.71). Він використовує одну теорему Герглотця про лінійні інтегральні рівняння (який в кінцевому рахунку також застосовує уявлення у вигляді комплексного інтеграла) і показує, що кожний двосторонній розв’язок, який на інтервалі $[0,1]$ двічі неперервно диференційований, можна розкласти в ряд (1.68), що є збіжним у кожному кінцевому інтервалі абсолютно і рівномірно. Він характеризує ще точніше, ніж Е. Шмідт, розв’язок з даними властивостями зростання і виділяє, крім того, розв’язок, накладаючи вимоги коливання. Для скільки завгодно великих x існують інтервали $\omega \le x \le \omega + 1$

довжини одиниця, у яких розв'язок $y(x)$ має постійне число змін знака. Шюрер вказує далі [30] на ряд аналогій (щодо зростання та розподілу нулів), які є між цілими трансцендентними функціями та розв'язками (1.71). В інших роботах він досліджує рівняння

$$c_0 y(x) + c_1 y'(x) + \ldots + c_r y^{(r)}(x) = y(x-1) \tag{1.73}$$

і, зокрема, випадок, коли рівняння

$$c_0 + c_1 t + \ldots + c_r t^r = 0 \tag{1.74}$$

має тільки дійсні корені. Він доводить, наприклад, таке твердження: Якщо $s = a + bi$ є нуль характеристичної функції рівняння (1.73) і якщо розв'язок $y(x)$ є $O(\exp(ax))$ при $x \to \infty$, цей розв'язок є лінійною комбінацією тих частинних розв'язків u_j, які відповідають нулям s_j з $\operatorname{Re}(s_j) \le a$. В останній роботі [32] Шюрер вивчає рівняння (1.60) з комплексними коефіцієнтами і відхиленнями та описує такі двосторонні рішення, для яких у певному інтервалі $\lim\limits_{k} \left| \sqrt[k]{y^{(k)}(x)} \right| \le q$ (він не вживає, втім, позначення «ступеня q»). Ці розв'язки збігаються з розв'язками лінійного диференціального рівняння кінцевого порядку, яке можна отримати в такий спосіб: треба побудувати поліном $A_q(s) = \sum\limits_{i-0}^{m-1} b_i s^i + s^m$, який має нулі відповідної кратності, що збігаються з нулями характеристичної функції $A(s)$, що лежать у колі $|s| \le q$, і покласти

$$A_q(s) = A(s) \sum_{i-0}^{\infty} c_i s^i ,$$

тоді допоміжне рівняння має вигляд

$$\sum_{i=0}^{m-1} b_i y^{(i)}(x) + y^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f^{(i)}(x)$$

($f(x)$ є права частина вихідного неоднорідного рівняння). Шюрер отримує цей результат як окремий випадок загальної теореми про лінійні функціональні перетворення [30].

Розділ 2. Методи розв'язування диференціально-різницевих рівнянь

2.1. Застосування інтегральних перетворень до знаходження розв'язків диференціально-різницевих рівнянь

2.1.1. Перетворення Лапласа

Одним із найпотужніших методів розв'язування диференціально-різницевих рівнянь є застосування інтегральних перетворень, для яких відомі обернені. Нехай t – змінна диференціювання і нехай h – змінна зсуву, яка представлена точкою N-вимірного евклідового простору. При розгляді системи диференціально-різницевих рівнянь слід додати індекс j для позначення кожної компоненти розв'язку. Таким чином, можна записати невідомий розв'язок у виді $y_j(t,h)$, де $j=1,2,...,l$. Тоді, поклавши

$$Y_i(z,k)=\sum_{j=1}^{l}\int_{S_{ij}}F_{ij}(z,t;k,h)y_j(t,h)dU_{ij}(t,h), \tag{2.1}$$

де U_{ij} – функції обмеженої варіації на вимірних множинах S_{ij} в добутку просторів t і h. Функції F_{ij} та U_{ij} беруться у зручній формі. Задача полягає у визначенні функцій $Y_i(z,k)$ і знаходженні функцій $y_j(t,h)$ шляхом обернення перетворення (2.1).

На практиці, лише деякі з перетворень типу (2.1) мають відомі обернення і використовуються у теорії диференціально-різницевих рівнянь (вони будуть розглянуті нижче). Однак, техніка загальних інтегральних перетворень має ряд переваг. Умови існування інтегралів виду (2.1) можуть бути отримані із теорем існування. Крім того, форма (2.1) є зручною для задання початкових умов використовуваного зазвичай типу [3].

До числа найважливіших інтегральних перетворень належать ті, у яких:

- ядро $F_{ij}(z,t;k,h)$ складене із множників виду $e^{-zt},e^{-k_1h_1},e^{-k_2h_2},...,e^{-k_Nh_N}$, де $h=(h_1,h_2,...,h_N)$, $k=(k_1,k_2,...,k_N)$;

- множини S_{ij} є $-\infty < t < \infty$, $-\infty < h_p < \infty$, $p = 1,2,..., N$;

- функції $U_{ij}(t,h)$ можуть бути представлені у вигляді добутку функцій, кожна із яких залежить лише від однієї змінної $t, h_1, h_2,..., h_N$.

Типовими прикладами є перетворення

$$Y_i(z,h) = \sum_{j=1}^{i} p_{ij} \int_0^{\infty} e^{-zt} y_j(t,h)dt,$$

$$Y(t,k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kh} y(t,h)dP(h),$$

$$Y(t,k_1) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p e^{-zt} p \int_0^{\infty} e^{-k_1 h_1} y(t_p, h_1)dh_1,$$

де запис kh означає $\sum_{q=1}^{N} k_q h_q$. Перетворення, з якими вдається працювати, зазвичай, зводяться до простих перетворень Лапласа виду

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} f(t)dt \tag{2.2}$$

або перетворень Лапласа-Стілтьєса виду

$$A(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} d\alpha(t). \tag{2.3}$$

До цих перетворень існують обернені [8].

Теорема 2.1. Якщо функція $f(t)$ інтегрована на кожному скінченному інтервалі, інтеграл (2.2) збігається абсолютно вздовж прямої $\operatorname{Re} z = c$ і $f(t)$ має обмежену варіацію у деякому околі точки t, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z) e^{zt} dt = \frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0) \right). \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. Якщо $\alpha(t)$ – функція з обмеженою варіацією, для якої

$$\alpha(t)=\frac{1}{2}\left(\alpha(t+0)+\alpha(t-0)\right) \tag{2.5}$$

і інтеграл (2.3) збігається у смузі $x_1<\operatorname{Re} z<x_2$, то для усіх t

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{A(z)e^{zt}}{z}dz=\begin{cases}\alpha(t)-\alpha(-\infty) & (c>0, x_1<c<x_2),\\ \alpha(t)-\alpha(\infty) & (c<0, x_1<c<x_2).\end{cases} \tag{2.6}$$

Із (2.2) випливає, що

$$F'(z)=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-zt}tf(t)dt, \tag{2.7}$$

$$F(z-z_0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-zt}e^{z_0t}f(t)dt, \tag{2.8}$$

$$zF(z)=-\left(e^{-zt}f(t)\right)_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-zt}f'(t)dt, \tag{2.9}$$

$$e^{-z_0t}F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-zt}f(t-t_0)dt. \tag{2.10}$$

Отже, диференціювання і зсув аргументу для функції $f(t)$ переходять у просте множення для функції $F(z)$, і навпаки. Тому диференціально-різницеві рівняння можуть іноді бути зведені до звичайних диференціальних рівнянь (без відхилень аргументу), до різницевих рівнянь чи навіть до алгебраїчних рівнянь.

Для того, щоб застосовувати перетворення Лапласа до диференціально-різницевих рівнянь, потрібно дещо знати про поведінку невідомих розв’язків на нескінченності для забезпечення збіжності інтеграла (2.2). Очевидно, потрібно вимагати, щоб функція $f(t)$ в (2.2) мала щонайбільше експоненціальне зростання при $t\to\infty$. Теореми про оцінку розв’язків, які стосуються зростання розв’язків диференціально-різницевих рівнянь при прямуванні незалежної змінної до нескінченності досить громіздкі [1]. Однак, ця незручність може бути обійдена іншим способом. Для цього перетворення Лапласа застосовують не до розглядуваної функції, а до іншої функції, яка співпадає з даною на деякому скінченному інтервалі і дорівнює нулю поза цим інтервалом. Цей метод пов'язаний із перетворенням Ейлера-Лапласа:

$$F(z)=\int_a^b e^{-zt}f(t)dt. \tag{2.11}$$

Це перетворення було введене Ейлером у 1737 році у зв'язку із дещо штучною задачею про складання диференціальних рівнянь, що мають деякі спеціальні типи розв'язків [24].

Слід зауважити, що якщо можна застосувати перетворення Лапласа (2.2), то простіше буде застосовувати саме його, а не перетворення Ейлера-Лапласа (2.11).

Компромісом між перетворенням (2.2) (яке ще називають двостороннім перетворенням Лапласа) та перетворенням (2.11) є, так зване, одностороннє перетворення Лапласа

$$F(z)=\int_0^{\infty} e^{-zt}f(t)dt, \tag{2.12}$$

яке отримується, якщо у (2.2) покласти $f(t)=0$ при $t<0$. Воно може бути застосоване у більшій кількості випадків, ніж перетворення (2.2), але у меншій, ніж перетворення (2.11).

Приклад. Розглянемо диференціально-різницеве рівняння

$$y_t'(t,h)=y(t,h-1) \tag{2.13}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} &y(t,h)=y_0, &&0\le t\le 1,\ -1\le h<0;\\ &y(0,h)=y_0, &&h>-1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Можна довести, що існує єдиний розв'язок рівняння (2.13), що задовольняє умови (2.14), і що одностороннє перетворення Лапласа

$$Y(t,k)=\int_0^{\infty} e^{-kh}y(t,h)dh, \qquad Y_t'(t,k)=\int_0^{\infty} e^{-kh}y_t'(t,h)dh \tag{2.15}$$

існує для $\operatorname{Re}k>0$.

В силу (2.13),

$$Y_t'(t,k)=\int_0^{\infty} e^{-kh}y(t,h-1)dh=\int_{-1}^{\infty} e^{-k(h+1)}y(t,h)dh=$$

$$=e^{-k}Y(t,k)+\int_{-1}^{\infty} e^{-k(h+1)}y_0dh,$$

так що $Y(t,k)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$Y_t'(t,k)-e^{-k}Y(t,k)=\frac{y_0(1-e^{-k})}{k}.$$

Воно має розв'язок

$$Y(t,k)=-\frac{y_0(e^k-1)}{k}+A(k)e^{te^{-k}}.$$

Згідно (2.14) та (2.15), $Y(0,k)=\frac{y_0}{k}$, так що $A(k)=\frac{y_0e^k}{k}$ і

$$Y(t,k)=\frac{y_0}{k}+\frac{y_0e^k(e^{te^{-k}}-1)}{k}.$$

Щоб отримати $y(t,h)$, слід знайти обернення $Y(t,k)$, що, простіше за все, можна зробити розкладом в ряд за степенями t:

$$Y(t,k)=\frac{y_0}{k}+\frac{y_0}{k}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^p}{p!}e^{-(p-1)k}.$$

Тепер можна застосувати теорему 2.1, взявши $c>0$, оскільки $Y(t,k)$ визначене лише для $\operatorname{Re} k>0$. Отримуємо

$$y(t,h)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{y_0e^{hk}}{k}+y_0\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^p}{kp!}e^{(h+1-p)k}\right)dk.$$

Оскільки $c>0$, то ряд збігається рівномірно і його можна почленно інтегрувати [12]:

$$y(t,h)=\frac{y_0}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{hk}}{k}dk+y_0\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{(h+1-p)k}}{k}dk.$$

Тоді

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{hk}}{k^{n+1}}dk=\begin{cases}\dfrac{h^n}{n!}, & \operatorname{Re}h>0,\\ 0, & \operatorname{Re}h<0,\end{cases} \tag{2.16}$$

що можна довести, замкнувши контур лівого, відповідно правим, півколом нескінченно великого радіуса і застосувавши теорію лишків. Це остаточно дає

$$y(t,h)=y_0\sum_{p=0}^{[h]+1}\frac{t^p}{p!}, \tag{2.17}$$

де $[h]$ означає цілу частину від h [15].

2.1.2. Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є тісно пов'язане з перетворенням Лапласа. Дійсно, одне може бути отримане з іншого поворотом на 90° в комплексній площині. Отже, слід лише замінити z на $-iz$ і k_p на $-ik_p$ в експоненціальних множниках у підрозділі 2.1.1. При цьому (2.2) перейде у перетворення Фур'є

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{izt}f(t)dt. \tag{2.18}$$

Проста модифікація теореми 2.1 дає наступну теорему.

Теорема 2.3. Якщо функція $f(t)$ інтегрована на кожному скінченному інтегралі, інтеграл (2.18) абсолютно збігається вздовж прямої $\operatorname{Im}z=c$ і $f(t)$ має обмежену варіацію у деякому околі точки t, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty}F(z)e^{-izt}dz=\frac{1}{2}\big(f(t+0)+f(t-0)\big). \tag{2.19}$$

Ця теорема доведена у Тітчмарша [23]. Тітчмарш застосував перетворення Фур'є для дослідження диференціально-різницевих рівнянь, і йому належить важливе зауваження про те, що немає необхідності мати відомості про зростання розв'язків на нескінченності, якщо замість перетворення Фур'є використовувати перетворення

$$F(z)=\int_a^b e^{izt}f(t)dt,$$

де a і b скінченні.

Послідовність дій при використанні перетворення Фур’є така ж, як і при використанні перетворення Лапласа [21].

2.1.3. Перетворення Ейлера-Лапласа

Хоча перетворення

$$G(z)=\int_a^b e^{-zt}g(t)dt, \tag{2.20}$$

$$B(z)=\int_a^b e^{-zt}d\beta(t) \tag{2.21}$$

є частковими випадками перетворень (2.2) і (2.3), їх застосування, однак, пов’язане із деякими труднощами, що не зустрічаються при використанні перетворень (2.2) та (2.3). З іншого боку, перетворення (2.20) і (2.21) можуть бути застосовані у випадках, коли інтеграли в (2.2) та (2.3) не збігаються.

Перетворення (2.20) і (2.21) можуть бути обернені за теоремами 2.1 та 2.2, якщо покласти

$$\begin{aligned}
&f(t)=0,\alpha(t)=\beta(a+0) && \text{при} \quad -\infty\le t<a,\\
&f(t)=g(t),\alpha(t)=\beta(t) && \text{при} \quad a<t<b,\\
&f(t)=0,\alpha(t)=\beta(b-0) && \text{при} \quad b<t\le\infty.
\end{aligned}$$

Тоді з теорем 2.1 та 2.2 випливають наступні теореми.

Теорема 2.4. Якщо функція $g(t)$ інтегрована на (a,b) і має обмежену варіацію в деякому околі точки t, то для функції $G(t)$, визначеної за формулою (2.20), і довільної константи c

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty} G(z)e^{zt}dz = \begin{cases} 0, & \text{при } t < a, \\ \frac{1}{2}g(a+0) & \text{при } t = a, \\ \frac{1}{2}\big(g(t+0)+g(t-0)\big) & \text{при } a < t < b, \\ \frac{1}{2}g(b-0) & \text{при } t = b, \\ 0 & \text{при } t > b. \end{cases} \tag{2.22}$$

Теорема 2.5. Якщо $\beta(t)$ має обмежену варіацію і

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\big(\beta(t+0)+\beta(t-0)\big), \tag{2.23}$$

то для функції $B(z)$, визначеної за формулою (2.21),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} B(z)\frac{e^{zt}}{z}dz = \begin{cases} 0, & \text{при } t \le a, \quad c > 0, \\ \beta(a+0)-\beta(b-0) & \text{при } t \le a, \quad c < 0, \\ \beta(t)-\beta(a+0) & \text{при } a < t < b, \quad c > 0, \\ \beta(t)-\beta(b-0) & \text{при } a < t < b, \quad c < 0, \\ \beta(b-0)-\beta(a+0) & \text{при } t \ge b, \quad c > 0, \\ 0 & \text{при } t \ge b, \quad c < 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Обчислення інтегралів у (2.22) і (2.24) може бути пов'язане із застосуванням тих чи інших прийомів, залежно від спеціальних форм функцій $G(z)$ і $B(z)$. До цих прийомів відносять, наприклад, наступні.

I) Інтеграли (2.22) і (2.24) можуть бути обчислені безпосередньо і виражені через відомі функції.

II) Якщо функція $G(z)$ або $B(z)$ отримана у вигляді інтегралу, то він іноді може бути перетворений до виду (2.20) або відповідно (2.21) так що $g(t)$ або $\beta(t)$ може бути визначена безпосередньо.

III) Якщо $G(z)ze^{zt}$ або $B(z)e^{zt}$ містить мероморфні члени, що прямують до нуля на правому або лівому півколі при прямуванні його радіуса до нескінченності, то ці члени можуть бути знайдені за допомогою теорії лишків, якщо замкнути контури інтегрування (2.20) чи (2.21) відповідним півколом нескінченно великого радіусу.

IV) Визначальні співвідношення іноді можуть бути одержані з того, що $g(t)$ і $\beta(t)$ не залежать від a і b.

Перетворення Ейлера-Лапласа може дати не найпростіший шлях пошуку розв'язку задачі. Однак, іноді воно може бути використане тоді, коли інші перетворення не можуть бути застосовані [13].

2.2. Поняття про характеристичні рівняння та їх асимптотичні корені

У розкладі в ряди розв'язків диференціально-різницевих рівнянь визначальну роль відіграють, так звані, характеристичні рівняння.

Розглянемо далі теорію коренів характеристичних рівнянь. Однією із важливих задач є отримання асимптотичних виразів для «асимптотичних коренів», тобто коренів, що знаходяться далеко від початку координат на площині z.

Найбільш загальний вигляд характеристичного рівняння наступний:

$$D(z) \equiv \left| D_{ij}(z) \right| = 0. \tag{2.25}$$

Тут $D(z)$ – визначник матриці порядку l. Її елементи задаються формулою

$$D_{ij}(z) = \sum_{\mu=0}^{m} C_{ij\mu} z^{\mu} + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=1}^{N} D_{ij\mu\nu} z^{\mu} e^{-z\xi_{\nu}} + \sum_{\mu=0}^{n} z^{\mu} \int_{\gamma}^{\delta} \varphi_{ij\mu}(\xi) e^{-z\xi} d\xi, \tag{2.26}$$

де $i = 1,2,...,l,\ j = 1,2,...,l;$ $C_{ij\mu}$ і $D_{ij\mu\nu}$ – константи; $C_{ijm} \neq 0$. Кутові коефіцієнти невироджені. Величини ξ_{ν} задовольняють нерівності [16]

$$0 < \gamma \le \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_N \le \delta. \tag{2.27}$$

Функції $\varphi_{ij\mu}(\xi)$ можуть тотожно перетворюватись в нуль на частині відрізку $\gamma \le \xi \le \delta$. Нехай $\varphi_{ij\mu}(\xi)$ перетворюється в нуль на $\gamma \le \xi \le a_{ij\mu}$ і на $b_{ij\mu} \le \xi \le \delta$, де $\gamma \le a_{ij\mu} < b_{ij\mu} < \delta$. Нехай $\alpha_{ij\mu}$ – порядок першої відмінної від нуля в точці $a_{ij\mu}$ похідної, а $\beta_{ij\mu}$ – порядок першої відмінної від нуля в точці $b_{ij\mu}$ похідної. Слід вимагати, щоб функція $\varphi_{ij\mu}(\xi)$ була диференційована до порядку $M_{ijk\mu} = k + \max(\alpha_{ij\mu}, \beta_{ij\mu})$ для деякого цілого додатного k всюди на відрізку $a_{ij\mu} \le \xi \le b_{ij\mu}$.

При $l = 1$ характеристичне рівняння (2.25) набуває вигляду

$$D(z) = \sum_{\mu=0}^{m} C_\mu z^\mu + \sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=1}^{N} D_{\mu\nu} z^\mu e^{-z\xi_\nu} + \sum_{\mu=0}^{n} z^\mu \int_\gamma^\delta \varphi_\mu(\xi) e^{-z\xi} d\xi = 0. \qquad (2.28)$$

Тут C_μ і $D_{\mu\nu}$ – константи; $C_m \ne 0$. Величини ξ_ν задовольняють нерівності (2.27). Означення величин $a_\mu, b_\mu, \alpha_\mu, \beta_\mu$ отримуються з означень $a_{ij\mu}$, $b_{ij\mu}$, $\alpha_{ij\mu}$, $\beta_{ij\mu}$ в попередньому абзаці, якщо опустити індекси i та j. Від функції $\varphi_\mu(\xi)$ слід вимагати диференційованості до порядку $M_{k\mu} = k + \max(\alpha_\mu, \beta_\mu)$ для деякого цілого додатного k всюди на відрізку $a_\mu \le \xi \le b_\mu$ [18].

Загалом, якщо потрібно розв’язати конкретне характеристичне рівняння, то спочатку слід визначити асимптотичні корені, потім – отримати наближення до неасимптотичних коренів, користуючись асимптотичними формулами чи прямими або графічними методами і довести точність цих наближень до бажаної.

В доповнення до скінченного числа коренів поруч з початком координат, характеристичне рівняння (2.28) має «ланцюги» більш-менш рівномірно розташованих коренів, що прямують до нескінченності. Віддалені корені називаються асимптотичними коренями. Розташування цих коренів визначається лише кількома членами характеристичного рівняння, так що їх можна визначати наближено.

Із (2.28) при $z \to 0$ отримуємо:

$$D(z) = \sum_{\mu=0}^{m} C_\mu z^\mu + \sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=1}^{N} D_{\mu\nu} z^\mu e^{-z\xi_\nu} + \sum_{\mu=0}^{n}\left(e^{-za_\mu} \sum_{p=\alpha_\mu}^{M_{k\mu-1}} z^{\mu-p-1} \varphi_\mu^{(p)}(a_\mu) - \right.$$

$$-e^{-zb_\mu}\sum_{p=\beta_\mu}^{M_{k\mu-1}} z^{\mu-p-1}\varphi_\mu^{(p)}(b_\mu)+o(z^{\mu-M_{k\mu}}e^{-za_\mu})+o(z^{\mu-M_{k\mu}}e^{-zb_\mu})\Bigg), \qquad (2.29)$$

де $M_{k\mu}=k+\max(\alpha_\mu,\beta_\mu)$. Кожен член у цьому виразі має вигляд

$$z^\mu e^{-z\xi}=e^{\mu\ln z-\xi z}. \qquad (2.30)$$

Його абсолютна величина має вигляд

$$\left|z^\mu e^{-z\xi}\right|=e^{\mu\ln|z|-\xi\operatorname{Re} z}. \qquad (2.31)$$

Це монотонно зростаюча функція від

$$\mu\ln|z|-\xi\operatorname{Re} z.$$

Розглянемо тепер дві точки $P(\xi,\mu)$ і $Q(-\operatorname{Re} z,\ln|z|)$ у прямокутній системі координат (рис. 2.1). Опустимо перпендикуляр з точки P на пряму OQ і продовжимо його до перетину з вертикальною віссю в точці R. З геометричних міркувань випливає, що

$$\mu-\frac{\xi\operatorname{Re} z}{\ln|z|}=OR=f(\xi,\mu,\varphi), \qquad (2.32)$$

де φ – це кут між додатним напрямком горизонтальної осі і прямою OQ (див. рис. 2.1); φ є функцією від z.

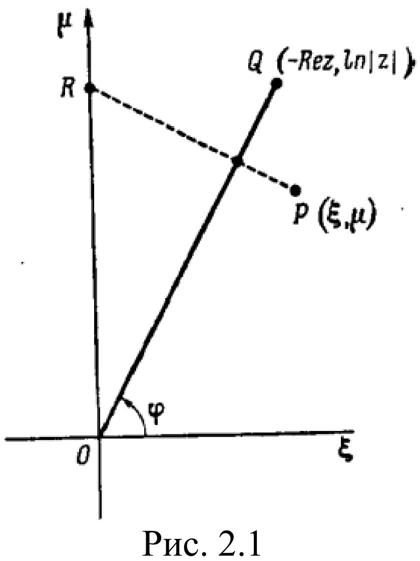

Рис. 2.1

З (2.31) випливає, що

$$\left|z^{\mu}e^{-z\xi}\right| = |z|^{f(\xi,\mu,\varphi)}; \quad tg\varphi = -\frac{\ln|z|}{\operatorname{Re} z}, \qquad 0 < \varphi < \pi, \tag{2.33}$$

де кут φ залежить від z так, як вказано на рис. 2.1. Звідси маємо, що функція $f(\xi,\mu,\varphi)$ є мірою величини кожного члену в (2.29) виду (2.30). Ця величина змінюється разом з кутом φ. Для одного кута φ домінуючим в (2.29) може бути один член, для іншого – інший [25].

Усе це можна досить просто дослідити графічно. Візьмемо для кожного члену в (2.29) виду (2.30) відповідну точку (ξ,μ) на площині – $\operatorname{Re} z, \ln|z|$. Отримувана множина точок називається *D*-множиною. З цих точок для кожного кута φ проведемо прямі під кутом $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$ до додатного напрямку горизонтальної осі до перетину з вертикальною віссю (як показано на рис. 2.2). Очевидно, що точці *D*-множини, для якої відповідна точка перетину з вертикальною віссю лежить вище за інші, відповідає домінуючий член в (2.29).

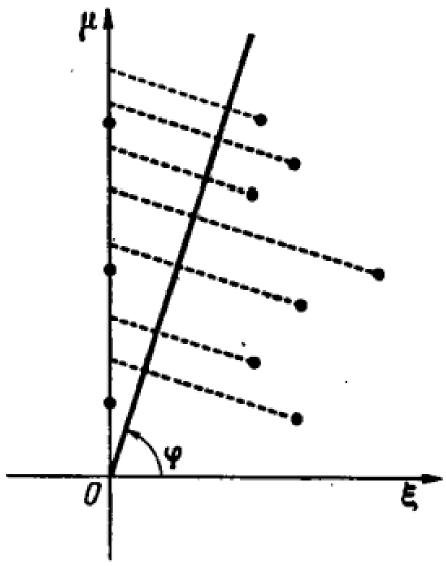

Рис. 2.2

Зрозуміло, що лише ті точки *D*-множини, які лежать на її опуклій оболонці (рис. 2.3) можуть відповідати домінуючим членам. *D*-множина лежить повністю у першій чверті, і важливими є тільки ті значення φ, для яких $0 < \varphi < \pi$.

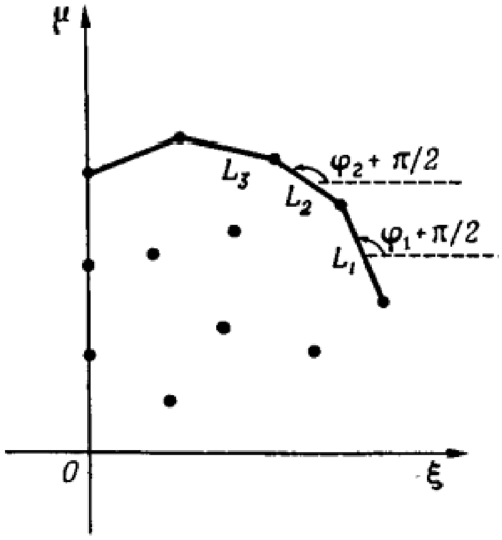

Рис. 2.3

Діаграми такого типу, як наведені на рисунках 2.2 та 2.3, називають *D*-діаграмами [20].

Опукла оболонка *D*-множини (рис. 2.3), яка становить особливий інтерес, є незамкненим многокутником, зверненим опуклістю у бік, протилежний до початку координат. Нехай $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 + \frac{\pi}{2}$, … позначають кути нахилу послідовних сегментів цього многокутника, де $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \pi$. Позначимо ці сегменти відповідно $L_1, L_2, \ldots$. На кожному *L*-сегменті є не менше двох елементів *D*-множини. Кінці *L*-сегментів називають кутовими точками. Правий кінець сегмента L_s називають *s*-ю кутовою точкою. Точка $(0, m)$ буде кінцевою кутовою точкою і буде мати номер, наступний після номеру точки на правому кінці *L*-сегмента, що проходить через точку $(0, m)$.

Якщо $\varphi = \varphi_s + O\left(\frac{1}{\ln |z|}\right)$, то усі члени у (2.29), що відповідають точкам *D*-множини, які лежать на сегменті L_s, будуть домінуючими при $|z| \to \infty$. Для φ не близьких до жодного з кутів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ в цьому сенсі, єдиний член у (2.29), що відповідає одній з кутових точок, буде домінуючим. Він не дорівнює нулю, так що асимптотичних коренів на площині z в області, що відповідає такому значенню φ, бути не може.

Таким чином, слід шукати асимптотичні корені, коли $\varphi = \varphi_s + O\left(\frac{1}{\ln|z|}\right), \; s = 1,2,...$ і коли усі члени, що відповідають точкам на L_s, будуть домінуючими. Відношення ε_s членів у (2.29), які відповідають точкам D-множини, що не лежать на L_s, до членів, які відповідають точкам, що лежать на L_s, має порядок $o(1)$ при $|z| \to \infty$. Тоді (2.29) можна записати у вигляді

$$D(z) = \sum_{L_s} E_{sq} z^{\mu_{sq}} e^{-z\xi_{sq}} (1 + O(\varepsilon_s)), \tag{2.34}$$

де сумування відбувається за членами, що відповідають точкам на L_s.

Нехай f_s позначає точку перетину прямої L_s з віссю μ. Тоді для усіх точок прямої L_s при $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$

$$\xi_{sq} = -\mu_{sq} tg\varphi_s + f_s tg\varphi_s.$$

Тому

$$D(z) = e^{-zf_s tg\varphi_s} \sum_{L_s} E_{sq} \left(ze^{ztg\varphi_s}\right)^{\mu_{sq}} (1 + O(\varepsilon_s)). \tag{2.35}$$

Нехай тепер Z – який-небудь ненульовий корінь рівняння

$$\sum_{L_s} E_{sq} Z^{\mu_{sq}} = 0. \tag{2.36}$$

Це алгебраїчне рівняння, і воно може бути розв'язане відомими методами. Згідно (2.35), асимптотичні корені мають задовольняти рівняння

$$ze^{ztg\varphi_s} = Z(1 + O(\varepsilon_s)).$$

Для $\varphi_s \neq \frac{\pi}{2}$ це дає

$$z = -ctg\varphi_s \ln\left|2\pi p \frac{ctg\varphi_s}{Z}\right| + ictg\varphi_s\left(\pm\left(2p - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(ctg\varphi_s)\right)\pi + \arg Z\right) +$$

$$+O(\varepsilon_s) + O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \tag{2.37}$$

де p – велике ціле додатне число, а $\varepsilon_s = o(1)$ при $p \to \infty$.

Коли p збільшується, (2.37) описує подвійний ланцюг коренів характеристичного рівняння. Для кожного ненульового кореня рівняння (2.36) існує один такий подвійний ланцюг, а для кожного сегменту L_s – одне рівняння (2.36).

Випадок $\varphi_s = \dfrac{\pi}{2}$ потребує окремого дослідження. Коли $\varphi_s = \dfrac{\pi}{2}$, усі величини μ_{sq} в (2.34) рівні, так що член $z^{\mu_{sq}}$ може бути винесений за знак суми. Провівши міркування, аналогічні до попередніх, отримуємо, що при $\varphi_s = \dfrac{\pi}{2}$:

$$z = -\ln|\overline{Z}| + i(\pm 2p\pi - \arg \overline{Z}) + O(\varepsilon_s), \tag{2.38}$$

де p – велике ціле додатне число, $\varepsilon_s = o(1)$ при $p \to \infty$ і $\overline{Z}$ – який-небудь ненульовий корінь рівняння

$$\sum_{L_s} E_{sq} \overline{Z}^{\varepsilon_{sq}} = 0. \tag{2.39}$$

Похибка ε_s у (2.37) і (2.38) може бути визначена більш точно, якщо жодна з точок сегменту L_s на *D*-діаграмі не відповідає членам, що містять функцію $\varphi_\mu(\xi)$ в (2.29), або якщо ціле число k не менше за 2. Тоді відношення членів, що відповідають точкам, які не лежать на L_s, до членів, що відповідають точкам, які лежать на L_s, дорівнює $O\left(\dfrac{1}{p}\right) + O(p^{-r_s})$, коли $\varphi = \varphi_s + O\left(\dfrac{1}{\ln p}\right)$, де r_s – відстань, виміряна по вертикалі, від L_s до найближчої точки *D*-множини, яка не лежить на L_s. При цьому

$$\varepsilon_s = O\left(\frac{1}{p}\right) + O(p^{-r_s}). \tag{2.40}$$

Якщо $m > n$, то найвища точка в *D*-множині лежить на уявній осі і всі кути φ_s менші за $\frac{\pi}{2}$. Із (2.37) випливає, що при зростанні p дійсні частини коренів характеристичного рівняння набувають все більших за абсолютною величиною від'ємних значень, так що для будь-якого наперед заданого числа існує не більше скінченного числа коренів характеристичного рівняння, дійсні частини яких більші за це число.

Якщо $m = n$, то найбільший кут φ_s дорівнює $\frac{\pi}{2}$ і, згідно (2.38) будуть існувати ланцюги асимптотичних коренів. Дійсні частини яких асимптотично наближаються до констант.

Якщо ж $m < n$, то найбільший кут φ_s є більшим за $\frac{\pi}{2}$. Згідно (2.37), буде існувати принаймні один ланцюг коренів характеристичного рівняння, дійсні частини яких необмежено збільшуються при зростанні p [16].

Для будь-якої точки z, що знаходиться на відстані порядку 1 від асимптотичних коренів, функція $D(z)$ буде мати порядок домінуючого члена в (2.29). Це відповідає найбільш високій проекції на вертикальну вісь на рис. 2.2. Так як $(0, m)$ є найвищою точкою *D*-множини на вертикальній осі, то ця проекція завжди не менша за m. Згідно (2.29), (2.32) і (2.33), при $|z| \to \infty$:

$$\left|\frac{1}{D(z)}\right| = O(|z|^{-m}).$$

Проілюструємо розглянуту теорію знаходженням асимптотичних коренів характеристичного рівняння

$$D(z) \equiv z + e^{-z}(az + b) = 0, \tag{2.41}$$

де a і b – константи. Це рівняння є рівнянням виду (2.28) з $m=1$, $n=1$, $N=1$, $\xi_1=1$, $C_0=0$, $C_1=1$, $D_{01}=b$, $D_{11}=a$, $\varphi_0=\varphi_1=0$.

Побудуємо тепер *D*-діаграму для функції (2.41). Порівнюючи (2.30) з (2.41), бачимо, що *D*-множина складається з трьох точок: (0,1), (1,1) і (1,0). Вони зображені на рисунку 2.4. Опукла оболонка множини складається із відрізку L_1 при $a \neq 0$. Якщо $a=0$, то точка (1,1) не належить *D*-множині і опуклою оболонкою *D*-множини є відрізок L_1' на рис. 2.4. Величина φ_1, що відповідає L_1, дорівнює $\frac{\pi}{2}$, а величина φ_1, що відповідає L_1', дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

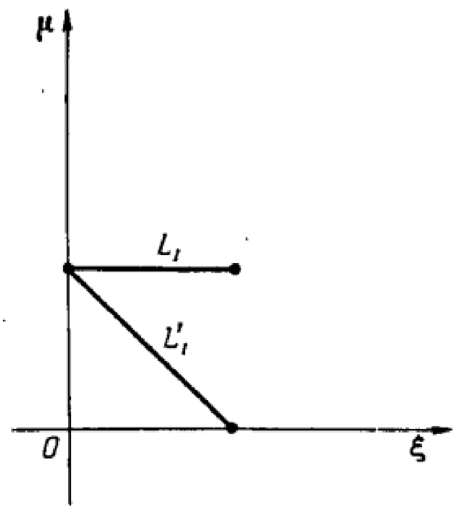

Рис. 2.4

Покладемо спочатку, що $a \neq 0$. Тоді $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. У (2.34) увійдуть тільки ті члени, які відповідають точкам (0,1) та (1,1) на L_1. Дійсно, згідно (2.34) і (2.41), $E_{11}=1$, $\mu_{11}=1$, $\xi_{11}=0$, $E_{12}=a$, $\mu_{12}=1$, $\xi_{12}=1$. Рівняння (2.39) набуває вигляду

$$1 + a\overline{Z} = 0,$$

так що . Згідно (2.38), асимптотичні корені отримуються з формул

$$\begin{cases} z = \ln(-a) \pm 2p\pi i + O\left(\dfrac{1}{p}\right) & \text{при} \quad a < 0, \\ z = \ln a \pm (2p+1)\pi i + O\left(\dfrac{1}{p}\right) & \text{при} \quad a > 0. \end{cases} \tag{2.42}$$

ε_1 в (2.34) розраховується за рисунком 2.4 з урахуванням того, що $r_1 = 1$ в (2.36).

Нехай тепер $a = 0$, так що $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$. Головні члени в (2.34) відповідають точкам (0,1) і (1,0) на L_1'. Дійсно, за (2.34)

$$E_{11} = 1,\ \mu_{11} = 1,\ \xi_{11} = 0,\ E_{12} = b,\ \mu_{12} = 0,\ \xi_{12} = 1.$$

Рівняння (2.36) набуває вигляду

$$Z + b = 0,$$

так що . Згідно (2.37), асимптотичними коренями будуть [4]

$$z = -\ln\left|\frac{2\pi p}{b}\right| \pm \left(\frac{1}{2}\operatorname{sgn} b + 2p\right)\pi l + O\left(\frac{\ln p}{p}\right). \tag{2.43}$$

2.3. Розв’язування диференціально-різницевих рівнянь із застосуванням рядів для випадку некратних коренів характеристичного рівняння

Диференціально-різницеве рівняння

$$y'(t) + ay'(t-1) + by(t-1) = \omega(t) \tag{2.44}$$

є одним із найважливіших прикладів диференціально-різницевих рівнянь, що мають прикладне застосування.

Тут a і b – константи. Функція вважається інтегрованою і такою, що має обмежену варіацію по t на кожному скінченному інтервалі в області $t \geq 0$.

У якості початкових умов задають похідну $y'(t)$, визначену, інтегровану і з обмеженою варіацією на $-1 \le t < 0$ і значення $y(t_0)$, що задається у деякій фіксованій точці t_0, такій, що $-1 \le t_0 < 0$.

Рівняння (2.44) є рівнянням виду

$$\sum_{\mu=0}^{m} C_{\mu} y^{\mu}(t) + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=1}^{N} D_{\mu\nu} y^{\mu}(t-\xi_{\nu}) + \sum_{\mu=0}^{n} \int_{\gamma}^{\beta} \varphi_{\mu}(\xi) y^{(\mu)}(t-\xi) d\xi = \omega(t),$$

у якому

$$m=1, n=1, N=1, \xi_1=1, C_0=0, C_1=1, D_{01}=b, D_{11}=a, \varphi_0=0, \varphi_1=0$$

Рівняння (2.44) має єдиний розв'язок $y(t)$, такий, що $y'(t)$ – інтегрована і має обмежену варіацію у будь-якому скінченному інтервалі в області $t \ge 1$. При $-1 \le t < 0$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau. \tag{2.45}$$

Для $t \ge 0$ функція $y(t)$ може бути виражена у вигляді ряду, сумування у якому відбувається за коренями z_n характеристичного рівняння

$$D(z) \equiv z + e^{-z}(az+b) = 0. \tag{2.46}$$

Вигляд цього ряду, як відомо, залежатиме від наявності чи відсутності кратних коренів у рівняння (2.46).

Дослідження коренів характеристичного рівняння (2.46) легко проводити у термінах, пов'язаних із поняттям (x,k)-плато. Покладаючи $z = x + iy$ і виділяючи у (2.46) дійсну та уявну частини, отримуємо рівняння:

$$X(x,y) \equiv x + e^{-x}((ax+b)\cos y + ay \sin y) = 0, \tag{2.47}$$

$$Y(x,y) \equiv y + e^{-x}(-(ax+b)\sin y + ay\cos y) = 0. \tag{2.48}$$

Ці рівняння є рівняннями меж (x,k)-плато на (a,b)-площині, причому x розглядається як стала, а y – як параметр. Вони задовольняються при $y = 0$ і

$$b = -xa - xe^{x}. \tag{2.49}$$

Рівняння (2.49) – це рівняння прямої на (a,b)-площині, що проходить через точки $(-e^x,0)$, $(-(1+x)e^x, x^2e^x)$ і $(e^x,-2xe^x)$, і яка має кутових коефіцієнт, який дорівнює $-x$. Якщо $y \neq 0$, то рівності (2.47) і (2.48) виконуються при

$$a = -e^x\left(\cos y + x\frac{\sin y}{y}\right),$$
$$b = e^x\left(y + \frac{x^2}{y}\right)\sin y, \tag{2.50}$$

Для фіксованого це параметричні рівняння з параметром деякої кривої на (a,b)-площині. Праві частини у (2.50) є парними функціями від y, так що при від’ємних значеннях y просто ще раз обходиться межа (x,k)-плато, яка відповідає додатним значенням y. У відповідності до цього, криву (2.50) можна розглядати як подвійну криву, що починається при $y=0$, і її слід будувати тільки для додатних y. При переході точки (a,b) через цю криву два корені характеристичного рівняння перейдуть через пряму $x = x(=const)$ на площині z [11].

Початкові точки кривої (2.50), які відповідають значенню $y=0$, становлять певний інтерес. Це точки

$$a = -(1+x)e^x, \qquad b = x^2e^x. \tag{2.51}$$

Ці точки належать кривій, що зображена на рисунку 2.5. Точка повернення відповідає $x=-2$. Крива має кут нахилу $-x$ і дотикається до прямої (2.49), причому точка дотику є початковою точкою (2.51) для того самого x.

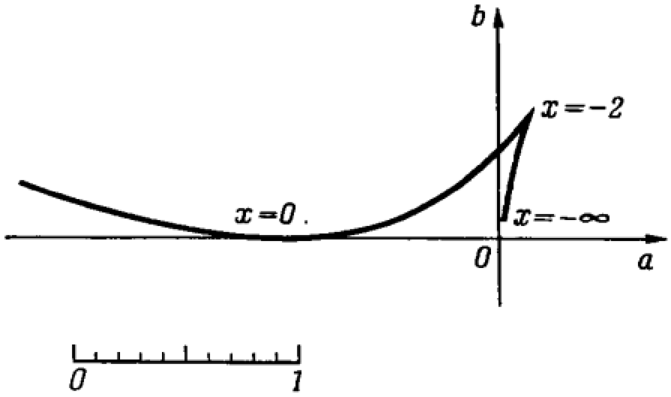

Рис. 2.5

Крива (2.50) проходить через послідовно повторювані точки $(e^x, -2xe^x)$, $(e^x, 0)$, $(-e^x, 2xe^x)$, $(-e^x, 0)$ для значень y, що відповідають кореням рівнянь

$$y ctg \frac{y}{2} + x = 0, \quad \cos \frac{y}{2} = 0$$

(тобто $y = (2n+1)\pi$) і

$$y ctg \frac{y}{2} - x = 0, \quad \sin \frac{y}{2} = 0$$

(тобто $y = 2\pi n$) відповідно. Пряма (2.49) також проходить через $(e^x, -2xe^x)$ і $(e^{-x}, 0)$.

Кратні корені характеристичного рівняння знаходяться шляхом прирівнювання $D(z)$ до нуля і його похідних [21].

Наведений вище матеріал дає змогу знайти корені характеристичного рівняння (2.46) поблизу початку координат. Асимптотичні вирази для коренів характеристичного рівняння, далеких від початку координат були виведені у підрозділі 2.2. Узагальнюючи отримані там результати, згідно (2.42) та (2.43) отримуємо:

$$z_{\pm p} = \ln(-a) \pm (2p-2)\pi i + O\left(\frac{1}{p}\right), \qquad a < 0,$$

$$z_{\pm p} = -\ln\left(-\frac{2p\pi}{b}\right) \pm \left(2p - \frac{1}{2}\right)\pi i + O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \qquad a = 0,\ b < 0,$$

$$z_{\pm p} = -\ln\left(\frac{2p\pi}{b}\right) \pm \left(2p - \frac{3}{2}\right)\pi i + O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \qquad a = 0,\ b > 0,$$

$$z_{\pm p} = \ln a \pm (2p-1)\pi i + O\left(\frac{1}{p}\right), \qquad a > 0$$

для великих додатних цілих p .

Всі корені характеристичних рівнянь будуть простими, якщо не існує такого дійсного числа ξ , що

$$a = -(1+\xi)e^{\xi}, \qquad b = \xi^2 e^{\xi},$$

тобто якщо точка (a,b) не лежить на кривій (2.51), зображеній на рисунку (2.5). Тоді для $t \ge 0$

$$y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{az_j + b}{az_j^2 + bz_j + b} e^{z_j t}\left(\int_0^t e^{-z_j \tau}\omega(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{0} e^{-z_j \tau} y'(\tau)d\tau - bz_j^{-1} y(-1)\right), \tag{2.52}$$

де z_j – корінь характеристичного рівняння (2.44), що задовольняє умови, сформульовані в підрозділі 2.2; іншими словами, член, відповідний $j = 0$, буде відсутнім у цій сумі, якщо $a = 0$, і присутнім, якщо $a > 0$.

Розділ 3. Деякі приклади застосування диференціально-різницевих рівнянь до прикладного моделювання

3.1. Задача про мережу та модель дифузії по капілярах нескінченної плоскої мережі з профілем чарунок одиничних квадратів

Диференціально-різницеві рівняння, що розглядались вище, мали лише один різницевий індекс, або змінну, за якою в рівнянні беруться різниці. Коли наявні кілька таких індексів, то часто можна звести задачу до розв'язування одного чи кількох одноіндексних диференціально-різницевих рівнянь. Розглянемо далі спосіб, який дозволяє це зробити.

Перш за все, припустимо, що рівняння можна перетворити так, щоб у нього входили тільки цілочислові різниці. Тоді різницеві змінні можна для зручності записувати як підрядкові індекси. Припустимо, що є r різницевих змінних $p_1, p_2, ..., p_r$ і одна змінна диференціювання t. Розглядатимемо рівняння, що можуть бути записані у вигляді

$$F\big(f(D_t)\varphi, g_1(\Delta_{\rho_1})\varphi, g_2(\Delta_{\rho_2})\varphi, ..., g_r(\Delta_{\rho_r})\varphi\big)=0, \tag{3.1}$$

де $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$ і $f, g_1, g_2, ..., g_r$ – многочлени від своїх аргументів, а φ – функція від $t, p_1, p_2, ..., p_r$.

Розглянемо тепер рівняння

$$F\big(f(D_t)\psi, g_1(D_{x_1})\psi, g_2(D_{x_2})\psi, ..., g_r(D_{x_r})\psi\big)=0, \tag{3.2}$$

де $D_{x_k} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$. Це диференціальне рівняння з частинними похідними з невідомою функцією ψ від аргументів $t, x_1, x_2, ..., x_r$. Його розв'язок буде, взагалі кажучи, містити довільну функцію чи, принаймні, довільні сталі. Будемо розглядати цей розв'язок як функцію від індексів $p_1, p_2, ..., p_r$, які не присутні в рівнянні (3.2). Тоді ψ буде також функцією від $p_1, p_2, ..., p_r$ і може бути записана у вигляді $\psi(t, x_1, x_2,..., x_r, p_1, p_2,..., p_r)$. Якщо тепер залежність ψ від змінних $p_1, p_2,..., p_r$ така, що

$$g_k(D_{x_k})\psi = g_k(\Delta_{\rho_k})\psi, \quad k = 1,2,..., r, \tag{3.3}$$

то ясно, що ψ, яка розглядається як функція від $t, p_1, p_2,..., p_r$, буде розв'язком рівняння (3.1), причому величини $x_1, x_2,..., x_r$ будуть відігравати роль довільних параметрів [19].

Нехай нескінченна плоска мережа має квадратні одиничні чарунки. Будемо вважати, що на площині задано прямокутну систему координат p, q з осями, паралельними волокнам мережі, так, що точки перетину волокон мають цілочислові координати. Волокна вважаються всюди однорідними, такими, що не мають маси та з постійною напругою T. У кожній точці перетину волокон помістимо масу m. Припустимо, що тільки одна з цих мас, яка розташована в точці (0, 0), зміщена (з нульовою початковою швидкістю) перпендикулярно площині спокою мережі.

Нехай t – час, а $y_{p,q}(t)$ – нормальне зміщення від площини спокою маси, поміщеної в точці (p, q). Припускаючи, що $|y_{p,q}(t)| << 1$ і нехтуючи членами порядку, вище першого, отримуємо

$$y''_{pq}(t) = k^2(\Delta_p^2 + \Delta_q^2) y_{p,q}(t), \tag{3.4}$$

де

$$k^2 = \frac{T}{m}, \tag{3.5}$$

$$\Delta^2 f_p = f_{p+1} - 2f_p + f_{p-1}. \tag{3.6}$$

В якості початкових умов маємо:

$$y_{p,q}(0) = \delta_{p,0}\delta_{q,0}, \quad y'_{p,q}(0) = 0. \tag{3.7}$$

Рівняння (3.4) має вид (3.1) з $f(D_t) = D_t^2$, $g_1(\Delta_p) = -k^2\Delta_p^2$, $g_2(\Delta_q) = -k^2\Delta_q^2$ і $F(a,b,c) = a - b - c$.

Рівнянням, відповідним (3.2) буде

$$\frac{\partial^2 y_{pq}}{\partial t^2} = k^2\left(\frac{\partial^2 y_{pq}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_{pq}}{\partial x_2^2}\right). \tag{3.8}$$

Загальним розв'язком рівняння (3.8) є

$$y_{pq}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f_{pq}(x_1 - kt\sin\theta\cos\varphi, x_2 + kt\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi\right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi}t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_{pq}(x_1 + kt\sin\theta\cos\varphi, x_2 + kt\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi, \tag{3.9}$$

яке задовольняє початкові умови

$$y_{p,q}(x_1, x_2, 0) = f_{p,q}(x_1, x_2), \qquad \dot{y}_{p,q}(x_1, x_2, 0) = F_{p,q}(x_1, x_2), \tag{3.10}$$

де крапка позначає похідну по третьому аргументу.

Умови (3.3) будуть виконуватись, якщо $f_{p,q}$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_{p,q}(x_1, x_2) = \Delta_p^2 f_{p,q}(x_1, x_2), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f_{p,q}(x_1, x_2) = \Delta_p^2 f_{p,q}(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.11}$$

і $F_{p,q}$ – аналогічним рівнянням. Нехай функції у (3.10) задовольняють умови (3.7) для деяких окремих значень x_1 та x_2, наприклад, для $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Тоді

$$F_{p,q}(0,0) = \delta_{p,0}\delta_{q,0}, \quad F_{p,q}(0,0) = 0. \tag{3.12}$$

Очевидно, що виконання останньої умови можна досягти, поклавши $F_{p,q}(x_1, x_2) = 0$.

Із рівнянь (3.11) отримуємо

$$f_{p,q}(x_1, x_2) = J_{2p}(2x_1)J_{2q}(2x_2).$$

Підставляючи ці вирази у (3.9) і поклавши $x_1 = x_2 = 0$, отримаємо

$$y_{pq}(t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}J_{2p}(2kt\sin\theta\cos\varphi)J_{2q}(2kt\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi\right). \quad (3.13)$$

Перейшовши від сферичних координат до прямокутних x, y, z та виконавши поворот системи координат навколо осі x на 90° і повернувшись до сферичних координат, (3.13) зведемо до вигляду

$$y_{pq}(t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}J_{2p}(2kt\sin\theta\cos\varphi)J_{2q}(2kt\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi\right). \quad (3.14)$$

Поклавши за формулою Ватсона $\nu=2p, Z=z, \varphi=\pi-2\psi$ і проінтегрувавши від $\psi=0$ до $\psi=2\pi$, знаходимо

$$\int_0^{2\pi}J_{2p}(2z\cos\psi)d\psi=2\pi J_p^2(z). \quad (3.15)$$

Відповідно у (3.14) можна виконати інтегрування по φ:

$$y_{p,q}(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_0^{2\pi}J_p^2(kt\sin\theta)J_{2q}(2kt\cos\theta)\sin\theta d\theta\right). \quad (3.16)$$

Формули (3.14) та (3.16) симетричні відносно p та q [20].

Тепер розглянемо дифузію речовини (чи тепла) по волокнах нескінченної плоскої мережі, чарунки якої утворюють одиничні квадрати. Будемо вважати, що на площині задано прямокутну систему координат координат p, q з осями, паралельними волокнам мережі, так, що точки перетину волокон мають цілочислові координати. Припустимо, що в цих точках є деякі сталі ємності і що волокна переносять речовину (чи тепло) в кількостях, пропорційних різниці концентрацій (чи температур) у їх кінцевих точках. Якщо $y_{pq}(t)$ – концентрація (або температура) в точці (p, q), то рівняння дифузії має вигляд

$$y'_{pq}(t)=\chi(\Delta_p^2+\Delta_q^2)y_{pq}(t), \quad (3.17)$$

де χ – стала дифузії і

$$\Delta_p^2 f_p=f_{p+1}-2f_p+f_{p-1}. \quad (3.18)$$

Припустимо, що тільки в одній точці перетину, а саме в (0,0), міститься одинична концентрація (або температура) в момент часу $t=0$, а інші точки перетину мають нульову концентрацію (чи температуру). Визначимо стан мережі при $t>0$

Початкові умови мають вигляд

$$y_{pq}(0)=\delta_{p0}\delta_{q0}. \tag{3.19}$$

Рівняння (3.17) має вигляд (3.1) з $f(D_t)=D_t$, $g_1(\Delta_p)=-\chi\Delta_p^2$, $g_2(\Delta_q)=-\chi\Delta_q^2$ і $F(a,b,c)=a-b-c$.

Рівнянням, відповідним (3.2), буде

$$\frac{\partial y_{pq}}{\partial t}=\chi\left(\frac{\partial^2 y_{pq}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 y_{pq}}{\partial x_2^2}\right). \tag{3.20}$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$y_{pq}(x_1,x_2,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{pq}(x_1+\sqrt{4\chi t}u,x_2+\sqrt{4\chi t}v)e^{-u^2-v^2}dudv, \tag{3.21}$$

яке задовольняє початкові умови

$$y_{pq}(x_1,x_2,0)=f_{pq}(x_1,x_2). \tag{3.22}$$

Слід вимагати, щоб (3.22) задовольняло умовам (3.19) для деяких окремих значень x_1 та x_2, наприклад $x_1=0$ та $x_2=0$. Тоді

$$f_{pq}(0,0)=\delta_{p0}\delta_{q0}. \tag{3.23}$$

Умови (3.3) виконуватимуться, якщо

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f_{p,q}(x_1,x_2)&=\Delta_p^2 f_{p,q}(x_1,x_2),\\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}f_{p,q}(x_1,x_2)&=\Delta_p^2 f_{p,q}(x_1,x_2),\end{aligned} \tag{3.24}$$

звідки

$$f_{pq}(x_1,x_2)=J_{2p}(2x_1)J_{2q}(2x_2).$$

Підставивши цей вираз у (3.21) та поклавши $x_1 = x_2 = 0$, отримаємо

$$y_{pq}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - v^2} J_{2p}(4u\sqrt{\chi t} J_{2q}(4v\sqrt{\chi t})dudv.$$

Врахувавши формулу Ватсона, ці інтеграли можна обчислити:

$$y_{pq}(t) = \frac{1}{\pi} e^{-4\chi t} I_p(2\chi t) I_q(2\chi t). \tag{3.25}$$

Тут I – функція Бесселя першого роду від уявного аргументу.

З (3.25) очевидно, що $y_{pq}(t)$ залишається дуже малою до моменту часу, приблизно рівного $\left(\frac{0{,}3}{\chi}\right)\max(p, q)$, біля якого $y_{pq}(t)$ досить швидко зростає до свого єдиного максимуму, а потім спадає, асимптотично наближаючись до $\left(\frac{1}{4\pi\chi t}\right)$ [23].

3.2. Задача Пуассона про криву на площині

Велика кількість функціональних рівнянь зводиться різними способами до диференціально-різницевих рівнянь.

Розглянемо систему

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}; f(x), f'(x), ..., f^{(p)}(x); f(y), f'(y), ..., f^{(n-1)}(y)\right), \tag{3.26}$$

$$f^n(y) = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}; f(x), f'(x), ..., f^{(p)}(x); f(y), f'(y), ..., f^{(n-1)}(y)\right), \tag{3.27}$$

де функція f і залежність між x та y невідомі.

Для розв’язування такої системи, підставимо в неї

$$x = \varphi(s), \quad y = \varphi(s+1), \quad f(x) = \psi(s), \quad f(y) = \psi(s+1). \tag{3.28}$$

Якщо

$$\varphi'(s) \neq 0, \tag{3.29}$$

то отримується система диференціально-різницевих рівнянь.

Якщо існують функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$, які задовольняють цю систему диференціально-різницевих рівнянь, то ясно, що функції (3.28) будуть задовольняти систему (3.26), (3.27). З іншого боку, нехай існують функції $f(x)$ і $y = y(x)$, які задовольняють систему (3.26), (3.27). $\varphi(s)$ можна визначити як розв'язок різницевого рівняння

$$\varphi(s+1) = y(\varphi(s))$$

і покласти $x = \varphi(s)$. Тоді $y = \varphi(s+1)$. Якщо визначити $\psi(s)$ відношенням

$$\psi(s) = f(\varphi(s)),$$

то $\psi(s) = f(x)$ і $\psi(s+1) = f(\varphi(s+1)) = f(y)$.

Пуассон розглянув наступну задачу: знайти криву, у якої квадрат нормалі у будь-якій її точці мінус квадрат ординати, виміряної вгору від основи нормалі, є величина стала і рівна 1.

На площині u, v (рис. 3.1)

$$\overline{PR}^2 - \overline{QR}^2 = 1. \tag{3.30}$$

Нехай $v = f(u)$– рівняння шуканої кривої, і нехай P позначає точку (u, v) на цій кривій. Тоді R – це точка $(u + vf'(u), 0)$ і Q – точка $(u + vf'(u), f(u + vf'(u)))$. Згідно (3.30),

$$f^2(u)(1 + f'^2(u)) - f^2(u + f(u)f'(u)) = 1. \tag{3.31}$$

Тепер покладемо

$$u = x, \quad u + f(u)f'(u) = y. \tag{3.32}$$

Тоді з (3.31)

$$y = x + f(x)f'(x), \tag{3.33}$$

$$f^2(y) = f^2(x)(1 + f'^2(x)) - 1. \tag{3.34}$$

Ці рівняння мають вид (3.26), (3.27). Згідно (3.28), маємо

$$\varphi(s+1) - \varphi(s) = \psi(s)\frac{\psi'(s)}{\varphi'(s)}, \tag{3.35}$$

$$\psi^2(s+1)-\psi^2(s)=\psi(s)\frac{\psi'^2(s)}{\varphi'^2(s)}-1. \qquad (3.36)$$

Підставляючи (3.35) і (3.36) та заміняючи s на $s-1$, отримуємо

$$\psi^2(s)-\psi^2(s-1)=\left(\varphi(s)-\varphi(s-1)\right)^2-1. \qquad (3.37)$$

Продиференціюємо цей вираз:

$$\psi(s)\psi'(s)-\psi(s-1)\psi'(s-1)=\left(\varphi(s)-\varphi(s-1)\right)\left(\varphi'(s)-\varphi'(s-1)\right).$$

Використовуючи (3.35) для виключення функції ψ , знаходимо

$$\varphi(s+1)-2\varphi(s)+\varphi(s-1)=0.$$

Загальний розв’язок цього рівняння:

$$\varphi(s)=sp(s)+P(s), \qquad (3.38)$$

де $p(s)$ і $P(s)$ – періодичні функції з періодом 1.

Із (3.37) та (3.38) випливає, що

$$\psi^2(s)-\psi^2(s-1)=p^2(s)-1.$$

Загальний розв’язок цього рівняння:

$$\psi^2(s)=s(p^2(s)-1)+Q(s), \qquad (3.39)$$

де $Q(s)$ – періодична функція з періодом 1.

Згідно (3.28), шукана крива задаватиметься рівнянням

$$u=sp(s)+P(s), \qquad v=\sqrt{s(p^2(s)-1)+Q(s)}, \qquad (3.40)$$

де, згідно (3.35), (3.38) і (3.39),

$$p(s)=-P'(s)\pm\sqrt{P'^2(s)+Q'(s)-1} \qquad (3.41)$$

і де $P(s)$ та $Q(s)$ – довільні диференційовані періодичні функції з періодом 1 [6].

3.3. Модель неконсервативних коливань у динамічних системах Ван дер Поля

Одним із найбільш відомих нелінійних диференціальних рівнянь є рівняння Ван дер Поля, яке є одним із класичних прикладів неконсервативних коливань у динамічних системах із нелінійним згасанням:

$$y''(t) + y(t) = \varepsilon(1 - y^2(t))y'(t), \tag{3.42}$$

де ε – малий додатній параметр.

Рівняння (3.42) має вигляд

$$\sum_{\mu=0}^{m} C_\mu y^{(\mu)}(t) + \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=1}^{N} D_{\mu\nu} y^{(\mu)}(t - \xi_\nu) = \varepsilon f(Y(t), t),$$

де $m = 2$, $N = 0$, $n = 3$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$ і $f(Y,t) = (1 - y^2)y'$.

Характеристична функція матиме вигляд

$$D(z) = z^2 + 1. \tag{3.43}$$

Характеристичне рівняння має два корені, які ми позначимо через $z_\pm$. Тоді $z_\pm = \pm i$ і $D'(z_\pm) = \pm 2i$.

В силу

$$Y^{(\mu)}(a,t,T) = Y^{(\mu)}(a,t,0) = \sum_S z_i^\mu e^{z_j t} a_j$$

отримуємо

$$Y(a,t,0) = a_+ e^{it} + a_\_ e^{-it},$$

$$Y^{(1)}(a,t,0) = ia_+ e^{lt} - = ia_\_ e^{-lt}.$$

Звідси

$$(1 - (a_+ e^{it} + a_\_ e^{-it})^2)(ia_+ e^{it} - ia_\_ e^{-it}) = i(a_+ - a_+^2 a_-)e^{it} - i(a_- - a_+ a_-^2)e^{-it} -$$

$$- ia_+^3 e^{3it} + ia_-^3 e^{-3it},$$

$$f_\pm(a,t) = \pm ia_\pm(1 - a_+ a_-).$$

Згідно

$$\frac{d\rho_j(t)}{dt} = \frac{\varepsilon f_j(\rho(t),t)}{D'(z_j)},$$

рівняннями усереднень будуть

$$\frac{d\rho_\pm}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon\rho_\pm(1-\rho_+\rho_-).$$

Поклавши

$$\rho_\pm = \mathrm{Re}^{\pm i\varphi}, \tag{3.44}$$

перетворимо їх до вигляду

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon R(1-R^2), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Розв'язком цих рівнянь є

$$R = (1+Ce^{-\varepsilon t})^{-\frac{1}{2}}, \qquad \varphi = const,$$

де C – довільна стала. Отже, згідно (3.44),

$$\rho_\pm = (1+Ce^{-\varepsilon t})^{-\frac{1}{2}}e^{\pm i\varphi},$$

де – довільна стала.

Тоді за формулою

$$y^{(\mu)}(t) = \sum_S z_j^\mu e^{z_j t}\rho_j(t) + O(\varepsilon K^n) + O\left(\frac{\varepsilon^2 K^{2n-1}}{\chi}\right)$$

знаходимо розв'язок рівняння (3.42):

$$y(t) = 2(1+Ce^{-\varepsilon t})^{-\frac{1}{2}}\cos(t+\varphi) + O(\varepsilon),$$

$$y'(t) = -2(1+Ce^{-\varepsilon t})^{-\frac{1}{2}}\sin(t+\varphi) + O(\varepsilon),$$

де C і φ – довільні сталі, які можуть бути визначені з використанням початкових умов [17].

Висновки

Під час дослідження було проаналізовано наукову та методичну літературу з теми, внаслідок чого систематизовано основні відомості про диференціально-різницеві рівняння, досліджено різні методи розв'язування звичайних диференціально-різницевих рівнянь.

У першому розділі роботи наведено основні теоретичні відомості про диференціальні, різницеві та диференціально-різницеві рівняння; розглянуто деякі їх типи.

У другому розділі вивчено методи розв'язування диференціально-різницевих рівнянь, зокрема, застосування інтегральних перетворень (Лапласа, Фур'є та Ейлера-Лапласа) та рядів.

У третьому розділі наведено приклади застосування диференціально-різницевих рівнянь до математичного моделювання реальних фізичних процесів. Зокрема розглянуто математичну модель дифузії по капілярах у нескінченній плоскій мережі, геометричну задачу Пуассона про криву на площині та неконсервативні коливання осцилятору Ван дер Поля.

Матеріали даної роботи можуть бути корисні студентам при вивченні відповідних курсів диференціальних та диференціально-різницевих рівнянь.

Достовірність результатів, отриманих у роботі, забезпечується достовірністю методів досліджень та повнотою джерел інформації, що використовувались.

Список використаних джерел

1. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Минск. Высшая школа. 2009. 236 с.

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва. Наука. 1970.

3. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во Ленинградского университета. 1981. 276 с.

4. Головатий Ю.Д., Кирилич В.М., Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь : навч. посіб. Львів. ЛНУ імені Івана Франка. 2011. 470 с.

5. Гутер Р.С. Янпольський А.Р. Диференціальні рівняння. Львів. Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка». 2006. 304 с.

6. Дородницын В.А. Групповые свойства разностных уравнений. Москва. Физматлит. 2001.

7. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Изд-во: ФИЗМАТЛИТ. 2007. 448 с.

8. Жегалов В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения в научных теориях. Казань. Казанское математическое сообщество. 2003. 100 с.

9. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ю.К. Рудавський та ін. Львів. Вища школа. 2001. 244 с.

10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 1971. 576 с.

11. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник для студ. природн. спец. вищих навч. закл. — Київ. Либідь. 2004.

12. Леонтьев А. Ф. Дифференциально-разностные уравнения. Москва. 1989. 375 с.

13. Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные однородные разностные уравнения. Москва. Наука, 1981.

14. Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные неоднородные разностные уравнения. Москва. Наука, 1986.

15. Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Москва. 1991. 526 с.

16. Петрівський Я.Б. Методичний посібник. – ч. 1. Звичайні диференціальні рівняння. Рівне, РДПІ, 1998. – 43с.

17. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб.пособ. Изд. 6-е. Москва. УРСС, 2003. 272 с.

18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд-во: «Наука». 1982. 332 с.

19. Романко В.К. Курс разностных уравнений. Москва. Бином. 2016. 315 с.

20. Романко В. К. Разностные уравнения: Учебное пособие. Москва. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 112 с.

21. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва. Наука. 1983. 656 с.

22. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підруч. для студ. мат. спец. вищ. навч. закладів. Київ. Либідь. 2003.

23. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Москва. Гостехиздат. 1968. 345 с.

24. Шапиро А. П., Луппов С. П. Рекуррентные уравнения в популяционной биологии. Москва. Наука. 1983. 132 с.

25. Шарковский А. И., Майстренко Ю. А., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев. Наукова думка, 1986. 280 с.

26. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння: Навч. посібник для студ. математ. спец. вищих навч. закладів. Київ. Техніка. 2003.

27. HilbE., Zur Theorie der linearen funktionalen Differentialgleichungen, Math. Ann. 1987. 170 p.

28. Neufeld J., On the operational solution of linear mixed difference differential equations, Proc. Cambridge philos. 1984. 391 p.

29. Po1ossuchina O., Uber eine besondere Klasse von differentialen Funktionalgleichungen. Zurich. 1980.

30. Schiirer F. Uber die Funktional-Differentialgleichungen. Ber. Verb. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig Math.-phys. 1952. 236 p.

31. Schmidt E.. Uber eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen, Math. Ann. 1961. 524 p.

32. Schiirer F., Eine gemeinsame Methode zur Behandlung gewisser Funktional-gleichungen, Math. Ann. 1958. 240 p.

33. Wright E. M., The linear difference-differential equation with constant coefficients, Proc. R. Soc. Edinburgh A. 1959. 393 p.