

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Якісний аналіз та знаходження властивостей розв'язку моделі вільного консервативного осцилятора

Виконала: студентка II курсу
магістратури, групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Милацька Вікторія Сергіївна

Керівник: доктор технічних наук,
професор Бичков О.С.

Рецензент: доктор технічних наук,
професор, завідувач кафедри прикладної
математики НУВГП
Мартинюк П.М.

Рівне-2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	5
1.1. Загальні поняття та означення	5
1.2. Способи розв'язування диференціальних рівнянь	10
1.3. Геометрична інтерпретація диференціальних рівнянь	12
1.3.1. Метод ізоклін	12
1.3.1. Метод фазових траєкторій	15
РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО АНАЛІЗУ МОДЕЛІ ВІЛЬНОГО КОНСЕРВАТИВНОГО ОСЦИЛЯТОРА	19
2.1. Основні поняття теорії коливних процесів	19
2.2. Класифікація коливних систем	23
2.3. Вільні коливання консервативної механічної системи з одним ступенем вільності	25
2.4. Вільні коливання консервативної механічної системи з багатьма ступенями вільності	37
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА	50
ВИСНОВКИ	56
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	57

ВСТУП

Актуальність. Коливні явища різної фізичної природи підкоряються загальним закономірностям. Наприклад, коливання струму в електричному ланцюзі і коливання математичного маятника можуть описуватися однаковими рівняннями. Спільність коливних закономірностей дозволяє розглядати коливні процеси різної природи з єдиної точки зору. Через розповсюдженість коливних процесів у природі та техніці дослідження коливних систем і моделювання їх поведінки є актуальною задачею.

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться знаходити невідому функцію з рівняння, яке містить поряд з цією невідомою функцією її похідні.

Рівняння, яке містить невідому функцію й її похідні, називається диференціальним рівнянням.

Багато фізичних явищ і процесів у природі та техніці описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем. Теорія звичайних диференціальних рівнянь є одним з найпотужніших інструментів пізнання довколишнього світу. Вона дозволяє вивчати й досліджувати різноманітні еволюційні процеси

Диференціальні рівняння досить повно і просто описують виробничі процеси. Тому важливо не лише вміти їх розв'язувати, а й складати.

Мета дослідження: здійснити якісний аналіз та знаходження властивостей розв'язку моделі вільного консервативного осцилятора диференціальними рівняннями.

Об'єкт дослідження: коливні процеси в системі осциляторів з різними ступенями вільності.

Предмет дослідження: модель вільного консервативного осцилятора.

Завдання:

1. Проаналізувати літературу з предмету дослідження.
2. Розкрити сутність математичного моделювання диференціальними рівняннями.

3. Проаналізувати питання з моделювання коливних процесів, аналітичних та чисельних методів розв'язання систем диференціальних рівнянь.

Методи дослідження. Під час дослідження у роботі використовувалися методи: аналіз наукової літератури з фаху, математичне моделювання, порівняння результатів дослідження.

Робота містить вступ, три розділи, висновки та список використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1. Загальні поняття та означення

У кінці XVII – на початку XVIII століття різноманітні практичні і наукові проблеми привели до появи диференціальних рівнянь. Насамперед, це були диференціальні рівняння першого порядку, інтегрування яких намагались здійснити за допомогою функцій, що виражають скінченне число алгебраїчних дій, або таких, що включають елементарні неалгебраїчні дії, наприклад оперування тригонометричними функціями.

Найбільш прості диференціальні рівняння з'явилися в працях Ісаака Ньютона (1643 – 1727) і Готфріда Лейбніца (1646 – 1716), саме Лейбніцу і належить термін «диференціальне рівняння». Диференціальні рівняння мають велике прикладне значення, вони є знаряддям дослідження багатьох задач природознавства та техніки. Їх широко використовують в механіці, астрономії, фізиці, хімії, біології. Це пояснюється тим, що досить часто об'єктивні закони, яким підпорядковуються певні явища (процеси), записують у формі диференціальних рівнянь, а самі ці рівняння є засобами для кількісного вираження цих законів.

Наприклад, фізичні закони описують деякі співвідношення між величинами, що характеризують певний процес, і швидкістю змінних цих величин. Іншими словами, ці закони виражають рівностями, в яких є невідомі функції та їх похідні.

У XVIII столітті теорія диференціальних рівнянь відокремилась з математичного аналізу в самостійну математичну дисципліну. Її успіхи пов'язані з іменами швейцарського Іоганна Бернуллі (1667 – 1748), французького математика Жозефа Лагранжа (1736 – 1813) і особливо Леонарда Ейлера (1707 – 1783).

Перший період розвитку диференціальних рівнянь був пов'язаний з успішним розв'язуванням деяких важливих прикладних задач, що приводять до диференціальних рівнянь, розробкою методів інтегрування різних типів

диференціальних рівнянь і пошуку класів рівнянь, розв'язки яких можна подати у вигляді елементарних функцій або їх первісних. Проте дуже швидко виявилось, що інтегрованих диференціальних рівнянь зовсім небагато. Це привело до розвитку власне теорії диференціальних рівнянь, яка займається розробкою методів, що дають змогу за властивостями диференціального рівняння визначити властивості і характер його розв'язку [23].

У зв'язку з потребами практики, поступово розробляються і способи наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи дають зручні алгоритми обчислень з ефективними оцінками точності, а сучасна обчислювальна техніка дає змогу економічно і швидко звести розв'язок кожної такої задачі до числового результату.

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться знаходити невідому функцію з рівняння, яке містить поряд із цією невідомою функцією її похідні.

Диференціальним рівнянням n -го порядку відносно функції $y = y(x)$ називається співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну x , шукану функцію $y(x)$ та її похідні (або диференціали):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить в це рівняння.

Якщо невідома функція залежить тільки від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним; якщо невідома функція залежить від кількох змінних і диференціальне рівняння містить її частинні похідні за цими змінними, то воно називається рівнянням у частинних похідних. Надалі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність. Розв'язок диференціального рівняння називається загальним, якщо він містить стільки довільних сталих, яким є порядок рівняння, і при будь-яких значеннях сталих задовольняє це рівняння [3].

Наприклад, функція

$$y = e^x$$

є розв'язком диференціального рівняння

$$y' - y = 0,$$

оскільки

$$(e^x)' = e^x.$$

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням рівняння.

Диференціальним рівнянням 1-го порядку відносно функції $y = y(x)$ називається вираз вигляду $F(x, y, y') = 0$ або

$$y' = f(x, y), \quad (1.1)$$

якщо він розв'язаний відносно похідної $y' = \frac{dy}{dx}$.

Існує ще одна форма запису диференціального рівняння 1-го порядку, розв'язаного відносно похідної:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ - задані функції. В цьому рівнянні змінні x та y - рівноправні, тобто будь-яку з них можна розглядати як функцію іншої.

Загальним розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку (1.1) називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка при будь-якому значенні сталої C є розв'язком цього рівняння. Співвідношення $\Phi(x, y, C) = 0$, яке містить розв'язок в неявному вигляді, називається загальним інтегралом рівняння (1.1).

Частковим розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку називається будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, отримана із загального розв'язку при певному значенні довільної сталої $C = C_0$. Відповідно, співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$, в цьому випадку, називається частковим інтегралом [8].

Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння на площині Oxy називається інтегральною кривою. Загальному розв'язку (загальному інтегралу) відповідає сукупність (сімейство) інтегральних кривих.

Інколи серед всіх розв'язків диференціального рівняння потрібно знайти такий розв'язок, який задовольняє умову: $y = y_0$ при $x = x_0$, де x_0 і y_0 – задані числа. Така умова називається початковою умовою і позначається таким чином:

$$y(x_0) = y_0 \text{ або } y|_{x=x_0} = y_0 \quad (1.2)$$

Геометрично це означає, що із сімейства інтегральних кривих, які визначаються загальним розв'язком (загальним інтегралом) рівняння, потрібно виділити інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$.

Задача знаходження частинного розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову (1.2) $\varphi(x_0) = y_0$, називається задачею Коші.

Умови, при яких рівняння (1.1) має розв'язок, дає наступна теорема.

Теорема Коші (існування та єдиності розв'язку).

Якщо в диференціальному рівнянні (1.1) функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\frac{df}{dx}$ неперервні в точці $M_0(x_0; y_0)$ та її околі, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкову умову (1.2), тобто $\varphi(x_0) = y_0$.

Геометричний зміст цієї теореми полягає в тому, що при виконанні її умов існує єдина інтегральна крива диференціального рівняння, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$

Точки, у яких порушуються умови теореми Коші, називаються особливими точками. Через такі точки або взагалі не проходить жодна інтегральна крива, або проходить кілька інтегральних кривих.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називаються особливими.

Особливий розв'язок не може бути отриманий із загального розв'язку при жодному значенні довільної сталої. Особливі розв'язки можуть з'явитися серед розв'язків, загублених в результаті перетворень даного рівняння в процесі його інтегрування [2].

Приклад. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння

$$yy' + 2x = 0,$$

який задовольняє початковим умовам:

$$y = 4, x = 3,$$

якщо загальний розв'язок даного рівняння задано у вигляді:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Підставивши в загальний розв'язок початкові умови, дістанемо значення довільної сталої

$$3^2 + 4^2 = a^2,$$

Звідси

$$a = \pm 5.$$

Отже, шуканий частковий розв'язок диференціального рівняння для заданих початкових умовах є функція y , задана рівнянням

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язку рівняння.

Оскільки кожен окремий розв'язок даного рівняння є деякою функцією однієї змінної, то в прямокутній системі координат на площині цьому розв'язку відповідає деяка лінія. Ця лінія називається інтегральною кривою даного диференціального рівняння.

Загальному розв'язку диференціального рівняння відповідає множина всіх інтегральних кривих цього рівняння, яка називається сім'єю інтегральних кривих.

Ми встановили, що частковим розв'язком рівняння

$$yy' + 2x = 0$$

при початкових умовах

$$x = 3 \text{ і } y = 4,$$

є крива

$$x^2 + y^2 = 25,$$

а загальним розв'язком – сім'я інтегральних кривих

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

У системі координат на площині загальний розв'язок задає множину концентричних кіл з центром у початку координат. Початкові умови означають, що серед цієї множини кіл треба взяти те коло, яке проходить через точку з координатами

$$y = 4, x = 3.$$

Це коло задається рівнянням [11]

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Багато фізичних законів мають вигляд диференціальних рівнянь. Інтегрування цих рівнянь – складна справа. Одні диференціальні рівняння вдається розв'язати в явному вигляді, тобто записати шукану функцію у вигляді формули. Для інших ще й досі не знайдено зручних формул. Диференціальні рівняння досить повно і просто описують виробничі процеси. Тому важливо не лише вміти їх розв'язувати, а й складати [1].

1.2. Способи розв'язування диференціальних рівнянь

При розв'язуванні диференціальних рівнянь першого порядку найпершим (і принциповим) кроком є визначення типу рівняння. Від цього у великій мірі залежить можливість розв'язання диференціального рівняння. Тому слід запам'ятати основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, які класифіковано у наступній таблиці 1.1.

Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до виду $y' = f(x, y)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \text{ або } y' = -P(x)y + Q(x) \quad (1.3)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі, (a,b) , називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку [16].

Таблиця 1.1.

№ n/n	Вид рівняння	Назва диференціального рівняння
I	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
II	$y' = f(x) \cdot g(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
III	$y' = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру	Однорідне рівняння
IV	$y' = -P(x)y + Q(x)$	Лінійне рівняння
V	$y' = -P(x)y + Q(x)y^\alpha$	Рівняння Бернуллі

У випадку, коли

$$P(x) = \pm Q(x),$$

або

$$Q(x) = 0$$

рівняння (1.3) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язування рівняння (1.3). Розглянемо один із них – *метод Бернуллі*. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v, \quad (1.4)$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (1.3).

Знаходимо похідну функції y :

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи y та y' в рівняння (1.3), отримаємо

$$\begin{aligned} u'v + uv' + P(x)uv &= Q(x), \\ u'v + u(v' + P(x)v) &= Q(x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0. \quad (1.6)$$

Знаходимо v з рівняння (1.6), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

$$\text{звідси } \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad \text{або } v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v , знаходимо u з рівняння

$$u'v = Q(x),$$

яке випливає з (1.5) та (1.6):

$$v \frac{du}{dx} = Q(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx, \quad u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (1.4) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right). \quad (1.7)$$

При розв'язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (1.7) [20].

1.3. Геометрична інтерпретація диференціальних рівнянь

1.3.1. Метод ізоклін

Диференціальному рівнянню $y' = f(x, y)$ можна дати геометричне тлумачення.

Справді, нехай $D \subset R_2$ - є область визначення диференціального рівняння (1.1).

Візьмемо довільну точку $(x_0; y_0) \in D$ і підставимо в праву частину даного рівняння. Матимемо відповідне значення похідної

$$\frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0) \quad (1.8)$$

Отже, точці $(x_0; y_0) \in D$ диференціальне рівняння (1.1) ставить у відповідність значення похідної. Тоді, якщо через точку $(x_0; y_0)$ проходить інтегральна крива диференціального рівняння (1.1), то $\frac{dy}{dx}$, як відомо, дорівнює, $tg\alpha_0$ де α_0 - кут, утворений дотичною, проведеною до інтегральної кривої в точці $(x_0; y_0)$, з додатним напрямом осі Ox , тобто

$$\alpha_0 = \arctg \frac{dy}{dx} = \arctg f(x_0; y_0). \quad (1.9)$$

Таким чином, диференціальне рівняння (1.8) в точці $(x_0; y_0) \in D$ ставить у відповідність певний напрям (кут), що визначається формулою (1.9). Тоді точці $(x_1; y_1) \in D$ диференціальне рівняння (1.1) ставить у відповідність напрям

$$\alpha_1 = \arctg f(x_1; y_1)$$

(у кожній точці $(x; y) \in D$ диференціальне рівняння (1.1) ставить у відповідність напрям

$$\alpha = \arctg f(x; y). \quad (1.10)$$

Тому диференціальне рівняння (1.1) можна геометрично інтерпретувати як таке, що задає в області D поле напрямів. На рис. 1.1 це поле зображене стрілками [16].

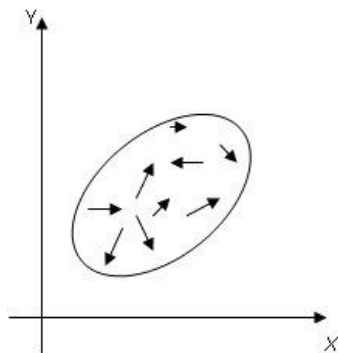


Рис. 1.1. Поле напрямів

Напрямок кожної стрілки визначається формулою (1.10). Як вже зазначалося, розв'язком диференціального рівняння (1.1) є крива, яку називають ще інтегральною кривою. Отже, інтегральна крива, що проходить через точку $(x; y) \in D$, відрізняється від усіх інших кривих, які проходять через цю точку, тим, що напрям дотичної в даній точці до інтегральної кривої збігається з напрямом поля, що його задає дане диференціальне рівняння.

Тому геометрично задача інтегрування диференціального рівняння першого порядку може бути сформульована так: знайти такі криві, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямом поля в цій точці. На рисунку криву треба проводити так, щоб стрілки визначали в кожній точці напрям до кривої. Знаючи поле напрямів, задане диференціальним рівнянням, можна будувати криві, що задають інтегральні криві даного диференціального рівняння [13]. Щоб побудувати поле напрямів, користуються методом ізоклін.

Ізокліною називається крива на площині XOY , в кожній точці якої поле має фіксований напрям.

Таким чином, усі інтегральні криві, які перетинають дану ізокліну, в точках перетину нахилені до осі OX під тим самим кутом. Звідси походить і назва „ізокліна” – лінія однакового напрямку. Маючи диференціальне рівняння, можна написати рівняння ізокліни. Так, для диференціального рівняння (1.1) рівняння ізоклін має вигляд

$$f(x, y) = a, \quad (1.11)$$

де a – довільний параметр. Надаючи a різних значень, ми кожного разу отримуватимемо на площині XOY рівняння ізокліни. При цьому напрям поля кожної ізокліни визначається формулою [5]

$$\alpha = \operatorname{arctg} a. \quad (1.12)$$

Приклад. Побудувати за допомогою ізоклін поле напрямів, яке задає диференціальне рівняння $y' = x^2 + y^2$

Складемо рівняння сім'ї ізоклін

$$x^2 + y^2 = a.$$

Отже ізоклінами тут є кола з центром у початку координат і радіусом \sqrt{a} . Якщо $a = 0$, то матимемо точку $(0;0)$, напрям поля в якій дорівнює нулю (напрямок стрілки збігається з додатним напрямом осі OX). При $a = 1$ дістаємо ізокліну

$$x^2 + y^2 = 1,$$

в кожній точці якої напрям поля дорівнює

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctg} 1.$$

Поле напрямів, задане диференціальним рівнянням

$$y' = x^2 + y^2$$

показано на рис. 1.2 [14].

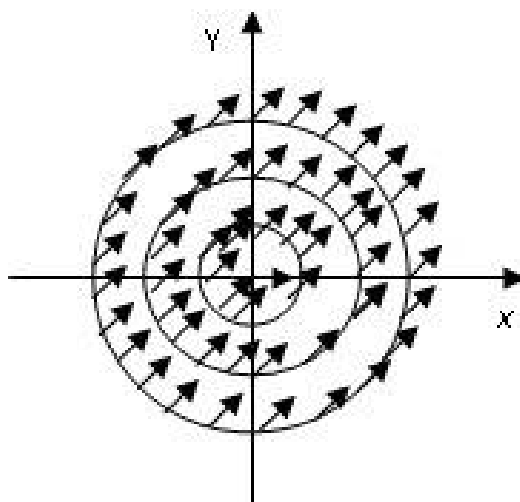


Рис. 1.2. Поле напрямів

1.3.1. Метод фазових траєкторій

Метод фазових траєкторій (фазового простору, фазової площини) – графоаналітичний метод наближеного дослідження нелінійних систем. Суть методу полягає в оцінці поведінки системи за допомогою наочних геометричних уявлень – фазових параметрів. Фазовий простір (простір станів) – простір в прямокутній системі координат, якими є вихідна змінна та $(n-1)$ її похідних. Кількість фазових координат дорівнює порядку системи n , тому для

системи другого порядку ($n=2$) фазовий простір є 2-х вимірним, тобто перетворюється у фазову площину. В цьому випадку термін “фаза” має таке ж значення, що і “стадія”, тобто розвиток, зміна стану. Точка з координатами (x_i, x_j) називається зображуючою, а лінія, по якій вона переміщується при зміні стану системи – фазовим портретом. Це сукупність траєкторій, які визначають множину груп початкових умов та розв’язок диференціальних рівнянь системи. Фазові траєкторії дають повне уявлення про характер процесів в системі, крім часових оцінок, тому що час з розгляду процесів виключається.

Якщо розглядати в системі стабілізації відхилення $\Delta x = x_{30} - x_i(t)$, то усталеному стану буде відповідати точка $\Delta x = 0$, тобто початок координат. Цей стан відповідає так званій особливій точці. Різним фазовим траєкторіям відповідають різні особливі точки. Наприклад, для лінійних стійких систем всі фазові траєкторії асимптотично стягуються в початок координат, а у випадку нестійких систем – прямують в нескінченність [2].

З розгляду наведеного матеріалу можна зробити висновок, що найбільш зручним є метод фазової площини. Запишемо диференціальне рівняння системи другого порядку:

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (1.13)$$

Будемо вважати, що x – вихідна координата системи і приймемо $x_1 = x$, тоді:

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} \quad (1.14)$$

Рівняння (1.13) запишемо у вигляді двох рівнянь 1-го порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ a_2 \frac{dx_2}{dt} + a_1 x_2 + a_0 x_1 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{a_1}{a_2} x_2 - \frac{a_0}{a_2} x_1 \end{cases} \quad (1.15)$$

Розділимо друге рівняння в (1.15) на перше:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_0}{a_2} \cdot \frac{x_1}{x_2} \quad (1.16)$$

Після інтегрування отримуємо рівняння фазових траєкторій:

$$x_2 = f(x_1, C_1, C_2), \quad (1.17)$$

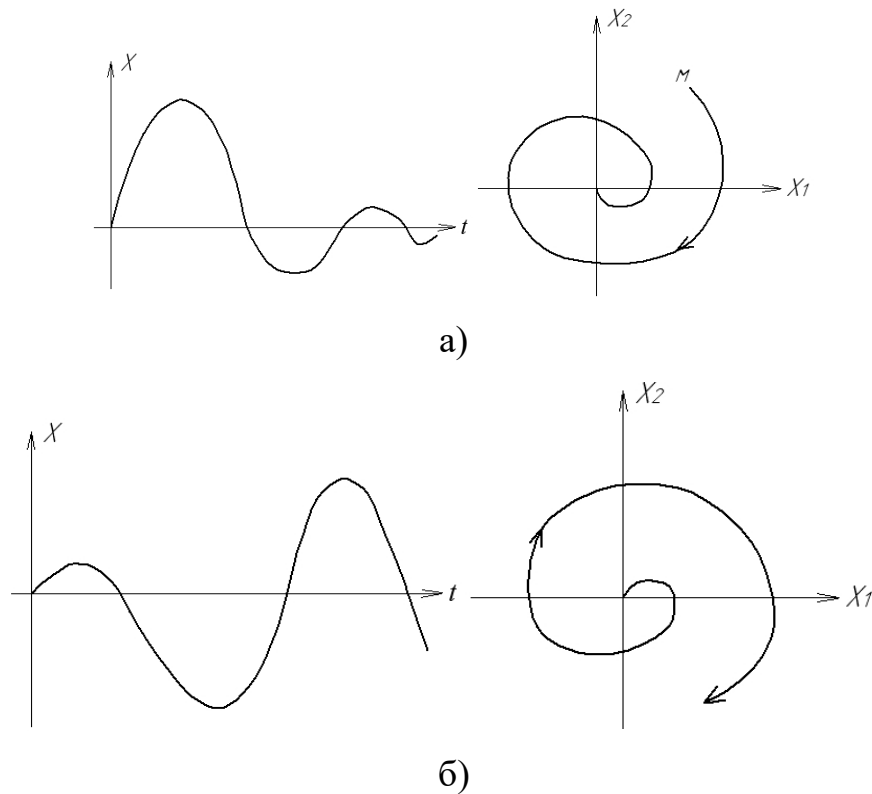
де C_1, C_2 – сталі інтегрування. Вид функції f залежить від коефіцієнтів a_i , які визначають корені характеристичного поліному системи:

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (1.18)$$

корені рівняння:

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \quad (1.19)$$

В методі фазової площини головним, визначальним моментом є те, що кожному перехідному процесу в системі відповідає своя фазова траєкторія. Вид коренів рівняння (1.18) розглядався в розділі, присвяченому стійкості автоматичних систем (частина перша). На рис. 1.3 показана відповідність перехідних процесів і фазових траєкторій НЛС, що відповідає комплексним попарно спряженим кореням з від'ємною (а) та додатною (б) дійсними частинами і уявними (в). Можна знайти також інші перехідні процеси, наприклад, аперіодичні та відповідні фазові портрети [10].



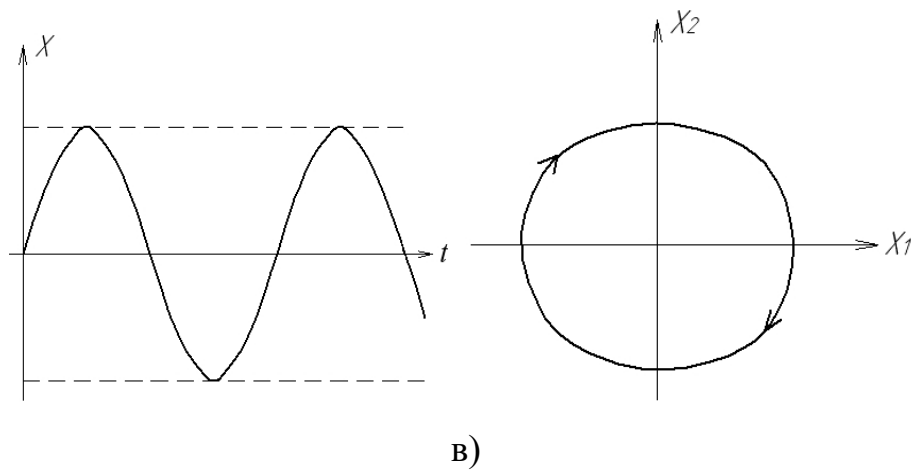


Рис. 1.3. Перехідні процеси і фазові траєкторії НЛС

а) стійкої; б) нестійкої; в) на межі стійкості

Аналіз перехідних процесів та відповідних фазових портретів НЛС приводить до таких результатів:

- стійкому коливальному процесу відповідає фазова траєкторія, яка збігається до початку координат (рис.1.3, а). Особливою точкою тут є стійкий фокус;
- нестійкому коливальному процесу відповідає фазова траєкторія, яка віддаляється від початку координат, особливо точка – нестійкий фокус (рис.1.3, б);
- періодичному процесу (автоколиванням) відповідає замкнена фазова траєкторія (коло або еліпс), яка називається граничним циклом (рис.1.3, в), особлива точка – центр.

Для інших фазових траєкторій особливими точками можуть бути стійкий або нестійкий вузол, сідло.

За графіком граничного циклу можна наближено визначити параметри автоколивань: частота ω характеризується відношенням відрізків на осях x_2 до x_1 , а амплітуда дорівнює відріzkу на x_1 [12].

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО АНАЛІЗУ МОДЕЛІ ВІЛЬНОГО КОНСЕРВАТИВНОГО ОСЦИЛЯТОРА

2.1. Основні поняття теорії коливних процесів

У техніці і в навколишньому світі часто доводиться стикатися з періодичними (або майже періодичними) процесами, які повторюються через однакові проміжки часу. Такі процеси називають коливними.

Колівні явища різної фізичної природи підкоряються загальним закономірностям. Наприклад, коливання струму в електричному ланцюзі і коливання математичного маятника можуть описуватися однаковими рівняннями. Спільність коливних закономірностей дозволяє розглядати коливні процеси різної природи з єдиної точки зору.

Механічними коливаннями називаються періодичні (або майже періодичні) зміни фізичної величини, яка описує механічний рух (швидкість, переміщення, кінетична і потенційна енергія тощо).

Колівання можуть бути вільними або вимушеними. Колівання будуть вільними (або власними), якщо вони відбуваються за рахунок деякої енергії, переданої коливній системі в початковий момент часу, при відсутності в наступні моменти часу будь-яких зовнішніх впливів на цю систему. Вимушені коливання відбуваються під дією періодичних зовнішніх сил.

Власні коливання (вільні коливання) системи – це коливання в механічній, електричній або у будь-яких інших фізичних коливних системах, які здійснюються за відсутністю зовнішнього впливу, за рахунок початкової накопиченої енергії, внаслідок початкового зміщення або початкової швидкості. Характер власних коливань визначається власними параметрами самої коливної системи – масою, індуктивністю, ємністю, пружністю тощо. У реальних системах, внаслідок дисипації (розсіяння) енергії, власні коливання системи завжди згасають, а за значних втрат енергії власні коливання системи стають аперіодичними [6].

Вимушені коливання системи – це коливання, які виникають у будь-якій системі під дією змінної зовнішньої (щодо системи) сили, наприклад,

коливання телефонної системи під дією змінного магнітного поля, коливання механічної конструкції під дією змінного навантаження тощо. Характер вимушених коливань визначається як особливостями дії зовнішньої сили, так і властивостями самої коливної системи, як реакція на дію зовнішньої сили. На початку дії зовнішньої періодичної сили характер вимушених коливань змінюється у часі і ці коливання не є періодичними, а лише за певним часом дії сил в системі встановлюється періодичними вимушені коливання з періодом, що дорівнює періоду дії зовнішньої сили, при цьому встановлення вимушених коливань у системі відбувається так швидко, наскільки значні згасаючі коливання у самій системі.

Амплітуда вимушених коливань визначається амплітудою дії зовнішньої сили та процесами згасання власних коливань системи. Якщо згасання малі, то амплітуда вимушених коливань суттєво залежить від співвідношення між частотою даної зовнішньої сили та частотою власних коливань системи. Під час наближення частоти зовнішньої сили до власної частоти коливань системи, амплітуда вимушених коливань різко зростає – настає резонанс. Слід зазначити, що в нелінійних системах розділити коливання на вимушені і вільні (власні) не завжди можливо.

Фізичну систему, у якій можливі вільні коливання, називають коливною системою.

Найпростішими коливаннями є гармонічні коливання, при яких коливна величина змінюється з часом за законом косинуса або синуса.

Гармонійні коливання деякої величини x описуються рівнянням

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.1)$$

де

A – максимальне значення коливної величини x ;

ω_0 – колова, або циклічна частота;

φ – початкова фаза коливань для моменту часу $t = 0$;

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза коливань для довільного моменту часу t .

Певні стани системи в процесі гармонічних коливань повторюються через однаковий проміжок часу T , який називається періодом коливань. За цей час фаза коливань зростає на 2π , тобто

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi \quad (2.2)$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.3)$$

Величина, обернена до періоду коливань, виконана коливною системою за одиницю часу, називається частотою коливань і розраховується за формулою

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (2.4)$$

Враховуючи рівняння (2.3) і (2.4) циклічна частота буде розраховуватися за формулою:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (2.5)$$

Одиницею частоти є герц, це частота такого періодичного процесу, при якому за 1 секунду відбувається одне повне коливання.

Диференціальне рівняння гармонічних коливань має вигляд:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad (2.6)$$

Система, яка описується рівнянням (2.6) називається гармонічним осцилятором [3].

Коливання гармонічного осцилятора є прикладом періодичного руху і служать точною або наближеною моделлю в багатьох задачах класичної і квантової фізики. Прикладами гармонічного осцилятора є пружинний, фізичний і математичний маятники, коливний контур (для струмів і напруг настільки малих, щоб елементи контуру можна було вважати лінійними)

Найбільш відомими приклади простих механічних коливальних систем є:

1) коловий математичний маятник – являє собою ідеалізовану систему з невагомої нерозтяжної нитці, на якій підвищено масу, зосереджену у одній точці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння. Коливання маятника на жорсткій підвісці відбувається за рахунок того, що, надавши вазі певний імпульс, сила тяжіння повертає відхилений маятник у положення рівноваги, повернувшись у вихідне положення рівноваги, маятник, володіючи швидкістю, за інерцією продовжує рухатися і знову відхиляється від положення рівноваги у протилежний бік від вихідного відхилення. Ці коливання відбуваються за повної амплітуди на початку процесу і уповільнюється внаслідок розсіювання енергії коливань, тертя у підвісці та об повітря самого тіла [15].

Прикладом такої коливної системи (математичного маятника) може бути досить вагома кулька, підвішена на довгій нитці. Прикладом може бути маятник стінних годинників: вагомий вантаж, укріплений на довгому тонкому стрижні, який укріплено шарнірно на горизонтальній вісі;

2) Фізичний маятник – тверде тіло, що коливається під дією сили тяжіння навколо нерухливої горизонтальної осі, що не проходить через центр тяжіння тіла, називаною віссю хитання маятника.

У положенні рівноваги фізичного маятника його центр мас C знаходиться на одній вертикалі з точкою підвісу O , але нижче неї. При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ обертовий момент сили тяжіння, який прагне повернути маятник в положення рівноваги;

3) Пружинний маятник – це тіло з деякою масою, закріплене на пружині, жорсткість якої k і яке коливається під дією сили пружності. У випадку коливань ваги на пружній підвісці коливання відбуваються тому, що пружна сила стискання або розтягу пружини вертає вагу у стан рівноваги, у наслідок інерції, маючи достатньо енергії, вага проходить рівновагове положення, викликаючи, відповідно, розтяг або стиск пружини. Період коливань пружинного маятника залежить тільки від власних параметрів коливальної системи: маси m коливного тіла та жорсткості k пружини [9].

2.2. Класифікація коливних систем

Наведені суто зовнішні ознаки коливальних процесів є недостатніми для їх глибокого вивчення. Ось чому коливні процеси класифікують за рядом ознак.

В основу класифікації коливних систем можна покласти різні ознаки. Відповідно отримуємо різні варіанти класифікації.

За кількістю ступенів вільності коливні системи можна розділити на

- системи з одним ступенем вільності;
- системи з багатьма ступенями вільності;
- системи з нескінченною кількістю ступенів вільності (з розподіленими параметрами).

Разом із системами з одним ступенем вільності ми розглядатимемо й системи з півтора ступенями вільності.

При переході від одного (чи півтора) до двох ступенів вільності з'являється нова якість – обмін енергії між ступенями вільності. При подальшому збільшенні числа ступенів нова якість не виникає. Тому системи з багатьма ступенями вільності виділяють в окрему групу.

В системах з розподіленими параметрами з'являється можливість поширення хвиль. Такі системи описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

В залежності від того, чи зберігається з часом повна енергія систем, їх ділять на консервативні та дисипативні [22].

Якщо система, яку ми розглядаємо, не взаємодіє з іншими системами, її називають автономною, в протилежному випадку – неавтономною.

Якщо система не обмінюється речовиною та енергією з іншими системами, її називають замкненою, в протилежному випадку – відкритою. Ця класифікація близька до попередньої.

Якщо система має деякий запас енергії (потенціальної, кінетичної, хімічної та ін.), яка може піти на збурення коливань та їх підтримання

протягом тривалого часу, такі системи називають нерівноважними. В протилежному випадку говорять про рівноважні (або пасивні) системи.

Відкриті та нерівноважні системи іноді об'єднують під назвою активних систем.

Параметри системи можуть залежати від її руху. Наприклад, в коливному контурі з варікапом ємність буде визначатись миттєвою напругою на варікапі. Такі системи називають нелінійними. Вони описуються нелінійними диференціальними рівняннями.

Якщо ж параметри системи не залежать від її руху, систему називають лінійною. Такі системи описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

В межах цієї ж класифікації виділяють ще параметричні та автоколивні системи.

Параметричними називають системи, у яких якийсь параметр змінюється за наперед заданим законом під дією зовнішньої сили, незалежно від руху самої системи. Параметричні системи описуються лінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами. Ми покажемо, що параметричні системи – це різновид нелінійних неавтономних систем. Відомий приклад параметричних систем – маятник із змінною довжиною підвісу (гойдалка).

Автоколивні системи – це системи, в яких за відсутності зовнішнього періодичного впливу можуть виникати і встановлюватись періодичні коливання. Властивості цих коливань мало залежать від початкових умов і визначаються властивостями самої системи. Приклади автоколивних систем – механічний годинник, різноманітні автогенератори синусоїдних та несинусоїдних коливань та ін.

Автоколивні системи також описуються нелінійними диференціальними рівняннями.

Наприкінці зазначимо, що запропонована класифікація стосується не стільки реальних коливних систем, скільки їхніх моделей [21].

Наприклад, розглянемо коливання маси на підвісі. Якщо ми спостерігаємо один-два періоди коливань, систему можна вважати консервативною; протягом більш тривалого часу істотним стає згасання. Якщо ми розглядаємо малі відхилення від положення рівноваги, систему можна вважати лінійною; для великих відхилень стає істотною нелінійність. Якщо рух маси відбувається в деякій вертикальній площині, можна вважати, що система має один ступінь вільності. Якщо початкова швидкість маси не лежить у площині відхилення від положення рівноваги, можна говорити про два (або навіть три, коли взяти до уваги, що підвіс може розтягатися) ступені вільності. Якщо ж розглядати поперечні коливання підвісу (подібні до коливань ступи), слід користуватися моделлю системи з розподіленими параметрами.

Отже, реальні системи, як правило, нелінійні, неавтономні, дисипативні і мають нескінчену кількість ступенів вільності [18].

2.3. Вільні коливання консервативної механічної системи з одним ступенем вільності

Розглянемо осцилятор (тіло масою m на пружині з коефіцієнтом пружності c) (рис. 2.1).

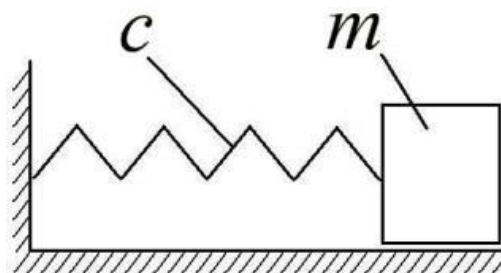


Рис. 2.1

Такий механічний об'єкт є найпростішим зразком консервативної механічної системи з одним ступенем вільності (ОСВ). Припустимо, що ця система знаходиться у стані рівноваги (спокою), але у момент часу $t = t_0$ цей стан якимось чином порушено, а потім система надана сама собі. Необхідно дослідити характер руху системи у момент часу $t > t_0$. Зазначимо, що епітет

”консервативна” означає, що вплив на рух будь-яких сил опору в такій постановці задачі не враховується.

Створимо математичну модель руху. Розглянемо силову схему в довільний момент $t > t_0$ руху тіла

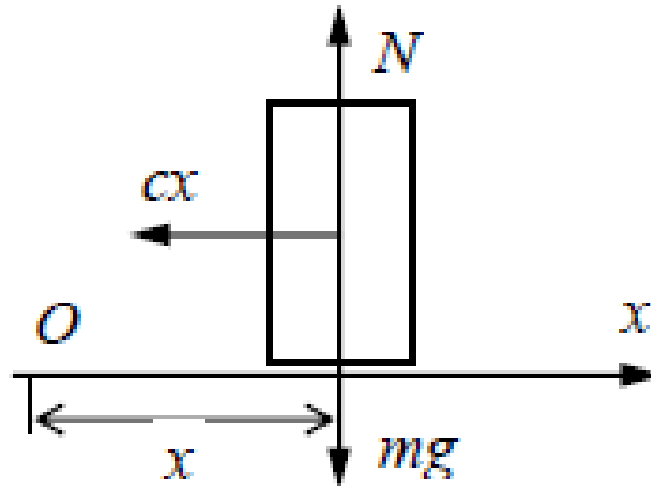


Рис. 2.2

Спрямуємо вісь Ox уздовж траєкторії руху, а початок відліку візьмемо у точці O (точка рівноваги). Скориставшись принципом звільнення від в’язей, отримаємо силову схему, зображену на рисунку 2.2. Отже, на тіло діє горизонтальна сила реакції пружини (лінійна відновлювальна сила) $F = cx$, де $c \left[\frac{H}{M} \right]$ – коефіцієнт пружності пружини, який чисельно дорівнює величині сили, що змінює довжину пружини на одиницю довжини. Що стосується сили ваги тіла mg та реакції горизонтальної площини N , то $N = mg$, тобто вони знаходяться у рівновазі, оскільки рух тіла здійснюється тільки вздовж осі Ox . Тоді згідно з другим законом Ньютона можна записати рівняння руху тіла у вигляді проекції на вісь [14]:

$$m \ddot{x} = -cx$$

або

$$\ddot{x} + p^2 x = 0, \quad (2.7)$$

де

$$p^2 = \frac{c}{m} \quad (2.8)$$

Саме у такій формі записують диференціальне рівняння руху осцилятора без урахування сил опору. Це звичайне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Для її знаходження необхідно проінтегрувати рівняння (2.7). Функція $x(t)$ і є законом руху тіла, але у такій постановці рух не буде визначеним однозначно, оскільки треба описати ті обставини, які спричинили рух. Такими є початкове зміщення і початкова швидкість, які вважаються заданими. Отже, початкове збурення стану рівноваги тіла описується початковими умовами:

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0. \quad (2.9)$$

Тут для спрощення подальших викладок прийнято $t_0 = 0$.

Таким чином, математичною моделлю досліджуваного руху є рівняння (2.7) з початковими умовами (2.9). Це є задача Коші, розв'язок якої однозначно визначає рух тіла у будь-який момент часу $t > 0$.

Знайдемо розв'язок задачі Коші (2.7), (2.9). Спочатку визначимо загальний розв'язок рівняння (2.7) за допомогою характеристичного рівняння

$$k^2 + p^2 = 0,$$

корені якого

$$k_{1,2} = \pm ip$$

є уявними.

Згідно з теорією звичайних диференціальних рівнянь, загальний розв'язок рівняння (2.7) у цьому випадку має вигляд:

$$x(t) = C_1 \sin pt + C_2 \cos p, \quad (2.10)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які визначаються за початковими умовами (2.9). Для цього знайдемо похідну функції (2.10) (швидкість руху тіла у будь-який момент часу $t > 0$):

$$\dot{x}(t) = C_1 p \cos pt - C_2 p \sin pt \quad (2.11)$$

Підставивши початкові умови (1.3) до формули (2.10) та (2.11), одержимо систему двох алгебраїчних рівнянь, з яких отримаємо [17]

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{p}; \quad C_2 = x_0.$$

З урахуванням цих значень функція (2.10) набуває вигляду:

$$\dot{x}(t) = \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + x_0 \cos pt \quad (2.12)$$

Це і є розв'язок задачі Коші або закон руху тіла. Підставляючи до функції (2.12) заданий момент часу, знаходимо відповідну координату тіла.

Для аналізу характеру руху тіла, як правило, функцію (2.12) подають у більш простому еквівалентному записі, який називають амплітудною формою, а саме:

$$x(t) = a \sin(pt + \alpha), \quad (2.13)$$

де сталі a і α визначаються за формулами:

$$a = \sqrt{\frac{\dot{x}_0^2}{p^2} + x_0^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{px_0}{\dot{x}_0} \quad (2.14)$$

і називаються відповідно амплітудою та початковою фазою коливань. На рисунку 2.3 зображено графік функції (2.13) [5].

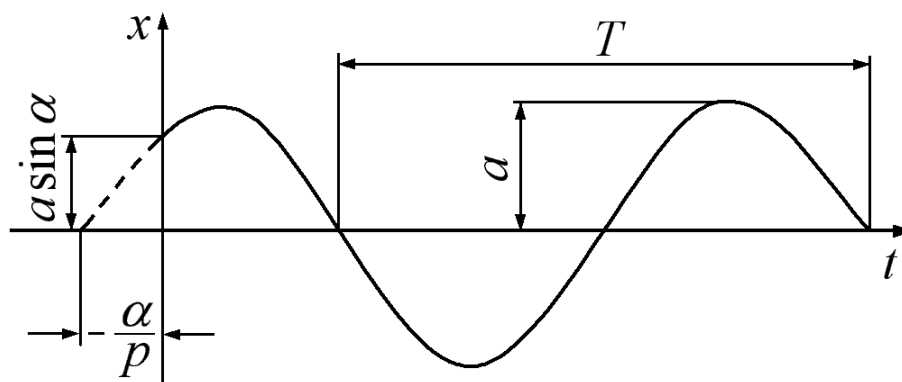


Рис. 2.3

З графіка закону руху тіла (2.13) випливає, що рух тіла має гармонічний характер, тобто це є коливання з амплітудою a і фазою $pt + \alpha$. Тому цей графік

ще називають осцилограмою вільних коливань. Величина p , яка визначається за формулою (2.8), має конкретний фізичний зміст: це кутова (циклічна) частота коливань, яка визначає кількість коливань за 2π секунд. Повторення процесу коливань називається періодом коливань. Це найменший інтервал часу, після якого тіло знову має таку саму координату та проекцію швидкості. Період коливань визначається за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (2.15)$$

Зокрема зазначимо, що зі структури функції (2.12) впливає можливість реалізувати бажаний характер коливань належним вибором початкових умов.

Наприклад, якщо

$$x_0 \neq 0,$$

а

$$\dot{x}_0 = 0,$$

то коливання відбуваються за косинусоїдальним законом; а у випадку

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 \neq 0$$

за синусоїдальним законом.

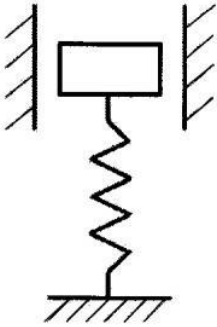
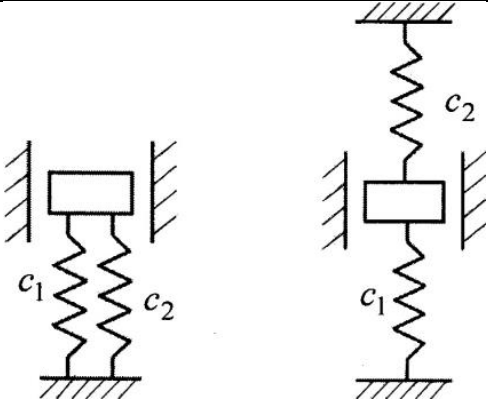
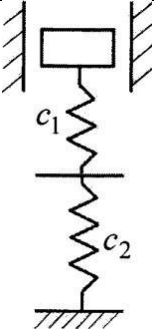
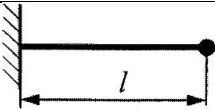
Щодо основних властивостей вільних коливань, то до них слід віднести такі:

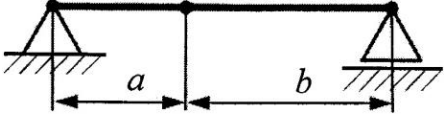
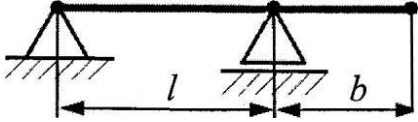
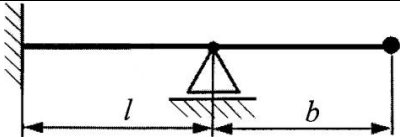
- а) амплітуда і початкова фаза коливань залежать від початкових умов;
- б) частота і період вільних коливань від початкових умов не залежать, а визначаються лише параметрами системи. Саме тому кутова частота ще називається власною частотою.

Розглянутий вид коливань у реальному світі не зустрічається, оскільки, згідно з викладеним вище, вільні коливання мають без будь-яких змін тривати вічно. Причина такої невідповідності між теорією і практикою полягає у тому, що ми знехтували при складанні математичної моделі силами опору. Але навіть така ідеалізована система є базовою для дослідження інших видів

коливань і динаміки більш складних систем. Що стосується пружних властивостей системи, то в кожному конкретному випадку вони характеризуються коефіцієнтом жорсткості c (табл. 2.1) [12].

Таблиця 2.1. Коефіцієнти жорсткості c деяких простих систем

№ пор.	Схема	Коефіцієнт c
1		$c = \frac{Gd^4}{8nD^3}$ <p>d-діаметр перерізу витка, м; D-діаметр пружини, м; G-модуль зсуву (модуль Юнга 2-го роду); n-кількість витків</p>
2		$c = c_1 + c_2$
3		$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$
4		$c = \frac{3EI}{l}$

5		$c = \frac{3EI(a+b)}{a^2b^2}$
6		$c = \frac{3EI}{(b+l)b^2}$
7		$c = \frac{12EI}{(4b+3l)b^2}$

Покажемо, що математична модель типу (2.7), (2.9) має місце стосовно інших об'єктів, рух яких підлягає дослідженню з тих чи інших мотивацій.

Розглянемо вертикальний осцилятор (рис. 2.4, а): вертикальну пружину з тягарем, який знаходиться у положенні рівноваги. На рисунку 2.4, б зображено відповідну силову схему. З умови рівноваги випливає:

$$mg - cf_{CT} = 0, \quad (2.16)$$

де f_{CT} – видовження пружини під дією ваги тіла масою m , яке будемо називати статичним відхиленням.

Співвідношення (2.16) дозволить спростити диференціальне рівняння руху. Припустимо, що положення рівноваги порушено, і зобразимо тіло у поточний момент його руху, уважаючи, що в цей момент його координата y додатна ($y > 0$) (рис. 2.4, в). Силову схему зображено на рис. 2.4, г.

Рівняння руху має вигляд:

$$m\ddot{y} = mg - c(f_{CT} + y)$$

або

$$m\ddot{y} = mg - cf_{CT} - cy.$$

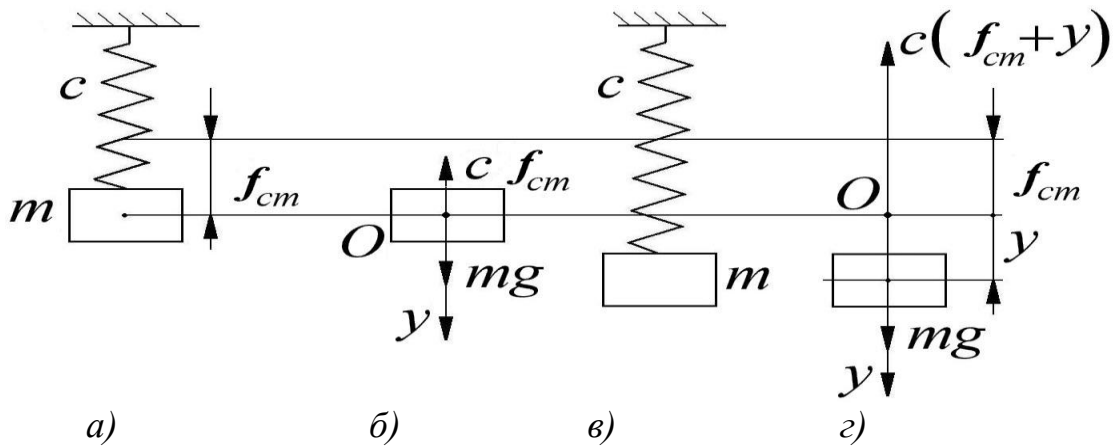


Рис. 2.4

З урахуванням умови статичної рівноваги (2.16) та формули (2.8) одержимо:

$$\ddot{y} + p^2 y = 0. \quad (2.17)$$

Таким чином, рівняння руху вертикального осцилятора збігається з точністю до букви з рівнянням (2.7). Неважко також зробити висновок, що стала сила не змінює характер коливань тіла під дією відновлювальної сили, а лише зміщує центр цих коливань у бік дії такої сили на величину статичного відхилення [11].

Складемо рівняння руху математичного маятника (рис. 2.5).

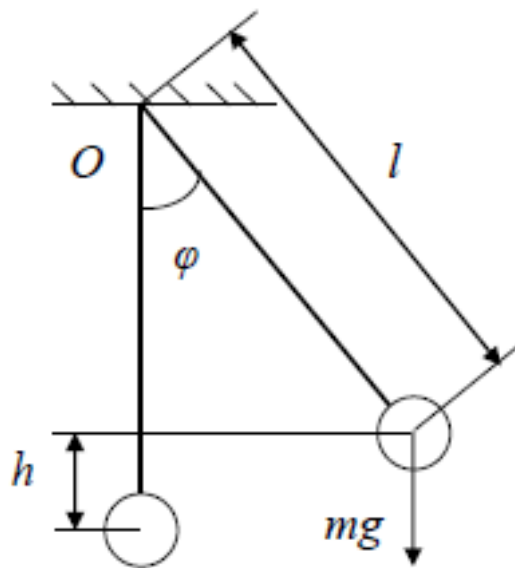


Рис.2.5

Розглянемо поточне положення маятника у момент $t > 0$, тобто у відхиленому на кут φ від вертикального положення рівноваги. Будемо виходити з рівняння обертового руху матеріальної точки:

$$I\ddot{\varphi} = \sum M_0(\overline{F_k})$$

де

$I = ml^2$ - момент інерції тіла масою m ;

φ - координата;

$\sum M_0(\overline{F_k})$ - сума моментів відносно точки O діючих на тіло сил.

Отже, маємо:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Це рівняння можна спростити (лінеаризувати), бо для $\varphi < \frac{\pi}{36}$ $\sin \varphi \sim \varphi$, а тому маємо

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

або

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi = 0 \tag{2.18}$$

де

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}} - \text{частота коливань.} \tag{2.19}$$

Очевидно, що рівняння руху маятника (2.18) збігається з точністю до букви з рівняннями (2.7) та (2.17).

Завершуючи моделювання руху різних за своєю природою об'єктів, зазначимо, що збіг їх рівнянь руху не випадковий. А тому перейдемо до розгляду основного способу складання диференціальних рівнянь руху.

Завершуючи моделювання руху різних за своєю природою об'єктів, зазначимо, що збіг їх рівнянь руху не випадковий. А тому перейдемо до розгляду основного способу складання диференціальних рівнянь руху [6]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}} \right) - \frac{dT}{dq} = 0 \quad (2.20)$$

де

q – узагальнена координата,

Π – функція потенціальної енергії,

T – функція кінетичної енергії,

$Q = -\frac{d\Pi}{dq}$ - узагальнена сила від потенціальних сил.

У загальному випадку:

$\Pi = \frac{1}{2}cq^2$, де c – узагальнений коефіцієнт жорсткості;

$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$, де a – узагальнений коефіцієнт інерції.

Знаходимо похідні, які фігурують у рівнянні (2.20):

$$Q = -\frac{d\Pi}{dq} = -cq; \quad \frac{dT}{dq} = 0; \quad \frac{dT}{d\dot{q}} = a\dot{q}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}} \right) = a\ddot{q}$$

Підставивши ці похідні у рівняння (2.20), одержимо диференціальне рівняння вільних коливань системи з одним ступенем свободи:

$$\ddot{q} + p^2q = 0 \quad (2.21)$$

де

$$p = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{– частота коливань.} \quad (2.22)$$

Отже, усі рівняння (2.7), (2.17), (2.18), є аналогами рівняння (2.21). Вони відрізняються лише фізичним змістом узагальненої координати q та конкретним змістом коефіцієнтів жорсткості та інерції c і a .

Проілюструємо застосування цього методу для складання рівняння руху математичного маятника. У цьому випадку $q = \varphi$.

Визначимо функції кінетичної та потенціальної енергій

$$T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2 = T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\Pi = mgh = mg(l - l \cos \varphi) = mgl(1 - \cos \varphi).$$

Для $\varphi < \frac{\pi}{36}$ вираз для функції потенціальної енергії можна лінеаризувати,

Оскільки

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Отже,

$$\Pi = \frac{1}{2} mgl \varphi^2.$$

Знаходимо похідні:.

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = mgl\varphi; \quad \frac{dT}{d\varphi} = 0; \quad \frac{dT}{d\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}} \right) = ml^2\ddot{\varphi}$$

Підставивши ці похідні у рівняння (2.20), одержимо:

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi = 0,$$

тобто рівняння коливань маятника (2.18) з урахуванням позначення (2.19).

І насамкінець наведемо правила, якими доцільно керуватися при розв'язуванні задач на вільні коливання матеріальної точки:

1. Початок координат вибираємо у положенні рівноваги.

2. При складанні диференціального рівняння потрібно зобразити матеріальну точку у довільному положенні, яке відповідає її додатним координатам, припустивши, що точка переміщується у бік зростання координати.

3. Після складання диференціального рівняння потрібно врахувати умову статичної рівноваги (1.10), що значно спрощує одержане рівняння .

Задача. Знайти власну частоту коливань механічної системи (рис. 2.6), що складається з пружно закріпленої горизонтальної рейки А масою m_1 , яка

лежить на пружно закріпленому циліндрі В масою m_2 та каткові С. Уважати, що рейка А котиться по циліндру В без ковзання. Масами пружин і катка С знехтувати.

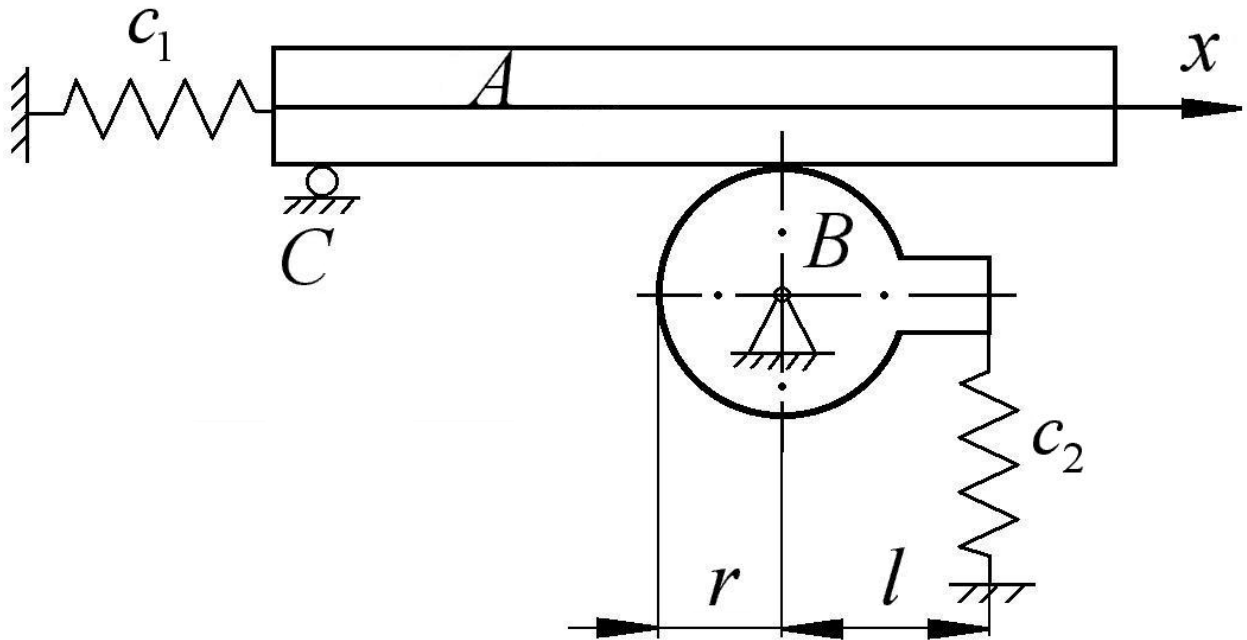


Рис. 2.6

Система має один ступінь вільності. За узагальнену координату виберемо горизонтальне переміщення будь-якої точки рейки, оскільки вона рухається поступально. Відлік координати x будемо вести від положення рівноваги, коли обидві пружини мають нульове статичне відхилення. Через те що переміщенню x рейки відповідає кут φ обертання циліндра, то

$$\varphi = \frac{x}{r}.$$

Кінетична енергія системи

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2$$

Підставляючи до цього виразу

$$I_2 = \frac{m_2 r^2}{2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}$$

одержимо

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m_2\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\dot{x}^2.$$

З виразу кінетичної енергії випливає, що інерційний коефіцієнт системи

$$a = m_1 + \frac{m_2}{2}$$

Потенціальна енергія системи визначається деформаціями обох пружин, а саме

$$\bar{I} = \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{2}c_2\left(\frac{l}{r}x\right)^2 = \frac{1}{2}\left(c_1 + \frac{l^2}{r^2}c_2\right)x^2.$$

Таким чином, коефіцієнт жорсткості системи

$$c = c_1 + \frac{l^2}{r^2}c_2.$$

Згідно з формулою (2.22), знаходимо власну частоту коливань системи [10]

$$p = \sqrt{\frac{c_1 + \frac{l^2}{r^2}c_2}{m_1 + \frac{m_2}{2}}}. \quad (2.23)$$

2.4. Вільні коливання консервативної механічної системи з багатьма ступенями вільності

У системах з багатьма ступенями вільності, на відміну від систем з одним та півтора ступенями вільності, з'являються принципово нові ефекти, пов'язані з обміном енергією між ступенями вільності. Для появи цих ефектів потрібно щонайменше два ступеня вільності. Подальше зростання числа ступенів вільності нічого якісно нового не дає. Тому в цьому розділі розглядатимуться, як правило, саме системи з двома ступенями вільності.

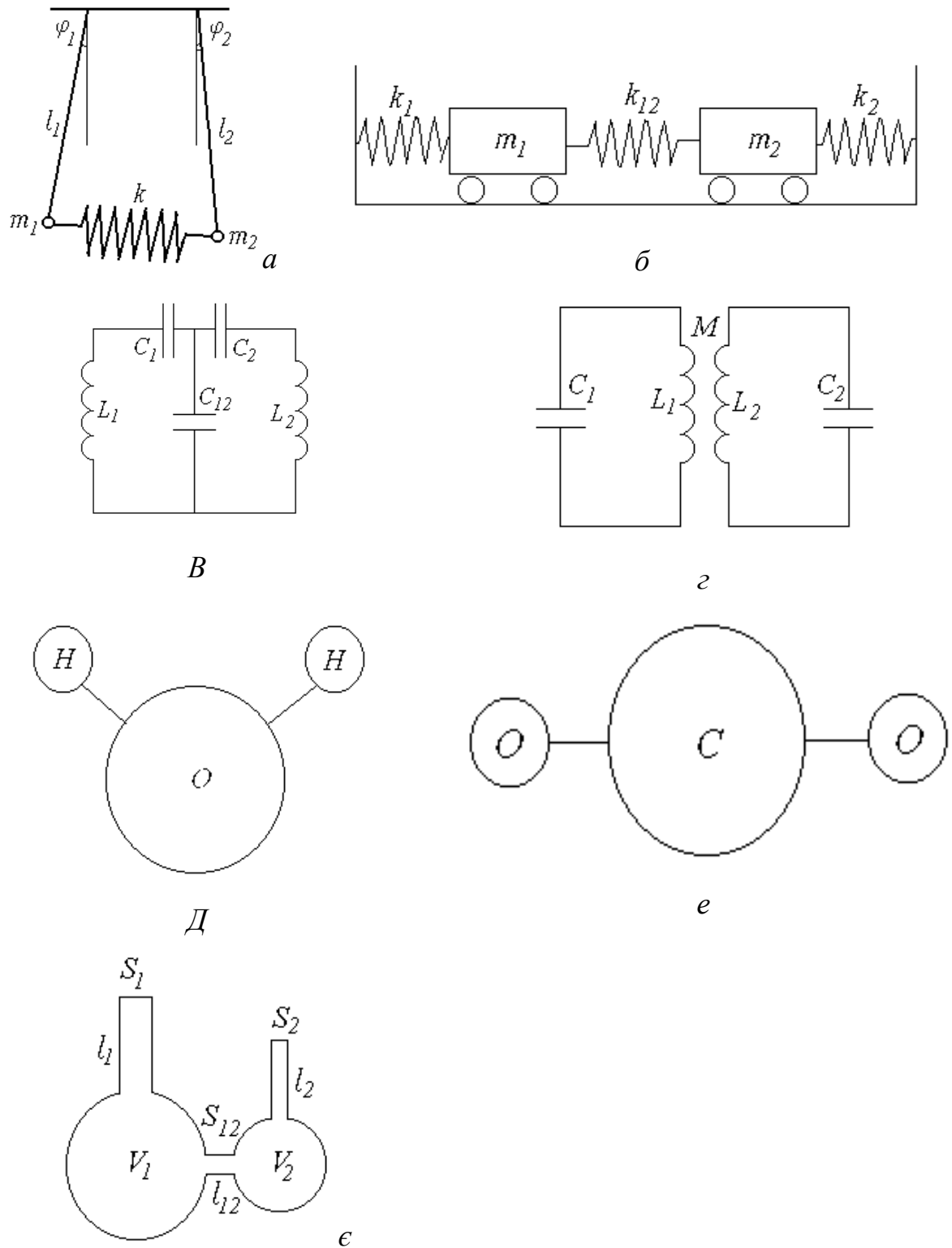


Рис. 2.7. Приклади систем із багатьма ступенями вільності:
 а, б - зв'язані маятники, в, г - коливні контури з ємнісним та індуктивним зв'язком, д, е - триатомні молекули H_2O та CO_2 ,
 є - зв'язані акустичні резонатори

Прикладами систем з багатьма ступенями вільності можуть служити

зв'язані фізичні або пружинні маятники (рис. 2.7 а-б), зв'язані коливні контури (рис. 2.7 в-г), двоатомні молекули (рис. 2.7 д-е), зв'язані акустичні резонатори (рис. 2.7 є) та ін.

Найбільш загальним методом аналізу руху консервативних систем (як лінійних, так і нелінійних) з багатьма ступенями вільності є метод рівнянь Лагранжа. Як відомо, ці рівняння мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.24)$$

де $L=T-U$ - функція Лагранжа, U та T - відповідно потенціальна та кінетична енергія системи. Для лінійних систем з s ступенями вільності потенціальна та кінетична енергія записуються як квадратичні форми узагальнених координат q_i та їхніх похідних за часом:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij} q_i q_j, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (2.25)$$

Оскільки в рівняння руху входять лише суми коефіцієнтів вигляду $a_{ij}+a_{ji}$ та $b_{ij}+b_{ji}$, вважатимемо надалі, що

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = b_{ji}. \quad (2.26)$$

Для системи з двома ступенями вільності

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} a_{11} q_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} q_2^2 + a_{12} q_1 q_2, \\ T &= \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{q}_2^2 + b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

і рівняння руху набувають вигляду:

$$\begin{cases} b_{11} \ddot{q}_1 + b_{12} \ddot{q}_2 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = 0; \\ b_{12} \ddot{q}_1 + b_{22} \ddot{q}_2 + a_{21} q_1 + a_{22} q_2 = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Перепишемо систему (2.1.5) у формі

$$\begin{cases} b_{11}\ddot{q}_1 + a_{11}q_1 = -b_{12}\ddot{q}_2 - a_{12}q_2; \\ b_{22}\ddot{q}_2 + a_{22}q_2 = -b_{12}\ddot{q}_1 - a_{21}q_1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Ліві частини рівнянь (2.29) – це рівняння лінійних консервативних (парціальних) осциляторів. У правих частинах стоять сили, що обумовлені наявністю зв'язку між осциляторами. Доданки з коефіцієнтами a_{12} описують силовий, або ємнісний зв'язок, доданки з коефіцієнтами b_{12} - відповідно інерційний, або індуктивний зв'язок .

Якщо впливом першого осцилятора на другий з якоїсь причини можна знехтувати, а вплив другого осцилятора на перший, навпаки, є істотним, то силу в правій частині першого з рівнянь (2.29) можна вважати заданою, і ми приходимо до рівняння руху осцилятора під дією заданої зовнішньої сили.

Система (2.28) є системою лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, тому її розв'язок можна шукати в експоненціальному вигляді:

$$q_1(t) = A \exp(i\omega t), \quad q_2(t) = B \exp(i\omega t). \quad (2.30)$$

Підстановка (2.30) перетворює систему (2.28) на систему двох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд A та B :

$$\begin{cases} (a_{11} - \omega^2 b_{11})A + (a_{12} - \omega^2 b_{12})B = 0; \\ (a_{12} - \omega^2 b_{12})A + (a_{22} - \omega^2 b_{22})B = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Ця система має нетривіальний розв'язок лише тоді, коли її визначник дорівнює нулеві, тобто при

$$(a_{11} - \omega^2 b_{11})(a_{22} - \omega^2 b_{22}) - (a_{12} - \omega^2 b_{12})^2 = 0. \quad (2.32)$$

Рівняння (2.32) називається характеристичним, або секулярним (віковим) рівнянням. Розв'язуючи його, можна знайти власні частоти досліджуваної системи.

Введемо позначення:

$$\omega_{01}^2 = \frac{a_{11}}{b_{11}}, \quad \omega_{02}^2 = \frac{a_{22}}{b_{22}} \quad (2.33)$$

парціальні частоти коливань, тобто частоти коливань змінної q_1 (q_2) при $q_2=0$ ($q_1=0$);

$$k_a^2 = \frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}}, \quad k_b^2 = \frac{b_{12}^2}{b_{11}b_{22}} \quad (2.34)$$

відповідно «силовий» та «інерційний» коефіцієнти зв'язку. Тоді характеристичне рівняння (2.32) може бути подане у вигляді

$$(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - (k_a \omega_{01} \omega_{02} - \omega^2 k_b)^2 = 0. \quad (2.35)$$

З нього, як уже вказувалося, можна знайти власні частоти (частоти власних коливань) системи:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - 2k_a k_b \omega_{01} \omega_{02} \pm \sqrt{D}}{2(1 - k_b^2)}, \quad (2.36)$$

$$D = (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 (k_a - k_b)^2 - 4k_a k_b \omega_{01} \omega_{02} (\omega_{01} - \omega_{02})^2.$$

Підстановка частот (2.36) до системи (2.31) робить її рівняння (з урахуванням умови (2.32)) лінійно залежними. Залишаючи лише одне з рівнянь, можна знайти співвідношення між амплітудами A та B для кожної з власних частот - так звані коефіцієнти розподілу амплітуд:

$$\kappa_{1,2} \equiv \frac{B}{A} \Big|_{\omega=\omega_{1,2}} = -\frac{a_{11} - \omega_{1,2}^2 b_{11}}{a_{12} - \omega_{1,2}^2 b_{12}} = -\frac{a_{12} - \omega_{1,2}^2 b_{12}}{a_{22} - \omega_{1,2}^2 b_{22}}. \quad (2.37)$$

Тоді загальний розв'язок системи (2.38) може бути поданий у вигляді:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(-i\omega_1 t) + \\ &+ A_3 \exp(i\omega_2 t) + A_4 \exp(-i\omega_2 t); \\ q_2(t) &= \kappa_1 [A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(-i\omega_1 t)] + \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$+ \kappa_2 [A_3 \exp(i\omega_2 t) + A_4 \exp(-i\omega_2 t)].$$

Коефіцієнти A_i в розв'язку (2.38) знаходяться з початкових умов. Візьмемо для прикладу такі початкові умови: при $t=0$

$$q_1(t) = A_0, \quad \dot{q}_1(t) = 0, \quad q_2(t) = 0, \quad \dot{q}_2(t) = 0 \quad (2.39)$$

(у початковий момент часу обидва осцилятори нерухомі, перший із них відхилений, а другий перебуває в положенні рівноваги). Підставляючи (2.38) до (2.39), отримаємо неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд A_i . Її розв'язання дає:

$$A_1 = A_2 = -\frac{\kappa_2 A_0}{2(\kappa_1 - \kappa_2)}; \quad A_3 = A_4 = \frac{\kappa_1 A_0}{2(\kappa_1 - \kappa_2)}. \quad (2.40)$$

Підставивши (2.40) до (2.38), отримуємо:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= -\frac{\kappa_2 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \cos \omega_1 t + \frac{\kappa_1 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \cos \omega_2 t = \\ &= \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \cos \omega_2 t + \frac{2\kappa_2 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t; \\ q_2(t) &= -\frac{\kappa_1 \kappa_2 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \\ &= \frac{2\kappa_1 \kappa_2 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{aligned} \quad (2.41)$$

Епюри коливань подані на рис. 2.8. Видно, що коливання кожної із змінних являють собою биття з періодом $T=2\pi/|\omega_1-\omega_2|$, причому для двох змінних ці биття протифазні. Отже, між парціальними осциляторами має місце обмін енергією [13].

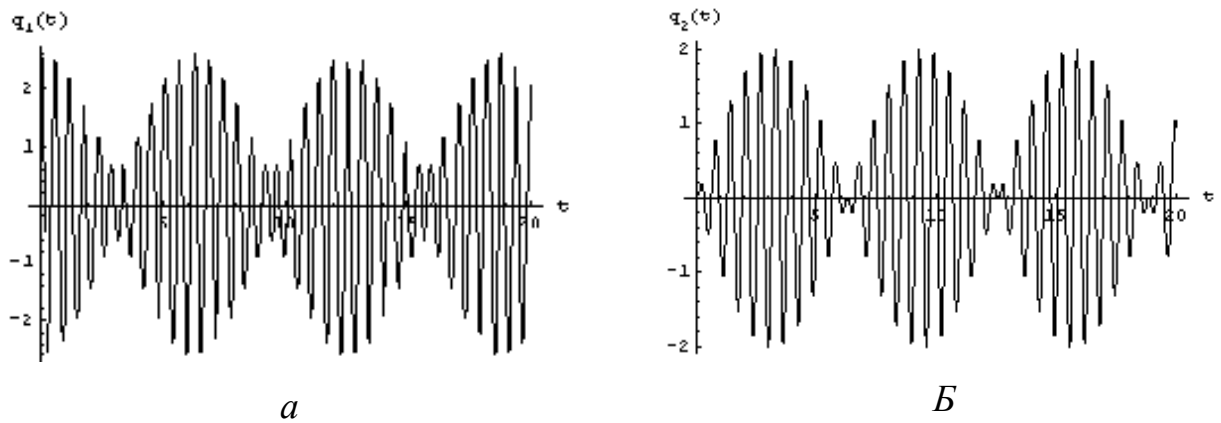


Рис. 2.8. Епюри коливань у системі двох зв'язаних лінійних консервативних осциляторів у випадку, коли в початковий момент часу вся енергія зосереджена в першому з них

Справді, для обраних початкових умов у початковий момент часу вся енергія зосереджена в першому осциляторі. Його коливання виступають у ролі зовнішньої сили для другого осцилятора. Під дією цієї сили амплітуда коливань другого осцилятора починає зростати. Зрозуміло, що в силу консервативності аналізованої системи зростання амплітуди коливань другого осцилятора призводить до зменшення амплітуди коливань першого осцилятора. Таким чином, в початкові моменти часу відбувається перекачування енергії від першого осцилятора до другого.

З часом сила, що діє з боку першого осцилятора на другий, стає протифазною до коливань, які збудилися в ньому в попередні моменти часу. З іншого боку, стає істотним зворотний вплив другого осцилятора на перший. В результаті починається перекачування енергії з другого осцилятора до першого. Потім процес періодично повторюється.

Розв'язок (2.41) отримано для конкретних початкових умов (2.39). Але обмін енергією між ступенями вільності матиме місце для майже будь-яких початкових умов.

Повернемося до початкової системи рівнянь (2.28). Введемо нові координати u та v , що пов'язані зі старими координатами $q_{1,2}$ співвідношеннями

$$q_1 = u + v, \quad q_2 = \kappa_1 u + \kappa_2 v. \quad (2.42)$$

Підставивши (2.42) до (2.28), можна показати, що в нових координатах рівняння руху набувають вигляду

$$\ddot{u} + \omega_{01}^2 u = 0; \quad \ddot{v} + \omega_{02}^2 v = 0. \quad (2.43)$$

Іншими словами, в нових координатах маємо рівняння руху двох ізольованих лінійних консервативних осциляторів із власними частотами (2.36) [9].

Коливання змінних u та v можна збуджувати незалежно.

Змінні u та v називають нормальними координатами, ω_{01} та ω_{02} іноді називають нормальними частотами. Коливання вигляду $u \neq 0, v = 0$ та $v \neq 0, u = 0$ називаються нормальними коливаннями, або нормальними модами системи. В «старих» координатах кожна з нормальних мод характеризується своєю частотою та коефіцієнтом розподілу амплітуд («формою» коливань).

Можна показати, що будь-які вільні коливання системи можна подати як суперпозицію її нормальних мод.

Поняття нормальних мод узагальнюється на системи з довільною кількістю ступенів вільності, а також на системи з розподіленими параметрами.

Нехай в аналізованій системі між осциляторами існує лише один тип зв'язку – наприклад, ємнісний. Тоді формула (2.36) для власних частот набуває вигляду:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 k_a^2}}{2}. \quad (2.44)$$

Зокрема, якщо осцилятори ідентичні, то $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, і отримаємо

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 (1 \pm k_a). \quad (2.45)$$

Інакше кажучи, навіть для ідентичних зв'язаних осциляторів власні частоти виявляються неоднаковими. Графік залежності власних частот аналізованої

системи від відношення її парціальних частот – так званий графік Віна – поданий на рис. 2.9. Штриховими лініями показані парціальні частоти.

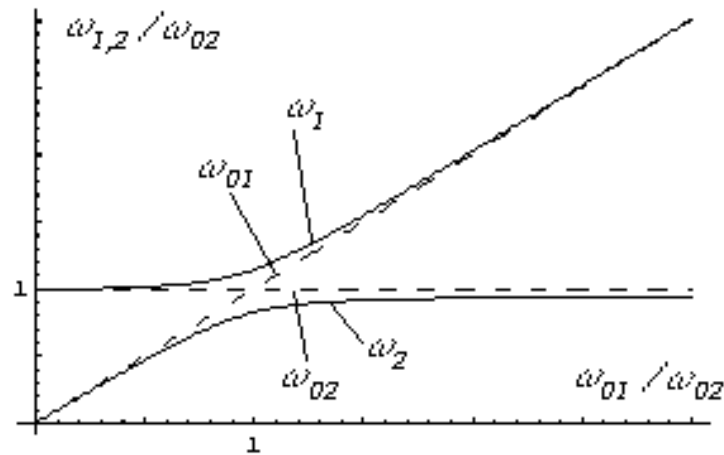


Рис. 2.9. Залежність нормованих власних частот системи двох консервативних осциляторів із ємнісним зв'язком від відношення парціальних частот

З графіка Віна видно, що віддаль між власними частотами завжди більша, ніж між парціальними. Цей ефект прийнято називати розштовхуванням власних частот внаслідок зв'язку між осциляторами. Відхилення власних частот від парціальних майже відсутнє, якщо парціальні частоти дуже відрізняються одна від одної, і досягає максимуму, коли парціальні частоти рівні між собою [21].

Причиною розштовхування частот є обмін енергією між осциляторами. Саме він приводить до того, що навіть у системі двох ідентичних осциляторів з'являються пульсації амплітуд коливань, які можуть бути інтерпретовані як биття, тобто як наявність коливань з двома відмінними частотами. Биття (обмін енергією між ступенями вільності) і розштовхування частот – це, по суті, одне й те саме явище, охарактеризоване в першому випадку як часова залежність, а в другому – в термінах спектрального аналізу

Для консервативної системи з двома ступенями вільності коефіцієнти розподілу амплітуд – чисто дійсні величини. Можна показати, що їхній добуток завжди від'ємний. Це означає, що одній із власних частот

відповідають синфазні коливання координат $q_{1,2}$, а інші – протифазні.

Розглянемо систему двох коливних контурів з ємнісним зв'язком. Будемо вважати, що вплив другого контуру на перший зводиться до зміни ефективного значення ємності зв'язку C_{12} . Якщо коливання в контурах синфазні, струми через ємність зв'язку будуть зустрічними. В результаті заряд на цій ємності зменшиться. Це відповідає ефективному зменшенню ємності зв'язку, а, отже, і повної ємності контуру, тобто збільшенню його власної частоти. Аналогічні міркування показують, що для протифазних коливань власна частота контуру зменшиться. Пряма підстановка (2.44) до (2.34) дає той самий результат – вищій власній частоті відповідає синфазна мода, нижчій – протифазна. Якщо контури ідентичні, то з урахуванням (2.45) дістанемо

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = -1. \quad (2.46)$$

При $\omega_{01} = \omega_{02}$ як завгодно слабкий зв'язок між осциляторами призводитиме до обміну енергією між ними (лише період цього обміну зростатиме). При $\omega_{01} \neq \omega_{02}$ слабкий зв'язок, навпаки, практично не впливатиме на поведінку системи. Тому ступінь взаємодії осциляторів, обумовлену зв'язком, характеризуватиме не просто коефіцієнт зв'язку, а так звана зв'язаність системи -

$$\rho = \frac{2k_{a,b}\omega_{01}\omega_{02}}{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}, \quad (2.47)$$

що залежить не лише від величини зв'язку, але й від віддалі між парціальними частотами [7].

Проаналізуємо тепер, як впливає дисипація на вільні коливання системи двох зв'язаних осциляторів. Розглянемо для прикладу систему двох коливних контурів з трансформаторним зв'язком, але вважатимемо контури дисипативними (з опорами R_1 та R_2). Тоді на основі другого закону Кірхгофа можна записати таку систему рівнянь:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt} = 0. \quad (2.48)$$

Шукатимемо розв'язок системи (2.58) у вигляді гармонічних коливань на частоті ω :

$$i_{1,2} = I_{1,2} \exp(i\omega t). \quad (2.49)$$

Підставляючи (2.49) до (2.48) і прирівнюючи до нуля визначник лінійної однорідної системи алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд $I_{1,2}$, можна отримати таке характеристичне рівняння щодо частоти вільних коливань ω :

$$\left(\omega^2 - i2\omega\delta_1 - \omega_{01}^2\right)\left(\omega^2 - i2\omega\delta_2 - \omega_{02}^2\right) = k^2\omega^4, \quad (2.50)$$

де використано позначення

$$\omega_{01,02} = \frac{1}{\sqrt{L_{1,2}C_{1,2}}}, \quad \delta_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{2L_{1,2}}, \quad k^2 = \frac{M^2}{L_1L_2}.$$

При $\delta_1 = \delta_2 = 0$ рівняння (2.50) стає бікватратним, а його корені - власні частоти системи - мають вигляд

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4k^2\omega_{01}^2\omega_{02}^2}}{2(1 - k^2)}. \quad (2.51)$$

(пор. з формулою (2.36) при $k_b = 0$, $k_a \neq 0$). Залежності власних частот від коефіцієнту зв'язку подані на рис. 2.10.

Коли ж $\delta_{1,2} \neq 0$, корені рівняння (2.50) стають комплексними. Зокрема, у випадку ідентичних контурів ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$) можна отримати:

$$\omega_{1,2} = \frac{i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2(1-k) - \delta^2}}{1-k};$$

$$\omega_{3,4} = \frac{i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2(1+k) - \delta^2}}{1+k}. \quad (2.52)$$

Як бачимо, власні частоти тепер мають уявні частини, що описують згасання коливань внаслідок дисипації. Модуль дійсної частини набуває двох можливих значень. Графіки залежностей дійсної та уявної частин власних

частот для цього випадку подані на рис. 2.11 а.

У загальному випадку, коли контури не є ідентичними, наведена вище якісна характеристика власних частот зв'язаних контурів залишається справедливою. Відповідні графіки подані на рис. 2.11 б.

Для коефіцієнтів розподілу амплітуд у загальному випадку можна записати:

$$\begin{aligned} K_{1,2,3,4} &\equiv \frac{I_2}{I_1} \Big|_{\omega_{1,2,3,4}} = \frac{L_1}{M} \frac{\omega_{01}^2 + i2\delta_1\omega_{1,2,3,4} - \omega_{1,2,3,4}^2}{\omega_{1,2,3,4}^2} = \\ &= \frac{M}{L_2} \frac{\omega_{1,2,3,4}^2}{\omega_{02}^2 + i2\delta_2\omega_{1,2,3,4} - \omega_{1,2,3,4}^2}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Порівнюючи (2.53) із (2.37), можна бачити, що коефіцієнти розподілу амплітуд, які в консервативній системі були чисто дійсними, в дисипативній системі стають комплексними. Це вказує на зсув фаз між коливаннями парціальних осциляторів, відмінний від 0 та π [15].

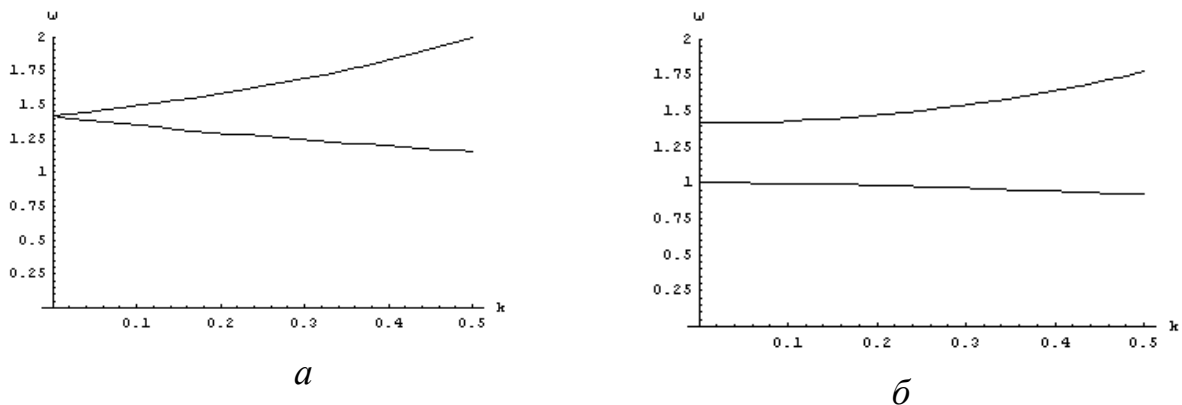


Рис. 2.10. Залежність власних частот консервативних контурів із індуктивним зв'язком від коефіцієнту зв'язку: а - $\omega_{01} = \omega_{02}$; б - $\omega_{01} \neq \omega_{02}$.

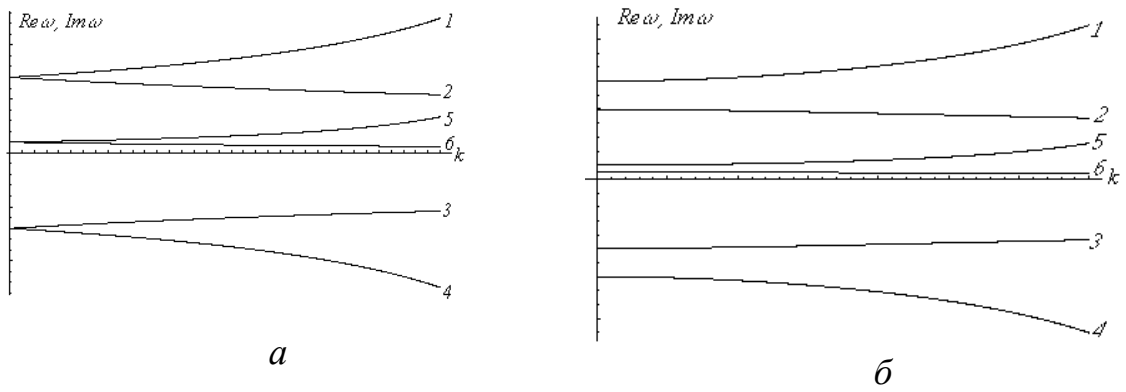


Рис. 2.11. Залежність власних частот (криві 1-4 - $Re \omega_{1-4}$, 5 - $Im \omega_{1,2}$, 6 - $Im \omega_{3,4}$) слабкодисипативних контурів із індуктивним зв'язком від коефіцієнту зв'язку: а - $\omega_{01} = \omega_{02}$; б - $\omega_{01} \neq \omega_{02}$.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА

У багатьох випадках для аналізу руху систем з одним ступенем вільності зручно користуватися методом фазової площини.

Фазова площина – це площина, на якій по осі абсцис відкладається координата, а по осі ординат - швидкість частинки. Тоді в кожний момент часу стан системи відповідає деякій точці на фазовій площині, яку називають зображувальною точкою. Лінія, яку описує на фазовій площині зображувальна точка, називається фазовою траєкторією. Сукупність усіх можливих фазових траєкторій називається фазовим портретом системи.

Проаналізуємо, користуючись методом фазової площини, найпростіше рівняння лінійного консервативного осцилятора :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Увівши до розгляду швидкість

$$y(x(t)) = \dot{x} \tag{3.1}$$

і врахувавши, що

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} y = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx}, \tag{3.2}$$

можна переписати рівняння лінійного консервативного осцилятора у фазових змінних x , y , виключивши з нього час:

$$y \frac{dy}{dx} + \omega_0^2 x = 0. \tag{3.3}$$

Видно, що перехід до фазових змінних дозволив знизити порядок рівняння на одиницю, але замість лінійного рівняння вийшло нелінійне. Втім, це рівняння легко проінтегрувати, відокремивши змінні:

$$y dy = -\omega_0^2 x dx, \tag{3.4}$$

звідки

$$y^2 + \omega_0^2 x^2 = const \tag{3.5}$$

Фазовий портрет лінійного консервативного осцилятора, як випливає з (3.5), являє собою набір вкладених еліпсів (рис. 3.1 а).

Оскільки додатна швидкість відповідає зростанню координати, у верхній напівплощині фазової площини, де швидкість додатна, зображувальні точки рухатимуться праворуч, відповідно в нижній – ліворуч.

Замінивши в рівнянні руху лінійного консервативного осцилятора ω^2 на $-\omega^2$, отримаємо випадок перевернутого маятника (для малих відхилень) або візка на гірці з параболічним профілем. Виконавши ту саму заміну в (2.28), отримаємо рівняння, що описує сім'ю гіпербол:

$$y^2 - \omega_0^2 x^2 = const. \quad (3.6)$$

Асимптоти $y = \pm \omega_0 x$ поділяють усі фазові траєкторії на чотири групи з відмінним характером руху, позначені на рис.3.1 б римськими цифрами [19].

Наприклад, траєкторії групи I відповідають випадку, коли візок, наїжджаючи на гірку з лівого боку, в деякій точці спиняється і скочується назад. Траєкторії групи II відповідають випадку, коли візок, також наїжджаючи на гірку з лівого боку, перекочується через неї й з'їжджає праворуч, і т.д.

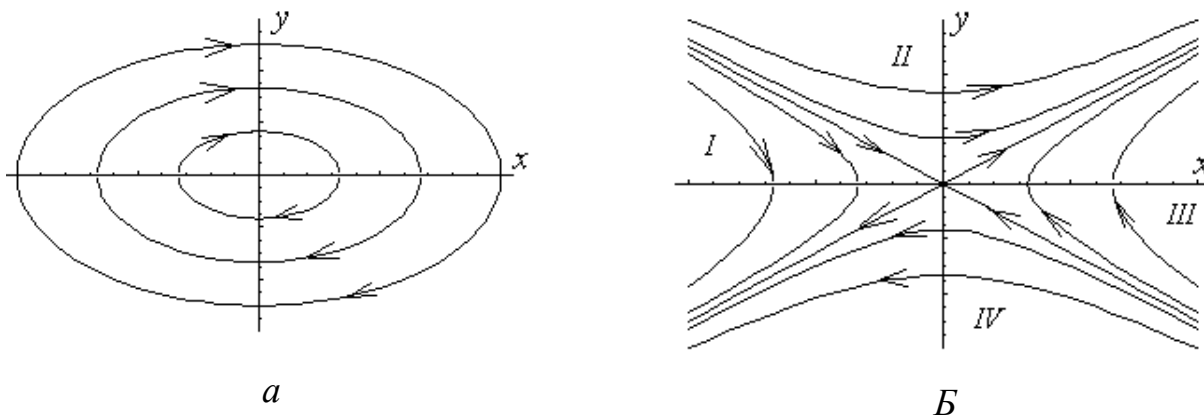


Рис. 3.1. Фазовий портрет лінійного консервативного осцилятора: а - $\omega_0^2 > 0$, б - $\omega_0^2 < 0$.

Лінії на фазовій площині, що поділяють фазовий портрет на області з якісно відмінним характером руху, називаються сепаратрисами. Отже, в даному випадку асимптоти $y = \pm \omega_0 x$ є сепаратрисами.

Ізокліною називається геометричне місце точок фазової площини, в яких фазові траєкторії мають однаковий нахил. Особливості побудови фазового

портрету за методом ізоклін продемонструємо на прикладі лінійного слабкодисипативного осцилятора, описуваного рівнянням:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \delta < \omega_0.$$

Перейшовши до безрозмірного часу, $\tau = \omega t$, і ввівши швидкість $y = dx/d\tau$, перепишемо рівняння лінійного слабкодисипативного осцилятора у фазових змінних:

$$y \frac{dy}{dx} + \varepsilon y + x = 0, \quad \varepsilon = \frac{2\delta}{\omega_0}. \quad (3.7)$$

Рівняння ізокліни можна записати у формі

$$\frac{dy}{dx} = a = const. \quad (3.8)$$

Тоді, підставивши (3.8) до (3.7), дістанемо:

$$ay + \varepsilon y + x = 0. \quad (3.9)$$

Як бачимо, замість первісного диференціального рівняння другого порядку для координати отримали для ізоклін алгебраїчне рівняння. Отже, перехід до ізоклін дозволяє знизити порядок диференціального рівняння на два.

Перепишемо рівняння для ізоклін (3.9) у вигляді

$$y = -\frac{x}{a + \varepsilon}. \quad (3.10)$$

З рис. 3.2 видно, що так звана нульова ізокліна (при $a=0$) на фазовому портреті лінійного слабкодисипативного осцилятора проходить через другий та четвертий квадранти фазової площини, коли $\delta > 0$ (дисипація додатна), і через перший та третій квадранти, коли $\delta < 0$ (дисипація від'ємна).

При $a \rightarrow \infty$ маємо $y=0$. Це справедливо для будь-якої системи: фазові траєкторії завжди (за виключенням окремих особливих випадків) перетинають вісь абсцис під прямим кутом.

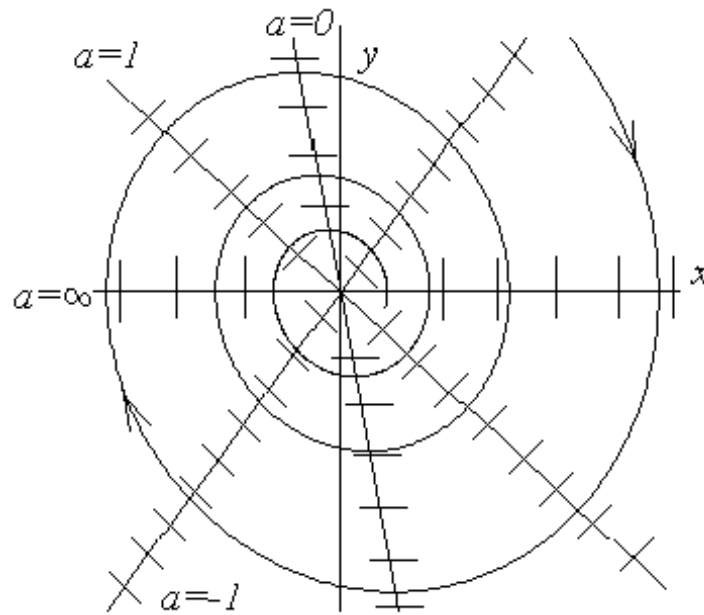


Рис. 3.2 Ізокліни (штрихами показано напрямок проходження відповідних фазових траєкторій) та фазовий портрет лінійного слабкодисипативного ($0 < \delta < \omega_0$) осцилятора.

Маючи набір ізоклін для різних значень a , можна побудувати фазовий портрет системи [17]. В даному випадку це буде спіраль, що скручується (рис. 3.2). Їй відповідають коливання з амплітудою, що згасає з часом.

Особливими (стаціонарними, нерухомими) точками фазової площини називаються точки $x_0 = const$, які задовольняють відповідне рівняння руху.

Для рівняння лінійного осцилятора особливою точкою буде, очевидно, точка $x=0$. Але її характер залежить від співвідношення між параметрами рівняння.

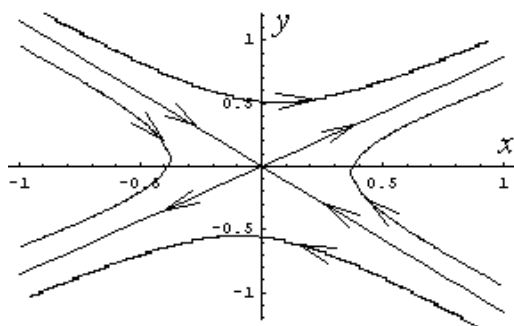
Якщо $\omega_0^2 < 0$, стаціонарна точка буде нестійкою при будь-яких значеннях параметра дисипації δ . Як уже відзначалося, вона відповідає перевернутому маятнику або візку на гірці. Фазовий портрет для цього випадку поданий на рис.3.3 а. Видно, що існує пара фазових траєкторій, що починаються в особливій точці, та пара фазових траєкторій, які в ній закінчуються. Стаціонарна точка такого типу дістала назву сідлової точки, або сідла.

Якщо $\omega_0^2 > 0$, характер особливої точки буде істотно залежати від значення δ .

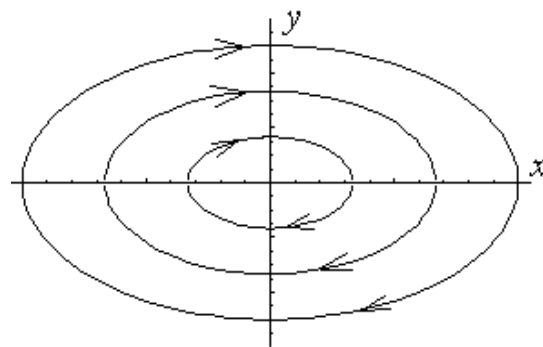
При $\delta=0$ фазовий портрет системи являє собою набір вкладених еліпсів (рис. 3.3 б). Стаціонарна точка в цьому випадку є ізольованою – в ній не починається і не закінчується жодна фазова траєкторія. Маємо справу із особливою точкою типу центр.

При $0 < \delta < \omega_0$ фазовий портрет системи являє собою спіраль, що скручується (рис. 3.3 в). Відповідну стаціонарну точку називають стійким фокусом. При малій від'ємній дисипації ($0 < -\delta < \omega_0$) отримуємо спіраль, що розкручується (рис. 3.3 г), і нестійкий фокус.

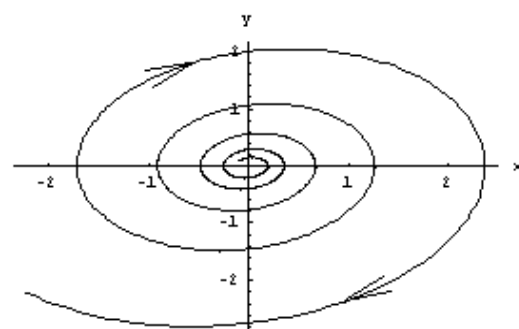
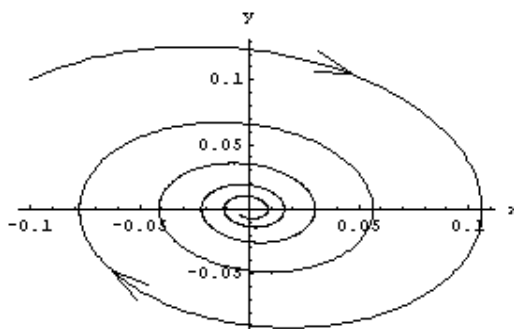
Нарешті, у випадку сильної дисипації – при $\delta > \omega_0$ - реалізується режим аперіодичного згасання коливань. Фазовий портрет системи являтиме собою набір деформованих парабол (рис. 3.3 д), що закінчуються в особливій точці типу стійкий вузол. При сильній від'ємній дисипації - $0 < \omega_0 < -\delta$ - матимемо аперіодичне зростання коливань (рис. 3.3 е). У цьому випадку фазові траєкторії починаються з особливої точки типу нестійкий вузол.



а



б



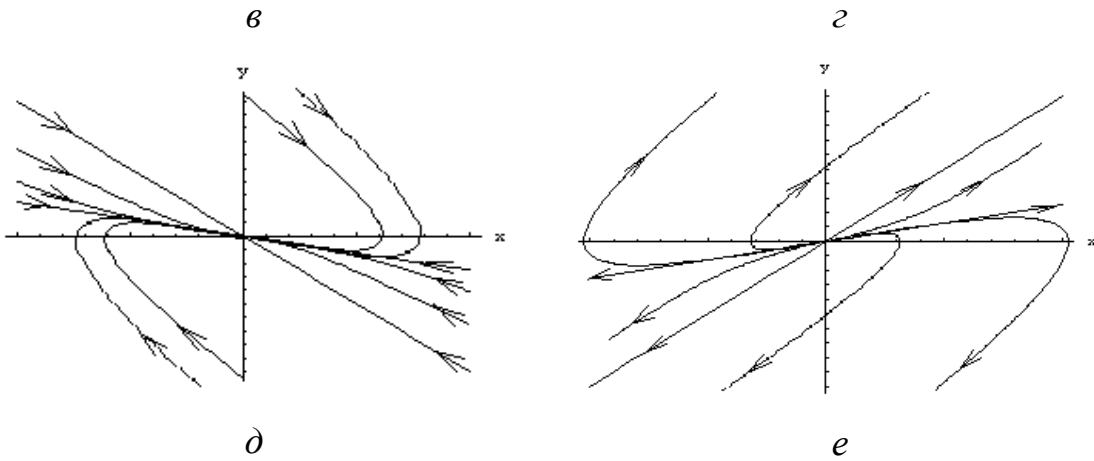


Рис. 3.3. Особливі точки лінійного осцилятора: а - сідло ($\omega_0^2 < 0$); б - центр ($\delta = 0, \omega_0^2 > 0$); в - стійкий фокус ($0 < \delta < \omega_0$); г - нестійкий фокус ($0 < -\delta < \omega_0$); д - стійкий вузол ($0 < \omega_0 < \delta$); е - нестійкий вузол ($0 < \omega_0 < -\delta$).

ВИСНОВКИ

Внаслідок широкого розповсюдження коливних процесів у природі та техніці дослідження коливальних систем і моделювання їх поведінки є актуальною задачею. Задачі моделювання коливань у складних коливних системах стають потужнішими, що надає можливість отримувати якісно нові результати у прогнозуванні властивостей новітніх матеріалів. Розв'язання сучасних задач з моделювання коливних процесів в системі осциляторів з різними масами можливе за рахунок використання диференціальних рівнянь.

При виконанні роботи було розглянуто основні поняття теорії коливних процесів, визначені принципи моделювання коливних систем. Математична модель коливного процесу представлена у вигляді системи з $2n$ осциляторів. Для проведення розрахунків використовувався метод фазової площини та інші.

Коливання з невеликою кількістю ступенів свободи мають періодичний або резонансний характер. Коливання з великою кількістю ступенів свободи при наявності зовнішнього впливу також можуть протікати в резонансному режимі. Цей випадок має великий практичний інтерес при вивченні проєктованих коливних систем, коли необхідно перевірити їх на предмет можливості виникнення резонансних явищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Н. Г., Прикладная математика: С примерами из механики: Учебное пособие / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Н. Г. Пановко. – М. УРСС, 2006. – 376 с.
2. Буланчук П. О. Параметры вибрации точки подвеса для заданного положения равновесия двойного математического маятника / П. О. Буланчук, А. Г. Петров // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 4. – С. 31–39.
3. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі: Навч. посіб. Кн. 1/ Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва; За ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 1994. — 288 с.
4. Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. Збірник завдань з вищої математики. Ч.2.-Київ: Політехніка, 2002.-108 с.
5. Дьяченко О. Теоретичні дослідження просторових коливань віброустановки з пневматичними вібробудниками коливань/ Дьяченко О. // Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць. – К.:Ліра, 2004. – С.45-51.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник.- Київ: А.С.К.-2005.- 648с.ISBN 966-539-320-0
7. Єремєєв В. С. Моделювання коливальних процесів в системі лінійних осциляторів / В. С. Єремєєв, В. В. Кузьмінов, Попазов М. В.// Збірник наук. праць. Сучасні проблеми моделювання. - Мелітополь: Видавництво Мелітопольського державного пед. унів. ім. Б. Хмельницького. 2016. - Випуск 7. - С.57-61.
8. Кумицкий Б. М. Модель математического маятника как объект научноисследовательской работы студентов в физпрактикуме / Б. М. Кумицкий, Н. А. Саврасова // Материалы V Междунар. научн.-практ. конф. «Научные перспективы XXI века : Достижения и перспективы нового столетия». – Новосибирск, 2014. – С. 107–109.

9. Лісовська В.П., Перестюк М.О. Вища математика. Практикум: у 2ч. - Київ, КНЕУ, 2012. – 443 с.
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
11. Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. / С. Раков – Математика в школі. 2007. – 369 с.
12. Рындин Е.А. Методы решения задач математической физики. / Е.А. Рындин. - Таганрог: ТРТУ, 2003. - 119 с.
13. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов – М.: Физматлит, 2001. – 260 с
14. Савельев И. В. Курс общей физики, том I. Механика, колебания и волны, молекулярная физика / И. В. Савельев. - Москва: Наука, 1989. - 352 с.
15. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 2003. — 600 с.
16. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. — К.: Либідь, 2003. — 504 с.
17. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Практический курс. Учебное пособие.-М.: Высшая школа.-2006. -383 с.
18. Сіренко Г.О. Теорія та аналіз випадкових процесів: 1. Коливання та коливальні системи (огляд)/ Г.О. Сіренко, Д.А. Фундюр, Г.Я. Стефанюк // 34
19. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем / В. П. Тарасик. - Москва: Наука, 1997. - 352 с.
20. Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны / Д. И. Трубецков. Москва, 2001. – 416 с.

21. Филиппов. Математические методы для разработки компьютерной модели колебательных процессов в цепочке осцилляторов с различными массами. Інформаційні технології в освіті та науці. Збірник наук. праць Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Б. Хмельницького.- Мелітополь: Вип. 11. - 2019. - С.311-319.

22. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1979. — 175 с.

23. Шелобаев С. И. Математичні методи й моделі в економіці, фінансах і бізнесі. / С. И. Шелобаев – К., 2000. – 325 с.