

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

Якісний аналіз та дослідження властивостей розв'язку загального
рівняння вільних коливань

Виконала: студентка II курсу
магістратури, групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Новак Марія Вікторівна

Керівник: доктор технічних наук,
професор Бичков О.С.

Рецензент: доктор технічних наук,
професор, завідувач кафедри
прикладної математики НУВГП
Матринюк П.М.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ.....	7
1.1. Основні поняття та означення	7
1.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь.	14
1.3. Фазовий портрет системи.....	26
Розділ 2. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ.....	41
2.1. Вільні коливання у найпростіших консервативних системах.....	41
2.2. Загасаючі коливання	43
2.3. Вимушені коливання.	45
2.4. Нелінійні коливання. Вільні коливання	50
2.5. Параметричні коливання.....	52
РОЗДІЛ ІІІ. ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ	55
ВИСНОВКИ.....	81
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	83

ВСТУП

Передумови для появи теорії диференціальних рівнянь склалися в другій половині XVII ст., коли математики впритул наблизилися до усвідомлення взаємно оберненого характеру двох основних операцій аналізу нескінченно малих — диференціювання та інтегрування.

Актуальні на той час так звані «обернені задачі на дотичні» (тобто задачі відшукування кривих за відомими властивостями їх дотичних) були одними з перших, що зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь. Наведемо простий приклад такої задачі.

Нехай на площині з декартовою прямокутною системою координат xOy потрібно знайти криву, в кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної пропорційний із коефіцієнтом k ординаті точки дотику. Якщо таку криву шукати у вигляді графіка деякої диференційовної функції $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то, врахувавши геометричний зміст похідної, умову задачі можна подати у вигляді співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

яке являє собою одне з найпростіших і водночас дуже важливих диференціальних рівнянь. Легко переконатися в тому, що його задовольняє кожна функція вигляду $y = ce^{kx}$, де c — довільне дійсне число. Цей факт було виявлено Р. Декартом іще в 1639 р.

Популярний у XVII ст. кінематичний спосіб побудови різноманітних кривих, що спирався на поняття миттєвої швидкості (механічного еквівалента похідної), теж був важливим джерелом виникнення диференціальних рівнянь. Як приклад, наведемо запропоновану Р. Декартом кінематичну інтерпретацію кривих із попередньої задачі.

Нехай точка P рухається в площині так, що швидкість її абсциси є величиною сталою, рівною для певності одиниці, а миттєва швидкість

ординати в кожен момент часу t пропорційна з коефіцієнтом k самій ординаті. Очевидно, що функції $x(t)$ та $y(t)$, які визначають залежність координат точки P від часу, мають задовольняти систему рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = ky.$$

Перше з виписаних співвідношень становить задачу про первісну функції $f(t) = 1$. Його розв'язки вичерпуються функціями $X = t + c$, де стала c , пробігає множину дійсних чисел. Друге рівняння, як нам уже відомо, задовольняє кожна функція $y = c_2 e^{kt}$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Унаслідок вилучення параметра t дістаємо залежність $y = C_2 e^{k(x-c_1)}$ або $y = c e^{kx}$, якщо ввести позначення $c = c_2 e^{-kc_1}$.

Цікаво відзначити, що на описаному вище законі руху точки P фактично ґрунтувався запропонований Дж. Непером принцип укладання таблиць логарифмів.

У 1669 р. І. Барроу в своїх «Лекціях з геометрії та оптики» доводить важливий результат про взаємно обернений характер задач на дотичні, з одного боку, та про площі фігур, обмежених графіками функцій, — з іншого, і на підставі цього формулює правило розв'язання диференціальних рівнянь спеціального вигляду $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(x)}$ (рівняння такого типу називають диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними).

Ньютон, мабуть, першим сповна усвідомив значення диференціальних рівнянь для опису законів природи й насамперед законів руху механічних систем. У 1676 р. він запропонував метод відшукування розв'язків диференціальних рівнянь у вигляді степеневих рядів. У цей самий час Г. Лейбніц ставить задачу про знаходження розв'язків у скінченному вигляді.

Актуальність теми дослідження визначається кількома групами взаємопов'язаних чинників:

1) зростаючою роллю математичних наук у сучасному світі;

2) математичну модель вимушених коливань застосовують в різних областях сучасного природознавства, математичної фізики, у теорії спеціальних функцій;

3) важливе значення математична модель вимушених коливань має у сучасних галузях таких як автоматика і телемеханіка, теорія систем, теорія регулювання та успішно застосовується при розв'язанні задач механіки, електроніки, радіотехніки, теплопередачі та ін.

4) практичною значимістю для вирішення конфліктів і суперечностей, які направлені на вироблення максимально оптимізованої і ефективної концепції програмного забезпечення, чия потужність вже давно здатна оброблювати подібні данні.

Метою роботи є вивчення, аналіз та оцінка якісного аналізу та дослідження властивостей розв'язку загального рівняння вільних коливань до розв'язування диференціальних рівнянь і систем, а також застосування цих рівнянь до розв'язання прикладних задач.

Мета дослідження досягається:

- урахуванням визначальних чинників динамічного процесу якісного аналізу та дослідження властивостей розв'язку загального рівняння вільних коливань;
- аналізом та синтезом розроблених у роботі аналітичних та якісних методів дослідження механічних систем складної структури;
- використанням сучасних методів математичного та фізичного моделювання.

До загального рівняння вільних коливань висувається широкий спектр вимог, що дозволяє досягнути задовільної адекватності. У деяких випадках отримані наближені аналітичні розв'язки рівнянь рухів механічних систем, у інших – досліджено якісні властивості розв'язків рівнянь рухів, які зіставляються з результатами чисельного інтегрування.

Для досягнення мети дипломної роботи поставлено такі завдання:

1) систематизувати відомості про загальне рівняння вільних коливань.

2) поглибити знання про диференціальні рівняння та їх застосування.

3) опрацювати наявну літературу з теми.

Об'єктом роботи є прикладні задачі та системи диференціальних рівнянь при розв'язуванні яких застосовується загальне рівняння вільних коливань.

Предметом роботи є диференціальні рівняння нелінійних механічних систем різної структури та динамічні явища у них.

Структура роботи зумовлена її метою та завданнями. Дипломна робота містить вступ, де в загальних рисах окреслені основні параметри даного дослідження. У першому розділі описано загальні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь та їх систем. Другий розділ більш детально демонструє методи дослідження вільних коливань систем із одним ступенем свободи. Третій розділ описує якісний аналіз загального рівняння вільних коливань. Робота також містить висновки, де окреслюються та узагальнюються всі основні аспекти дослідження, а також список джерел та літератури.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

1.1. Основні поняття та означення

При розгляді різноманітних фізичних явищ часто не вдається безпосередньо знайти залежність між величинами, що характеризують еволюційний, тобто, змінений у часі, процес. Аналогічні труднощі можуть виникнути і в ситуаціях, коли із незалежної змінної виступає одна з координат точки або інша змінна величина. Однак у багатьох випадках можна встановити зв'язок між потрібними характеристиками досліджуваного явища (функціями) і швидкостями їх зміни щодо інших змінних, тобто, знайти рівняння, до яких входять похідні невідомих функцій. Такі рівняння називають диференціальними.

Якщо невідомі функції залежать від одного незалежного змінного аргументу, то говорять про звичайні диференціальні рівняння (ЗДР), інакше про диференціальні рівняння з частинними похідними [2].

Позначивши незалежну змінну, похідна якої від шуканої функції входить до складу ЗДР, через t , а цю шукану скалярну функцію через $x(t)$, запишемо ЗДР у вигляді

$$F \left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^m x}{dt^m} \right) = 0 \quad (1.1.1)$$

Порядок $n \in \mathbb{N}$ старшої похідної в (1.1.1) називають порядком диференціального рівняння. Таким чином, (1.1.1) є звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку [2].

Розв'язком звичайного диференціального рівняння (1.1.1) в деякому проміжку $T \subset \mathbb{R}$ числової прямої \mathbb{R} називають n раз неперервно

диференційовану в цьому проміжку функцію $x(t)$, що задовольняє за будь-якого $t \in T$ це рівняння.

Якщо в (1.1.1) $n = 1$, то маємо звичайне диференціальне рівняння першого порядку $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$. В багатьох випадках його записують у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

(1.1.2)

Тоді його називають звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, відносно похідної. При $n > 1$ отримуємо звичайне диференціальне рівняння вищого порядку.

В (1.1.1) і (1.1.2) входить одна функція $x(t)$. У теорії ЗДР розглядають також системи рівнянь, які складаються з звичайних диференціальних рівнянь та такого ж числа функцій, що шукаються[2]. Якщо система ЗДР першого порядку шукається відносно похідних:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}$$

(1.1.3)

то її називають нормальною системою ЗДР. В такому випадку число n рівнянь, що входять до (1.1.3), називають порядком нормальної системи ЗДР. Якщо праві частини (1.1.3) не залежать явно від t ($\frac{df_i}{dt} = 0, i = \overline{1, n}$), маємо автономну нормальну систему ЗДР.

Розглядаючи $x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$), як координатні функції, введемо вектор-функцію скалярного аргументу $x(t) = x_1(t), \dots, x_n(t))^T$. Аналогічно, вважаючи

$$f_i(t, x) = f_i(t, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n},$$

координатними функціями векторної функції, представимо її як $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))^T$. Тоді (1.1.3) можна записати у векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

(1.1.4)

Розв'язком нормальної системи (1.1.4) ЗДР в деякому проміжку $T \subset \mathbb{R}$ називають вектор-функцію $x(t)$, визначену і неперервно диференційовану в цьому проміжку і яка за будь-якого $t \in T$ задовольняє цій системі.

Звичайне диференціальне рівняння n -го порядку

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \varphi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

(1.1.5)

відносно старшої похідної, можна звести до нормальної системи. Дійсно, позначивши $x(t) = x_1(t)$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2(t), \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n(t)$$

отримаємо $\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{dx_n}{dt}$, і (1.1.5) набуде вигляду

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t);$$

.....

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n(t);$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \varphi(t, x_1, \dots, x_n).$$

Процес знаходження розв'язку ЗДР зазвичай називають інтегруванням диференціального рівняння [2]. Якщо розв'язок ЗДР можна отримати за допомогою скінченного числа операцій інтегрування та диференціювання та виразити через елементарні функції, то іноді кажуть, що розв'язок диференціального рівняння отримано (або виражено) у квадратурах.

Слід зазначити, що ЗДР мають, зазвичай, безліч розв'язків. Наприклад, неважко перевірити підстановкою, що за будь-якого значення постійного числа a функція $x(t) = ae^t - 1$ є розв'язком ЗДР першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = x + 1$$

Найпростіші звичайні диференціальні рівняння розглядали у своїх роботах ще І. Ньютон та Г. Лейбніц. Саме Г. Лейбніц ввів у 1676 р. термін „диференціальні рівняння". Завдання розв'язку ЗДР І. Ньютон трактував як обернене по відношенню до знаходження похідної для заданої функції, а знаходження невизначеного інтеграла він вважав окремим випадком цього завдання. Для Ньютона як творця основ математичного природознавства такий підхід до відновлення функції залежно між функцією та її похідними був цілком логічним, оскільки більшість відомих у науці закономірностей може бути виражено у формі диференціальних рівнянь.

Наведемо декілька прикладів:

Приклад 1.

Тіло масою m падає під дією сили тяжіння mg (g - прискорення вільного падіння) та сили опору $F_{Tp} = -kv$, пропорційної швидкості v , де k - коефіцієнт опору. Знайти залежність швидкості руху тіла від часу t .

Розв'язання

Використовуючи другий закон Ньютона, складемо ЗДР, описуючи рух тіла:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Маємо ЗДР першого порядку, відносно похідної $\frac{dv}{dt}$, що має механічний сенс прискорення руху розглянутого тіла [3]. Можна перевірити підстановкою, що розв'язок цього ЗДР є сукупність функцій

$$v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{kt}{m}},$$

де C - довільна стала. Якщо у момент часу $t = 0$ тіло починає падіння з початковою швидкістю $v(0) = v_0$, то $C = v_0 - \frac{mg}{k}$, тоді

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) + v_0 e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Крім того, це ЗДР має, очевидно, розв'язок $v_\infty = \frac{mg}{k}$, до якого прямують при $t \rightarrow +\infty$ всі розв'язки незалежно від значення v_0 .

Приклад 2.

З точки O під кутом до горизонту кидають із заданою початковою швидкістю v_0 тіло масою m так, що воно падає під прямим кутом на похилу площину, що проходить через точку O і утворює з горизонтом заданий кут φ . Вважаючи кути α і φ гострими (рис. 1.1.1), знайти кут α .

Помістимо в точку O початок прямокутної декартової системи координат, направивши вісь абсцис Ox вздовж похилої площини.

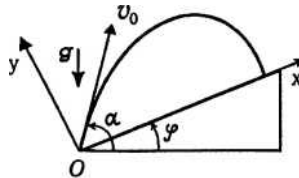


Рис. 1.1.1

Відповідно до другого закону Ньютона, рівняння руху тіла мають вигляд

$$(1.1.7) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \sin \varphi, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \cos \varphi.$$

Це ЗДР другого порядку. Вони мають розв'язки

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} \sin \varphi + c_1 t + c_2, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} \cos \varphi + c_3 t + c_4, \quad (1.1.8)$$

В (1.1.8) входять чотири довільних сталих C_i ($i = \overline{1,4}$). Тому для вибору із нескінченної множини можливих розв'язків єдиного розв'язку, що описує дійсний рух розглянутого тіла, необхідно використовувати відомості про положення та швидкість цього тіла в початковий момент часу $t = 0$, що однозначно визначають ці довільні сталі [2]. Так як при $t = 0$ тіло знаходиться в початку координат, $x = y = 0$, то, згідно з (1.1.8), $C_2 = C_4 = 0$

Диференціюючи (1.1.8), отримуємо

$$\frac{dx}{dt} = -gt \sin \varphi + C_1, \quad \frac{dy}{dt} = -gt \cos \varphi + C_3.$$

З урахуванням заданого при $t = 0$ значення v_0 швидкості тіла маємо

$$C_1 = v_0 \cos(\alpha - \varphi), \quad C_3 = v_0 \sin(\alpha - \varphi).$$

Підставляючи знайдені вирази для довільних сталих в (1.1.8), запишемо

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} \sin \varphi + v_0 t \cos(\alpha - \varphi), \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} \cos \varphi + v_0 t \sin(\alpha - \varphi). \quad (1.1.9)$$

Отриманий розв'язок містить поки що невідоме значення кута α . Це значення можна знайти, врахувавши, що тіло падає на похилу площину під прямим кутом, в момент $t = t_1$ падіння $y = 0$ і проекція швидкості тіла на координатну вісь Ox дорівнює нулю ($\frac{dx}{dt} = 0$). Враховуючи (1.1.9), з останньої умови маємо

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = -gt_1 \sin \varphi + v_0 \cos(\alpha - \varphi) = 0, \quad \text{або} \quad t_1 = \frac{v_0 \cos(\alpha - \varphi)}{g \sin \varphi},$$

а з першої умови, використовуючи отриманий вираз для t_1 , маємо

$$\begin{aligned}
 y(t_1) &= -\frac{gt_1^2}{2} \cos \varphi + v_0 t_1 \sin(\alpha - \varphi) = \\
 &= -\frac{v_0^2 \cos(\alpha - \varphi)}{2g \sin^2 \varphi} [\cos \varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi) - 2 \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin \varphi] =
 \end{aligned}$$

Оскільки за змістом задачі $\cos(\alpha - \varphi) \neq 0$, то дорівнює нулю вираз у квадратних дужках:

$$\cos \varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi) - 2 \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin \varphi = 0.$$

Звідси після тригонометричних перетворень отримуємо

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{або} \quad \alpha = \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi).$$

Приклад 3. Людина, яка знаходиться в точці Q, рухається вздовж осі ординат Oy в позитивному напрямку і тягне важкий предмет, розташований у точці P, за мотузку постійної довжини a (рис. 1.1.2). Нехай на площині xOy у початковий момент часу точка Q знаходиться на початку координат, а точка P має координати $(a; 0)$. Складемо ЗДР траєкторії точки P [5].

Позначимо через $y = y(x)$ рівняння шуканої траєкторії точки P. З умови завдання випливає, що PQ є дотичною до цієї траєкторії в точці P з координатами $(x; y)$. Довжина відрізка AQ (рис.1.1.2) дорівнює $\sqrt{a^2 - x^2}$, а $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$.

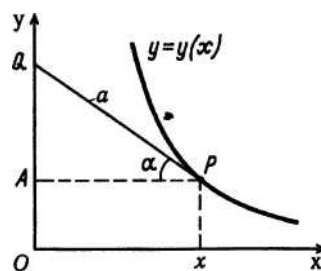


Рис. 1.1.2

Зважаючи на геометричний зміст похідної, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, отримуємо ЗДР першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

розв'язане відносно похідної. Одним із розв'язків цього ЗДР є функція

$$y = a \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2-x^2},$$

яка задає добре відому плоску криву трактрису.

1.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь.

Нормальною системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь називають нормальну систему ЗДР виду

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t)$$

(1.2.1)

де $x_i(t)$ - невідомі функції, що підлягають визначенню;

$a_{ij}(t)$ і $g_i(t)$ — відомі функції аргументу $t \in T$, неперервні в деякому проміжку $T \subset \mathbb{R}$ числової прямої \mathbb{R} .

Для лінійної системи (1.2.1) області $D = T \cdot \mathbb{R}^n$ виконані всі умови теореми Коші існування та єдиності розв'язку [4]. Дійсно, для будь-якого номера i права частина в (1.2.1) має неперервні в проміжку T частинні похідні за будь-яким із аргументів X_j ($j = \overline{1, n}$), рівносильне виконанню для правої частини системи ЗДР (1.2.1) умови Ліпшиця щодо всіх аргументів X_j ($j = \overline{1, n}$) при будь-яких значеннях $t \in T$.

Запис системи у вигляді (1.2.1) можна спростити, якщо скористатися матричними позначеннями:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}; \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Тут $x(t)$ та $g(t)$ - вектор-функції; $A(t)$ – квадратна матриця, так звана матриця системи ЗДР. Над введеними матрицями можна проводити відомі алгебраїчні операції, а також операції граничного переходу, диференціювання та інтегрування.

З урахуванням введених позначень систему (1.2.1) перепишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t). \quad (1.2.2)$$

Якщо $g(t) = 0$ в T , то

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \quad (1.2.3)$$

Систему (1.2.3) називають нормальною однорідною системою лінійних ЗДР, що відповідає системі (1.2.2). При $g(t) \neq 0$ в T системі лінійних ЗДР буде неоднорідною.

Наведемо теореми, що встановлюють основні властивості однорідних та неоднорідних систем ЗДР [2].

Теорема 1.2.1. Лінійна комбінація розв'язків однорідної системи (1.2.3) також є розв'язком цієї системи.

Нехай $x_1(t)$, $x_2(t)$ – розв'язок системи (1.2.3).

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = A(t)x_2.$$

Розглянемо лінійну комбінацію цих розв'язків

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Маємо

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{dx_1}{dt} + \beta \frac{dx_2}{dt} = \alpha A(t)x_1 + \beta A(t)x_2 = A(t)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)),$$

Тобто, $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ також є розв'язком системи (1.2.3).

Теорема 1.2.2. Різниця будь-яких двох розв'язків неоднорідної системи ЗДР (1.2.2) є розв'язком однорідної системи (1.2.3).

Нехай $x_1(t)$, $x_2(t)$ – розв'язок системи (1.2.2).

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1 + g(t), \quad \frac{dx_2}{dt} = A(t)x_2 + g(t).$$

Віднімемо з першої рівності другу і отримаємо

$$\frac{d(x_1(t) - x_2(t))}{dt} = A(t)(x_1(t) - x_2(t)),$$

тобто $x_1(t) - x_2(t)$ – є розв'язком однорідної системи (1.2.3).

Аналогічно можна довести наступну теорему.

Теорема 1.2.3. Сума розв'язку неоднорідної системи (1.2.2) та розв'язок відповідної їй однорідної системи (1.2.3) є розв'язком неоднорідної системи (1.2.2).

Теорема 1.2.4. Якщо $x_1(t)$ і $x_2(t)$ – розв'язок нормальних систем лінійних ЗДР відповідно

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t) \quad \text{і} \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

то $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ є розв'язком нормальної системи лінійних ЗДР

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t) + f(t).$$

Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = A(t)x_1 + g(t) + A(t)x_2 + f(t) = \\ &= A(t)(x_1 + x_2) + g(t) + f(t) = A(t)x + g(t) + f(t), \end{aligned}$$

що доводить твердження теореми.

Розглянемо векторні функції

$$x_1(t), \dots, x_2(t), \dots, x_n(t), \quad (1.2.4)$$

які необов'язково є розв'язком систем (1.2.2) або (1.2.3).

Систему вектор-функції (1.2.4) називають лінійно залежною в деякому проміжку ТCR числової прямої R, якщо існує така система чисел

$$\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0,$$

що має місце тотожність

$$\lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_i x_i(t) + \dots + \lambda_n x_n(t) \equiv 0 \quad t \in T. \quad (1.2.5)$$

Якщо ж такої системи чисел немає, то систему вектор-функції (1.2.4) називають лінійно незалежною в проміжку T [4].

Будь-яка система вектор-функцій, що включає вектор-функцію, тотожно рівна проміжку T нульовому вектору 0 є, лінійно залежною. Дійсно, вибираючи в (1.2.5) коефіцієнт при такій функції відмінним від нуля і вважаючи коефіцієнти при інших функціях рівним нулю, приходимо до тотожності для будь-яких $t \in T$.

Система вектор-функцій лінійно незалежна у будь-якому проміжку T, якщо вона лінійно незалежна в меншому проміжку $T_1 \subset T$. Якщо система лінійно залежить в T, то її лінійна залежність буде збережена і в $T_1 \subset T$, але обернене, взагалі кажучи, неправильно [2]. При розгляді конкретного набору

векторних функцій часто для стислості опускають слово „система” і говорять про лінійні залежності чи незалежності цих векторних функцій.

Лінійне звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) n -го порядку має вигляд

$$\frac{d^m y}{dt^m} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_i(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) y = g(t),$$

(1.2.6)

де функції $a_1(t), \dots, a_n(t)$ та $g(t)$ визначені та безперервні в деякому проміжку $T \subset \mathbb{R}$ числової прямої \mathbb{R} .

Нехай функція $y(t)$ має у проміжку T безперервні похідні принаймні до $(n - 1)$ -го порядку включно. Введемо функції

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad \dots, \\ x_i(t) = y^{(i-1)}(t), \quad \dots, \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

(1.2.7) Тоді ЗДР (1.2.6) можна записати у вигляді нормальної системи лінійних ЗДР:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n; \\ \frac{dx_n}{dt} &= -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 \dots - a_1(t)x_n + g(t). \end{aligned}$$

(1.2.8)

В матричній формі ця система (1.2.8) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t),$$

(1.2.9)

де $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T$, $g(t) = (0, \dots, 0, g(t))^T$ і

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

(1.2.10)

Таким чином, якщо $y(t)$ – розв’язок ЗДР (1.2.6), то сукупність функцій (1.2.7) є розв’язком системи ЗДР (1.2.9). Справедливе та зворотне твердження.

При $g(t) \neq 0$ у T рівняння (1.2.6) називають лінійним неоднорідним ЗДР n -го порядку. Якщо ж $g(t) = 0$ у T , то з (1.2.6) випливає відповідне (1.2.6) лінійне однорідне ЗДР n -го порядку

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_i(t) \frac{d^{n-i} y}{dt^{n-i}} + \dots + a_n(t) y = 0,$$

(1.2.11)

яке шляхом введення функцій (1.2.7) можна звести до лінійної однорідної системи ЗДР, що збігається з (1.2.8) за умови $g(t) = 0$ у T . У матричній формі така система набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

(1.2.12)

Введемо ряд необхідних понять, безпосередньо пов’язаних з аналогічними поняттями для систем ЗДР.

Означення 1.2.1 Систему функцій $y_1(t), \dots, y_2(t), \dots, y_m(t)$ називають лінійно залежною в деякому проміжку $T \subset \mathbb{R}$ числової прямої \mathbb{R} , якщо існує така система чисел

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \neq 0,$$

що

$$\lambda_1 y_1(t) + \dots + \lambda_k y_k(t) + \dots + \lambda_m y_m(t) = 0 \quad \forall t \in T. \quad (1.2.13)$$

Якщо ж такої системи чисел немає, то цю систему функцій називають лінійно незалежною у проміжку T .

У разі системи вектор-функцій, система функцій лінійно незалежна у якомусь проміжку T , якщо вона лінійно незалежна в деякому проміжку $T_1 \subset T$. Якщо ж вона лінійно залежна у T , то її лінійна залежність буде збережена і у $T_1 \subset T$, але протилежне, взагалі кажучи, невірне.

Зауваження 1.1.1 Будь-яка система n функцій, що включає функцію $y_j(t) = 0$

$\forall t \in T$, буде лінійно залежною. Справді, вибравши (1.2.13) коефіцієнт λ_j при такій функції відмінним від нуля і поклавши коефіцієнти при інших функціях рівними нулю, приходимо до тотожності (1.2.13). Розглянемо приклад.

Приклад 1.2.1 Покажемо, що система функцій $1, t, t^2, t^3$ лінійно незалежна на всій числовій прямій. Припустимо протилежне. Тоді, у \mathbb{R} має бути справедлива тотожність

$$\lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 t^2 + \lambda_4 t^3 \equiv 0, \quad \sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 \neq 0,$$

Останнє неможливо, тому що в лівій частині стоїть многочлен не вище третього ступеня, який може повертатися в нуль не більше ніж у трьох точках. Отже, система функцій $1, t, t^2, t^3$ є лінійно незалежною в будь-якому непустому проміжку числової прямої [5].

При розгляді конкретного набору функцій часто для стислості опускають слово „система” і говорять про лінійні залежності чи незалежності цих функцій.

Покажемо, що дві функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ лінійно незалежні в проміжку T тоді і тільки тоді, коли їхнє ставлення $\frac{f_1(t)}{f_2(t)}$ у цьому проміжку не дорівнює константі.

Передбачається, що $f_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in T$.

Нехай $f_1(t)$ і $f_2(t)$ лінійно незалежні. Це означає, що тотожність

$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) \equiv 0$ можливе лише при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Звідси випливає, що їхнє відношення $\frac{f_1(t)}{f_2(t)}$ не може бути постійною функцією.

Зворотнє твердження доведемо від супротивного. Припустимо, що $f_1(t)$ і $f_2(t)$ лінійно залежні, тобто існують такі λ_1 і λ_2 , $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$, що $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0 \quad \forall t \in T$. Для визначеності нехай $\lambda_1 \neq 0$. Тоді $\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, тобто, відношення функцій являє собою постійну функцію, а це суперечить припущенню. Отже, функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ лінійно незалежні [5].

Якщо є точки $t \in T$, у яких $f_2(t) = 0$, але $f_1(t) \neq 0$

$\forall t \in T$, то можна взяти відношення $\frac{f_2(t)}{f_1(t)}$ і для нього провести ті самі міркування.

Приклад 1.2.2. Згідно з доведеним твердженням функції $f_1(t) = \sin t$ лінійно незалежні на будь-якому проміжку $T \subset \mathbb{R}$, тому що їх відношення $\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$ не є постійною функцією.

Означення 1.2.2 Лінійно незалежну в проміжку $T \subset \mathbb{R}$ систему з n функцій $y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$), кожна з яких є у ньому розв'язком лінійного однорідного ЗДР (1.2.11) n -го порядку називають фундаментальною системою розв'язків цього рівняння у зазначеному проміжку.

Розглянемо сукупність n функцій $y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$), мають при $t \in T$ безперервні похідні принаймні до $(n - 1)$ -го порядку включно. Визначник

$$\bar{W}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

(1.2.14)

назвемо вронскіаном системи n функцій, безперервно диференційованих $n - 1$ раз у проміжку T (на відміну від аналогічного структурою визначника Вронського системи вектор-функцій).

Теорема 1.2.5 Якщо система n функцій $y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) лінійно залежна в проміжку T , то її вронскіан $W(t) = 0 \quad \forall t \in T$.

Згідно з визначенням 1.2.1, для лінійно залежної системи функцій хоча б один з коефіцієнтів (6.8) відмінний від нуля (нехай для визначеності $\lambda_l \neq 0$). Тоді функція $y_n(t)$ буде лінійною комбінацією інших функцій:

$$y_n(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1}(t) \quad \forall t \in T,$$

(1.2.15)

де $\alpha_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \dots, \alpha_{n-1} = -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$. Продиференціювавши (1.2.15)

поспідовно $n - 1$ раз, підставивши результати замість останнього стовпця в (1.2.14) і опустивши значення аргументу t , отримаємо визначник

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

в якому останній стовпець при всіх $t \in T$ є лінійною комбінацією інших стовпців. Тому записаний визначник дорівнює нулю, що доводить твердження теореми.

Якщо функція $y_k(t)$ є розв'язком однорідного ЗДР (1.2.11) у проміжку T , то вона, згідно з визначення 1.2.1 розв'язку ЗДР, $n - 1$ раз безперервно диференційована в цьому проміжку. Тоді в проміжку T можна ввести

сукупність функцій виду (1.2.7), що є координатними функціями вектор-функції

$$x_k(t) = (y_k(t), y'_k, \dots, y_k^{(i-1)}(t), \dots, y_k^{(n-1)}(t))^T \quad (1.2.16)$$

яка буде розв'язком однорідної системи (1.2.12).

Нехай система функцій

$$y_1(t), \dots, y_2(t), \dots, y_n(t) \quad (1.2.17)$$

є розв'язком однорідного ЗДР (1.2.11) у проміжку T . Тоді система вектор-функції $x_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) (див. 1.2.16), буде розв'язком однорідної системи ЗДР (1.2.12) у тому ж проміжку.

Вронскіан (1.2.14) системи функцій (1.2.17) у проміжку T тотожно збігається, очевидно, з визначником Вронського (6.6) системи вектор-функцій (1.2.16), тобто,

$$\bar{W}(t) = W(t) \quad \forall t \in T \quad (1.2.18)$$

Тому для вронскіана в проміжку T справедлива формула Остроградського - Ліувілла у вигляді

$$\bar{W}(t) = \bar{W}(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(T) dT\right), \quad (1.2.19)$$

Так як сума елементів, що стоїть на головній діагоналі матриці $A(t)$ (1.2.10) однорідної системи ЗДР (1.2.12) дорівнює $a_1(t)$. З (1.2.19) випливає, що якщо $\bar{W}(t_0) \neq 0$ в деякій точці $t_0 \in T$, то $\bar{W}(t) \neq 0 \quad \forall t \in T$, і навпаки, при $\bar{W}(t_0) = 0$ маємо $\bar{W}(t) = 0 \quad \forall t \in T$

Якщо функції (1.2.17) складають фундаментальну систему розв'язку однорідного ЗДР (1.2.11), то відповідні їм вектор-функції (1.2.16) становитимуть фундаментальну систему розв'язку однорідної системи ЗДР (1.2.12), і навпаки, обидві системи можуть бути лінійно незалежними у проміжку T лише одночасно. Переконаємося в цьому, розмірковуючи від супротивного.

Нехай функції $y_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ лінійно залежні в проміжку T . Тоді на основі теореми 1.2.1 та з урахуванням (1.2.18) $\bar{W}(t) = W(t) = 0 \quad \forall t \in T$, що означає, лінійну залежність системи вектор-функцій (1.2.16) в проміжку T . Якщо ж лінійно залежні у проміжку T вектор-функції $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, то

$$\lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_k x_k(t) + \dots + \lambda_n x_n(t) = 0 \quad \forall t \in T,$$

де хоча б один із коефіцієнтів λ_k відмінний від нуля. Записавши цю векторну рівність у координатній формі, для перших у (1.2.16) координатних функцій $y_k(t)$, ($k = \overline{1, n}$) отримаємо (1.2.13), тобто, згідно з визначенням 1.2.1, система функцій (1.2.18) лінійно залежна у проміжку T .

Отже, аналізовані системи функцій та вектор-функцій можуть бути лінійно залежними або лінійно незалежними, а також складати фундаментальні системи розв'язків однорідних відповідно ЗДР (1.2.11) та системи ЗДР (1.2.12) лише одночасно. Оскільки з теореми 5.7 випливає, що існують фундаментальні системи розв'язків однорідної системи виду (1.2.12), то існують і відповідні фундаментальні системи розв'язків однорідних ЗДР (1.2.11).

Теорема 1.2.6. Якщо $y_1(t), \dots, y_k(t), \dots, y_n(t)$ - фундаментальна система розв'язків ЗДР (1.2.11) в проміжку T , то будь-який розв'язок $y(t)$ у ньому цього ЗДР має вигляд

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(t),$$

(1.2.20)

де $C_1, \dots, C_k, \dots, C_n$ - постійні.

Насамперед переконаємося, що (1.2.20) є розв'язком ЗДР (1.2.11) за будь-яких значень постійних $C_k(t)$, ($k = \overline{1, n}$). Для цього підставимо (1.2.20) у (1.2.11) і запишемо

$$\sum_{k=1}^n C_k \left(\frac{d^n y_k}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y_k}{dt^{n-1}} + \dots + a_i(t) \frac{d^{n-i} y_k}{dt^{n-i}} + \dots + a_n(t) y_k \right) = 0.$$

Оскільки за умовою теореми функції $y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) є розв'язком ЗДР (1.2.11), кожна з них при $t \in T$ звертає в нуль відповідний доданок записаної суми. Отже, ліва частина цього виразу дорівнює нулю при $t \in T$, а (1.2.20) є розв'язком ЗДР (1.2.11).

При деякому $t_0 \in T$ поставимо довільні початкові умови $y(t_0) = y_1^0, y'(t_0) = y_2^0, \dots, y^{i-1}(t_0) = y_1^0, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_n^0$, яким через теорему Коші задовольняє єдиний розв'язок ЗДР (1.2.11). Такий розв'язок може мати вид (1.2.20) і бути єдиним лише в тому випадку, якщо за заданим початковим значенням можна однозначно знайти постійні C_k ($k = \overline{1, n}$).

Якщо, диференціюючи (1.2.20) необхідне число разів, підставити результати при значенні $t = t_0$ у початкові умови, то отримаємо систему з лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\sum_{k=1}^n C_k y_k^{(n-1)}(t_0) = y_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.2.21)$$

з n невідомими значеннями постійних C_k ($k = \overline{1, n}$) (в цьому записі при $i = 1$ використано позначення $y_k^0(t_0) = y_k(t_0)$). Визначник цієї СЛАУ є вронскіаном $\bar{W}(t_0)$ фундаментальної системи розв'язків ЗДР (1.2.11) у проміжку T , що збігається з визначником $W(t_0)$ Вронського фундаментальної системи розв'язків однорідної системи ЗДР (1.2.12). Таким чином, визначник

СЛАР відмінний від нуля, і вона має єдиний розв'язок, що доводить затвердження теореми.

1.3. Фазовий портрет системи

Розглянемо нормальну автономну систему, яка складається із двох звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)

$$\frac{dx_1}{dt} = P(x_1, x_2);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = Q(x_1, x_2).$$

(1.3.1)

Тут P, Q - функції, безперервно диференційовані в деякій області D змінення фазових змінних x_1 і x_2 ; t - час.

Системі (1.3.1) притаманні три типи фазових траєкторій на фазовій площини x_1Ox_2 точка, замкнена крива і незамкнена крива. Точкам відповідають положення рівноваги системи, тобто, такі розв'язки системи, за яких фазові змінні x_1, x_2 не змінюються у часі, тобто

$$x_1(t) \equiv x_1^0, x_2(t) \equiv x_2^0, x_1^0, x_2^0 = const.$$

Замкнені криві на фазовій площини зображують розв'язок, що описується періодичними функціями $x_1(t) = x_1(t + T_1), x_2(t) = x_2(t + T_2)$ з періодами T_1 і T_2 відповідно, що задовольняють умову $mT_1 = nT_2$ $m, n \in \mathbb{N}$. Такі розв'язки називають періодичними. Незамкнені криві на фазовій площині зображують розв'язки системи (1.3.1), які є неперіодичними [5].

Основне завдання при якісному дослідженні системи (1.3.1) - встановлення структури розбиття фазової площини на траєкторії. Картина, яку утворюють фазові траєкторії на площині x_1Ox_2 , носить назву фазового портрету системи (1.3.1). Кожна із фазових траєкторій є годографом вектора

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$$

(1.3.2)

є озв'язком системи (1.3.1), якщо початок цього вектора зафіксувати на початку системи координат Ox_1x_2 на фазовій площині, тобто вважати (1.3.2) радіус-вектором. За такої умови $x(t)$ називають фазовим вектором [5].

Звернемося до випадку, коли (1.3.1) є однорідною системою лінійних ЗДР з постійними коефіцієнтами:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2;$$

(1.3.3)

Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то система (1.3.3) має єдиний стан рівноваги на початку координат, тобто.

$$x_1 = x_2 = 0$$

Цій точці фазової площини відповідає тривіальний розв'язок системи (1.3.3) $x(t) = 0$, який можна розглядати як незбурений рух.

Часто поняття стійкості та асимптотичної стійкості системи, переносять на незбурений рух і безпосередньо на відповідне йому положення рівноваги системи та говорять про стійкість або асимптотичну стійкість положення рівноваги [2].

Характер поведінки фазових траєкторій системи (1.3.3) фазової площини x_1Ox_2 визначають корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (1.3.5)$$

Ці корені можуть бути або дійсним ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$), причому простими ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) або кратними ($\lambda_1 = \lambda_2$), або комплексно спряженими ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}_1, \lambda_2 = \lambda_1$). Розглянемо кожен із цих випадків.

1. Корені дійсно прості. В цьому випадку загальний розв'язок системи

(1.3.3) у векторній формі має вигляд

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T = C_1 e^{\lambda_1 t} a_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} a_2, \quad (1.3.6)$$

де C_1 і C_2 - сталі; a_1 і a_2 — власні вектори матриці системи ЗДР. Вектори a_1 і a_2 лінійно незалежні, оскільки відповідають різним власним значенням λ_1 і λ_2 цієї матриці і, отже, утворюють базис на фазовій поверхні. Тоді

$$\xi_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.3.7)$$

є координатними функціями вектор-функції $x(t)$ цього базисі.

У загальному випадку напрямки векторів a_1 і a_2 не збігаються з напрямками координатних осей Ox_1 і Ox_2 і система координат $O\xi_1\xi_2$ взагалі кажучи, не є прямокутною. Однак для наочності зручно використовувати змінні $\xi_1\xi_2$ як прямокутні координати іншої площини і зображати поведінку системи на цій площині у прямокутній системі координат $O\xi_1\xi_2$. У такій системі координат фазову траєкторію у параметричній формі задають співвідношення (1.3.7), причому роль параметра грає час t . Якщо становище точки на фазовій траєкторії характеризувати значенням t , то за допомогою (1.3.7) можна простежити за її рухом по фазовій траєкторії, так що саме в цьому сенсі виправдано використання терміна „траєкторія" (від латинського *trajectus* — пересування). У цьому випадку рухому точку називають зображуваною.

Зрозуміло, що координати x_1, x_2 і ξ_1, ξ_2 однієї і тієї ж точки фазової траєкторії пов'язані лінійним перетворенням, яке дещо видозмінює фазовий портрет при переході від однієї системи координат до іншої, але зберігає його основні особливості. Ці особливості суттєво залежать від знаків коренів λ_1 та λ_2 .

Розглянемо можливі варіанти.

а. Нехай $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$. Покладемо для визначеності $\lambda_1 > \lambda_2$.

З (1.3.7) слідує, що $\xi_1 \rightarrow 0$ і $\xi_2 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, тобто зображувана точка по будь-якій фазовій траєкторії прямує до початку координат, але початок координат формально належить лише одній фазовій траєкторії (при $C_1 = C_2 = 0$), яка вироджується в точку і відповідає положенню рівноваги (1.3.4). Якщо $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, то, згідно (1.3.6) і (1.3.7), в системі координат $O\xi_1, \xi_2$ фазова траєкторія - піввісь осі $O\xi_1$ ($\text{sgn}\xi_1 = \text{sgn}C_1$), а якщо $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, то фазова траєкторія - піввісь осі $O\xi_2$ ($\text{sgn}\xi_2 = \text{sgn}C_2$).

Будь-якої фазової траєкторії, що задається співвідношеннями (1.3.7) у першому квадранті площини $\xi_1 O\xi_2$ при конкретних значення $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$, відповідають ще три фазові траєкторії: симетрична щодо осі $O\xi_1$ при зміні знака постійної C_2 , симетрична щодо осі $O\xi_2$ при зміні знаку C_1 і симетрична щодо початку координат при зміні знаків C_1 і C_2 одночасно. Отже, щоб уявити фазовий портрет системи (1.3.3) у площині $O\xi_1, \xi_2$ досить побудувати її фазові траєкторії у першому квадранті цієї площини [2].

Виключивши при $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$ з (1.3.7) час t , отримуємо $\xi_2 = c\xi_1^\alpha$, де $c = \text{const}$ та $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$. Таким чином, фазові траєкторії у площині $\xi_1 O\xi_2$ мають вигляд гілок параболи. Якщо до них приєднати початок координат, то в ньому вони будуть мати загальну дотичну – вісь $O\xi_1$.

Фазовий портрет змінних x_1, x_2 і ξ_1, ξ_2 зображений на рис. 1.3.1 та 1.3.2 відповідно.

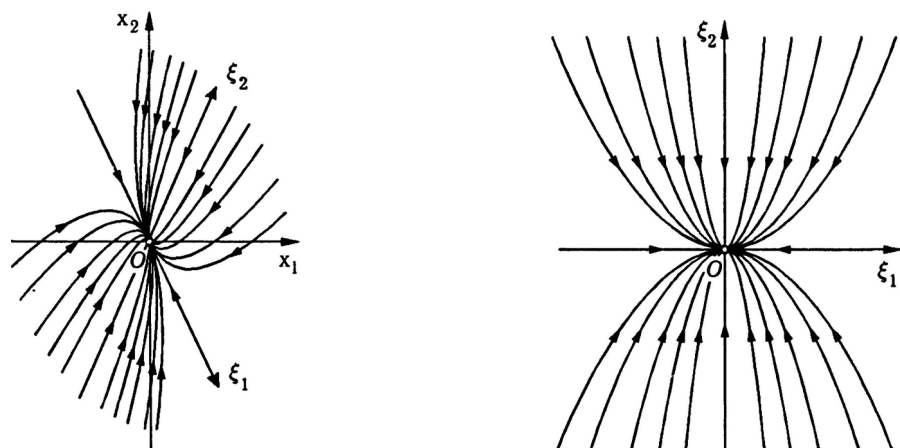


Рис. 1.3.1

Рис. 1.3.2

При від'ємних значеннях коренів λ_1 та λ_2 лінійна однорідна система ЗДР (1.3.3) асимптотично стійка, тому що всі розв'язки цієї системи, асимптотично стійкі, що дозволяє, говорити в даному випадку про асимптотичну стійкість положення рівноваги системи. На фазовій площині воно відповідає початку координат, куди по кожній з фазових траєкторій прагне зображувальна точка при $t \rightarrow +\infty$. У даному випадку положення рівноваги називають стійким вузлом [2].

б. Нехай $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$, причому $\lambda_1 < \lambda_2$. В такому випадку, міркуючи аналогічно випадку від'ємних коренів, прийдемо до висновку, що фазові траєкторії мають таку ж форму. Однак при $t \rightarrow +\infty$ рух зображувальної точки фазової траєкторії проходить від початку координат. Тому фазовий портрет збігається із зображенням на рис. 1.3.1 та 1.3.2, але стрілки направлені у зворотному напрямку. Розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1.3.3), а значить, і положення рівноваги на початку координат при додатних коренях характеристичного рівняння будуть нестійкими за Ляпуновим. У цьому випадку положення рівноваги в початку координат, називається нестійким вузлом.

в. Корені λ_1 і λ_2 мають різні знаки. Нехай для визначеності $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$. У разі $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ отримаємо $\xi_1 = 0, \xi_2 = c\xi_1^\alpha$ і $\xi_2 \rightarrow \infty$, при $t \rightarrow +\infty$, тобто, фазова траєкторія — піввісь осі $O\xi_2$ ($\text{sgn}\xi_2 = \text{sgn}C_2$), а рух зображувальної точки проходить від початку координат. Якщо $C_1 \neq 0$ і $C_2 = 0$, то маємо $\xi_2 = 0, \xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} = 0$ і $\xi_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ (фазова траєкторія - піввісь осі $O\xi_1$ ($\text{sgn}\xi_1 = \text{sgn}C_1$), а рух зображувальної точки відбувається до початку координат). При $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ рівняння фазової траєкторії, отримане вилученням з (1.3.7) часу t , буде $\xi_2 = c\xi_1^\alpha$ де $c = \text{const}$ та $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, тобто, фазові траєкторії мають вигляд гіпербол, для яких осі $O\xi_1$ і $O\xi_2$ є

відповідно горизонтальною та вертикальною асимптотами. Фазовий портрет змінних x_1, x_2 і ξ_1, ξ_2 зображений на рис. 1.3.3 та 1.3.4 відповідно.

Положення рівноваги на початку координат, відповідне незбуреному руху $x(t) = 0$, в цьому випадку називають сідлом. Сідлу відповідає незворушений рух $x(t) = 0$, не буде асимптотично стійким розв'язком системи (1.3.3). Тому, сідло не є асимптотично стійким станом рівноваги [2].

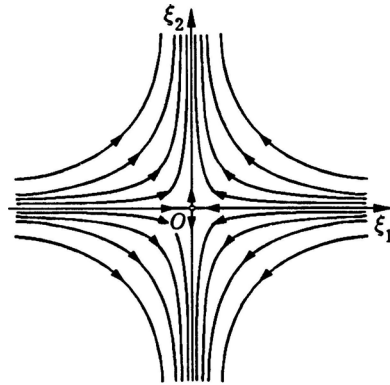


Рис. 1.3.3

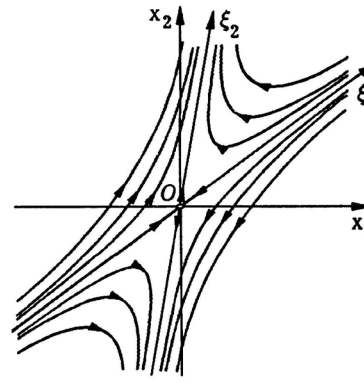


Рис. 1.3.4

г. Один із коренів дорівнює нулю (нехай для визначеності $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$). В цьому випадку з (1.3.7) маємо $\xi_2(t) \equiv C_2 = const$. Ця тотожність задає в площині $\xi_1 O \xi_2$ сімейство прямолінійних фазових траєкторій, паралельних осі $O \xi_1$. Напрямок руху по них зображувальної точки залежить від знаку кореня λ_1 . Якщо $\lambda_1 < 0$, то $\xi_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, і її рух відбувається у напрямку до осі $O \xi_2$. Якщо ж $\lambda_1 > 0$, то $\xi_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, і її рух відбувається в протилежному напрямку.

З характеристичного рівняння (1.3.5) випливає, що один з коренів дорівнюватиме нулю за умови $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, тобто, коли матриця A системи ЗДР (1.3.3), записаної у вигляді

$$(1.3.8) \quad \frac{dx}{dt} = Ax, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2)^T,$$

є виродженою. І тут однорідна система $Ax = 0$ лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) має нескінченну множину розв'язків. Справді, будь-яка точка осі $O\xi_2$ тобто, пряма $\xi_1 = 0$, є в даному випадку станом рівноваги системи (1.3.8). Відповідні положення рівноваги розв'язку системи (1.3.8) і незбурені рухи, що відповідають їм, при $\lambda_1 < 0$ є стійкими за Ляпуновим, але не будуть асимптотично стійкими, а при $\lambda_1 > 0$ - нестійкими за Ляпуновим [2].

2. Корені дійсні кратні. Позначимо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. У цьому випадку можуть виникнути два суттєво різних варіантів залежно від значень коефіцієнтів a_{12} і a_{21} у правій частині (1.3.3).

а. При $a_{12} = a_{21} = 0$ система (1.3.3) є, по суті, сукупністю двох незалежних лінійних однорідних ЗДР першого порядку із розв'язками

$$x_1(t) = C_1 e^{e_{11}t} \qquad x_2(t) = C_2 e^{e_{22}t}, \quad (1.3.9)$$

причому $a_{11} = a_{22} = \lambda$. Тоді, виключивши з (1.3.9) час t , отримаємо рівняння $C_2 x_1 - C_1 x_2 = 0$ пучка прямих у площині $x_1 O x_2$, які проходять через початок координат, що слід розглядати як стан рівноваги (1.3.4) такої системи. Кожна півпряма, яка не містить початку координат, буде фазовою траєкторією, а зображувальна точка, буде наближатися по ній до початку координат, якщо $\lambda < 0$, і віддалятися від нього, якщо $\lambda > 0$ (випадок $\lambda = 0$ розглянемо окремо). Фазовий портрет для випадку $\lambda < 0$ зображено на рис. 1.3.5.

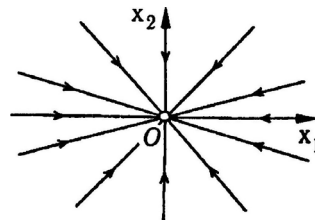


Рис. 1.3.5

Положення рівноваги в початку координат називають дикритичним вузлом. Такий стан рівноваги є асимптотично стійким (рис. 1.3.5) при $\lambda < 0$ і не буде стійким за $\lambda > 0$.

Частковий випадок $\lambda = 0$ можливий, якщо всі коефіцієнти у правій частині системи (1.3.3) дорівнюють нулю. Тоді будь-яка точка (x_1^0, x_2^0) фазової площини є положенням рівноваги такої системи, а відповідний йому незворушений рух $x(t) \equiv x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ є стійким за Ляпуновим, але не є асимптотично стійким [2].

б. Нехай хоча б один з коефіцієнтів a_{12} і a_{21} в правій частині (1.3.3) не дорівнює нулю. Припустимо для визначеності, що $a_{12} \neq 0$. Виключимо із системи (1.3.3) змінну x_2 . Для цього продиференціюємо перше рівняння цієї системи:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11} \frac{dx_1}{dt} + a_{12} \frac{dx_2}{dt}.$$

Підставляючи це співвідношення замість $\frac{dx_2}{dt}$ праву частину другого рівняння системи (1.3.3), знаходимо

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11} \frac{dx_1}{dt} + a_{12} a_{21} x_1 + a_{12} a_{22} x_2.$$

Виразивши $a_{12} x_2$ через змінне x_1 за допомогою першого рівняння системи (1.3.3), підставляємо в останнє співвідношення. Отримаємо лінійне однорідне ЗДР другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_1}{dt} + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_1 = 0, \quad (1.3.10)$$

характеристичне рівняння якого, природно, збігається з (1.3.5) і має у цьому випадку кратні корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Загальний розв'язок ЗДР (1.3.10), буде

$$(1.3.11) \quad x_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Підставивши (1.3.11) до першого ЗДР системи (1.3.3), знайдемо

$$(1.3.12) \quad x_2(t) = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t} + \frac{1}{a_{12}} C_2 e^{\lambda t}.$$

Використовуючи (1.3.11) та (1.3.12), загальний розв'язок системи (1.3.3) у разі кореня λ кратності $q = 2$ запишемо у вигляді

$$(1.3.13) \quad x(t) = x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T = \xi_1(t)a_1 + \xi_2(t)a_2,$$

де $\xi_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$ і $\xi_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$ – координатні функції вектор-функції $x(t)$ у базисі, утвореному лінійно незалежними векторами

$$a_1 = \left(1, \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}\right)^T \quad a_2 = \left(0, \frac{1}{a_{12}}\right)^T.$$

При $C_1 = C_2 = 0$ маємо положення рівноваги системи на початку координат. Якщо $C_1 \neq 0$, а $C_2 = 0$, то фазові траєкторії є півосями осі $O\xi_1$ ($\text{sgn}\xi_1 = \text{sgn}C_1$). При $C_2 \neq 0$ маємо $t = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln \left|\frac{\xi_2}{C_2}\right|$ та в системі координат $\xi_1 O\xi_2$ отримуємо рівняння фазової траєкторії у вигляді

$$\xi_1 = \left(C + \frac{1}{\lambda} \ln|\xi_2|\right) \xi_2, \quad C = \text{const.}$$

У разі $\lambda < 0$ при $t \rightarrow +\infty$ як $\xi_1 \rightarrow 0$, так і $\xi_2 \rightarrow 0$, тобто, точка, що зображається по кожній з фазових траєкторій необмежено наближається до положення рівноваги (1.3.4) початку координат, але не досягає його. Фазовий портрет для цього випадку в змінних x_1, x_2 і ξ_1, ξ_2 (при довільній орієнтації лінійно незалежних векторів a_1 і a_2) показаний на рис. 1.3.6.

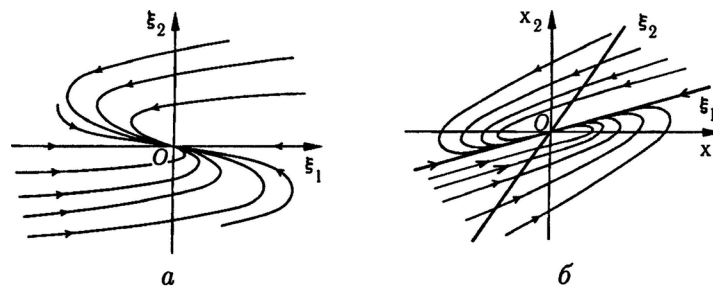


Рис. 1.3.6

У разі $\lambda > 0$ фазовий портрет аналогічний, але напрямок руху зображувальної точки протилежний. Положення рівноваги в обох випадках називають виродженим вузлом [3]. Воно асимптотично стійке при $\lambda < 0$ і не є стійким при $\lambda > 0$.

У разі $\lambda = 0$ координатні функції набувають вигляду

$$\xi_1(t) = C_1 + C_2 t \quad \xi_2(t) = C_2.$$

Прямолінійні фазові траєкторії паралельні осі $O\xi_1$, всі точки якої є положення рівноваги. Напрямок руху зображувальної точки фазової траєкторії залежить від знаку сталої C_2 .

3. Корені комплексно спряжені. Умовою виникнення комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння (1.3.5) є виконання нерівності

$$(a_{11} + a_{22})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

або

$$-\beta^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0.$$

Звідси випливає, що коефіцієнти a_{12} та a_{21} мають бути відмінні від нуля і мати різні знаки. Тоді $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\beta$ ($i^2 = -1$), причому $\mu = \frac{(a_{11} + a_{22})}{2}$.

Дійсний розв'язок ЗДР (1.3.10), що відповідає системі (1.3.3), можна записати у вигляді

$$x_1(t) = (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)e^{\mu t}, \quad C_1, C_2 = \text{const} \quad (1.3.14)$$

Підставивши (1.3.14) у перше ЗДР системи (1.3.3), отримаємо

$$x_2(t) = \frac{\mu - a_{11}}{a_{12}} ((C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)e^{\mu t} + \frac{\beta}{a_{12}} (C_2 \cos \beta t - C_1 \sin \beta t)e^{\mu t}). \quad (1.3.15)$$

Використовуючи (1.3.14) і (1.3.15), загальний розв'язок системи (1.3.3) у разі комплексно пов'язаних коренів запишемо у вигляді (1.3.13), але тепер координатними функціями вектор-функції $x(t)$ в базисі лінійно незалежних векторів

$$a_1 = (0, \frac{\beta}{a_{12}})^T \quad \text{і} \quad a_2 = (1, \frac{\mu - a_{11}}{a_{12}})^T$$

є

$$\xi_1(t) = (C_2 \cos \beta t - C_1 \sin \beta t)e^{\mu t}, \quad (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)e^{\mu t} \quad (1.3.16)$$

Замість (1.3.16) можна написати

$$\xi_1(t) = \rho_0 e^{\mu t} \cos(\beta t + \zeta), \quad \xi_2(t) = \rho_0 e^{\mu t} \sin(\beta t + \zeta), \quad (1.3.17)$$

$$\text{де } \rho_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \text{tg} \zeta = \frac{C_1}{C_2}$$

Розглянемо можливі окремі випадки.

а. Якщо (10.3) $a_{11} = -a_{22}$ (зокрема $a_{11} = a_{22} = 0$), то $\mu = 0$ і корені характеристичного рівняння (1.3.5) є суто уявними числами $\lambda_1 = i\beta$ і $\lambda_2 = -i\beta$. Крім цього випадку з (1.3.17) часу t , отримуємо рівняння фазової траєкторії $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \rho^2$. Таким чином, у площині $\xi_1 O \xi_2$ фазові траєкторії є сімейством концентричних кіл з центром на початку координат, які в площині $x_1 O x_2$ переходять у сімейство еліпсів (Рис. 1.3.7), тобто, фазові

траєкторії замкнуті, що свідчить про те, що розв'язок системи періодичний [4].

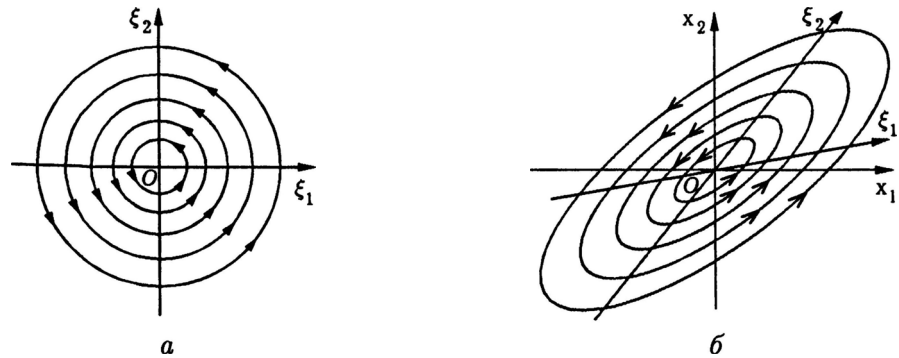


Рис. 1.3.7

При вибраних координатних функціях $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ та орієнтації координатних осей у площині $\xi_1 O \xi_2$ напрямок руху зображувальної точки по фазовій траєкторії відбувається проти руху годинникової стрілки. У площині $x_1 O x_2$ цей напрямок залежить від взаємного розташування векторів a_1 і a_2 .

Початок координат відповідає значенням $C_1 = C_2 = 0$ ($\rho = 0$) і є положенням рівноваги системи (1.3.3). Його у цьому випадку називають центром. Воно стійке, хоч і не асимптотично.

б. Комплексно спряжені корені мають від'ємну дійсну частину ($\mu < 0$). Тоді співвідношення (1.3.17) будуть у параметричній формі задавати фазові траєкторії у вигляді логарифмічних спіралей, за якими зображувана точка буде йти при $t \rightarrow +\infty$ до початку координат (рис. 1.3.8). В даному випадку початок координат є асимптотично стійким положенням рівноваги системи (1.3.3) і його називають стійким фокусом [4].

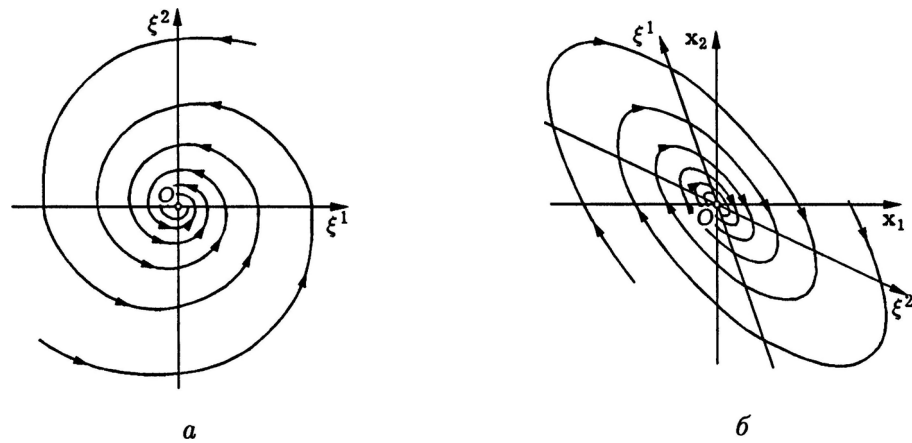


Рис. 1.3.8

в. Якщо комплексно спряжені корені мають додатну дійсну частину ($\mu > 0$), то фазовий портрет аналогічний, але напрям руху зображувальної точки по фазовій траєкторії протилежно, оскільки при $t \rightarrow +\infty$ як $\xi_1 \rightarrow \infty$, так і $\xi_2 \rightarrow \infty$. Положення рівноваги в початку координат у цьому випадку не є стійким і його називають нестійким фокусом [4].

Цим вичерпано всі можливі випадки поєднання коренів характеристичного рівняння (1.3.5).

Зауважимо, що систему (1.3.3) можна звести до одного рівняння, виключивши час t :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}. \quad (1.3.18)$$

Інтегральні криві цього ЗДР першого порядку є фазовими траєкторіями системи (1.3.3), а положення рівноваги $x_1=x_2=0$ називають особливою точкою ЗДР (1.3.18). Таким чином, проведений вище якісний аналіз фазових портретів системи (1.3.3) можна розглядати як дослідження структури інтегральних кривих ЗДР (1.3.18) в околі його особливої точки [3].

Фазові траєкторії можна зображати відразу у площині $x_1 O x_2$, не знаходячи напрямів осей $O\xi_1$ і $O\xi_2$ в цій площині. Однак у випадках вузла, сідла та виродженого вузла потрібно знайти фазові траєкторії, які лежать на

прямих, що проходять через початок координат. Ці прямі завжди спрямовані вздовж власних векторів матриці системи (1.3.8), але їх можна визначити й інакше. Розглянемо приклад:

Приклад. Для лінійної однорідної системи ЗДР

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 2x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 4x_2;$$

характеристичне рівняння $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$ має дійсні прості корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$. Отже, положення рівноваги $x_1=x_2=0$ являє собою стійкий вузол.

Прямі, що містять фазові траєкторії системи, будемо шукати як $x_2 = \kappa x_1$, $\kappa = \text{const}$, підставивши $x_2 = \kappa x_1$ в ЗДР

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1 - 4x_2}{-3x_1 + 2x_2},$$

яке можна отримати виключивши час t із вихідної системи ЗДР. Тоді прийдемо до квадратного рівняння $2\kappa^2 + \kappa - 1 = 0$, коренями якого будуть $\kappa_1 = -1$ і $\kappa_2 = \frac{1}{2}$.

Таким чином, шуканими прямими в площині $x_1 O x_2$, будуть $x_2 = -1$ і $x_2 = \frac{x_1}{2}$. Інші фазові траєкторії, якщо до них приєднати початок координат, матимуть у ньому дотичну з рівнянням $x_2 = \frac{x_1}{2}$ (рис. 1.3.9), оскільки паралельний власний вектор $a_1 = (2, 1)^T$, матриці вихідної системи відповідає більшому власному значенню $\lambda_1 = -2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$).

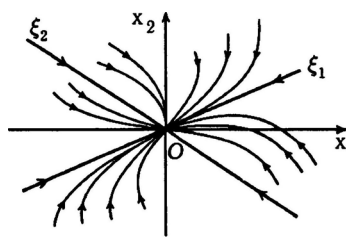


Рис.1.3.9

Розділ 2. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

2.1. Вільні коливання у найпростіших консервативних системах.

Як найпростішу коливальну систему розглянемо вантаж, підвішений на пружині в полі сили тяжіння. Припустимо, що вантаж може здійснювати лише вертикальні коливання. Вважатимемо, що система є консервативною, тобто в ній відсутні сили тертя [21]. Рівняння руху цього вантажу матиме вигляд

$$m\ddot{\xi} = f_{\text{упр}} + mg, \quad (2.1.1)$$

де m - маса вантажу, ξ - його координата, $f_{\text{упр}} = -k\xi$ - сила, що повертаюча, яка виникає при розтягуванні або стиску пружини, тут прийнято, що координата вантажу для не розтягнутої пружини дорівнює нулю, mg - сила тяжіння, k - коефіцієнт жорсткості пружини. У положенні рівноваги $\xi = \xi_0$ сума всіх сил, які діють на тіло дорівнює нулю. Тобто $k\xi_0 = mg$. Переходячи до нової змінної $x = \xi - \xi_0$, отримуємо

$$m\ddot{x} = -kx,$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

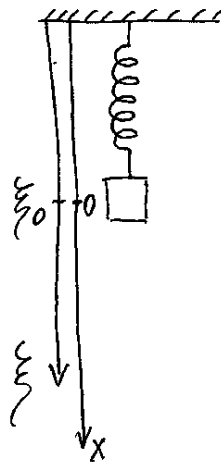


Рис. 2.1.1

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - циклічна (кругова) частота. Це рівняння називається рівнянням вільних гармонійних коливань [21].

Його розв'язок має вигляд

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad , \quad (2.1.2)$$

де A_0 амплітуда коливань, а $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi$ - фаза коливань.

Величина $\varphi = \Phi(0)$ визначає значення фази в момент часу $t = 0$ і називається початковою фазою коливань.

Амплітуда A_0 та початкова фаза коливань визначаються початковими умовами [21]. Якщо початковий момент часу усунення маятника дорівнює x_0 , а початкова швидкість v_0 , то

$$x(0) = x_0 = A_0 \cos \varphi,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A_0 \omega \sin \varphi.$$

Звідси отримуємо

$$\varphi = -\arctg \frac{v_0}{x_0 \omega},$$

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 1 \quad (2.1.3)$$

Для коливань, що розглядаються, не тільки зсув, але і швидкість, і прискорення є гармонічними функціями часу

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) = A_0 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A_0 \omega^2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

При цьому коливання швидкості випереджають фазою на $\frac{\pi}{2}$ коливання зміщення $x(t)$ і мають амплітуду ωA_0 . Коливання прискорення відбуваються у протифазі з коливаннями усунення і мають амплітуду $\omega^2 A_0$.

Так як в системі, що розглядається, відсутні сили тертя, то повна енергія коливань з часом не змінюється, причому спостерігається періодичне перекачування кінетичної енергії в потенціальну і навпаки [21].

Величина кінетичної енергії у цьому випадку буде

$$E_{\text{кін}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi),$$

(2.1.4)

потенціальної енергії пружної деформації:

$$E_{\text{кін}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{m} \cdot \frac{mx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi),$$

(2.1.5)

Повна механічна енергія не залежить від часу і дорівнює

$$E_{\text{пов}} = E_{\text{кін}} = E_{\text{пот}} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2}.$$

(2.1.6)

2.2. Загасаючі коливання

Розглянемо на прикладі пружинного маятника основні закономірності вільних коливань за наявності сили тертя [12]. Рівняння руху пружинного маятника за наявності сили тертя має вигляд

$$m\ddot{\xi} = f_{\text{упр}} + f_{\text{тр}} + mg.$$

(2.2.1)

Найбільш простий розв'язок рівняння має у тому випадку, коли сила тертя пропорційна швидкості [12]. Така ситуація реалізується для в'язкого

тертя при малих швидкостях, коли сила тертя спрямована проти напрямку вектора швидкості, а її величина пропорційна першому ступені швидкості $f_{\text{тр}} = -h\dot{\xi}$, де h - коефіцієнт в'язкого тертя. Після заміни змінних $x = \xi - \xi_0$ рівняння переписеться у вигляді

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0 \quad (2.2.2)$$

У нормованому вигляді рівняння загасаючих коливань має вигляд

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.2.3)$$

$$\text{де } \delta = \frac{h}{2m} \quad \text{і} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.2.4)$$

$$\text{де } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad A_0, \varphi - \text{визначаються початковими умовами.}$$

Коливання маятника за наявності загасання не є періодичним, його амплітуда змінюється з часом. Умовно кажуть, що періодом таких коливань є $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Також умовно амплітудою цих коливань вважають модуль максимального відхилення $A_0 e^{-\delta t}$ у кожному періоді коливань [21].

Таким чином, загасання коливального процесу визначається величиною δ , яка отримала назву коефіцієнта загасання. Величина, обернена δ , рівна $\tau = \frac{1}{\delta}$, отримала назву часу згасання квазіперіодичного процесу. Вона вказує інтервал часу, за який амплітуда коливань зменшиться в e разів [21].

Нехай у момент часу t_1 амплітуда буде $A_1 = A_0 e^{-\delta t_1}$, а в момент $t_2 = t_1 + T$ відповідно

$$A_2 = A_0 e^{-\delta t_2} = A_0 e^{-\delta(t_1+T)}.$$

Тоді ставлення амплітуд $\frac{A_1}{A_2} = e^{-\delta t}$ та зміна амплітуди за період характеризуватиметься величиною, яка отримала назву логарифмічного декременту згасання, причому

$$\theta = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Відношення амплітуд, розділених інтервалом часу N періодів, буде

$$\frac{A_1}{A_{N+1}} = e^{\delta NT} = e^{N\theta}.$$

(2.2.5)

Звідси випливає, що кількість умовних періодів N_1 , після якого амплітуда коливань зменшується в e разів ($N_1\theta = 1$) рівне

$$N_1 = \frac{1}{\theta}.$$

(2.2.6)

2.3. Вимушені коливання.

Розглянемо коливання вантажу на пружині. За наявності зовнішньої періодичної сили набуде вигляду

$$m\ddot{x} = f_{\text{пр}} + f_{\text{тр}} + f_{\text{зов}}(t)$$

(2.3.1)

Зазначимо, що рівняння, яке розглядається, є лінійним, тобто величина повертає сили пропорційні зсуву [10].

Довільну періодичну силу $F(t)$ можна розкласти в ряд Фур'є, тобто уявити її у вигляді суми доданків, що змінюються у часі за гармонійним (синусоїдальним) законом. Тоді через принцип суперпозиції для аналізу коливань, що виникли в системі під дією довільної зовнішньої періодичної

сили $F_{\text{зов}}(t)$, достатньо знати поведінку цієї системи під дією гармонійної сили певної частоти [10].

У нормованому вигляді рівняння вимушених коливань має вигляд

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (2.3.2)$$

Відомо, що загальний розв'язок будь-якого неоднорідного диференціального рівняння можна подати у вигляді суми часткового розв'язання цього рівняння та загального розв'язку однорідного рівняння ($f_0 = 0$), тобто розв'язком рівняння вимушених коливань буде функція

$$x(t) = x_1(t) + D e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi). \quad (2.3.3)$$

Тут $x_1(t)$ відповідає вимушеним коливанням (частковий розв'язок неоднорідного рівняння), а другий член - загасаючим власним коливанням (загальний розв'язок однорідного рівняння).

Слід зазначити, що складна залежність зміщення від часу спостерігається лише за малих часів. Через час $t = (4 - 5)\tau$ власні коливання практично загаснуть, і в системі спостерігатимуться лише вимушені коливання

$$x(t) = x_1(t) = D_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

де

$$X_0 = f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Амплітудно-частотна характеристика має резонансний вигляд, тобто в деякій ділянці частот амплітуда коливань значно перевищує величину f_0 . Для

визначення резонансної частоти, при якій x_0 досягає максимуму необхідно знайти мінімум функції $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$.

Мінімальним значення цієї величини буде при

$$\omega_{\text{рез}}^2 \equiv \omega_{\text{рх}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2.$$

(2.3.4)

При цьому

$$X_{0\text{рез}} = \frac{f_0}{2\delta\omega_0}$$

Для випадку малого згасання ($\omega_0^2 > \delta^2$) можна вважати $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$.

При аналізі резонансних властивостей коливальних систем поряд з показником δ та логарифмічним декрементом згасання (θ) широко користуються величиною, що називається добротністю системи Q . Для механічних систем вона визначається як відношення амплітуди зміщення при резонансі – $X_{0\text{рез}}$ до амплітуди зміщення X_0 *ст*, коли $\omega \rightarrow 0$:

$$Q = \frac{X_{0\text{рез}}}{X_{0\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\theta}. \quad (2.3.5)$$

При збільшенні добротності резонансна крива стає вужчою. Щоб оцінити її ширину знайдемо $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$, де ω_1 – частота, при якій амплітуда зменшується в $\sqrt{2}$ разів [21]. Тобто

$$\frac{X_{0\text{рез}}}{X_1} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}{2\delta\omega_1} = \sqrt{2}.$$

(2.3.6)

При виконанні умови $\delta \ll \omega$ виконуватиметься наближена рівність $\omega_1 \approx \omega_0$, тому

$$(\Delta\omega 2\omega_0)^2 + 4\delta^2\omega^2 = 8\delta^2\omega_0^2,$$

де $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1$. З останнього співвідношення випливає, що $\Delta\omega = \delta$. Зазвичай цю величину називають напівшириною резонансної кривої. Таким чином, для малих δ виконується співвідношення

$$Q = \frac{\omega_0}{2 \cdot \Delta\omega}.$$

Розглянемо амплітудно-частотні та фазочастотні характеристики для швидкості та прискорення.

Для швидкості

$$x_1 = f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\delta^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

для прискорення

$$x_1 = f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + 4\frac{\delta^2}{\omega^2}}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} + \pi\right).$$

Амплітудно-частотні та фазочастотні характеристики для зміщення, швидкості та прискорення маятника представлені на рис. 2.3.1 [18].

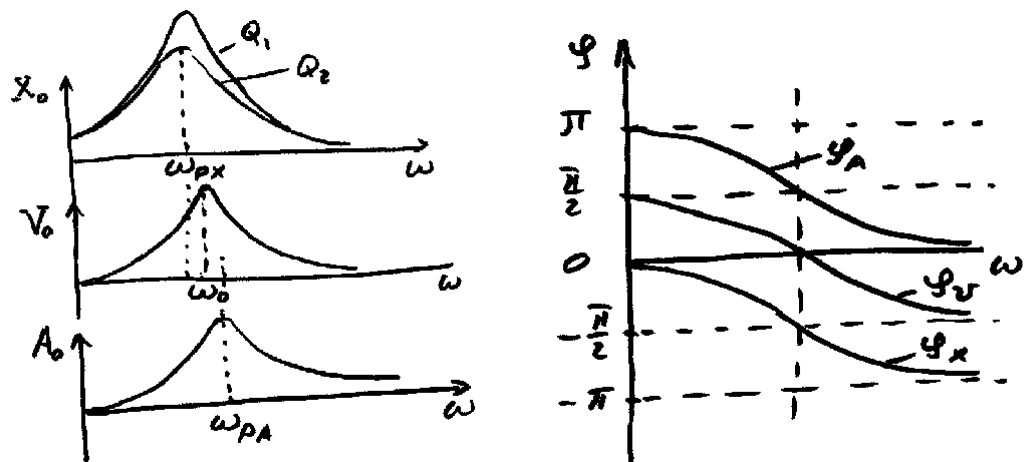


Рис. 2.3.1

В області частот $\omega \approx \omega_0$ відбувається різка зміна фази. Чим менше загасання в системі, тим сильнішою є ця залежність. У всіх випадках швидкість випереджає зовнішню силу по фазі на $\frac{\pi}{2} + \varphi$, а прискорення випереджає зовнішню силу по фазі на $\pi + \varphi$.

При резонансі швидкість збігається по фазі із зовнішньою силою. Середня за період потужність зовнішньої гармонійної сили дорівнює

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)v(t)dt = \frac{1}{T} F_0 V_0 \cos \varphi_V \quad (2.3.7)$$

При резонансі $\varphi_V = 0$, амплітуда швидкості максимальна, тому осцилятору ззовні підводиться максимальна потужність [18]. Легко показати, що на резонансній частоті в кожний момент часу зовнішня сила та сила тертя компенсують одна одну, а амплітуда сили пружності досягає максимального значення

$$F_{\text{упр.0}} = -kX_0 = -\frac{k}{2\delta\omega_0} \cdot \frac{F_0}{m} = -\frac{\omega_0}{2\delta} \cdot F_0 \quad (2.3.8)$$

Особливості встановлення коливань найбільш просто розглянути для окремого випадку, коли $\omega \approx \omega_0$.

Для цього випадку розв'язок рівняння коливань у довільний момент часу має вигляд

$$x(t) = x_1(t) + D e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi). \quad (2.3.9)$$

Для малого згасання у початковий момент часу

$$x(0) = x_1(0) + D.$$

У тому випадку, коли $x(0) = 0$, отримуємо,

$$D = -x_1(0) = X_{0 \text{ рез}}$$

(2.3.10)

і типова залежність усунення від часу при встановленні коливань матиме наступний вигляд (рис. 2.3.2)

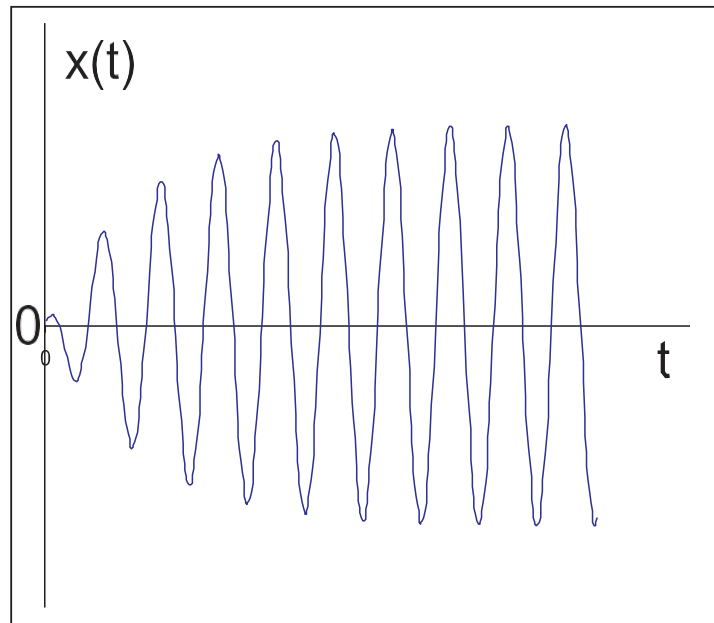


Рис. 2.3.2

2.4. Нелінійні коливання. Вільні коливання

У загальному випадку повертаюча сила в системі не пропорційна зсуву, і рівняння руху осцилятора зводиться до вигляду

$$mx'' + f(x) = 0$$

(2.4.1)

тут $f(x)$ - нелінійна функція свого аргументу, яку можна подати у вигляді поліном

$$f(x) = f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + f_3 \cdot x^3 + \dots$$

(2.4.2)

з сталими коефіцієнтами f_1, f_2, f_3, \dots

Розглянемо якісно вплив кожного члена розкладу на особливості коливань у системі.

Наявність у розкладі лише першого члена $f_1 x$ призводить до лінійного рівняння коливань. Його розв'язком є гармонійні коливання [6].

Наявність у розкладі другого члена відповідає силі, що діє на вантаж, яка не змінює знак у процесі руху маятника. Така сила призводить до зміщення маятника в процесі коливань від положення рівноваги в один бік, знак зміщення залежить від знака f_2 . У реальних фізичних ситуаціях коливання найчастіше симетричні щодо положення рівноваги та цей член у розкладі відсутній. Кубічний член у розкладі забезпечує зміну знака сили при додатних та від'ємних зміщеннях маятника від положення рівноваги. Коли обидва коефіцієнти f_1 і f_3 додатні, сумарна повертаюча сила при заданому зміщенні більша, ніж у лінійному випадку. Пружину, що відповідає такій силі, зазвичай називають жорсткою, в іншому випадку ($f_3 < 0$) пружина називається м'якою [6].

Як приклад нелінійних коливань розглянемо коливання математичного маятника. Рівняння обертального руху математичного маятника без загасання має вигляд

$$ml^2 \cdot \ddot{\psi} = -mg(l \cdot \sin \psi)$$

(2.4.3)

або

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \cdot \sin \psi = 0,$$

(2.4.4)

де $\omega_0^2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

При $\psi < \frac{\pi}{12}$, $\sin \psi \approx \psi$ і коливання маятника вважатимуться гармонійними. У тому випадку, коли амплітуда коливань маятника $\varphi_0 \geq \frac{\pi}{12}$ повертаюча сила не є лінійною функцією відхилення. Такі коливання не є гармонійними та відповідають випадку з м'якою пружиною, оскільки

$$\sin \psi \approx \psi - \frac{1}{6}\psi^3.$$

(2.4.5)

Можна показати, що період цих коливань залежить від амплітуди. У першому наближенні він дорівнює

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\psi_0}{2}\right), \quad \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \psi_0^2\right)$$

(2.4.6)

Залежність періоду вільних коливань від їх амплітуди спостерігається й для інших нелінійних систем. Однак залежно від характеру повертаючої сили, цей період може як зростати, так і зменшуватися [6].

2.5. Параметричні коливання

Ми розглянули два види коливань – вільні коливання та вимушені. Існує, проте ще один вид впливу на коливальні системи. Він полягає в тому, що зовнішня періодична сила змінює один із параметрів системи. Такий вид впливу називається параметричним [6]. У загальному випадку рівняння параметричних коливань має вигляд

$$\ddot{x} + \psi_1(t)\dot{x} + \psi_2(t)x = 0$$

(2.5.1)

Наявність нелінійності у разі параметричних коливань так само, як і для звичайних вимушених коливань призводить до неізохронності коливань

(залежності періоду коливань від їх амплітуди) до обмеження амплітуди параметрично збурених коливань [10].

Розглянемо особливості збурення параметричних коливань з прикладу математичного маятника.

$$2(A^+ + A^-) + A_{\text{тр}} = 0$$

$$\psi = \psi_0 \cos \omega t$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \psi_0^2\right)$$

$$\begin{aligned} A^+ &= \left(mg + \frac{mv^2}{l}\right) \cdot \Delta l = (mg + m\psi_0^2 \omega^2 l) \cdot \Delta l \\ &= \left(mg + m\psi_0^2 \omega_0^2 l \left(1 - \frac{\psi_0^2}{8}\right)\right) \cdot \Delta l = mg \left(1 + \psi_0^2 - \frac{\psi_0^4}{8}\right) \cdot \Delta l \end{aligned}$$

$$A^- = mg \cos \psi_0 = -mg \left(1 - \frac{\psi_0^2}{2} + \frac{\psi_0^4}{24}\right) \cdot \Delta l$$

$$\begin{aligned} A_{\text{тр}} &= \int_0^T F_{\text{тр}} v dt = - \int_0^T h v^2 dt = -h(\psi_0 l)^2 \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt = -\frac{1}{2} h(\psi_0 l \omega)^2 T = \\ &= -h\psi_0^2 l^2 \frac{2\pi}{2} \omega \end{aligned}$$

$$\frac{h}{m} = 2\delta$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Отримуємо амплітуду параметричних коливань

$$\psi_0 = 3 \sqrt{1 - \frac{\pi}{3Q \cdot \frac{\Delta l}{l}} \left(\frac{7}{16}\right)}$$

(2.5.2)

$\frac{\Delta l}{l}$ - глибина модуляції.

Вимушені параметричні коливання мають такі властивості:

- 1) збурення відбувається на частоті $\frac{n\omega_0}{2}$;
- 2) існує граничне значення модуляції (2.5.2), вище якого амплітуда коливань стає відмінною від нуля;
- 3) параметричні коливання збурюються не в широкій області частот, а лише на частотах поблизу значень $\frac{n\omega_0}{2}$;
- 4) на відміну від лінійних вимушених коливань, при прямуванні згасання системи до нуля, амплітуда коливань прямує не до нескінченності, а до скінченної величини (2.5.2)

РОЗДІЛ III. ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

Асимптотичні методи обмежені в своєму застосуванні вимогою наявності в рівнянні малого параметра. Однак часто доводиться мати справу з рівняннями більш загального типу, для яких ці методи непридатні.

Якщо рівняння, що описують рух досліджуваної динамічної системи, можуть бути зведені до вигляду

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (3.1)$$

то до них можна застосувати якісні методи дослідження. До рівнянь типу (3.1) зводяться ті рівняння, які були розглянуті раніше [1]. Крім того, далі при дослідженні коливальних систем слабо нелінійних, але що знаходяться під впливом зовнішніх періодичних сил як рівняння першого наближення отримують також рівняння типу (3.1).

Для якісного дослідження розв'язку рівнянь (3.1) доцільно розглядати x, y як координати точки на площині. Ця площина, як відомо, називається фазовою площиною, а точка x, y — фазовою точкою. Рух $x = x(t), y = y(t)$ відбувається по деякій лінії, яка називається фазовою траєкторією. Побудова фазової траєкторії для даної системи означає побудову кривої, що виражає для заданого руху залежності швидкості від зміщення [1].

Фазова площина з фазовими траєкторіями, що є на ній, дає можливість відразу побачити всю сукупність рухів, що можуть виникнути в аналізованій динамічній системі.

Для побудови фазових траєкторій необхідно визначити розв'язок системи рівнянь (3.1) $x = x(t), y = y(t)$, що являє собою рівняння фазової траєкторії в параметричній формі, або знайти характеристики, тобто інтегральні криві рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \quad (3.2)$$

дають безпосередньо залежність між x та y . Розглянемо рівняння лінійного вібратора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3.3)$$

Вважаючи

$$\frac{dx}{dt} = y$$

зводимо рівняння (3.3) до виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -2hy - kx, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Припустимо, що тертя невелике, $h^2 < k, k > 0$; тоді розв'язок системи (3.4) запишеться у вигляді

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y &= a\varpi e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha + \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

де $\omega_1^2 = k - h^2$, $\vartheta = \arctg \frac{h}{\omega_1}$, a і α - довільні сталі, визначаються початковими значеннями.

(3.5) є рівнянням фазової траєкторії в параметричній формі. За їх допомогою не складно проаналізувати характер руху фазової точки на фазовій площині.

Зауважимо, що система (3.4) визначає в кожній точці фазової площини єдину дотичну до інтегральної кривої, за винятком точки $x = 0, y = 0$. Нахил дотичної визначається виразом

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - kx}{y}. \quad (3.6)$$

У точці $x = 0, y = 0$ напрям дотичної стає невизначеним. Такі точки звуться критичними або особливими точками. Для найпростіших особливих точок (особливих точок першого порядку, або елементарних точок) через особливу точку або не проходить жодної, або проходить більше ніж одна інтегральна крива.

Припустимо спочатку, що $h = 0$. Тоді розв'язок (3.5) приймає вигляд

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \alpha) \\ y &= -a\omega \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

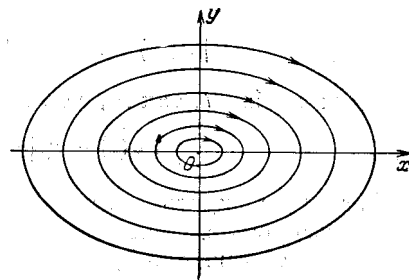


Рис. 3.1

На фазовій площині отримуємо сімейство подібних еліпсів (рис. 3.1), причому через кожен точку фазової площини проходить лише один еліпс, який відповідає певним початковим умовам [8].

Виключаючи з виразів (3.7) час t , отримуємо рівняння сімейства еліпсів у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\omega^2} = 1, \quad (3.8)$$

яке ми могли б отримати, інтегруючи безпосередньо рівняння (3.6) при $h = 0$.

Через початок координат не проходить жодної інтегральної кривої. Така особлива точка, поблизу якої інтегральні криві замкнуті та охоплюють особливу точку, називається центром [1].

Так як у даному випадку всі фазові траєкторії є замкнутими кривими, еліпсами (за винятком траєкторії, що виродилася в точку $x = 0, y = 0$), рух буде періодичним.

Особливою точкою $x = 0, y = 0$ відповідає стан рівноваги в коливальній системі, що розглядається [1].

Цілком зрозуміло, що і в загальному випадку рівнянь (3.1) станом рівноваги системи відповідають на фазовій площині точки, для яких одночасно $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$, тобто особливі точки рівнянь (3.2).

Періодичним рухам, що відбуваються в системі, на фазовій площині відповідають замкнуті фазові траєкторії рівняння (3.2).

Стан рівноваги є стійким, якщо при будь-якій заданій області допустимих відхилень від стану рівноваги (область η) ми можемо вказати область $\delta(\eta)$, що оточує стан рівноваги і має ту властивість, що жоден рух, що починається всередині $\delta(\eta)$, ніколи не залишить області η (рис. 3.2). Аналітично це визначення стійкості може бути виражено наступним чином: стан рівноваги $x = x_0, y = y_0$ називається стійким, якщо для будь-якого наперед заданого, скільки завгодно малого можна знайти таке $\delta(\eta)$, що якщо для $t = t_0$

$$|x(t_0) - x_0| < \delta(\eta), \quad |y(t_0) - y_0| < \delta(\eta),$$

то і для будь-яких t , таких, що $t_0 < t < \infty$

$$|x(t) - x_0| < \eta, \quad |y(t) - y_0| < \eta.$$

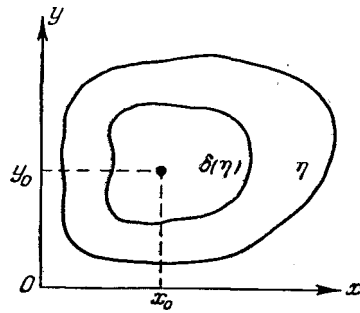


Рис. 3.2

Неважно бачити, що стан рівноваги типу центру є стійким станом рівноваги.

Нехай тепер $h > 0$, що відповідає загасаючому коливальному процесу. У цьому випадку отримуємо на фазовій площині сімейство спіралей, для яких початок координат є асимптотичною точкою (рис. 3.3), причому чим менше відношення $\frac{h}{\omega_1}$, тобто чим менше тертя, тим ближче протягом одного обороту спіраль до еліпсу.

Фазова швидкість в даному випадку ніде, за винятком початку координат, не перетворюється в нуль, але неперервно зменшується з наближенням зображувальної точки до початку координат [1].

Фазові траєкторії відповідають цьому у випадку осцилюючим, але загасаючим рухам, а особлива точка $x = 0, y = 0$ відповідає стану рівноваги.

Розглянута в даному випадку особлива точка, що є асимптотичною точкою всіх інтегральних кривих, що мають вигляд спіралей, називається фокусом, причому при $h > 0$ фокус буде стійким.

Нехай тепер $h < 0$. У цьому випадку ми знову отримуємо сімейство спіралей (рис. 3.4), проте фазова точка з часом віддалятиметься від початку координат. Швидкість руху зображувальної точки по інтегральній кривій, перетворюючись у нуль при $x = 0, y = 0$, монотонно зростає в міру віддалення точки від початку координат. У випадку положення рівноваги нестійке, і особлива точка $x = 0, y = 0$ є нестійкий фокус [1].

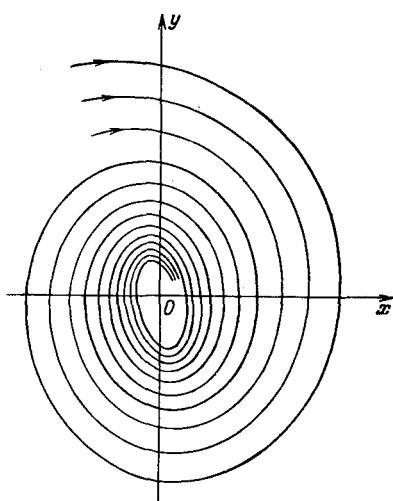


Рис.3.3

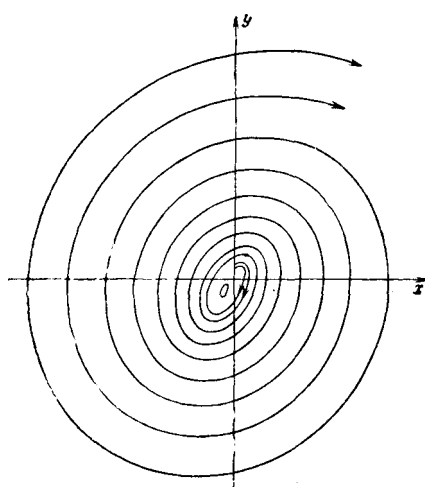


Рис.3.4

Розглянемо тепер випадок, коли $h^2 > k$, що відповідає при $h > 0$ затухаючому аперіодичному процесу [8]. У цьому випадку розв'язок системи (3.4) можна подати у вигляді

$$x = C_1 e^{-q_1 t} + C_2 e^{-q_2 t},$$

(3.9)

$$y = -C_1 q_1 e^{-q_1 t} - C_2 q_2 e^{-q_2 t},$$

(3.10)

де зазначено:

$$\left. \begin{aligned} -q_1 &= -h + \sqrt{h^2 - k}, \\ -q_2 &= -h - \sqrt{h^2 - k}. \end{aligned} \right\}$$

(3.11)

Для отримання картини на фазовій площині помножимо вираз (3.10) спочатку на q_1 , потім на q_2 і додамо з (3.10). Підносячи отримані результати відповідно до степеня q_1 і q_2 , знаходимо:

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C(y + q_2 x)^{q_2} \quad (3.12)$$

або

$$y + q_1 x = C(y + q_2 x)^{\frac{q_2}{q_1}}, \quad (3.13)$$

На фазовій площині отримуємо сімейство деформованих парабол (рис. 3.5), що дотикаються до прямої $y = -q_1 x$ в початку координат. Незавжно встановити напрямок руху зображувальної точки по інтегральним кривим. Вона буде рухатися по інтегральних кривих у напрямі, вказаному на рис.3.5 стрілками, тобто завжди наближатися до початку координат.

Точка $x = 0, y = 0$ буде особливою точкою, причому всі інтегральні криві проходять через неї. Особлива точка такого типу називається вузлом. У даному випадку положення рівноваги буде стійким, і цьому положенню відповідає стійкий вузол.

Розглянемо тепер характер інтегральних кривих на фазовій площині випадку великого від'ємного тертя $h < 0, h^2 > k$. У цьому випадку, скориставшись (3.13), отримуємо на фазовій площині сімейство кривих параболічного типу (рис. 3.6) з особливою точкою типу вузла.

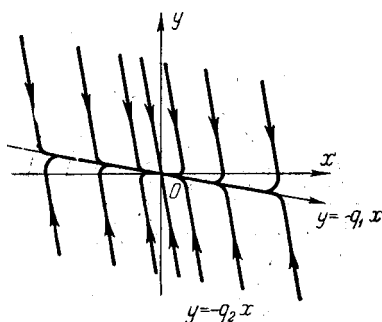


Рис.3.5

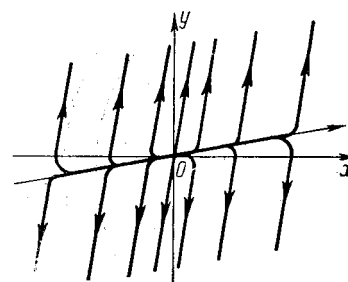


Рис.3.6

Однак, аналізуючи рух зображувальної точки, легко переконатися, що точка, що зображує, при русі по будь-якій з інтегральних кривих прагне уникнути стану рівноваги (рис. 3.6), на якому напрямок руху вказано стрілками). Таким чином, ця особлива точка являє собою нестійкий вузол, причому, як і вище, нестійкість обумовлена тим, що $h < 0$. Зауважимо, що нестійкість очевидна безпосередньо з розгляду виразів (3.9) та (3.10).

Для повноти викладу наведемо ще один тип фазових траєкторій [1]. Для цього розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0 \quad (3.14)$$

де $k > 0$. Рівняння виду (3.14) одержуємо, розглядаючи, наприклад, малі відхилення маятника біля верхнього положення нестійкої рівноваги.

Розв'язок рівняння (3.14) буде:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\sqrt{k}t} + C_2 e^{-\sqrt{k}t}, \\ y = C_1 \sqrt{k} e^{\sqrt{k}t} - C_2 \sqrt{k} e^{-\sqrt{k}t} \end{cases} \quad (3.15)$$

За допомогою цих співвідношень не складно побудувати фазові траєкторії. Дійсно, згідно (3.15) легко отримати співвідношення

$$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{ck} = 1 \quad (3.16)$$

що являє собою рівняння сімейства гіпербол (рис. 3.7). При $C = 0$ ми отримуємо дві асимптоти цього сімейства гіпербол, що проходять через початок координат:

$$\begin{cases} y = \sqrt{kx}, \\ x = -\sqrt{kx}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Початок координат є єдиною особливою точкою, причому, за винятком асимптот, жодна інтегральна крива не проходить через початок координат. Така особлива точка називається особливою точкою типу сідла.

Розглядаючи напрямок руху зображувальної точки на фазовій, площині, приходимо до висновку, що де б не знаходилася, зображуюча точка в початковий момент (за винятком початку координат і асимптоти $y = -\sqrt{kx}$), вона завжди, зрештою, буде віддалятися від початку координат, причому рух носитиме аперіодичний характер, а не коливальний. Положення рівноваги, відповідно особливою точкою типу сідла, завжди буде нестійким через те, що рух по асимптоті $y = -\sqrt{kx}$ не може бути ніколи точно реалізовано, оскільки ймовірність початкового стану, відповідного руху до особливої точки, дорівнює нулю [1].

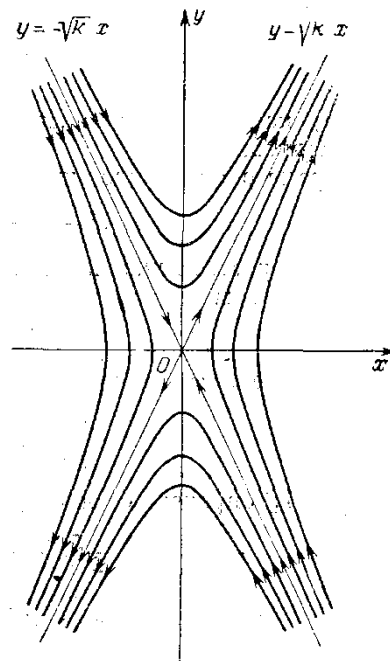


Рис. 3.7

Тепер перейдемо до розгляду загального випадку. Насамперед займемося вивченням точок рівноваги — особливих точок рівняння (3.2), в яких

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (3.18)$$

Нехай $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ - дійсні аналітичні функції. Припустимо, що точки рівноваги, тобто розв'язки рівнянь (3.18), ізольовані і, таким чином, кількість особливих точок у будь-якій обмеженій області звичайно.

Тоді для аналізу поведінки динамічної системи в околі цієї особливої точки $x = x_0, y = y_0$ покладемо

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y. \quad (3.19)$$

Не порушуючи форми рівнянь (3.1), можемо прийняти особливу точку $x = x_0, y = y_0$ за початок координат. Тоді, підставляючи (3.19) у рівняння (3.1), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q_2(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

де для спрощення запису варіації $\delta x, \delta y$ замінені через x і y і введені позначення

$$c = P'_x(0,0), \quad d = P'_y(0,0), \quad a = Q'_x(0,0), \quad b = Q'_y(0,0),$$

а $P_2(x, y)$ і $Q_2(x, y)$ — функції, що мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно перетворюються в координат в нуль разом зі своїми частинними похідними першого порядку.

Нехтуючи в рівняннях (3.20) членами вищого порядку стосовно малих відхилень від точки рівноваги, отримуємо таку систему з постійними коефіцієнтами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

яка, як відомо, називається «рівняннями у варіаціях» навколо точки рівноваги.

Характеристичне рівняння системи (3.21) буде:

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda - (ad - bc) = 0. \quad (3.22)$$

Розглядатимемо лише випадки, коли характеристичні корені λ_1, λ_2 не дорівнюють нулю і, отже, $ad - bc \neq 0$. Відповідні критичні точки називаються особливими точками першого порядку або елементарними точками.

Розв'язком системи рівнянь (3.21) буде:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= C_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 x_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

де λ_1 і λ_2 визначаються наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} [b + c + \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} [b + c - \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}], \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Аналізуючи праві частини виразів (3.24), неважко встановити, при яких співвідношеннях між коефіцієнтами рівнянь (3.21) a, b, c, d праві частини (3.23) прямують до нуля або залишаються обмеженими при $t \rightarrow \infty$ і, отже, відповідна критична точка буде стійкою.

Для того, щоб критична точка була стійка, необхідно, щоб $b+c < 0$ при $(b - c)^2 + 4ad \leq 0$; у разі, якщо $(b - c)^2 + 4ad > 0$, то для стійкості необхідно також, щоб $ad - bc < 0$, інакше критична точка буде нестійка.

Якщо $b - c = 0$, то для стійкості необхідно, щоб $(b - c)^2 + 4ad < 0$.

Якщо $b+c > 0$, критична точка буде завжди нестійка.

Якщо $ad-bc \neq 0$, то характер критичної точки рівнянь (3.1) по суті визначається характером її першого наближення (за винятком випадку, коли $b + c = 0$), тобто характером розв'язку системи (3.21), отриманої при заміні $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ їх членами першого порядку.

Цілком очевидно, що присутність відкинутих нами членів вищого порядку не змінить характеру руху на околиці точки рівноваги у разі, якщо $\text{Re}[\lambda_1, \lambda_2] \neq 0$, оскільки ясно, що відкинуті члени можуть викликати лише малі добавки до «ефективних» значень декременту згасання. Якщо $\text{Re}[\lambda_1] = 0$ або $\text{Re}[\lambda_2] = 0$, то малі відкинуті члени можуть вплинути на характер руху, оскільки його стійкість якраз і визначатиметься цими малими добавками.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x = 0 \quad (3.26)$$

Яке можна записати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\lambda y^3 - x, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Для дослідження характеру точки рівноваги $x = 0, y = 0$ отримуємо рівняння у варіаціях

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -x, \\ \frac{dx}{dt} &= y, \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

згідно з якими точка рівноваги $x = 0, y = 0$ стійка, тому що $b + c = 0$, $4ad = -4 < 0$.

Як бачимо, для рівнянь (3.27) характер руху змінюється, оскільки наявність у рівнянні (3.26) члена $\lambda \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$ призведе до згасання коливань або до необмеженого зростання, залежно від того, чи буде λ позитивна чи негативна.

Наведемо тут теорему, що є дуже окремим випадком теореми Ляпунова.

Нехай у рівняннях (3.20) $P_2(x, y)$ і $Q_2(x, y)$ — функції, що володіють неперервними частинними похідними до другого порядку включно в околі точки $x = 0, y = 0$. Нехай у цій точці $P_2(x, y)$ і $Q_2(x, y)$ з своїми частинними похідними першого порядку перетворюються на нуль.

Тоді, якщо для відповідної системи «першого наближення» (3.21) дійсні частини коренів характеристичного рівняння (3.22) є від'ємними, тривіальний розв'язок $x = 0, y = 0$ системи (3.20) стійкий за Ляпуновим [7].

Більше того, всі розв'язки системи (3.20), що виходять з початкових точок, досить близьких до $(0, 0)$, асимптотично наближатимуться до тривіального розв'язку при $t \rightarrow +\infty$.

Доведення цього твердження дуже просто можна отримати в такий спосіб.

Нехай

$$(3.29) \quad \left. \begin{aligned} x &= U_{11}(t), & y &= U_{21}(t), \\ x &= U_{12}(t), & y &= U_{22}(t) \end{aligned} \right\}$$

будуть розв'язками рівнянь першого наближення за початкових умов:

$$U_{11}(0) = 1, \quad U_{21}(0) = 0,$$

$$U_{12}(0) = 0, \quad U_{22}(0) = 1.$$

Тоді неважко помітити, що рівняння виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + F_2(t) \end{aligned}$$

інтегруються за допомогою квадратур:

$$x = U_{11}(t)x(0) + \int_0^t \{U_{11}(t-\tau)F_1(\tau) + U_{12}(t-\tau)F_2(\tau)\}d\tau.$$

$$y = U_{22}(t)y(0) + \int_0^t \{U_{21}(t-\tau)F_1(\tau) + U_{22}(t-\tau)F_2(\tau)\}d\tau.$$

Скориставшись цими формулами для рівнянь (3.20), отримаємо

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= U_{11}(t)x(0) + \int_0^t \{U_{11}(t-\tau)P_2(x(\tau), y(\tau)) + U_{12}(t-\tau)Q_2(x(\tau), y(\tau))\}d\tau \\ y(t) &= U_{22}(t)y(0) + \int_0^t \{U_{21}(t-\tau)P_2(x(\tau), y(\tau)) + U_{22}(t-\tau)Q_2(x(\tau), y(\tau))\}d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Ми замінили цим самим систему, диференціальних рівнянь (3.20) системою інтегральних рівнянь.

Підкреслимо, що через те, що дійсні частини коренів характеристичного рівняння (3.22), за припущенням, від'ємні, функції $U_{ab}(t)$ будуть експоненційно загасати, так що можна написати:

$$|U_{ab}(t)| \leq ke^{-at}, \quad (3.31)$$

де k і a – додатні сталі.

Досліджуватимемо інтегральні рівняння (3.30) за допомогою звичайного методу послідовних наближень.

Скориставшись оцінкою (3.31), знайдемо, що з досить малих початкових значеннях $x(0), y(0)$:

$$1) |x_n(t)| \leq C e^{-at}, \quad |y_n(t)| \leq C e^{-at}, \quad C - \text{стала, яка не залежить від } n.$$

2) $x_n(t), y_n(t)$ збігаються до розв'язку $x(t), y(t)$ рівномірно для всіх t на інтервалі $(0, \infty)$.

Звідси випливає, що $x(t), y(t)$ прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$.

Перейдемо тепер до аналізу характеру критичних точок на фазовій площині.

Для цього треба розглянути поведінку характеристик в околі особливої точки.

Рівняння характеристик у параметричній формі дано виразами (3.23), згідно з якими не ускладнює побудувати інтегральні криві та проаналізувати їх характер залежно від співвідношень між коефіцієнтами a, b, c, d .

Розглянемо різні випадки.

Нехай $(b - c)^2 + 4ad < 0$; у цьому випадку праві частини виразів (3.23) мають коливальний характер. Якщо $b + c = 0$, то в околі критичної точки характеристиками є сімейство подібних еліпсів, що охоплюють особливу точку, яка в даному випадку буде особливою точкою типу центру. Якщо $b + c \neq 0$, то характеристики являють собою сімейство спіралей, для яких асимптотичною точкою є критична точка типу фокусу, причому у випадку, якщо $b + c < 0$, характеристики прямують до початку координат при $t \rightarrow \infty$, і фокус буде стійкою особливою точкою; якщо $b + c > 0$, то показники прямуватимуть до початку координат при $t \rightarrow -\infty$; у цьому випадку фокус буде нестійкою особливою точкою.

Нехай $(b - c)^2 + 4ad = 0$. Тоді, виключаючи з виразів (3.23) час, отримаємо рівняння характеристик фазової площини в околі критичної точки у вигляді

$$y - u_1 x = c(y - u_2 x)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (3.32)$$

Останній вираз, як уже вказувалося вище, є рівнянням сімейства парабол або сімейства гіпербол в залежності від знаку показника степеня $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Якщо $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$, то (3.32) являє собою, рівняння сімейства парабол.

Таким чином, якщо $ad - bc < 0$, критична точка є вузлом, стійкість якого залежить від знаку виразу $b + c$.

Якщо $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, що буде при $ad - bc > 0$, то (3.32) є рівнянням сімейства гіпербол та критична точка є особливою точкою типу сідла.

Розглянемо тепер випадок, коли $(b - c)^2 + 4ad = 0$ і коли, корені характеристичного рівняння (3.22) рівні: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(b + c)$.

Тоді, якщо $a = d = 0$, $b = c = \lambda$, згідно з рівнянням (3.21) отримуємо;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad (3.33)$$

і рівняння характеристик $y = cx$ є рівняння сімейства прямих, що проходять через початок координат. Особлива точка $x = 0$, $y = 0$ у такому разі теж називається вузлом.

У загальному випадку необхідно в рівняннях (3.21) зробити заміну змінних відповідно до формул:

$$\xi = ax + \frac{b-c}{2}y, \quad (3.34)$$

$$\eta = y$$

Тоді, після виключення часу t , отримуємо наступне рівняння:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{c}$$

(3.35)

Розв'язок якого

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \xi \ln \xi + C\xi$$

(3.36)

є сукупність кривих, що проходять через особливу точку і представлених на рис. 3.8. Особлива точка знову є вузлом,

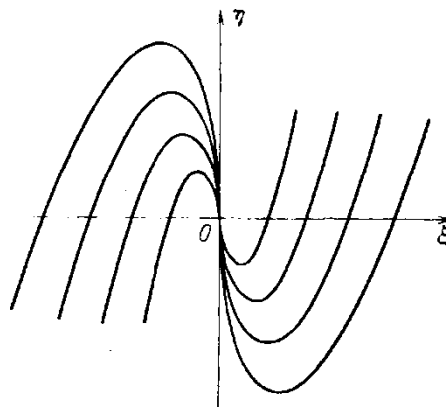


Рис. 3.1.8

причому вузол буде стійким при $b + c < 0$ і нестійким при $b + c > 0$.

Перейдемо тепер від локального дослідження характеру руху поблизу особливих точок до вивчення поведінки інтегральних кривих по всій фазовій площині.

Для отримання орієнтовного уявлення про можливий характер поведінки інтегральних кривих на фазовій площині розглянемо спочатку наближений розв'язок рівняння, що описує коливання системи з малою нелінійністю:

$$x = a \cos \phi + \dots, \quad y = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \phi + \dots$$

(3.37)

де амплітуда коливань a та фаза ψ визначаються такими рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta(a)a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(a). \end{aligned} \right\}$$

(3.38)

Вирази (3.37) є рівняння фазових траєкторій в параметричній формі. Поведінка цих фазових траєкторій залежатиме від кореня рівняння

$$\Phi(a) = a\delta(a) = 0,$$

(3.39)

відповідних стаціонарному режиму коливальної системи, а також від знаку функції $\Phi'_a(a)$.

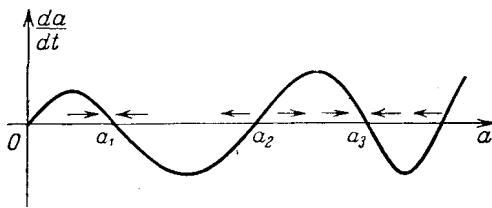


Рис. 3.9

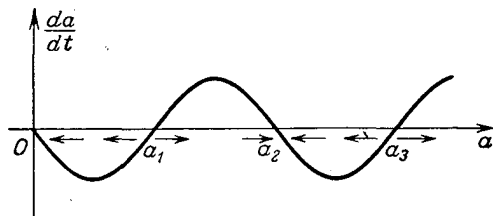


Рис. 3.10

Тривіальний корінь $a = 0$ відповідає, очевидно, стану рівноваги.

Нехай рівняння (3.39) має низку коренів, для яких $\Phi'_a(a) \neq 0$. Тоді ми отримуємо зображення на графіках типу рис. 3.9 чи рис 3.10.

Очевидно, що в першому випадку a_1 і a_3 є корінням рівняння (3.39), що відповідають стійкому стаціонарному режиму коливальної системи, а a_2 відповідає нестійкому режиму, $a = 0$ є нестійким станом рівноваги. У другому випадку $a = 0$ буде стійким положенням рівноваги, a_1 і a_3

відповідають нестійкому стаціонарному режиму, а a_2 - стійкому стаціонарному режиму.

Переходячи до фазової площини, ми отримаємо точку рівноваги та ряд замкнутих кривих, близьких до еліпсу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \omega^2} = 1 \quad (a = a_1, a_2, a_3, \dots).$$

(3.40)

На рис. 3.11 і рис.3.12 наведена картина на фазовій площині відповідно для двох розглянутих вище типів кореня рівняння (3.39).

Таким чином, на фазовій площині ми отримали особливу точку, що відповідає нульовому кореню, і замкнуті траєкторії, що відповідають кореню рівняння (3.1.39) $a = a_1, a_2, a_3, \dots$. Всі інші фазові траєкторії будуть асимптотично прямувати до цих замкнутих траєкторій при $t \rightarrow \infty$ або при $t \rightarrow -\infty$.

В даному випадку фазова площина розділена на ряд смуг, повністю заповнених-інтегральними кривими, що асимптотично наближаються

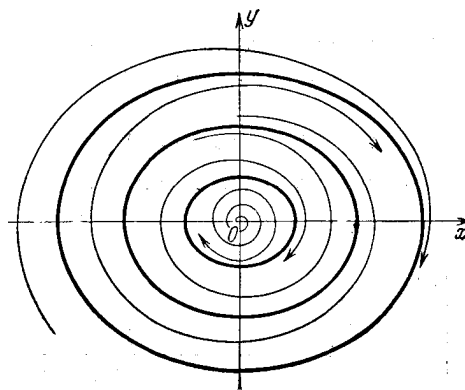


Рис. 3.11

до деякої замкнутої інтегральної кривої, яка називається граничним циклом, або до точки рівноваги. Граничний цикл буде стійкий, якщо всі інтегральні криві смуги досягають його при $t \rightarrow \infty$, і нестійкий, якщо вони досягають його при $t \rightarrow -\infty$.

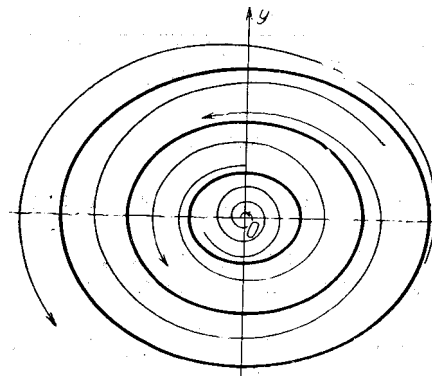


Рис. 3.12

Зауважимо, що у випадку, коли коливальна система консервативна, то

$$\Phi(a) = 0,$$

й у системі можливий стаціонарний періодичний режим із довільною амплітудою, що залежить тільки від початкових значень.

Цьому випадку на фазовій площині відповідає сімейство замкнутих циклів, що оточують особливу точку центр (рис. 3.13).

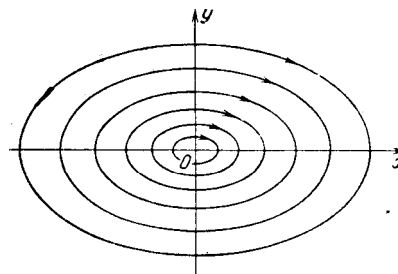


Рис.3.13

Наведене міркування не є строгим і, найголовніше, воно відноситься лише до окремого випадку систем, близьких до лінійного гармонійного вібратора, для яких можлива лише одна особлива точка.

Загальний випадок системи (3.1) був досліджений Пуанкаре за допомогою строгих якісних методів, причому в результаті виходить картина поведінки траєкторій на фазовій площині, що є природним узагальненням наведеної вище [1].

Припустимо, що система (3.1) визначає деякий коливальний процес. Цим самим ми виключаємо з розгляду випадок, коли на фазовій площині можуть існувати траєкторії, що йдуть у нескінченність.

Тоді на фазовій площині маємо особливі точки, замкнуті траєкторії та сепаратриси – інтегральні криві, що проходять через особливу точку типу сідла. Сепаратриса грає особливу роль, оскільки вона поділяє фазову площину ряд областей, заповнених траєкторіями різних типів (рис. 3.14).

Будь-яка незамкнена інтегральна крива або навивається на граничний цикл, або наближається до однієї або ряду особливих точок.

Замкнені цикли можуть утворювати як неперервне сімейство, так і дискретне.

Картина, при якій цикли утворюють неперервне сімейство з особливою точкою всередині центру, з фізичного погляду типова для консервативних систем.

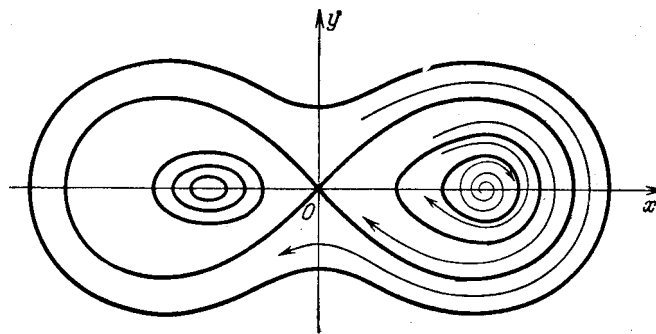


Рис. 3.14

У випадку, якщо цикли утворюють дискретне сімейство, то вони укладені в смуги, причому всі інтегральні криві, укладені в такій смугі, асимптотично прагнуть циклу, що є в цьому випадку граничним. Якщо наближення до цього циклу відбувається при $t \rightarrow \infty$, ми говоримо про стійкий граничний цикл. Якщо це наближення має місце при $t \rightarrow -\infty$, то природно говорити про нестійкий цикл.

Така картина характерна для автоколивальних систем. Граничні стійкі цикли зображують стаціонарні режими автоколивань, причому цілком очевидна незалежність стаціонарного режиму в автоколивальній системі від початкових умов, що є у відомих межах [1]. Зрозуміло, у разі наявності кількох граничних циклів при істотній зміні початкових значень можливе перекидання з одного граничного циклу на інший.

Наведена картина поведінки траєкторій на фазовій площині дуже наочна, проте вона насилу піддається деталізації при вирішенні конкретних прикладів.

До цих пір не існує достатньо загальних теоретичних методів для вирішення питання про існування граничних циклів та визначення місця їх розташування, за винятком випадку систем, близьких до лінійних .

При дослідженні таких завдань часто велике значення має поняття індексу, введене Пуанкаре.

Візьмемо на аналізованій фазовій площині деяку замкнуту криву Γ , причому припустимо, що ця крива проста (тобто не має подвійних точок) і не проходить через стан рівноваги. Візьмемо на

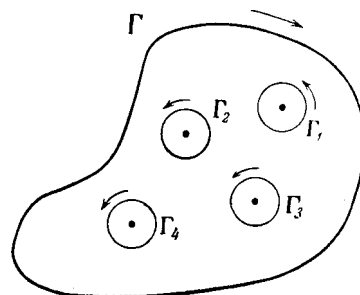


Рис. 3.15

цій кривій деяку точку S і проведемо через неї вектор, що збігається з напрямом дотичної до фазової траєкторії, що проходить через цю точку.

Нехай неперервна функція $\theta(t)$ визначає кут, який цей вектор утворює із додатним напрямом осі Ox .

Якщо точка S зробить повний оберт по замкнутій кривій Γ і повернеться на колишнє місце, то вектор зробить за цей період деяке число обертів i , отже, $\theta(t)$ зміниться на величину $2\pi j$, де j - додатне чи від'ємне ціле число (рис. 3.15). Число j називається індексом замкнутого контуру Γ .

Очевидно, що число j може бути виражено криволінійним інтегралом:

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint d \left(\arctg \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} \quad (3.41)$$

Цей криволінійний інтеграл береться від повного диференціалу; отже, якщо всередині області, що охоплюється кривою P , підінтегральна функція та її похідні неперервні, інтеграл дорівнює нулю.

Цілком ясно, що такі властивості неперервності можуть порушуватися лише в точках, для яких

$$P^2 + Q^2 = 0,$$

тобто в особливих точках нашого рівняння.

Тому, якщо всередині кривої Γ особливих точок немає, її індекс дорівнює нулю.

У випадку, коли всередині Γ є ряд особливих точок, проведемо побудову, зображену на рис. 3.16.

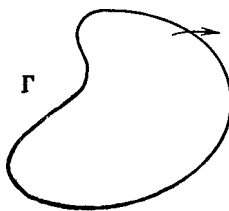


Рис. 3.16

В цьому випадку сума інтегралів (3.41), взятих по кривій Γ і кривим Γ_1 , Γ_2 , $\Gamma_3 \dots$ що оточують особливі точки, дорівнює нулю, оскільки у відповідній багатозв'язковій ділянці, обмеженій кривими Γ_1 , Γ_2 , $\Gamma_3 \dots$ особливих точок вже не міститься.

Оскільки кривим Γ_1 , Γ_2 , $\Gamma_3 \dots$ ми приписуємо обхід, протилежний прийнятому у визначенні індексу, бачимо, що індекс кривої Γ є сумою чисел, що залежать лише від властивостей відповідної особливої точки.

Ці числа називаються індексами особливих точок. За даним визначенням, індекс будь-якої особливої точки дорівнює інтегралу

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2},$$

взятому по кривій Γ , що оточує лише одну дану точку M , і не залежить від форми Γ .

Для фактичного визначення індексу можна, взяти в якості Γ еліпс

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1, \quad (3.42)$$

як завгодно близький до точки рівноваги. Тут, очевидно, ми помістили початок координат в особливу точку.

Тоді, нехтуючи виразами для $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ членами вищого порядку, отримаємо:

$$j = \frac{q}{2\pi} \oint (xdx - ydy), \quad (3.43)$$

де

$$q = bc - ad,$$

або, в силу відомого виразу для площі через криволінійний інтеграл,

$$j = \frac{q}{\pi} S,$$

де

$S = \frac{\pi}{|q|}$ - площа еліпса i , отже,

$$j = \frac{q}{|q|}.$$

Звідси відразу випливає, що індекс Пуанкаре для вузла, фокусу та центру дорівнює $+1$, а для сідла -1 . Ці ж результати можна було б отримати, виходячи з безпосереднього розгляду картини на фазовій площині (рис. 3.17).

Слід наголосити, що навіть якщо ми знаємо характер і місцезнаходження особливих точок, то цього ще зовсім недостатньо для загальної думки про поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння. Однак для окремих випадків можна дійти важливих висновків [9].

Розглянемо, наприклад, деяку замкнуту інтегральну криву, що визначається рівнянням (3.2), без подвійних точок та особливих точок.

Так як вектор, що дотикається до такої кривої, при повному обході кривої в додатному напрямку повертається на кут 2π , то, отже, сума індексів всіх особливих точок, що знаходяться всередині замкнутої інтегральної кривої, дорівнює 1 .

Таким чином, очевидно, що всередині замкнутої інтегральної кривої повинна знаходитися, принаймні, одна особлива точка, причому якщо ця точка одна, то це центр, фокус або вузол.

Якщо всередині замкнутої інтегральної кривої є кілька особливих точок, то число особливих точок типу сідла на одиницю менше від числа спеціальних точок інших типів.

Поняття індексу дає можливість визначити кількість і місце граничних циклів для даного рівняння, тобто виділити на фазовій площині деяке число кілець кінцевої ширини, в кожному з яких розташований тільки один граничний цикл.

Для цього потрібно виділити кілька особливих точок, сума індексів яких дорівнює $+1$, і оточити їх двома замкнутими кривими так, щоб в отриманій кільцеподібній області не було особливих точок.

Після цього треба дослідити напрям вектора швидкості зображувальної точки цих кривих. Залежно від напрямку цього вектора можна вивести висновок про наявність граничного циклу, а також його характер [1]. Так, наприклад, якщо вектор швидкості зображувальної точки спрямований скрізь всередину кільцеподібної області, то в даній області існує, принаймні, один стійкий граничний цикл. Якщо вектор швидкості скрізь спрямований назовні, то існує принаймні один нестійкий граничний цикл і т.д.

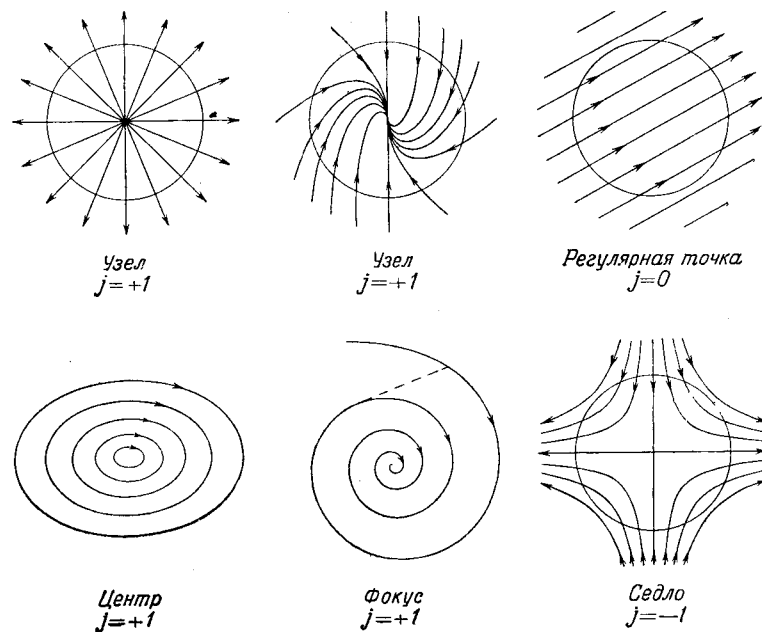


Рис. 3.17

ВИСНОВКИ

В ході написання магістерської роботи було здійснено огляд наявної літератури з теми, систематизовано відомості про загальне рівняння вільних коливань, поглиблено знання про диференціальні рівняння та їх застосування.

В результаті проведеної роботи, ми дослідили, що диференціальною моделлю явища, процесу, називають, одержане під час дослідження деякого реального явища або процесу, диференціальне рівняння.

Диференціальне рівняння, яке містить функцію лише однієї незалежної змінної (природно це функція часу для динамічних систем) має назву звичайного диференціального рівняння ЗДР.

Рівняння, які містять функції двох або декількох незалежних змінних, називаються рівняннями з частинними похідними.

ЗДР містять невідомі функції залежні лише від часу, отже автоматично незалежні від координат, такі рівняння здатні описувати лише так звані динамічні системи (або процеси) із зосередженими параметрами.

Також, ми дійшли висновку того, що залежність періоду вільних коливань від своєї амплітуди спостерігається й для інших нелінійних систем. Однак залежно від характеру повертаючої сили цей період може як зростати, так і зменшуватися.

Збільшення амплітуди є лише наслідком резонансу, а причина – збіг резонансної частоти коливальної системи з частотою зовнішнього впливу на систему. За допомогою явища резонансу можна виділити або посилити навіть дуже слабкі періодичні коливання. Резонанс – це явище, яке полягає в тому, що коливальна система особливо чутливо реагує на деякі частоти зовнішньої діючої сили (впливу).

Наявність нелінійності у разі параметричних коливань так само, як і для звичайних вимушених коливань призводить до неізохронності коливань (залежності періоду коливань від їх амплітуди) до обмеження амплітуди параметрично збурених коливань.

Вимушені параметричні коливання мають такі властивості:

- 1) збурення відбувається на частоті $\frac{n\omega_0}{2}$;
- 2) існує граничне значення модуляції, вище якого амплітуда коливань стає відмінною від нуля;
- 3) параметричні коливання збурюються не в широкій області частот, а лише на частотах поблизу значень $\frac{n\omega_0}{2}$;
- 4) на відміну від лінійних вимушених коливань, при прямуванні згасання системи до нуля, амплітуда коливань прямує не до нескінченності, а до скінченної величини.

Відповідно до мети і поставлених завдань у ході виконання роботи було поглиблено знання про диференціальні рівняння та їх застосування, опрацьовано наявну літературу з теми та систематизовано відомості про загального рівняння вільних коливань

Матеріали даної роботи можуть бути використанні при вивченні та викладанні курсів «Диференціальні рівняння» та «Методи нелінійного аналізу»

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические метод в теории нелинейных колебаний : издание второе / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский – Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 407 с.
2. Агафонов С.А., Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / С. А. Агафонов, А. Д. Герман, Т.В. Муратова. - 3-е изд, стереотип. -М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, - Москва, 2004. - 352 с.
3. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк, - Київ, 2003. – 600 с.
4. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : [навчальний посібник] / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.
5. Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики : [учебное пособие] / Н. А. Кудряшов. – М. : МИФИ, 2008. – 352 с.
6. Drazin P. G. Solitons: an introduction / P. G. Drazin, R. S. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 229 с.
7. Sinkala Z. Soliton/exciton transport in proteins / Z. Sinkala // J. Theor. Biol. – 2006. – V. 4, № 241. – P. 919–927.
8. Тарасевич Ю. Ю. Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple : [методические рекомендации] / Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань, 2010. – 23 с.
9. Аршава О. О. Прикладні задачі з вищої математики для економічних спеціальностей : [навчально-методичний посібник] / О. О. Аршава, Н. Ю. Іохвідович, А. І. Кононенко. – Харків : ХДТУБА, 2011. – 71 с.
10. Сизиков В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений : [учебное пособие] / В. С. Сизиков. – СПб. : «Спец Лит», 1999. – 240 с.
11. Пукач П. Я. Про ефект руйнування розв'язку в одній нелінійній реологічній моделі Фойгта–Кельвіна / П. Я. Пукач // Обчислювальна математика та прикладні проблеми механіки: міжнародна конференція, 31.08.–04.09. 2009 р.: тези доп. – Львів, 2009. – С. 298–299.

12. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики: Підручник для студентів фіз.-мат. та інж. спец. ун-тів. / Перестюк М.О., Маринець В.В. – К.: Либідь, 2006. – 419с.
13. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних згинальних коливань в стрижнях Фойгта–Кельвіна з урахуванням опору / П. Я. Пукач // Праці Одеського політехнічного університету. – 2013. – № 2(41). – С. 59–64.
14. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження коректності розв'язку в математичній моделі нелінійних коливань напівнеобмежених пружних тіл / П. Я. Пукач // Науковий вісник Національного лісотехнічного ун-ту України. – 2012. – Вип. 22.15. – С. 340–347.
15. Пукач П. Я. Нелінійні коливання слабкозв'язаних коливальних систем / П. Я. Пукач // Вісник Нац. університету “Львівська політехніка“. Сер. ”Комп'ютерні науки та інформаційні технології”. – 2013. – № 751. – С. 102–107.
16. Пукач П. Я. Нелінійні коливання необмежених тіл з урахуванням дисипативних сил / П. Я. Пукач // Машинознавство. – 2013. – № 5-6. – С. 10–15.
17. Кузьо І. В. Нелінійні згинні коливання пружних середовищ, які обертаються навколо нерухомої осі / І. В. Кузьо, П. Я. Пукач // Вібрації в техніці та технологіях. – 2012. – № 4 (68). – С. 57–61.
18. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П. Я. Пукач. – Львів: Видавництво Нац. ун-ту “Львівська політехніка“, 2014. – 288 с.
19. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження математичної моделі нелінійних коливань необмеженої балки під дією сил опору / П. Я. Пукач // Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки: міжн. наук.-практ. інтернет-конф., 10–25.05. 2013 р.: тези доп. – Харків, 2013.– С. 214–217.
20. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно пружних системах і методи їх дослідження// Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УкрДЛТУ. – 2003, вип. 28. – С.

21. Чуличков А. И. Математические методы нелинейной динамики / Чуличков А. И. – Москва, 1978. – 288с.-
22. Неймарк Ю. И. Простые математические модели и их роль в постижении мира / Ю. И. Неймарк // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 3. – С. 139–143.
23. Марценюк В. П. Медична інформатика. Методи системного аналізу / В. П. Марценюк, Н. О. Кравець. – Тернопіль : Укрмедкнига, 2002. – 172 с.
24. Tikhonenko A. V. Theory of Oscillations. Part 4: Forced Oscillations and Resonance [Електронний ресурс] / A. V. Tikhonenko // Maplesoft. – 2003. – Режим доступу : <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=4742&view=html>.
25. Urroz G. E. Partial Differential Equations with SCILAB [Електронний ресурс] / G. E. Urroz // InfoClearinghouse.com. – 2001. – Режим доступу : http://www.tf.uns.ac.rs/~omorr/radovan_omorjan_003_prll/s_examples/Scilab/Gilberto/scilab11.pdf.
26. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. / Пискунов Н.С. – М.:Наука,1985.- 340с.
27. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики:Підручник для студентів фіз.-мат. та інж. спец. ун-тів. / Перестюк М.О., Маринець В.В. – К.: Либідь,2006. – 419с.
28. Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного. /Сидоров Ю.В. М.В. Федорюк М.И.Шабунин – М.:Наука,1982. -488с
29. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. / Тихонов А.Н.,Самарский А.А. – М.: «Наука»,2004. – 735с.
30. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння в прикладах і задачах. /Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. – Київ,Либідь,1994.
31. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.І Функции одного переменного./ Шабат Б.В. – М.:Наука,1985. – 336с.
32. Пак Р.М. Про дослідження математичних моделей резонансних явищ у сильно нелінійних коливальних системах / Р. М. Пак, П. Я. Пукач, М. Б.

Сокіл // Dynamical System Modeling and Stability Investigations: XVI Intern. Conf., May 29–31 2013: abstracts of conference reports. – Kiev, 2013. – P. 304.