

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

Умовні існування періодичного розв'язку однорідного рівняння Дуффінга

Виконала: студентка II курсу магістратури

групи ММ-21

спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)

Оліферчук Ірина Степанівна

Керівник доктор технічних наук, професор

Бичков О. С.

Рецензент: доктор технічних наук, професор,

завідувач кафедри прикладної математики НУВГП

Мартинюк П. М.

Рівне – 2021 року

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	3
<b>Розділ 1. Диференціальні рівняння їх види та основні методи їх розв’язування. Задачі Коші та крайова задача</b> .....	6
1.1. Диференціальне рівняння та рівняння з відокремлюваними змінними.....	6
1.2. Однорідне диференціальне рівняння першого порядку та рівняння, що зводяться до однорідних.....	10
1.3. Лінійні однорідні рівняння $n$ –го порядку зі сталими коефіцієнтами.....	14
1.4. Задача Коші та її розв'язок.....	16
1.5. Крайова задача.....	22
1.5.1.Невироджений випадок. Функція Гріна.....	22
1.5.2. Вироджений випадок. Узагальнена функція Гріна.....	32
1.5.3. Крайова задача на власні значення.....	37
<b>Розділ 2. Однорідне рівняння Дуффінга та умовні існування періодичного розв’язку</b> .....	40
2.1.Однорідне рівняння Дуффінга.....	40
2.2.Точні розв’язки рівняння Дуффінга. Еліптичні функції Якобі.....	41
2.3.Однорідне рівняння Дуффінга та розв’язування його методом гармонічного балансу.....	44
2.4. Метод розкладання у ряд за малим параметром.....	48
2.5.Осцилятор з кубічною нелінійністю.....	51
2.6.Метод Ван дер Поля при розв'язуванні рівняння Дуффінга.....	54
2.7.Період коливань згасаючого нелінійного осцилятора.....	58
<b>Розділ 3. Застосування рівняння Дуффінга з різними факторами</b> .....	60
3.1Застосування однорідного рівняння Дуффінга в фізиці та біології.....	60
3.2 Вільні коливання осцилятора Дуффінга з сухим тертям.....	63
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	75
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	77

## ВСТУП

Рівняння Дуффінга моделює певні затухаючі та вимушені коливання. Перш за все коливання - рухи, які точно або приблизно повторюються через однаковий період часу. Коливання — найпоширеніша форма руху у природі та техніці. Існує багато видів коливання, такі як: електромагнітні, механічні, звукові періодичні та неперіодичні, вільні, автоколивання та параметричні.

Ми часто можемо спостерігати вимушені коливання у навколишньому середовищі. Це наприклад, коливання дерев під зовнішньою дією вітру, коливання мосту внаслідок тиску спричиненого людиною, яка проходить по ньому. Внаслідок руху систем виникає тертя, що супроводжується втратою енергії, і в результаті коливання загасають. Вільні коливання завжди є затухаючими. Саме рівняння Дуффінга демонструє та моделює вимушені та затухаючі коливання.

Рівняння назване на честь німецького винахідника ще називають осцилятором Дуффінга. Рівняння Георга Дуффінга широко використовуються у фізиці, математиці, інженерії. Сам осцилятор Дуффінга слугує моделлю математичного маятника та фізичних систем, що дозволяє проектувати поведінку хвиль та фізичних явищ. Також він описує механічні коливальні системи такі, як, наприклад вантаж на пружині з нелінійною жорсткістю, частинка, яка рухається в потенціальному полі з двома симетричними мінімумами. Крім механічних систем рівняння Дуффінга описують ще й електронні системи.

Осцилятор Дуффінга являє собою найпростішу одновимірну нелінійну систему, частинку, яка рухається в потенціальному полі  $U(x) = \frac{ax^2}{2} + bx^4$ . Якщо  $b = 0$ , тобто другого доданку немає, то система зводиться до простого лінійного осцилятора. Відмінною рисою осцилятора Дуффінга від звичайного лінійного осцилятора є те що, він володіє можливістю отримання хаотичної поведінки та, під дією зовнішньої періодичної сили відчуває бістабільну

поведінку, тобто осцилятор Дуффінга, показує, що система може мати два стабільних стани рівноваги, це, наприклад, вимикач.

Перший розділ даної роботи описує диференціальні рівняння, їх види, такі як: диференціальні рівняння з відокремленими змінними, однорідні диференціальні рівняння першого порядку та однорідні диференціальні рівняння  $n$  – го порядку зі сталими коефіцієнтами, та методи їх розв'язування. Наводяться приклади застосування методів розв'язування диференціальних рівнянь на практиці. Також в даному розділі представлені розв'язки задачі Коші та крайових задач, детально описується не вироджений та вироджений випадки крайової задачі та функція Гріна.

Рівняння Дуффінга або осцилятор Дуффінга можна розв'язати кількома методами, наприклад, методом розкладання у ряд за малим параметром, методом Ван дер Поля, методом гармонічного балансу або гармонічної лінеаризації. Більш детально розповідається про ці методи та наводяться приклади застосування їх на практиці у другому розділі даної роботи. Також в цьому розділі описуються умовні існування періодичного розв'язку однорідного рівняння Дуффінга, детально розглядається осцилятор з кубічною нелінійністю, також описується період коливань нелінійного осцилятора.

Третій та заключний розділ даної магістерської роботи характеризує застосування рівнянь Дуффінга на практиці, тобто описує його застосування в біології, в медичній фізиці, у фізиці, інженерії.

**Об'єкт дослідження:** диференціальні моделі коливних процесів.

**Предмет дослідження:** однорідне рівняння Дуффінга, методи його розв'язування, періодичні розв'язки даного однорідного рівняння та умовні існування періодичного розв'язку однорідного рівняння Дуффінга.

**Мета і завдання:**

- розгляд однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків та методів їх розв'язування;
- опанування вміння відрізнити осцилятор з кубічною нелінійністю від осцилятора з квадратичною нелінійністю;
- самостійно визначати період коливань нелінійного осцилятора;
- вміти доцільно та чітко застосовувати рівняння Дуффінга при розгляді нелінійних коливальних систем.

**Апробація результатів дослідження.** Результати роботи були представлені на звітній науковій конференції викладачів, здобувачів освіти та співробітників наукової галузі Рівненського державного гуманітарного університету за 2020 рік.

За отриманими результатами проведених експериментальних досліджень опубліковано тези доповіді на XIII Міжнародній конференції « Наука, освіта. Суспільство очима молодих».

## Розділ 1. Диференціальні рівняння їх види та основні методи їх розв'язування. Задачі Коші та крайова задача

### 1.1. Диференціальне рівняння та рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння, у якому невідому величину  $y'(x)$  шуканої функції та саму функцію  $y(x)$  з її аргументом називають звичайними диференціальними рівняннями першого порядку.

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (1.1.1)$$

З курсу математичного аналізу відомо, що

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = Dy(x)$$

де  $\frac{dy}{dx}$  розуміють як похідну або як частку диференціалів.

Якщо рівняння 1.1.1 задовольняє умови існування неявної функції

$y'(x) = f(x, y(x))$ , то функція  $y = y(x)$ , яка визначена і неперервна, і має неперервну похідну першого порядку, та при підстановці її у рівняння перетворює її в тотожність називається розв'язком диференціального рівняння. Розв'язком диференціального рівняння є функція, а функція має графік, який називається інтегральною кривою. Сукупність інтегральних кривих є однонаправленою сім'єю.

Розв'язати диференціальне рівняння часто мають на увазі проінтегрувати рівняння, а розв'язок називають інтегралом диференціального рівняння.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$y' = \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x}$$

Домножаємо дане рівняння на  $dx$ , отримаємо:

$$dy = \frac{\sin x}{x} dx$$

Проінтегруємо даний вираз, матимемо:

$$\int dy = \int \frac{\sin x}{x} dx + C$$

Отримали розв'язок рівняння:

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C.$$

Рівняння виду  $y'(x) = f(x)$  називають рівнянням з відокремленими змінними.

$$\frac{dy(x)}{d\delta} = \delta(x) dx$$

$$dy(\delta) = \delta(x) dx$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int dy(\delta) = \int f(x) dx + C$$

Отримали розв'язок рівняння записаний у вигляді:

$$y(x) = \int f(x) dx + C.$$

Рівняння виду  $y'(x) = \varphi(y)$ , розв'язуємо:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \varphi(y) \frac{1}{\varphi(y)} dx, \quad \varphi(y) \neq 0$$

$$\frac{dy}{\varphi(y)} dx,$$

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C.$$

Обов'язково розв'язавши функціональне рівняння, перевіряємо, які з його розв'язків будуть розв'язками диференціального рівняння, такі розв'язки називаються частковими, а ті розв'язки, які не можна отримати із загального розв'язку ні при якому значенні  $C$  називаються особливими розв'язками.

Загальний вид диференціального рівняння з відокремленими змінними:

$$M(x)N(y)dy + P(x)Q(y)dx = 0$$

Помножимо даний вираз на  $\frac{1}{N(y)P(x)}$ ,  $P(x) \neq 0, N(y) \neq 0$

Матимемо:

$$\frac{M(x)}{P(x)} dx + \frac{Q(y)}{N(y)} dy = 0$$

Проінтегруємо даний вираз, отримаємо:

$$\int \frac{M(x)}{P(x)} dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)} dy = C.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$x(1 - y^2)dx + (1 - x^2)ydy = 0$$

Домножаємо дане рівняння на вирази:

$$\frac{1}{1 - y^2}, \quad \frac{1}{1 - x^2}, \quad 1 - y^2 \neq 0, \quad 1 - x^2 \neq 0$$

Отримаємо:



$$\frac{x}{1-x^2} dx + \frac{y}{1-y^2} dy = 0$$

Проінтегруємо дане рівняння, матимемо:

$$-\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{1-x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{-2y}{1-y^2} dy = \ln|C|, \quad C \neq 0$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1-x^2| - \frac{1}{2} \ln|1-y^2| = \ln|C|$$

Домножаємо даний вираз на (-2), отримаємо:

$$\ln|1-x^2| + \ln|1-y^2| = \ln|C|$$

$$\ln(1-x^2)(1-y^2) = \ln|C|$$

$$(1-x^2)\left(1-y^2 = \frac{1}{C^2}\right), \quad C^2 = c$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$(1-x^2)(1-y^2) = C_1$$

2 випадок

$$1-y^2 = 0$$

$$2.1) y = 1, \quad dy = 0.$$

$$2.2) y = -1, \quad dy = 0.$$

Перевіряємо:

$$x(-1-1^2)dx + (1-x^2)1 * 0 = 0, \quad 0 = 0.$$

Таким чином рівняння має загальний розв'язок і особливі розв'язки

$$x = \pm 1, y = \pm 1.$$

## 1.2. Однорідне диференціальне рівняння першого порядку та рівняння, що зводяться до однорідних

Функція  $f(x, y)$  називається однорідною функцією  $n$  - виміру, якщо виконується рівність 1.

$$\forall(t)(f(tx); (ty)) = t^n f(x, y) \quad (1.2.1)$$

Рівнянням  $y' = f(x, y)$  називається однорідним, якщо  $f(x, y)$  є однорідна функція.

Якщо  $t = \frac{1}{x}$ , то  $f(tx, ty) = f\left(\frac{1}{x} * x, \frac{1}{x} * y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$y = z * x$$

$$y' = z' x + z x'$$

$$z x' + z = \varphi(z)$$

$$z x' = \varphi(z) - z$$

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

$$x \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z$$

Домножаємо дане рівняння на вираз  $x \frac{dx}{x} * \frac{1}{\varphi(z)-z}$ ,  $\varphi(z) - z \neq 0, x \neq 0$ .

Отримаємо:

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

Проінтегруємо даний вираз, матимемо:

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C$$

Підставимо даний вираз в останню формулу замість  $z = \frac{y}{x}$ , і якщо з останньої формули можна визначити  $y$ , як функцію від  $x$ , то отримали загальний розв'язок у явному вигляді.

В деяких прикладах не обов'язково зводити рівняння до виду  $y' = f(x, y)$ , але обов'язково перевірити чи кожний доданок має один і той самий степінь однорідності.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

Вводимо заміну:  $z = \frac{y}{x}$ , матимемо:

$$y = z - x,$$

$$y' = xz' + z,$$

$$xz' + z = \sqrt{1 - z^2} + z,$$

$$x \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2},$$

Домножаємо дане рівняння на  $\frac{dx}{x} * \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ , отримаємо:

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\arcsin z = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|Cx| = \arcsin z,$$

$$Cx = e^{\arcsin z},$$

$$Cx = e^{\arcsin \frac{y}{x}},$$

$$z = \sin \ln |Cx|,$$

$$y = x \sin \ln |Cx|.$$

Рівняння виду  $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1x+c_1}$  не є однорідним рівнянням, тому вводимо заміну:  $x = y + k$ ,  $y = z + k$  і  $k$ , і  $z$  будемо підбирати так, щоб рівняння стало однорідним.

$$dx = dz, \quad dy = dz.$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{a(z+k) + b(z+k) + c}{a_1(\eta - b) + b_1(z+k) + c_1},$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{(a_\eta + b_3)(ak + bk + c)}{(a_1\eta + b_1z) + (a_1k + b_1h + c_1)},$$

$$\begin{cases} ak + bh = -c \\ a_1 + bh = c_1 \end{cases},$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'яжемо її, за допомогою визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a * b_1 - a_1 * b \neq 0,$$

$$k = \frac{\Delta k}{\Delta},$$

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{a_\eta + b_z}{a_1\eta + b_1z},$$

В результаті перетворень отримали однорідне диференціальне рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$y' = -\frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1},$$

Дане рівняння не є однорідним, тому зведемо його до однорідного

Для цього складемо та обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то робимо заміну

$$x = t + x_0, \quad y = z + y_0,$$

де  $(x_0, y_0)$  знаходимо з системи

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Тоді:

$$x = t - 1, \quad y = z + 1 \Rightarrow dx = dt, \quad dy = dz \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt},$$

У нових змінних задане рівняння зводиться до вигляду:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2t - 2 + z + 1 + 1}{t - 1 + 2z + 2 - 1} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{2t + z}{t + 2z} \Rightarrow z' = -\frac{2 + \frac{z}{t}}{1 + 2\frac{z}{t}},$$

Отримане рівняння є однорідним відносно  $t$  і  $z$ , тому робимо заміну:

$$\frac{z}{t} = u \Rightarrow z(t) = ut \Rightarrow z' = u' t.$$

Тоді

$$u' t + u = -\frac{2 + u}{1 + 2u} \Rightarrow u' t = -\frac{2 + u}{1 + 2u} - u \Rightarrow u' t = -2\frac{u^2 + u + 1}{1 + 2u}.$$

В останньому рівнянні відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$-\frac{1}{2} \frac{1 + 2u}{u^2 + u + 1} du = \frac{dt}{t} \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{1 + 2u}{u^2 + u + 1} du = \int \frac{dt}{t} + \ln|C_1|,$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d(u^2 + u + 1)}{u^2 + u + 1} = \int \frac{dt}{t} - \ln|C_1| \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln|u^2 + u + 1| = \ln|t| - \ln|C_1|.$$

Виконавши перетворення, одержимо загальний інтеграл

$$t = \frac{C_2}{\sqrt{u^2 + u + 1}}, \quad (C_2 = \pm C_1) \Rightarrow t\sqrt{u^2 + u + 1} = C_2.$$

Після оберненої заміни  $\frac{z}{t} = u$  матимемо:

$$\sqrt{z^2 + zt + t^2} = C_2 \Rightarrow z^2 + zt + t^2 = C_2^2,$$

А повертаючись до вихідних змінних  $x$  і  $y$  за формулами

$$t = x + 1, \quad z = y - 1$$

Знайдемо загальний інтеграл початкового рівняння:

$$\begin{aligned} (y - 1)^2 + (y - 1)(x + 1) + (x + 1)^2 &= C_2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + xy + x - y = \\ &= C, \quad (C = C_2^2 - 1). \end{aligned}$$

### 1.3. Лінійні однорідні рівняння $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Для лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$Lx := \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0, \quad (1.3.1)$$

Для побудови фундаментальної системи розв'язків існує точний алгоритм. Суть цього методу заключається в таких міркуваннях. Розв'язок рівняння 1.3.1 подамо у вигляді  $x = e^{\lambda t}$ . Оскільки

$$Le^{\lambda t} = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) e^{\lambda t}.$$

то число  $\lambda$  буде коренем полінома

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

тоді й лише тоді, коли функція  $e^{\lambda t}$  буде розв'язком лінійного однорідного рівняння (1.3.1).

Досі ми неявно припускали, що  $\lambda \in R$ . Існування коренів поліномів у полі комплексних чисел гарантує основна теорема алгебри. Тому, виникає необхідність поширити дію оператора  $L$  на комплекснозначні функції, зокрема на функції:

$$e^{\lambda t} := e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t, \lambda \in C, \alpha \in Re \lambda, \beta = Im \lambda.$$

[19, с.180]

Приклад 5. Розв'язати рівняння  $y'' - 4y = 0$  з початковими умовами

$$\begin{cases} y(0) = 14, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

Характеристичне рівняння  $p^2 - 4 = 0$  має корені  $p_{1,2} = \pm 2$ . По формулі  $y = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{p_2 x}$  загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Диференціюючи попередній вираз, отримаємо

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}$$

Початкові умови, означають, що при  $x = 0$  маємо  $y = 14, y' = 0$ . Підставляючи ці значення в загальний розв'язок, одержуємо:

$$\begin{cases} 14 = C_1 e^{2 \cdot 0} + C_2 e^{-2 \cdot 0} \\ 0 = 2C_1 e^{2 \cdot 0} - 2C_2 e^{-2 \cdot 0} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 14 \\ 2C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases}$$

Із другого рівняння системи випливає, що  $C_1 = C_2$ , тому з першого рівняння  $C_1 = C_2 = 7$ . Підставляючи ці значення в загальний розв'язок, отримаємо частинний розв'язок  $y = 7e^{2x} + 7e^{-2x}$ .

#### 1.4. Задача Коші та її розв'язок

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння  $n$  – порядку

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.4.1)$$

Рівняння (1.4.1), яке можна розв'язати відносно старшої похідної, записуватимемо у вигляді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.4.2)$$

Розв'язком рівняння (1.4.2) на цьому інтервалі називають функцію  $y = y(x)$ , яка визначена і неперервно диференційовна  $n$  разів на інтервалі  $(a, b)$  якщо дана функція для всіх  $x \in (a, b)$  перетворює це рівняння в тотожність.

Задача Коші для рівняння (1.4.2) формулюється наступним чином: знайти такий розв'язок  $y = y(x)$  серед усіх розв'язків цього рівняння, який для  $x = x_0$  задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.4.3)$$

Початковими даними розв'язку  $y = y(x)$  називають числа -  $x_0, y_0, y'_0, y_0^{(n-1)}$ , які, є заданими. Число  $x_0$  називають початковим значенням незалежної змінної  $x$ , сукупність чисел  $x_0, y_0, y'_0, y_0^{(n-1)}$  – початковими даними рівняння (1.4.2), а умови (1.4.3) – початковими умовами.

Для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1.4.4)$$



задача Коші полягає у знаходженні розв'язку  $y = y(x)$  цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (1.4.5)$$

З геометричного погляду, суть задачі Коші (1.4.4) та (1.4.5) заключається у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку  $(x_0, y_0)$  і має у цій точці заданий напрям дотичної  $y'_0$ , тобто  $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$ .

Зауважимо, що єдиний розв'язку задачі Коші для рівняння  $n$  – порядку (1.4.2) не вказує на те, що через точку  $(x_0, y_0)$  проходить тільки одна інтегральна крива, як це було для рівняння першого порядку, яке розв'язували відносно похідної. Наприклад, єдиність розв'язку задачі Коші (1.4.4) та (1.4.5) вказує на те, що через кожену точку  $(x_0, y_0)$  проходить єдина інтегральна крива рівняння (1.4.4), дотична до якої в цій точці утворює з додатним напрямом осі  $Ox$  кут  $\alpha_0$ , для якого  $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$ . Водночас, через точку  $(x_0, y_0)$  можуть проходити й інші інтегральні криві, крім цієї інтегральної кривої, але мати вже інший нахил дотичної в цій точці. [5, с.89]

Приклад 6. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Доведемо, що всі розв'язки рівняння заключаються у формулі

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі. Звідси,

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

Щоб задовольнити початкові умови виберемо  $C_1, C_2$  так. Очевидно, що  $C_1 = 1, C_2 = 0$ . Отже, шуканим розв'язком є  $y = \cos x$ . Цей розв'язок єдиний. Однак, через точку  $(0, 1)$ , проходить безліч інших інтегральних кривих, окрім кривої  $y = \cos x$ , які можна описати формулою  $y = \cos x + C_2 \sin x$ , де  $C_2$  – довільна стала, відмінна від нуля, але жодна з

дотичних до них у точці  $(0, 1)$  не збігається з дотичною до кривої  $y = \cos x$  у цій точці.

Розглянемо механічне трактування задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку та його розв'язків. Нехай матеріальна точка маси  $m$  рухається по прямій, яку приймемо за вісь  $Ox$ , під дією сили  $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ , залежної від часу  $t$ , положення  $x$  і швидкості  $\frac{dx}{dt}$  у момент часу  $t$ . Згідно з другим законом Ньютона

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

де  $\frac{d^2x}{dt^2}$  – прискорення точки в момент часу  $t$ , або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1.4.6)$$

де  $f = \frac{F}{m}$ .

Часто розв'язок  $x = x(t)$  називають рухом, який визначений рівнянням (1.4.6), тому що кожному розв'язку  $x = x(t)$  рівняння (1.4.6) відповідає певний закон руху. Суть задачі інтегрування рівняння (1.4.6) заключається у знаходженні всіх рухів, визначених цим рівнянням та у вивченні їх властивостей.

Задача Коші для рівняння (1.4.6), з механічного погляду, базується на знаходженні такого руху  $x = x(t)$ , який задовольняє початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0',$$

Точка в початковий момент часу  $t = t_0$ , повинна займати задане положення  $x_0$  і мати задану швидкість  $x_0'$ .

Досить припустити, щоб права частина рівняння (1.4.2) була неперервною в околі початкових даних (теорема Пеано), з метою існування достатньої умови

існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, яка поширюється і на випадок рівняння  $n$ -го порядку: для існування (неперервного разом із похідними до порядку  $n$  включно) розв'язку задачі Коші (1.4.2) та (1.4.3).

Теорема (Коші): нехай функція  $f(x, y)$  визначена у прямокутнику

$$D = \{(x, y): x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

де  $a, b > 0$  і задовольняє в ньому такі умови:

- 1) Частинна похідна  $\frac{\partial f}{\partial y}$  існує та обмежена ( $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq L$ ).
- 2)  $f(x, y)$  неперервна, а отже й обмежена ( $|f(x, y)| \leq M$ ).

На відрізку  $G = \{x: x_0 - h \leq x \leq x_0 + h\}$ , задача Коші (1.4.2) та (1.4.3) має єдиний розв'язок  $y = y(x)$ , де

$$h < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}).$$

Доведемо, що задача Коші рівносильна інтегральному рівнянню

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.4.7)$$

Дійсно, якщо за умови продиференціювання даного рівняння - неперервна функція  $y(x)$  є розв'язком інтегрального рівняння (1.4.7), випливає, що  $y'(x) = f(x, y(x))$  і, очевидно,  $y(x_0) = y_0$ . Отже, функція  $y(x)$  є розв'язком задачі Коші.

Навпаки, нехай  $y(x)$  – розв'язок задачі Коші, тобто  $y'(x) \equiv f(x, y(x))$  і  $y(x_0) = y_0$ . У межах від  $(x_0)$  до  $x$  проінтегрувавши цю тотожність, одержуємо

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

тобто  $y(x)$  являється розв'язком інтегрального рівняння (1.4.7).

Множину неперервних функцій  $y = y(x)$  позначимо через  $W$ , які задані на відрізку  $G$  і задовольняють в ньому нерівність  $|y(x) - y_0| \leq b$ . Введемо метрику в околі множині  $W$

$$\rho(y, z) = \max|y(x) - z(x)|, \quad y, z \in W.$$

Таким чином  $W$  – метричний простір. Цей простір являється повним. Як відомо з математичного аналізу, якщо послідовність функцій є фундаментальною, то, ця послідовність збігається рівномірно на відрізку  $G$  до деякої неперервної на цьому відрізку функції  $y = y(x)$ . Нерівність виконується для функцій  $y_n \in W$

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, \quad x \in G, \quad n = 1, 2, \dots,$$

яка після переходу до границі при  $n \rightarrow \infty$ , тобто  $|y_n(x) - y_0| \leq b$  залишається. Звідки випливає, що  $W$  – повний простір, за умови, що  $y \in W$

Справедливо розглядати праву частину інтегрального рівняння (1.4.7) як деяке інтегральне перетворення неперервної функції  $y(x)$ .  $Y(x)$  неперервна функція, графік якої належить прямокутнику

$D_1 = \{(x, y): x_0 - h \leq x \leq x_0 + h, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ , якщо нерівність

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \tag{1.4.8}$$

ставить у відповідність кожній функції  $y \in W$ .

Права частина рівності (1.4.8) є неперервною функцією від  $x$ , тобто,  $z(x)$  неперервна функція на відрізку  $G$ , за умови неперервності функції  $f(x, y)$  в  $D_1$ . Застосувавши відому з математичного аналізу, нерівність

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |g(x)| dx \right|, \tag{1.4.9}$$

матимемо, що

$$|z(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq m * \frac{b}{M} = b,$$

звідки слідує, що  $z \in W$ .

Отже, формула (1.4.8), кожній неперервній функції  $y(x)$ , ставить у відповідність неперервну функцію  $z(x)$ . Через  $Ay$  позначимо результат виконання цього перетворення:

$$Ay \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

звідки слідує, що рівність (1.4.8) визначає оператор

$$z = Ay, \quad (y, z \in W),$$

Оператор називають інтегральним оператором Фредгольма, за умови, що він переводить повний простір  $W$  у себе. Доведемо, що цей оператор є стискуючим. Дійсно, використовуючи (1.4.8) та (1.4.9) та при умові, що  $z_1 = Ay_1, z_2 = Ay_2, (y_1, y_2 \in W)$  теорему Лагранджа про скінченні простори і умову теореми про обмеженість частинної похідної  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - \right. \\ &\quad \left. y_2(t)| * |f'_y(t, \omega(t))| dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x \rho(y_1, y_2) L dt \right| \leq \rho(y_1, y_2) L |x - x_0| \leq \\ Lh\rho(y_1, y_2) &= \alpha\rho(y_1, y_2), \end{aligned} \tag{1.5.0}$$

де  $\omega \in [y_1, y_2]$ , і за умовою  $h < 1/L$  слідує, що число  $\alpha = Lh$  задовольняє нерівність  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

З (1.5.0) слідує, що

$$\rho(z_1, z_2) = \max |z_1(x) - z_2(x)| \leq \alpha\rho(y_1, y_2),$$

Тому, існує єдина функція (нерухома точка)  $y \in W$ , згідно з принципом стискуючих відображень у просторі  $W$ , для якої  $y = Ay$ , іншими словами, яка є розв'язком рівняння (1.4.7), а, отже, й розв'язком задачі Коші [5, с.89].

## 1.5. Крайова задача

### 1.5.1. Невироджений випадок. Функція Гріна

В теорії звичайних диференціальних рівнянь найпоширенішою задачею є задача Коші. За своєю суттю додаткові умови цієї задачі є початковими: в них представлені значення невідомої функції та її похідних (якщо порядок рівняння вищий за одиницю) при фіксованому значенні незалежної змінної. Ясно, що це не єдиний спосіб виділення того чи іншого частинного розв'язку з множини всіх функцій, які задовольняють диференціальне рівняння. Часто ми стикаємося з такою проблемою, як відшукування такого розв'язку, для якого виконувались так звані крайові умови: в кількох фіксованих точках проміжку значення шуканої функції та її похідних мають задовольняти певні співвідношення, який пробігає незалежна змінна.

Прикладом такої задачі є задача про формулу провислого каната із закріпленими кінцями, яка зводиться до відшукування такого розв'язку диференціального рівняння другого порядку, графік якого проходив би через дві наперед задані точки.

Крайовою задачею називають задачу суть, якої полягає у відшуванні частинного розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє задані крайові умови.

Проаналізуємо крайову задачу, що формулюється так: знайти на проміжку  $[0, l]$  розв'язок рівняння:

$$a_0(t)x'' + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = F(t) \quad (1.5.1)$$

який задовольняє умови на кінцях проміжку

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = \gamma_1, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = \gamma_2, \quad (1.5.2)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  - задані числа, причому  $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = 1, 2$ .

Умовами першого роду в нерівностях (1.5.1), називаються умови:  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ; якщо  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  – умовами другого роду, якщо ж  $\alpha_i, \beta_i \neq 0$  хоча б для одного  $i = 1, 2$  – умовами третього роду.

Крайова задача називається неоднорідною, якщо  $F(t) \equiv 0$  або  $|\gamma_1| + |\gamma_2| \equiv 0$ , на відміну від однорідної крайової задачі, яка характеризується тим, що  $F(t) \equiv 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ .

Своїм розв'язком кожна однорідна крайова задача має функцію  $x \equiv 0$  – так званий тривіальний розв'язок. Не виключаємо можливості, що інших розв'язків однорідна крайова задача може не мати. Ось приклад такої задачі :

$$\ddot{x} - x = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Дійсно, двопараметрична сім'я функцій  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$  є розв'язками рівняння  $\ddot{x} - x = 0$ . Крайові умови задовольняє та з них, для якої  $c_1 + c_2 = 0$  і  $c_1 e^t + c_2 e^{-t} = 0$ , тобто тотожний нуль  $x \equiv 0$ .

За певних умов однорідна крайова задача може мати безліч розв'язків. Свідченням цього є наступний приклад. Звідси випливає, що кожна функція з однопараметричної сім'ї  $x = c \sin t$  ( $c$  – будь – яке дійсне число) є розв'язком такої задачі:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad 0 < t < \pi,$$

$$x(0) = x(\pi) = 0.$$

Зауважимо, можна обмежитися вивченням неоднорідних крайових задач з однорідними крайовими умовами, не втративши загальності, тобто умовами (1.5.2), де  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . Завжди можна знайти двічі неперервну диференційовну функцію  $\varphi(t)$ , яка їх задовольняє у випадку неоднорідних крайових умов. Проте тоді, відносно нової функції  $y(t)$ , введеної рівністю

$$x = \varphi(t) + y,$$

отримаємо крайову задачу з однорідними крайовими умовами і відповідно зміненою правою частиною. У випадку крайових умов першого роду  $x(0) = \gamma_1$ ,  $x(l) = \gamma_2$  можна покласти

$$\varphi(t) = \frac{\gamma_1}{l}(l-t) + \frac{\gamma_2}{l}t.$$

Припустимо, що

$$a_i(t) \in C(|0, l| \rightarrow R), \quad i = 0, 1, 2; \quad a_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, l].$$

Тоді замінивши традиційним позначеннями, матимемо:

$$q(t) \rightarrow p(t), \quad r(t) \rightarrow -q(t), \quad q(t) \rightarrow f(t),$$

Задачу (1.5.1) та (1.5.2) подамо в самоспряженому вигляді

$$Lx := \frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = f(t), \quad t \in (0, l), \quad (1.5.3)$$

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0, \quad (1.5.4)$$

Ми можемо при нагоді скористатися важливою рівністю, записавши рівняння в самоспряженому вигляді:

$$\int_{t_1}^{t_2} [y(t)Lx(t) - x(t)Ly]dt = [(p(t)y(t)\dot{x}(t) - x(t)\dot{y}(t))] \Big|_{t_1}^{t_2}$$

яку називають формулою Гріна. Вона виконується для кожної пари функцій  $x(t), y(t) \in C^2 [0, l] \rightarrow R$  і будь-яких точок  $t_1, t_2 \in [0, l]$ . Дійсно,

$$[y(t)Lx(t) - x(t)Ly]dt = y(t) \frac{d}{dt}(p(t)y(t)\dot{x}(t) - x(t)) \frac{d}{dt}(p(t)\dot{y}(t))$$

або

$$[y(t)Lx(t) - x(t)Ly]dt = \frac{d}{dt}(y(t)p(t)\dot{x}(t) - x(t)p(t)\dot{y}(t))$$

Зінтегруємо цю рівність в межах від  $t_1$  до  $t_2$  і застосуємо формули Ньютона – Лейбніца до правої частини.



Формулу Гріна можна записати наступним чином:

$$\int_{l_1}^{l_2} |y(t)Lx(t) - y(t)Ly(t)|dt = [p(t)W(y, (t), x(t))]_l^{l_2} \quad l_1$$

де  $W(y(t), x(t))$  – вронскіан функцій  $y, (t), x(t)$ . Якщо останні задовольняють крайові умови (1.5.4), то, взявши до уваги припущення,  $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = 1, 2$  дістаємо:

$$W(y(0), x(0)) = W(y(l), x(l)) = 0$$

Тому на множині таких функцій оператор  $L$  має властивість симетричності.

$$\int_0^l [y(t)Lx(t) - x(t)Ly(t)] = 0 \quad (1.5.5)$$

[19, с.308]

Розглянемо невинроджений випадок, особливiстю, якого є те, що

$$\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = f(t), \quad t \in (0, l) \quad (1.5.1.1)$$

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0 \quad (1.5.1.2)$$

немає розв'язків, відмінних від тривіального.

Нетривіальні розв'язки лінійного однорідного рівняння (1.5.1.1), які задовольняють відповідно першу і другу крайові умови (1.5.1.2) позначимо через  $x_1(t), y_1(t)$ . Кожен із цих розв'язків існує й визначений із точністю до сталого множника. Розв'язок рівняння (1.5.1.1), який задовольняє початкові умови  $x_i(i-1)l = -\beta_i, \dot{x}_i(i-1)l = \alpha_i, i = 1, 2$ , можна подати у вигляді нетривіального розв'язку лінійного однорідного рівняння (1.5.1.1), які задовольняють відповідно першу і другу крайові умови (1.5.1.2)

Теорема: однорідна крайова задача (1.5.1.1), (1.5.1.2) має нетривіальний розв'язок тоді й лише тоді, коли розв'язки  $x_1(t), x_2(t)$  лінійно залежні.

Припустимо, що однорідна крайова задача має нетривіальний розв'язок  $\delta(t)$ . Вронскіан цих розв'язків дорівнює нулю, оскільки як  $\delta(t)$ , так і  $x_1(t)$  задовольняють першу крайову умову (1.5.1.2), а  $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ , а, отже, вони лінійно залежні. Аналогічно можна довести лінійну залежність розв'язків  $\delta(t)$  та  $x_1(t)$ . Згідно цих припущень слудує, що  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  також лінійно залежні.

Навпаки, припустимо, що зазначені розв'язки лінійно залежні. Тоді маємо  $x_1(t) = kx_2(t)$  для деякої сталої  $k \neq 0$ . Отримали, що, наприклад, функція  $\delta(t) := x_1(t)$  є розв'язком однорідної крайової задачі.

Теорема: якщо в невинродженому випадку існує розв'язок крайової задачі (1.5.1.1) та (1.5.1.2), то він єдиний.

Для доведення досить припустити, що нетривіальним розв'язком відповідної однорідної крайової задачі є різниця двох нетотожних розв'язків неоднорідної крайової задачі. Із використанням методу варіації довільних сталих побудуємо спочатку розв'язок крайової задачі (1.5.1.1) та (1.5.1.2). Для цього припущення знайдемо однопараметричну сім'ю розв'язків, які задовольняють першу крайову умову, потім однопараметричну сім'ю розв'язків, що задовольняють другу крайову умову, і, вкінці, виділимо спільний елемент цих двох множин розв'язків. За допомогою цього методу буде одержано важливу інформацію про структуру розв'язків невинродженої однорідної крайової задачі, втім указаний спосіб не є найраціональнішим. Як нам уже відомо, при застосуванні методу варіації довільних сталих виникають такі дві системи:

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t) = 0, \\ c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t) = \frac{f(t)}{p(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), \\ \dot{x} = \dot{c}_1(t)x_1(t) + c_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t). \end{cases} \quad (1.5.1.3)$$

( тут враховано, що коефіцієнтом біля  $\ddot{x}$  в операторі  $L \in p(t)$  а не 1).

Розв'яжемо першу з них відносно  $c_1(t)$  та  $c_2(t)$  за правилом Крамера.

Маємо:

$$\dot{c}_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t)/p(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}}{w(t)} = -\frac{x_2(t)f(t)}{w(t)p(t)} = -\frac{x_2(t)f(t)}{\omega},$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x}_1(t) & f(t)/p(t) \end{vmatrix}}{w(t)} = \frac{x_1(t)f(t)}{w(t)p(t)} = \frac{x_1(t)f(t)}{\omega}.$$

Де  $w(t) := W(x_1(t), x_2(t))$  – вронскіан,  $\omega := w(0)p(0)$  – причому враховано, що наслідком формули Остроградського – Ліувілля є рівності

$$w(t) = w(0)e^{\int_0^t \frac{p'(s)}{p(s)} ds} = w(0)e^{\ln\left(\frac{p(0)}{p(t)}\right)} = \frac{w(0)p(0)}{p(t)} = \frac{\omega}{p(t)} \quad (1.5.1.4)$$

Виберемо первісні функцій двома способами, оскільки маємо похідні цих функцій  $c_1(t)$  та  $c_2(t)$ , а саме, поклавши,

$$c_1(t) = c_1 - \int_0^t \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds, \quad c_2(t) = \int_0^t \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds,$$

де  $c_1$  – довільна стала, дістанемо сім'ю функцій.

$$\hat{x}(t) := x_1 c_1(t) - x_1 \int_0^t \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds + x_2(t) \int_0^t \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds,$$

Кожна з цих функцій є розв'язком рівняння (1.5.4) і задовольняє першу крайову умову. З огляду на другу систему в (1.5.1.4) достатньо зауважити, що  $\hat{x}(0) = c_1 x_1(0)$ ,  $\hat{\dot{x}}(0) = c_1 \dot{x}_1(0)$ . Аналогічно, дістаємо однопараметричну сім'ю функцій

$$\hat{x}(t) := x_2 c_2(t) - x_1 \int_0^t \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds + x_2(t) \int_0^t \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds,$$

Кожна з яких є розв'язком рівняння (1.5.4) і задовольняє другу крайову умову. Виберемо сталі  $c_1$  та  $c_2$  так, щоб  $\hat{x}(t) \equiv \tilde{x}(t)$ , тобто

$$c_1 x_1(t) - c_2 x_2(t) \equiv x_1(t) \int_0^l \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds - x_2(t) \int_0^l \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds.$$

Звідси,

$$c_1 = \int_0^l \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds, \quad c_2 = \int_0^l \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds.$$

Функція  $\hat{x}(t)$  при знайденому значення  $c_1$  і є розв'язком крайової задачі (1.5.4) та (1.5.5), який, подаємо у вигляді:

$$x(t) = \int_l^l \frac{x_1(s)x_2(s)}{\omega} f(s) ds + \int_0^l \frac{x_2(s)x_1(s)}{\omega} f(s) ds.$$

Нарешті, якщо ввести функцію

$$G(t, s) = \frac{1}{\omega} \begin{cases} x_1(t)x_2(s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ x_2(t)x_1(s), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (1.5.1.5)$$

то дістанемо

$$x(t) = \int_1^l G(t, s) f(s) ds. \quad (1.5.1.6)$$

Інтегральним перетворенням функції  $f(t)$ , причому, ядро цього інтегрального перетворення становить функція  $G(t, s)$  є розв'язок, записаний у вигляді (1.6.1). Причому, функція  $G(t, s)$  має такі характеристичні властивості:

- 1) функція  $G(t, s)$  неперервна в квадраті  $K := |0, l| * |0, l|$  має неперервні частинні похідні  $G_l'(t, s)$ ,  $G_l''(t, s)$  у кожному з трикутників
  - а.  $K = \{(t, s) \in K : t \leq s\}$ ,  $K_1 = \{(t, s) \in K : t \leq s\}$ .
- 2) для кожного фіксованого  $s \in [0, l]$  функція  $x_s(t) := G(t, s)$  задовольняє однорідне лінійне рівняння (1.5.5) при всіх  $t \in [0, l]$ ,  $t \neq s$ , а також крайові умови (1.5.2).
- 3) на діагоналі  $t = s$  квадрата  $K$  похідна  $G_l'(t, s)$  має розрив першого роду зі стрибком  $1/p(s)$ .

Перші дві властивості безпосередньо отримуємо з явного вигляду функції  $G(t, s)$ . Якщо звернути увагу на (1.5.1.4), то просто перевіряється й третя:

$$G_l'(s + 0, s) - G_l'(s - 0, s) = \frac{\dot{x}_2(s)x_1(s) - \dot{x}_1(s)x_2(s)}{\omega} = \frac{w(s)}{\omega} = \frac{1}{p(s)}.$$

Крім того, функція  $G(t, s)$  симетрична:

$$G(t, s) = G(s, t)$$

Функцією Гріна крайової задачі (1.5.1.1) та (1.5.1.2) називають функцію  $G(t, s)$ , яка має властивості 1 – 3. Дане означення приводить функції Гріна аксіоматично, безвідносно до її явного вигляду.

Теорема: нехай існує функція Гріна крайової задачі (1.5.1.1) та (1.5.1.2). Тоді, хоч би якою була функція  $f(t) \in C(|0, l| \rightarrow R)$ , ця задача має єдиний розв'язок і його можна записати у вигляді (1.5.1.6).

Доведемо, що функція  $x(t)$ , визначена формулою (1.5.1.6) дійсно є розв'язком крайової задачі (1.5.4) та (1.5.5). Згідно, властивостей маємо:

$$x(t) = \int_0^l G(t, s)f(s)ds + \int_1^l G(t, s)f(s)ds;$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= G(t, t)f(t) + \int_0^l G_l'(t, s)f(s)ds - G(t, t)f(t) + \int_1^l G_l'(t, s)f(s)ds = \\ &= \int_0^l G_l'(t, s)f(s)ds + \int_1^l G_l'(t, s)f(s)ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(p(t)x(t)) &= \frac{d}{dt} \left[ \int_0^l p(t)G_l(t,s)f(s)ds + \int_1^l p(t)G_l(t,s)f(s)ds \right] \\
&= p(t)G_l(t+0,t)f(t) \\
&+ \int_0^l \frac{d}{dt}(p(t)G_l(t,s))f(s)ds - p(t)G_l(t-0)f(t) \\
&+ \int_1^l \frac{d}{dt}(p(t)G_l(t,s))f(s)ds = f(t) + \int_0^l \frac{d}{dt}(p(t)G_l(t,s))f(s)ds \\
&+ \int_1^l \frac{d}{dt}(p(t)G_l(t,s))f(s)ds; \\
Lx(t) + f(t) + \int_0^l (LG(t,s))f(s)ds + \int_1^l (LG(t,s))f(s)ds &= f(t).
\end{aligned}$$

Доведемо тепер, що крайова задача (1.5.4) інших розв'язків немає. Справді, відповідна однорідна крайова задача мала б нетривіальний розв'язок  $\delta(t)$  якщо б це було не так. Застосуємо формулу Гріна до пари функцій  $x(t) := \delta(t)$  та  $y(t) := G(t,s)$  спочатку при  $t_1 = 0, t_2 = s - \epsilon$ , а потім при  $t_1 = s + \epsilon, t_2 = l$ ,  $\epsilon > 0$ , настільки мале, що  $s - \epsilon, s + \epsilon$  належать  $(0, l)$  та зафіксуємо довільне число  $s \in (0, l)$ . Перейшовши до границі при  $\epsilon \rightarrow 0$ , та врахувавши, що  $L\delta(t) = 0, LG(t,s) = 0, \frac{t \in (0,l)}{\{l\}}$ , і перейшовши до границі при  $\epsilon \rightarrow 0$ , маємо

$$[p(t)G(t,s)\delta(t) - \delta(t)G_l(t,s)] \Big|_{t=0}^{t=s-0} = 0,$$

$$[p(t)G(t,s)\delta(t) - \delta(t)G_l(t,s)] \Big|_l^{t=l} \Big|_{s=0} = 0,$$

Додавши ці рівності та, звернувши увагу, що  $G(s-0,s) = G(s+0,s) = G(s,s)$ , дістанемо:

$$\begin{aligned}
&p(s)|G(s,s)\delta(s)G_l(s-0)| - p(0)|G(0,s)\delta(0) - \delta(0)G_l(0,s)| \\
&+ p(l)|G(l,s)\delta(l) - \delta(l)G_l(l,s)| - p(s)|G(s,s)\delta(s) \\
&- \delta(s)G_l(s+0,s) = 0.
\end{aligned}$$

Легко зрозуміти, що другий і третій доданки зникають, оскільки  $\delta(t), G(t, s)$  задовольняють крайові умови, а тоді на підставі третьої властивості функції Гріна отримаємо:

$$p(s)\delta(s)|G_l'(s+0, s) - G_l'(s-0, s)| = 0 \rightarrow \delta(s) = 0.$$

Таким чином,  $\delta(t) \equiv 0$  і одержана суперечність підтверджує єдиність розв'язку крайової задачі (1.5.4) та (1.5.5).

Виведемо тепер алгоритм побудови функції Гріна в не виродженому випадку.

1) Знаходимо розв'язки  $x_1(t), x_2(t)$  таких двох задач Коші:

$$\begin{cases} Lx = 0 \\ x(0) = -\beta_1, \quad \dot{x}(0) = -\alpha_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lx = 0 \\ x(l) = -\beta_1, \quad \dot{x}(l) = -\alpha_1; \end{cases}$$

Ці розв'язки задовольняють першу й другу крайові умови (1.5.4) та (1.5.5) та є лінійно незалежні.

2) Функцію Гріна  $G(t, s)$  знайдемо у вигляді:

$$G(t, s) = \begin{cases} c_1(s)x_1(t), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ c_2(s)x_2(t), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Така функція автоматично задовольняє умову 2.

3) Визначаємо функції  $c_1(s)$  та  $c_2(s)$  для того, щоб забезпечити здійснення умов 1, 3, із системи

$$\begin{cases} c_2 x_2(s) = c_1 x_1(s) \\ c_2 \dot{x}_2(s) - c_1 \dot{x}_1(s) = 1/p(s) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} c_1 x_1(s) - c_2 x_2(s), \\ c_1 \dot{x}_1(s) - c_2 \dot{x}_2(s) = -1/p(s) \end{cases}$$

Тут перше рівняння потрібне для неперервності  $G(t, s)$  у  $K$ , а друге – забезпечує виконання умови 3. Підкресливши те, що визначником цієї системи є функція  $-w(s)$ , а також те, що виконується рівність (1.5.4), маємо:

$$c_1(s) = \frac{x_2(s)}{p(s)w(s)} = \frac{x_2(s)}{\omega}, \quad c_2(s) = \frac{x_1(s)}{p(s)w(s)} = \frac{x_1(s)}{\omega}$$

Отримуючи таким чином функцію Гріна вигляду (1.5.5) та (1.5.6) [19, с.311].

### 1.5.2. Вироджений випадок. Узагальнена функція Гріна

Розглянемо випадок, коли однорідна крайова задача (1.5.4) та (1.5.5) має хоча б один нетривіальний розв'язок. Позначимо його через  $\delta_1(t)$ . Можна зробити висновок на підставі тверджень, що сім'я функцій вигляду  $x = c\delta_1(t)$ ,  $c$  – довільна стала – це множина всіх розв'язків указаної задачі, які містяться в доведенні теореми 1. Тому, не обмежуючи загальності викладу, вважатимемо, що  $\delta_1(t)$  вибрано так, щоб справджувалась умова нормування:

$$\int_0^l -\frac{1}{2}(t)dt = 1,$$

Необхідну умову існування розв'язку неоднорідної крайової задачі формулює така теорема:

Теорема: якщо задача  $Lx := \frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = f(t)$ ,  $t \in (0, l)$  та  $\alpha_1x(0) + \beta_1\dot{x}(0) = 0$ ,  $\alpha_2x(l) + \beta_2\dot{x}(l) = 0$  має розв'язок  $x(t)$ , то функція  $f(t)$  ортогональна до нетривіального розв'язку  $\delta_1(t)$  відповідної однорідної крайової задачі (1.5.6) та (1.5.7), тобто

$$\int_0^l \delta_1(t)f(t)dt = 0, \tag{1.5.2.1}$$

Застосуємо формулу Гріна до пари функцій  $x(t)$  та  $\delta_1(t)$ , оскільки вони задовольняють крайові умови з (1.5.5) слідує, що

$$\int_0^l x(t)\delta_1(t)dt = 0, \tag{1.5.2.2}$$

Враховуючи, що  $f(t) = Lx(t)$  і  $L\delta_1(t) = 0$ , отримаємо (1.6.3).



Зауважимо, що при довільному ( $c \in R$ ) функція  $x = x(t) + c\delta_1(t)$  теж є розв'язком задачі (1.5.3) та (1.5.4). Аби уникнути такої неоднозначності, умови (1.5.4) слід доповнити ще однією. Вимога ортогональності - є природнішою додатковою умовою

$$\int_0^l x(t)\delta_1(t)dt = 0, \quad (1.5.2.3)$$

Теорема:

Якщо задача (1.5.3) та (1.5.4), та (1.5.1.6) має розв'язок  $x(t)$ , то він єдиний. Справді, розв'язком вигляду  $c\delta_1(t)$  відповідної однорідної задачі є різниця двох розв'язків задачі (1.5.3) та (1.5.4), та (1.5.1.6). З умови (1.5.1.6) та нормованості функції  $\delta_1(t)$  одразу слідує, що

$$\int_0^l c\delta_1(t)\delta_1(t)dt = c = 0,$$

За допомогою методу варіації довільних сталих розв'яжемо вироджену крайову задачу, припускаючи, що умова ортогональності (1.5.1.4) справджується. Виберемо лінійно незалежний з  $\delta_1(t)$  розв'язок  $\delta_2(t)$  однорідного рівняння (1.5.5) так, щоб виконувалась рівність

$$p(0)W(\delta_1(0), \delta_2(0)) = 1$$

Цим ми дещо полегшимо формули, які буде одержано нижче.

Знайдемо розв'язок рівняння (1.5.3) у вигляді

$$x(t) = c_1(t)\delta_1(t) + c_2(t)\delta_2(t), \quad (1.5.2.4)$$

Отримуємо рівняння

$$\dot{c}_1(t) = -\delta_2(t)f(t), \quad \dot{c}_2(t) = -\delta_1(t)f(t) \quad (1.5.2.5)$$

Згідно цього

$$\dot{x}(t) = c_1(t)\dot{\delta}_1(t) + c_2(t)\dot{\delta}_2(t)$$

Тому, необхідно вимагати виконання рівності  $c_2(0) = 0$  аби розв'язок  $x(t)$  задовольняв крайову умову в точці  $t = 0$ . Звідси  $c_2(t) = \int_0^l \delta_1(s)f(s)ds$  і з урахуванням (1.6.4)  $c_2(l) = 0$ . Остання рівність забезпечить справдження крайової умови в правому кінці проміжку  $[0, l]$ .

Загальний розв'язок першого з рівнянь (1.5.2.5) запишемоу вигляді

$$c_1(t) = c_1 - \int_0^l \delta_1(s)f(s)ds$$

де  $c_1$  – довільна стала.

Підставивши знайдені функції  $c_1(t)$  та  $c_2(t)$  в (1.6.6) отримаємо однопараметричну сім'ю функцій

$$x(t) = c_1 \delta_1(t) + \delta_1(t) \int_0^l \delta_2(s)f(s)ds + \delta_2(t) \int_0^l \delta_1(s)f(s)ds, \quad (1.5.2.8)$$

Кожна з яких є розв'язком крайової задачі (1.5.3) та (1.5.4). Умову ортогональності (1.5.2.3) завжди можна задовольнити, відповідним чином вибравши довільну сталу  $c_1$ .

Підсумком наведених вище міркувань є така теорема:

Теорема: функція  $f(t)$  ортогональна до кожного розв'язку відповідної однорідної крайової задачі тоді й лише тоді, коли існує розв'язок крайової задачі (1.5.3) та (1.5.4). [17, с.318]

Тепер представимо розв'язок (1.5.2.5) у вигляді інтегрального перетворення

$$x(t) = \int_0^l G(t, s)f(s)ds.$$

При кожному  $s \in [0, l]$  функція  $G(t, s)$  задовольняє крайові умови та є ортогональною до  $\delta_1(t)$ .

Насамперед, ввівши функцію

$$\Gamma(f, s) = \begin{cases} \delta_1(t)\delta_2(t), & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ \delta_2(t)\delta_1(t), & 0 \leq s \leq t \leq l. \end{cases}$$

Аналогічно з (1.5.1.7) подамо (1.6.8) у вигляді

$$x(t) = c_1 \delta_1(t) + \int_0^l \Gamma(f, s) f(s) ds, \quad (1.5.2.9)$$

Згідно з

$$\Gamma(0, s) = \delta_1(0)\delta_2(s), \quad \Gamma_l(0, s) = \delta_1(0)\delta_2(s),$$

$$\Gamma(l, s) = \delta_1(l)\delta_2(s), \quad \Gamma_l(l, s) = \delta_1(l)\delta_2(s).$$

то  $\Gamma(l, s)$  лише в лівому кінці проміжку  $[0, l]$  задовольняє крайову умову, адже розв'язок  $\delta_2(s)$  не задовольняє жодної крайової умови (1.5.8). Отже, доведеться відповідним чином виправити функцію  $\Gamma(l, s)$ . Зауважимо, якщо зробити заміну  $\Gamma(t, s) \rightarrow \Gamma(l, s) - \mu(t)\delta_1(s) - \delta_1(t)\delta(s) =: \Gamma(t, s)$ , де  $\mu(t), \delta(s) \in |0, l| \rightarrow R$  довільні функції у формулі (1.5.2.9), то вона й надалі буде розв'язком рівняння (1.5.2.4): тому, що  $f(t)$  ортогональна до  $\delta_1(l)$ . Зрозуміло, що перетворена функція  $\Gamma(t, s)$  задовольнятиме обидві крайові умови, якщо функцію  $\mu(t)$  вибрати так, щоб при деякому  $k \in R$  виконувалися рівності

$$\mu(0) = k\delta_1(0), \quad \dot{\mu}(0) = k\dot{\delta}_1(0), \quad \mu(l) = \delta_2(l), \quad \dot{\mu}(l) = \dot{\delta}_2(l), \quad (1.5.3.0)$$

Найзручнішим є такий вибір:

$$\mu(t) := \int_0^l \Gamma(f, s) \delta_1(s) ds,$$

Легко перевірити, що ця функція є не лише розв'язком неоднорідного рівняння  $Lx = \delta_1(t)$ , ще й задовольняє умови (1.5.3.0). Якщо додатково вимагати аби розв'язок  $\delta_2(t)$  був ортогональним до  $\delta_1(t)$  на  $[0, l]$ , то  $k = 0$ .

Тепер покладемо

$$G(t, s) = \Gamma(t, s) - \left[ \int_0^l \Gamma(t, s) \delta_1(s) ds \right] \delta_1(s) - \delta_1(t) \delta(s),$$

Щоб  $G(t, s)$  була ортогональною до  $\delta_1(t)$  підберемо потрібну нам функцію  $\delta(s)$ . Для цього праву частину останньої рівності домножимо на  $\delta_1(t)$ , за змінною  $t$  у межах від 0 до  $l$  отриманий добуток зінтегруємо і результат прирівняємо до нуля. З одержаного рівняння випливає:

$$\delta(s) = \int_0^l \delta_1(t) \Gamma(t, s) dt - \left[ \int_0^l \int_0^l \Gamma(t, s) \delta_1(t) \delta_1(s) ds dt \right] \delta_1(s),$$

Вкінці отримаємо:

$$G(t, s) = \Gamma(t, s) - \left[ \int_0^l \Gamma(t, s) \delta_1(s) ds \right] \delta_1(s) - \delta_1(t) \int_0^l \delta_1(t) \Gamma(t, s) dt + \delta_1(t) \left[ \int_0^l \int_0^l \Gamma(t, s) \delta_1(t) \delta_1(s) ds dt \right] \delta_1(s),$$

Функцію  $G(t, s)$  називають узагальненою функцією Гріна крайової задачі (1.5.3) та (1.5.4), якщо вона задовольняє такі умови:

- 1) функція  $G(t, s)$  неперервна в квадраті  $K := [0, l] * [0, l]$ , має неперервні частинні похідні  $G_l'(t, s)$ ,  $G_l''(t, s)$  у кожному з трикутників  $K = \{(t, s) \in K : t \leq s\}$ ,  $K_1 = \{(t, s) \in K : t \leq s\}$ .
- 2) для кожного фіксованого  $s \in [0, l]$  функція  $x_s(t) := G(t, s)$  задовольняє однорідне лінійне рівняння (1.5.5) при всіх  $t \in [0, l]$ ,  $t \neq s$ , а також крайові умови (1.5.2).
- 3) на діагоналі  $t = s$  квадрата  $K$  похідна  $G_l'(t, s)$  має розрив першого роду зі стрибком  $1/p(s)$ .
- 4) для кожного фіксованого  $s \in [0, l]$  функція  $G(t, s)$  ортогональна до функції  $\delta_1(t)$ :

$$\int_0^l G(t, s) \delta_1(s) ds = 0.$$

Сформулюємо алгоритм відшукування узагальненої функції Гріна.

1) знаходимо таку фундаментальну систему  $\delta_1(t), \delta_2(t)$  лінійного однорідного рівняння (1.5.1.1), щоб розв'язок  $\delta_1(t)$  задовольняв умови (1.5.1.2).

2) знаходимо будь-який розв'язок  $g(t, s)$  неоднорідного рівняння

$$Lx = -\delta_1(t)\delta_1(s).$$

3) узагальнену функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(t, s) = g(t, s) + c_3(s)\delta_1(t) + c_4(s)\delta_2(t) + \begin{cases} c_1(s)\delta_1(t), & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ c_2(s)\delta_2(t), & 0 \leq s \leq t \leq l. \end{cases}$$

Функції  $c_i(s), i = 1, 2$  вибираємо так, щоб останній доданок задовольняв пункт 1 та 3 означення узагальненої функції Гріна; функцію  $c_4(s)$  – так, щоб  $G(t, s)$  задовольняла крайові умови задачі; нарешті, вибором функції  $c_3(s)$  забезпечуємо виконання умови ортогональності 4.

Проаналізувавши вигляд правої частини формули (1.5.3.0), отримаємо висновок, що  $c_i(s), i = 1, \dots, 4$  з потрібними властивостями існують. [19, с.318]

### 1.5.3. Крайова задача на власні значення

У даному підрозділі ми розглянемо крайову задачу на власні значення для лінійного диференціального оператора другого порядку. Значення її заключається в тому, щоб відшукати значення параметра  $\delta$ , при яких існують нетривіальні розв'язки крайової задачі

$$Lx + \delta p(t)x = 0, \quad t \in (0, l); \quad (1.5.3.1)$$

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0. \quad (1.5.3.2)$$

Тут

$$Lx := \frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x,$$

$p(t) \in C^1([0, l]) \rightarrow R$  та  $q(t) \in C([0, l]) \rightarrow R$  – додатні функції;

$q(t) \in C([0, l]) \rightarrow R$ ;  $\alpha_i, \beta_i$  - задані числа,  $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = 1, 2$ ;  $\delta$  - так званий спектральний параметр.

Підкреслимо, що задача вигляду (1.5.3.1) носить назву також задача Штурма – Ліувілля. Власним значенням називається кожне значення параметра  $\delta$ , при якому вона має нетривіальний розв'язок, а сама власна функція - нетривіальним розв'язком.

Відшукаємо власні функції й власні значення крайової задачі

$$\ddot{x} + \delta x, \quad t \in (0, l); \quad (1.5.3.3)$$

$$\dot{x}(0) = x(l) = 0.$$

Для початку представимо, що дана задача недодатних власних значень немає. Якщо загальний розв'язок рівняння (1.5.3.3) має вигляд  $x = c_1 + c_2 t$ , то  $\delta = 0$  і лише тривіальна функція  $x = 0$  задовольняє крайові умови, тобто  $\delta = 0$  не є власним значенням. Загальним розв'язком рівняння (1.5.3.3) є сім'я функцій  $x = c_1 e^{\sqrt{-\delta}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\delta}t}$  якщо  $\delta < 0$ , то з. Крайові умови вводять такі обмеження на параметр  $\delta$  та сталі  $c_1$  та  $c_2$ :

$$\begin{cases} \sqrt{-\delta}c_1 - \sqrt{-\delta}c_2 = 0, \\ e^{\sqrt{-\delta}t}c_1 + e^{-\sqrt{-\delta}t}c_2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник матриці цієї системи не дорівнює нулю при кожному  $\delta < 0$ , то знову  $c_1 = c_2 = 0$ .

Розглянемо, коли  $\delta < 0$ . В цьому випадку розв'язки рівняння (1.5.3.3) утворюють сім'ю функцій

$$x = c_1 \cos \sqrt{\delta}t + c_2 \sin \sqrt{\delta}t.$$

Підставивши цей вираз у крайові умови, маємо  $c_2 = 0$  та  $c_1 \cos \sqrt{\delta}t = 0$ . Очевидно, що крайова задача має нетривіальні розв'язки лише для тих значень

спектрального параметра, які задовольняють рівняння  $\cos \sqrt{\delta t} = 0$ . Звідси й шукаємо власні числа

$$\delta_k = \left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

І відповідні власні функції

$$\varphi_k(t) = \cos\left[\left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi t}{l}\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Власні функції задачі Штурма – Ліувілля володіють цікавими і важливими властивостями, завдяки яким їх активно використовують. Розв'язуючи крайові задачі як для рівнянь математичної фізики і для звичайних диференціальних рівнянь, дістанемо велику кількість застосувань при вивченні багатьох інших математичних проблем.

Не зупиняючись на детальних обґрунтуваннях, укажемо деякі властивості власних чисел і власних функцій задачі (1.5.3.1) та (1.5.3.2).

- 1) Існує послідовність відповідних їм власних функцій  $\{\varphi_k(t)\}_{k=1,2,\dots}$  задачі (1.5.3.1) та (1.5.3.2) і нескінченна послідовність  $\{\delta_k\}_{k=1,2,\dots}$  власних чисел.
- 2) Власні значення крайової задачі (1.5.3.1) та (1.5.3.2) прості тому, що кожному власному значенню відповідає лише одна власна функція з точністю до сталого множника.
- 3) Всі власні значення крайової задачі (1.5.3.1) та (1.5.3.2) додатні, якщо  $q(t) \geq 0$  для всіх  $t \in |0, l|$  і  $\alpha_1 = \beta_1$  (крайові умови першого роду).
- 4) Власні функції  $\varphi_m(t)$ ,  $\varphi_n(t)$  крайової задачі (1.5.3.1) та (1.5.3.2) які відповідають різним власним значенням  $\delta_m$ ,  $\delta_n$  попарно ортогональні з вагою  $\rho(t)$ , тобто

$$\langle \varphi_m(t), \varphi_n(t) \rangle = 0.$$

[19,с.325]

## Розділ 2. Однорідне рівняння Дуффінга та умовні існування періодичного розв'язку

### 2.1. Однорідне рівняння Дуффінга

Механічні системи з проклацуванням можна описати за допомогою однорідного диференціального рівняння Дуффінга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} - bx + cx^3 = F \cos(\omega t), \quad (2.1.1)$$

де  $x(t)$  – переміщення в часі,  $ax'$  – лінійне демпфування,  $F \cos(\omega t)$  – зовнішнє збурення системи,  $bx + cx^3$  – кубічна відновлююча сила.

В даному розділі досліджено розв'язки рівняння (2.1.1) в залежності від початкових умов.

Розглянемо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} - bx + cx^3 = F \cos(\omega t),$$

Шукати будемо  $2\pi$  періодичний розв'язок даного рівняння при початкових умовах  $x(0) = F$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ , де  $F$  – амплітуда коливань.

Умова  $\dot{x}(0) = 0$  вказує на парний характер розв'язку рівняння. виходячи з того, що парні і непарні розв'язки будуть розрізнятися лише фазовим зсувом то розв'язок рівняння (2.1.1) будемо у вигляді ряду Фур'є за косинусами непарних гармонік:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A_n \cos((2n+1)t), \quad (2.1.2)$$

Цим задовольняється початкова умова  $\dot{x}(0) = 0$  і умова  $2\pi$  – періодичності розв'язку. Підстановка в (2.1.1) дає систему з  $N+1$  алгебраїчного рівняння відносно  $N+1$  коефіцієнта Фур'є.



$$\sum_{n=0}^N (-A_n \cos((2n+1)t) 2n+1^2) + a \sum_{n=0}^N (-A_n \sin((2n+1)t) 2n+1^2) + a + b \sum_{n=0}^N (A_n \cos((2n+1)t) c) \left( \sum_{n=0}^N (A_n \sin(2n+1)t) \right)^3 = 0, \quad (2.1.3)$$

Врахування початкової умови  $x(0) = F$  дозволяє одержати додаткове рівняння для коефіцієнтів Фур'є  $A_0 = F - \sum_{n=0}^N A_n$ . Тоді систему (2.1.3) можна доповнити ще і додатковою змінною – одним з коефіцієнтів  $a, b, c$ . Останнє зауваження дозволяє визначити коефіцієнти рівняння Дуффінга, які забезпечать циклічний характер його розв'язку. Пояснимо це на прикладі вибору значення параметра  $c$ . Для цього в інтерактивному режимі обираються величини  $a, b, c$  так, щоб фазова траєкторія « нагадувала » шукану циклічну. Обираючи за початкове деяке значення  $c = c_0$ , розв'язуємо систему рівнянь (2.1.3) [6, с.8].

## 2.2. Точні розв'язки рівняння Дуффінга. Еліптичні функції Якобі

Для варіанту м'якої нелінійності пружних властивостей канату ( $\varepsilon < 0$ ) розглянемо рівняння Дуффінга:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 * x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (2.2.1)$$

має періодичний розв'язок в інтервалі енергій  $0 < E < E_0 \equiv \omega_0^2 / (4|\varepsilon|)$ . У граничному випадку  $E \rightarrow 0$  осцилятор стає гармонічним і розв'язки рівняння (2.2.1) перетворюються у тригонометричні функції. У протилежному випадку  $E = E_0$  розв'язки слід представляти через гіперболічний тангенс:

$$x(t) \sqrt{\frac{\alpha}{|\varepsilon|}} * th \left( \sqrt{\alpha} * \frac{t}{2} \right),$$

Таким чином, загальний розв'язок (2.2.1) слід знайти такий, що буде узагальнювати тригонометричні та гіперболічні функції, включаючи їх в у

якості граничних випадків. Використаємо інтеграл руху ( енергію ) й запишемо у неявному вигляді загальний розв'язок рівняння (2.2.1):

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega_0^2 * x^2 - \varepsilon - x^4/2}} = t - t_0, \quad (2.2.3)$$

У такому записі різні розв'язки параметризуються значення повної енергії  $E$ . Однак зручно перейти до іншого ( безрозмірного) параметра, вводячи заміну  $k = \sqrt{E_0/E} - \sqrt{\frac{E_0}{E} - 1}$ , при заміні енергії від  $E = 0$ , до  $E = E_0$  параметр  $k$  змінюється від 0 до 1. Тоді вираз (2.2.3) можна переписати в більш компактному вигляді:

$$\int_0^{x/x_0} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2) * (1 - k^2 - z^2)}} = \frac{\omega_0(t - t_0)}{1 + k^2}, \quad (2.2.4)$$

де  $x_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{|\varepsilon|}} * \frac{\sqrt{2} * k}{\sqrt{1 + k^2}}$  відповідає амплітуді коливань маятника Дюффінга, а інтеграл у (2.2.4) є еліптичним інтегралом першого роду. Тому загальний розв'язок (2.2.1) має наступний неявний запис:

$$F\left(\arcsin \frac{x}{x_0}, k\right) = \frac{\omega_0(t - t_0)}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad (2.2.5)$$

де  $F(\varphi, k)$  – стандартне позначення інтегралу (2.2.4) ( еліптичного інтегралу першого роду з модулем  $k$ ).

Значення  $x = x_0$ , відповідає зміщенню на максимальну величину, що дорівнює амплітуді, яка реалізується через чверть періоду коливань осцилятора. При цьому аргумент еліптичного інтегралу (2.2.5) перетворюється в  $\pi/2$ , а сам інтеграл – у повний еліптичний інтеграл першого роду.

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k), \quad (2.2.6)$$

Вираз (2.2.6) задає розв'язок рівняння Дюффінга у неявному вигляді через еліптичний інтеграл першого роду. Для запису розв'язку у явному вигляді

введемо функцію, обернену еліптичному інтегралу. Якщо  $F(\varphi, k) = u(\varphi)$ , то обернена функція  $\varphi(u) = \text{am}(u, k)$  представляє собою так звану еліптичну амплітуду. Але зазвичай, використовують не функцію амплітуди, а тригонометричні функції цієї величини. Зокрема, синус амплітуди задає еліптичний синус або синус Якобі:  $\text{sn}(u, k) \equiv \sin \text{am}(u, k)$ . Через цю функцію розв'язок рівняння Дуффінга записується просто:

$$x = \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} * \frac{\omega_0 * k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad (2.2.7)$$

Оскільки період еліптичного синусу дорівнює  $4K(k)$ , частота коливань осцилятора виражається через модуль  $k$  наступним чином:

$$\omega = \frac{\omega_0 \frac{\pi}{2}}{[K(k) * \sqrt{1 + k^2}]}, \quad (2.2.8)$$

Найбільш важливою фізичною характеристикою ангармонічного осцилятора є залежність частоти від амплітуди коливань. Уданому випадку амплітуда задається виразом:

$$a = \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} * \frac{\omega_0 * k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad (2.2.9)$$

котрий разом з формулою (2.2.8) у неявному виді визначає залежність частоти від амплітуди. Для коливань малої амплітуди ( котрим відповідають малі коливання й значення параметру  $k$ ) ця залежність записується у явному вигляді:

$$\omega^2 = \omega_0^2 * \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{|\varepsilon| * a^2}{\omega_0^2} \right\}, \quad (2.2.10)$$

Таким чином, частота коливань знижується із зростанням їх амплітуди (м'яка нелінійність).

Якщо використати, вираз для повної енергії руху маятника  $E$ , то:

$$E = \frac{\omega_0^4 * k^2}{|\varepsilon| * (1 + k^2)^2}. \quad (2.2.11)$$

З формул (2.2.9) та (2.2.11) легко знайти асимптотики залежності  $E = E(\omega)$  при великих і малих амплітудах коливань:

$$\begin{cases} E \approx \frac{4\omega_0^4}{3|\varepsilon|} * \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right), & \omega_0 - \omega \ll \omega_0, \\ E \approx E_0(1 * \exp\{-\frac{2\omega_0}{\omega}\}), \omega \ll \omega_0. \end{cases}$$

[10, с.9]

### 2.3. Однорідне рівняння Дуффінга та розв'язування його методом гармонічного балансу

Розглянемо рівняння Дуффінга

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \gamma \varphi^3 \quad (2.3.1)$$

та розв'яжемо його методом гармонічного балансу

$$\varphi = A \cos(\omega t - \varphi) = A \cos \varphi. \quad (2.3.2)$$

Підставимо (2.3.2) у вираз (2.3.1), отримаємо:

$$-A\omega^2 \cos \varphi + \omega_0^2 A \cos \varphi - \gamma A^3 \cos 3\varphi = 0, \quad (2.3.3)$$

Враховуючи, що  $\cos^3 \varphi = \frac{1}{4}(3 \cos \varphi + \cos 3\varphi)$ , одержимо, що:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \frac{3}{4} \gamma A^3 \cos \varphi - \frac{1}{4} A^3 \gamma \cos \varphi = 0. \quad (2.3.4)$$

Прирівнявши доданки при  $\cos \varphi$  до нуля, отримаємо:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \frac{3}{4} \gamma A^3 = 0,$$

або

$$\frac{3}{4}\gamma A^2 = \omega_0^2 - \omega^2, \quad \Rightarrow \omega_0^2 = \omega^2 - \frac{3}{4}\gamma A^2, \quad (2.3.5)$$

Таким чином,  $k = 1$  ( степінь при коефіцієнті  $A$  ).

Розв'язок рівняння  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \gamma \varphi^3 = P \cos \omega t$ , потрібно шукати у вигляді розкладу за степенями параметра  $\varepsilon^{1/3}$ .

$$\varphi = \varepsilon^{\frac{1}{3}} \varphi_1 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \varphi_2 + \varepsilon \varphi_3 + \varepsilon^{\frac{4}{3}} \varphi_4 + \dots +. \quad (2.3.6)$$

Врахуємо розлад частот  $\alpha = \omega_0^2 - \omega^2$ , вважаючи його пропорційним параметру  $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ . Тоді

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon^{\frac{2}{3}}, \quad (2.3.7)$$

Підставимо (2.3.6) , (2.3.7) у (2.3.2) та, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ , дістанемо рекурентну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_1 + \omega^2 \varphi_1 = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega^2 \varphi_2 = 0 \\ \ddot{\varphi}_3 + \omega^2 \varphi_3 = \alpha \varphi + \varphi_1^3 + P \cos \omega t. \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (2.3.8)$$

З перших двох рівнянь знаходимо:

$$\varphi_1 = A \cos(\omega t - \theta) = A \cos \varphi, \quad (2.3.9)$$

$$\omega = \omega_0, \quad \varphi_2 = 0, \quad (2.4.0)$$

Підставимо (2.3.7), (2.3.9), (2.4.0) в третє рівняння системи (2.3.8), матимемо:

$$\ddot{\varphi}_3 + \omega^2 \varphi_3 = (\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \varphi + \gamma A^3 \cos^3 \varphi + P \cos \omega t, \quad (2.4.1)$$

Замінімо нелінійний член сумою Фур'є, отримаємо:

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi),$$

Умова періодичності для  $\varphi_3$ :

$$\ddot{\varphi}_3 + \omega^2 \varphi_3 = (\omega_0^2 - \omega^2)A \cos \varphi + P \cos \omega t + \frac{1}{4}A^3 \gamma (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi),$$

$$\cos(\omega t - \theta) = \cos \varphi \Rightarrow \cos \omega t = \cos(\varphi + \theta) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \theta.$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_3 + \omega^2 \varphi_3 &= \\ &= (\omega_0^2 - \omega^2)A \cos \varphi + P(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \theta) \\ &+ \frac{1}{4}A^3 \gamma (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi), \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Тоді

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + P \cos \theta + \frac{3}{4}A^3 \gamma = 0, \quad (2.4.3)$$

$$-P \sin \theta = 0, \quad (2.4.4)$$

З рівняння (2.4.4) слідує, що  $\theta = 0$ .

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + P + \frac{3}{4}A^3 \gamma = 0, \quad (2.4.5)$$

При  $\omega_0^2 = \omega^2$  знаходимо значення

$$A = \sqrt[3]{\frac{4P}{3\gamma}}, \quad (2.4.6)$$

або з урахуванням, що  $P = \frac{B\omega^2}{l}$ ,  $\gamma = \frac{\omega_0^2}{3!}$  матимемо  $\Rightarrow$

$$A = \sqrt[3]{\frac{8B\omega^2}{l \omega_0^2}} [3, \text{с. 25}].$$

Приклад 2. Знайти гармонічний коефіцієнт передачі нелінійного елемента, статистична характеристика якого представляє релейну характеристику із зоною нечутливості  $W_{HE}(A) = ?$

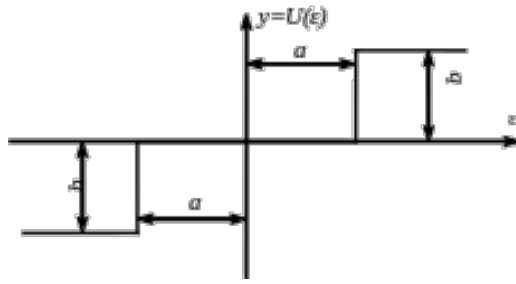


Рис. 2.1. Релейна характеристика із зоною нечутливості

Для початку будемо графік сигналу на виході  $y = U(\varepsilon)$  гармонічного вхідного сигналу  $x = A \sin \omega t$   $A > a$ . В нашому випадку статична характеристика нелінійного елемента являється однозначною функцією, тому комплексний коефіцієнт передачі має тільки дійсну частину.

$$W_{HE}(A) = q_1 + jq_2. \quad (2.4.7)$$

Використовуючи формулу коефіцієнта ряду Фур'є і криві на малюнку 2 визначимо амплітуду синусоїдної складової першої гармоніки на виході нелінійного елемента  $A_1$ .

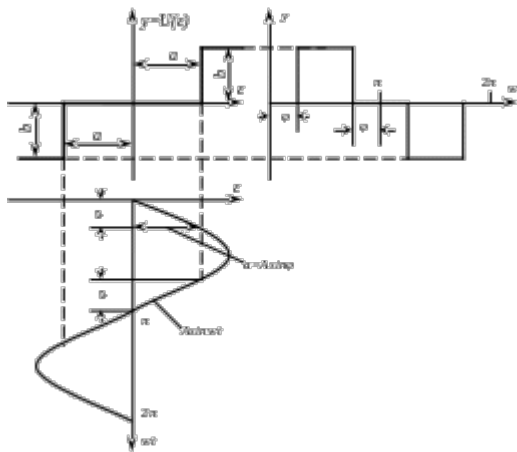


Рис. 2.2.

$$\begin{aligned} q_1(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\pi/2} b \sin \omega t d\omega t = \\ &= \frac{4b}{\pi A} \cos \varphi; \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\sin \varphi = \frac{a}{A}; \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}, \quad (2.4.9)$$

Вираз (2.4.7) для комплексного коефіцієнта передачі з врахуванням рівностей (2.4.8) та (2.4.9) має вигляд:

$$W_{HE}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}.$$

[17, с.2]

## 2.4. Метод розкладання у ряд за малим параметром

Покажемо, на прикладі рівняння Дуффінга як використовується цей найпростіший метод з великої кількості різних наближених аналітичних методів розв'язання нелінійних рівнянь. Основною перевагою цього методу є його простота, і саме вона є джерелом його недоліків, основним з яких є проблема збіжності рядів, що описують коливання нелінійних осциляторів. Часто при застосуванні цього методу в здобутому ряді виникають секулярні доданки, що призводить до обмеження часового проміжку, в якому використання цього наближеного розв'язку є справедливим. Припустимо, що зміна певного параметру нелінійного осцилятора, нехай для прикладу це буде електричний струм, в часі описується рівнянням Дуффінга в розмірних змінних:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad (2.4.1)$$

де  $t$  - час, вимірюється в секундах,  $\omega^2$  - коефіцієнт при лінійному доданку в ряді, що моделює ефективну силу, дія якої призводить до осциляцій, вимірюється у  $c^2 A^2$ ,  $\alpha$  - коефіцієнт при кубічному доданку цього ряду, вимірюється у нашому випадку в  $\frac{1}{c^2 A^2}$ .



Операцію обезрозмірювання рівняння потрібно провести першою. За її допомогою ми визначимо характерні масштаби залежних та незалежних змінних, ввівши в розгляд малий параметр задачі. Числові розрахунки без цієї операції стають неможливими. Вводимо безрозмірні змінні:  $\hat{x} = \frac{x}{X}$ ;  $\hat{t} = \frac{t}{T}$ ; у цих змінних рівняння Дуффінга має такий вигляд:

$$\frac{d^2 \hat{x}}{d\hat{t}^2} + \omega^2 T^2 \hat{x} + \alpha T^2 X^2 \hat{x}^3 = 0, \quad (2.4.2)$$

Виберемо  $T$  так, щоб  $\omega^2 T^2 = 1$ , нехай  $\varepsilon = \alpha T^2 X^2 = \alpha X^2 \omega^{-2}$ . Надалі не будемо застосовувати значок «капельшок» над змінними заради простоти запису. Тоді з (2.4.2) отримаємо:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (2.4.3)$$

Степінь нелінійності даної коливальної системи характеризує параметр  $\varepsilon$  - це безрозмірна величина, нехай  $\varepsilon \ll 1$ . Тоді припустимо, що зміна  $x$  за характерний проміжок часу  $T$ , що обумовлена нелінійністю системи, є малою. Прикладом рівняння, що описує коливання консервативної системи є рівняння (2.4.3), яке за формою коливань є близьким до коливань лінійної системи. Другим кроком аналізу рівняння (2.4.1) є визначення з форми, у якій буде шукатися його розв'язок. Згідно обраного методу слід шукати розв'язок у вигляді ряду за малим параметром  $\varepsilon$ :

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Потреба визначитися з початковими умовами є третім моментом, на який слід звернути увагу. Припустимо, що початкові умови мають вигляд:

$$x_0(t=0) = \frac{x_0}{X}, \quad \frac{dx_0(t=0)}{dt} = \frac{v_0}{\left(\frac{X}{T}\right)}, \quad (2.4.4)$$

де  $i > 1$ . Важливою обставиною при цьому є те, що, розв'язки, які буде здобуто у першому, другому і так далі наближеннях, повинні задовольняти

тривіальним початковим умовам. У нульовому наближенні запишемо рівняння (2.4.3) та його розв'язок, який є вже добре відомим:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0, \quad x_0 = A_0 \cos(t + \beta_0), \quad (2.4.5)$$

де  $A_0, \beta_0$  – визначаються з початкових умов. У першому наближенні рівняння (2.4.3) набуває вигляду:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 + x_0^3 = 0, \quad (2.4.6)$$

а після підстановки до (2.4.6) розв'язку, здобутого у нульовому наближенні, можна записати:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -A_0^3 \cos^3(t + \beta_0), \quad (2.4.7)$$

Звідси з використанням тригонометричних перетворень можна рівняння (2.4.7) записати у наступному вигляді:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -\frac{3}{4} A_0^3 \cos^3(t + \beta_0) - \frac{A_0^3}{4} \cos(3t + 3\beta_0), \quad (2.4.8)$$

З теорії звичайних диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв'язок такого типу диференціальних рівнянь складається з розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Внеском розв'язку однорідного рівняння (2.4.8) при виконанні початкових умов (2.4.4) є просто нуль (тривіальний розв'язок). Нетривіальний внесок до загального розв'язку складає частинний розв'язок неоднорідного рівняння, запишемо його у наступній формі:

$$x_{1\text{час}} = -\frac{3}{8} A_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32} A_0^3 \cos(3t + 3\beta_0), \quad (2.4.9)$$

Таким чином, загальний розв'язок з точністю до  $O(\varepsilon^2)$  можна записатися в такий спосіб:

$$x(t) = A_0 \cos(t + \beta_0) - \frac{3}{8} A_0^3 \varepsilon t \sin(t + \beta_0) + \frac{\varepsilon}{32} A_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) + O(\varepsilon^2), \quad (2.5.0)$$

Перша поправка  $\varepsilon x_1(t)$  є малою величиною порівняно з величиною тієї складової ряду, що здобута у нульовому наближенні, за умов справедливості нерівності  $\varepsilon t < 1$ , згідно аналізу виразу (2.5.0). Але вже коли  $\varepsilon t \approx 1$ , то вона за величиною стає такою, як і величину головного доданку, здобутого у нульовому наближенні. Коли має місце нерівність  $\varepsilon t \gg 1$ , “перша поправка” є значно більшою за головний член ряду для великих  $t$ . Тому справедливим є представлення розв’язку у вигляді такого простого тільки у перші моменти часу, коли  $t < 1/\varepsilon$ .

Існує багато інших аналітичних методів теорії послідовних наближень, що дозволяють отримати розв’язок у вигляді ряду, що рівномірно сходиться, а тому є придатним при описанні нелінійних коливань також і при  $t \rightarrow \infty$  [1, с.58].

## 2.5. Осцилятор з кубічною нелінійністю

Зауважимо, що прямий розклад за малим параметром не завжди приводить до успіху. Розглянемо осцилятор з кубічною нелінійністю, який описується рівнянням Дюффінга:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0, \quad (2.5.1)$$

Звернемо увагу, що, на відміну від осцилятора з квадратичною нелінійністю тепер у спектрі коливань виникне не друга, а третя гармоніка. Переконаємося, в тому, що спектр буде містити тільки непарні гармоніки, якщо продовжуємо розклад далі. Це є наслідком симетрії рівняння Дюффінга при заміні  $x \rightarrow -x$ . Нагадаємо, що аналогічний результат одержано при аналізі коливань математичного маятника.

Використовуючи знову заміну змінних, матимемо рівняння:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (2.5.2)$$

де  $\varepsilon = \beta A^2 / \omega_0^2$ . Як і в минулих прикладах, будемо розглядати слабку нелінійність, тобто припустимо, що  $\varepsilon < 0$ . Використовуючи розклад за малим параметром маємо:

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (2.5.3)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_1 + x_2 + x_1^3 = 0, \quad (2.5.4)$$

Рівняння гармонічного осцилятора отримаємо у нульовому наближенні. Після підстановки його розв'язку (2.5.0) впливає:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -a^3 [3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)].$$

Зауважимо, що перша та третя гармоніки містяться у правій частині рівняння. Загальний розв'язок є суперпозицією часткових розв'язків неоднорідного рівняння, тому що рівняння лінійне. При цьому резонанс виникає для першого доданка, і в розв'язку виникає секулярний або віковий член. Остаточно розв'язок з точністю до доданків другого порядку представимо у вигляді:

$$x = a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[ \frac{3a^3 t}{8} \cos(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \cos(t + \varphi) \right]. \quad (2.5.5)$$

Отже, із плином часу другий доданок необмежено зростає, не зважаючи на те, яким малим не був би параметр  $\varepsilon$ , і справедливність розкладу за малим параметром порушується. Насправді, необмеженого зростання амплітуди немає та розв'язки рівняння Дуффінга мають вигляд періодичних нелінійних коливань. Це слідує з того, що коливання осцилятора Дуффінга не є ізохронними, тобто період залежить від амплітуди. Розклад принципово не враховує порушення ізохронності: у спектрі коливань можуть з'являтися тільки наступні гармоніки та власна частота лінійних коливань.

Отже, необхідно модифікувати схему розв'язку таким чином, щоб можна було врахувати порушення ізохронності. Найлегший спосіб запропонували А.

Лінштедт ( 1883р.) і А. Пуанкаре (1892р.). Введемо нову часову заміну в рівняння (2.4.7). Оскільки  $\frac{d}{dt} = \omega d/dt$ , одержимо:

$$\omega^2 x'' + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (2.5.6)$$

Тут штрихами позначено похідні за  $\tau$ . У вигляді розкладів у степеневий ряд як для змінної  $x$ , так і частоти  $\omega$  знайдемо розв'язок рівняння (2.5.6):

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots, \omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.5.7)$$

Частоту лінійних коливань повинен видавати перший член у розкладі для  $\omega$ , яка при прийнятому нормуванні дорівнює одиниці. Ефекти неізохронності опишуть наступні поправки  $\omega_1, \omega_2, \dots$

Підставивши розклади (2.5.7) у рівняння (2.5.6),отримаємо:

$$[1 + 2\varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 - 2\omega_2) + \dots][x_1'' + \varepsilon x_2'' + \dots] + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots = 0.$$

Після кількох простих обчислень рівняння запишемо у вигляді:

$$x_1'' + x_1 + \varepsilon(x_2'' + x_2 + 2\omega_1 x_1'' + x_1^3) + \dots = 0,$$

Прирівнюючи до нуля доданки нульового й першого порядків мализни, отримаємо:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (2.5.8)$$

Розв'язок рівняння (2.5.6) подамо наступним чином:

$$x_1 = a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.5.9)$$

Підставивши це співвідношення в праву частину (2.6.6), знайдемо

$$x_2 + x_2 = 2a\omega_1 - \frac{a^3}{4} [3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)]. \quad (2.6.8)$$

Для того щоб позбутися пропорційних  $\cos(\tau + \varphi)$  членів виберемо  $\omega_1$  такі, які призводять до необмеженого зростання розв'язку. Для цього замінімо:

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8},$$

І тоді рівняння (2.5.8) набуде вигляду:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\frac{3}{4} \cos 3(\tau + \varphi), \quad (2.5.10)$$

Його частковий розв'язок дорівнює:

$$x_2 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \varphi). \quad (2.5.11)$$

та уже не містить секулярних складових. Остаточний вигляд знайденого розв'язку з точністю до членів порядку  $\varepsilon^2$ :

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha a^3}{32} \cos 3(\omega t + \varphi),$$

$$\omega \approx 1 + 3\varepsilon a^2/8,$$

Якщо параметр  $\varepsilon$  вважати додатним, то частота коливань збільшується зі зростанням амплітуди, а при  $\varepsilon < 0$  частота, навпаки, зменшується [13, с.112].

## 2.6. Метод Ван дер Поля при розв'язуванні рівняння Дуффінга

Найлегшим варіантом методу усереднення є метод Ван дер Поля. Основна мета цього методу полягає у дослідженні автоколивних процесів у ламповому генераторі. Метод запропонований був Б. Ван дер Полем (1920р.). Математичне обґрунтування цього методу надали Л. Мандельштам і М.Папалексі (1934 р.) Метод усереднення отримав подальший розвиток у роботах О. Крилова, М. Боголюбова.

Розглянемо знову рівняння Дуффінга:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (2.6.1)$$

Формально малий параметр тут не вводиться, однак будемо вважати, що  $\gamma, \beta < 1$ , тобто, система близька до рівняння лінійного консервативного осцилятора. Головною умовою застосовності методу Ван дер Поля є близькість до лінійної консервативної системи. При цьому розв'язок рівняння можна подати у вигляді:

$$x = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it}, \quad (2.6.2)$$

де  $A(t) = A$  – повільна змінна порівняно з комплексною амплітудою  $e^{it}$  (у зв'язку із чим цей метод називають також методом повільно змінних амплітуд). Припустимо, що:

$$\dot{x} = Ae^{it} + iAe^{it} + \dot{A}^* e^{-it} - iA^* e^{-it}, \quad (2.6.3)$$

Зауважимо, що замість однієї невідомої функції  $x$  по суті введено дві:  $A$  і  $A^*$ , і тому накладемо додатковий зв'язок на ці функції.

$$\dot{A}e^{it} + \dot{A}^* e^{-it} = 0. \quad (2.6.4)$$

тоді рівняння (2.6.1) спрощується

$$\dot{x} = iAe^{it} - iA^* e^{-it}. \quad (2.6.5)$$

Продиференціюємо це рівняння й отримаємо:

$$\ddot{x} = 2i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} - iA^* e^{-it} + A^* e^{-it}. \quad (2.6.6)$$

З урахуванням співвідношення (2.6.4) рівняння (2.6.6) представимо як:

$$\ddot{x} = 2i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} + A^* e^{-it}. \quad (2.6.7)$$

Підставляючи вирази (2.6.5) та (2.6.6) у вихідне рівняння (2.6.1), унаслідок проведення кількох операцій отримаємо рівняння даного виду:

$$2i\dot{A}e^{it} + 2i\gamma(Ae^{it} - A^* e^{-it}) + \beta(A^3 e^{3it} + 3|A|^2 Ae^{-it} + (A^*)^3 e^{-3it}) = 0, \quad (2.6.8)$$

Зауважимо, що в рівнянні (2.6.8) усі доданки одного порядку мализни: вони або пропорційні малим параметрам  $\gamma, \beta$ , або містять похідні від повільно змінної амплітуди. Поділимо рівняння (2.6.8) на  $\exp(it)$  та одержимо:

$$2i\dot{A} + 2i\gamma A - 2A * e^{-it} + \beta(A^3 e^{3it} + 3|A^2|A e^{-it} + (A^*)^3 e^{-3it}) = 0, \quad (2.6.9)$$

За періодом основної частоти усереднимо рівняння (2.6.9). Операція усереднення відбувається наступним чином:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (2.6.10)$$

де  $T$  – період коливань ( у даному випадку  $T = 2\pi$ ). При усередненні функції, її можна винести за знак інтеграла, оскільки  $A(t)$  є повільно змінною функцією. Тоді швидко осцилюючі члени ( тобто всі доданки, що містять комплексні експоненти) у рівняння (2.6.9) після інтегрування дають нуль. У результаті приходимо до скороченого рівняння:

$$\dot{A} + \gamma A - \frac{3i\beta|A^2|A}{2} = 0, \quad (2.6.11)$$

Це рівняння з точністю до позначень тотожно дорівнює рівнянню, отриманим згідно методу багатьох масштабів. Зауважимо, що метод багатьох масштабів дозволяє просунутись далі, оскільки за його допомогою ми не тільки знайшли компонент на частоті третьої гармоніки, але й визначили еволюцію повільно змінних амплітуд і фази. Щораз детальніше уточнюючи розв'язок, можна було б продовжувати розкладання до більш високих порядків мализни. Утім, метод усереднення також допускає відповідне узагальнення[13, с.118].

Приклад 2.2. За допомогою методу Ван дер Поля знайти наближені розв'язки рівняння Дуффінга

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 = 0,$$

Методом Ван дер Поля введемо заміну, одержимо:



$$u = a \cos(t + \varphi), v = \dot{u} = -a \sin(t + \varphi),$$

Нехай,  $a$  та  $\varphi$  залежать від часу. Порівнюючи перше рівняння з другим та диференціюючи його для  $u$  по  $t$ , для  $v$ , матимемо:

$$\dot{a} \cos(t + \varphi) - a \dot{\varphi} \sin(t + \varphi) = 0,$$

Підставляємо отримані виразу у вихідне рівняння Дуффінга, одержимо:

$$\dot{a} \sin(t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos(t + \varphi) = \varepsilon a^3 \cos^3(t + \varphi),$$

Відносно  $a$  та  $\varphi$ , розв'язуючи два останніх рівняння, матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon a^3 (\sin(t + \varphi) \cos^3(t + \varphi)), \\ \dot{\varphi} = \varepsilon a^2 \cos^4(t + \varphi), \end{cases}$$

Прирівнюючи ці два рівняння, одержимо:

$$\sin \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi, \quad \cos^4 \varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi.$$

Отриману тотожність представимо у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{1}{8} \varepsilon a^3 (2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha), \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{8} \varepsilon a^2 (3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha), \end{cases}$$

де  $\alpha = t + \varphi$ .

Згідно з методом Ван дер Поля, отримаємо:

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{\alpha} = \frac{3}{8} \varepsilon a^2.$$

Знаходимо залежність амплітуди часу від фази, розв'язуючи ці рівняння відносно  $a$  та  $\alpha$ , матимемо:

$$a = a_0, \quad \alpha = \frac{3}{8} \varepsilon a_0^2 t + \alpha_0,$$

Де  $a_0 - (0)$  – початкова умова.

Загальний розв’язок рівняння Дуффінга, розв’язаного за допомогою методу Ван дер Поля запишемо у вигляді:

$$u(t) = a_0 \cos \left[ \left( 1 + \frac{3}{8} \varepsilon a_0^2 \right) t + \alpha \right].$$

## 2.7.Період коливань згасаючого нелінійного осцилятора

Замкнена фазова траєкторія відповідає руху, що періодично повторюється. Отже, фазовим портретом періодичного коливного процесу є така траєкторія . Закон збереження енергії для рівняння нелінійного осцилятора можна записати таким чином:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E. \quad (2.7.1)$$

Константа інтегрування  $E$  є повною енергією коливань. Із рівняння (2.7.1) отримаємо:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}, \quad (2.7.2)$$

Ділянкам фазових траєкторій відповідає знак «+» у даному рівнянні, що лежать у верхній півплощині, знак « - » - у нижній. Відокремлюючи змінні у (2.7.2), матимемо:

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{U(x) \leq E}}, \quad (2.7.3)$$

Якщо рух відбудеться в інтервалі  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ , то він буде періодичним у даному інтервалі  $U(x) \leq E$ , причому рівність досягається на кінцях інтервалу, тобто і  $x_{min}$  і  $x_{max}$  є коренями рівняння  $U(x) = E$ ; їх називають точками повернення. Проінтегруємо рівняння (2.7.3) по всій замкненій фазовій траєкторії та визначимо період коливань  $T$ :

$$T = \oint \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}, \quad (2.7.4)$$

Цей інтеграл можна також записати наступним чином:

$$T = 2 \int_{\max}^{\min} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}, \quad (2.7.5)$$

Для лінійного осцилятора  $U_0(x) = \omega_0^2 x^2 / 2$  і з рівняння (2.7.5) одержимо:

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} = \frac{2}{\omega_0} 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (2.7.6)$$

де  $a = \frac{\sqrt{2E}}{\omega_0}$  . У цьому випадку можна з легкістю обчислити інтеграл, згідно проведених операцій, одержимо:

$$T = \frac{2}{\omega_0} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (2.7.7)$$

Тобто отримали загальновідоме визначення періоду гармонічних коливань. Коливання будуть ізохронними, якщо залежність від енергії  $E$  у формулі (2.7.7) відсутня[13, с.97].

## Розділ 3. Застосування рівняння Дуффінга з різними факторами

### 3.1 Застосування однорідного рівняння Дуффінга в фізиці та біології

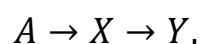
Процеси з різними характерними значеннями часу відбуваються у живих системах, причому суть цих значень така, що вони розділяються на багато порядків. Процес фотосинтезу слугує яскравим прикладом такої ієрархічної системи, зауважимо, що фотосинтез забезпечує існування життя на Землі. З використанням енергії сонячного світла та неорганічних речовин створюється органічна речовина з вуглекислого газу і води, за допомогою фотосинтезу, які містяться в ґрунті та воді. Головним постачальником кисню в атмосферу Землі є фотосинтез, саме кисень є необхідний для дихання всіх аеробних організмів. Наведемо характерні значення часу фотосинтезу. Поглинання кванта світла відбувається дуже швидко, приблизно за  $10^{-15}$  с. Далі відбувається розподіл зарядів частинок у реакційному центрі, час якого становить близько  $10^{-12}$  с. Час електронного транспорту іонів може змінюватись у досить широких межах  $10^{-10}$ ,  $10^{-12}$  с та залежить від обставин. Час фіксації вуглецю в органічних сполуках дуже малий і становить секунди, а часом, навіть хвилини. Протягом хвилини, а, подекуди, і години, вимірюється транспорт отриманих речовин у рослинах. Час росту рослини може становить дні, місяці, роки. Тривалість періодів залежить від зовнішніх і внутрішніх чинників, згідно, отриманих знань з біології, усі ці процеси відбуваються з періодичною зміною в часі.

Клітина є основним складником будь-якого організму. Жива клітина – це складна "фізико-хімічна машина", у якій основні операції зводяться до змін концентрацій хімічних сполук. Здається природним називати машиною систему, яка здатна багато разів відтворювати деякий циклічний процес. Для розуміння принципу роботи живої клітини важливо зрозуміти, за яких умов дії хімічних реакцій можуть бути подібними до дії машини при цьому не має значення, з якого фізичного матеріалу вона виготовлена. Дослідження більш високих рівнів біологічної організації (зібрання клітин або організмів, що вільно живуть) також можна проводити за допомогою концентраційної

кінетики. У цьому випадку змінними будуть щільності (концентрації) клітин або особин різного вигляду. Періодичні процеси в біологічних системах відомі людству з давнини, а коливання в процесі хімічних реакцій були вперше виявлені тільки в ХІХ ст. і, зокрема, коливні реакції на межі метал – розчин були відразу використані для моделювання ряду біологічних феноменів. Згодом виникли такі характерні назви, як "залізний нерв", "ртутне серце". В той час, коли про фізико-хімічну природу нервового збудження майже нічого не було відомо, саме вивчення "залізного нерва" слугувало яскравою можливістю відкриттю сальтаторного (пульсуюче) проходження нервового імпульсу через анестезовані ділянки живого нерва.

Яскравим прикладом "ртутного серця" є реакція розпаду  $H_2O_2$  на поверхні металевої ртуті. Періодичне виникнення і розчинення плівки оксиду на поверхні ртуті відбувається в даному випадку. Спостерігається ритмічна пульсація краплини, що зовні нагадує биття серця у результаті коливань поверхневого натягу. Математичну модель коливної хімічної реакції, яка спиралась на закон діючих мас запропонував у 1910 р. А. Лотка. Ця модель описувала згасаючі коливання концентрацій, а пізніше було показано, що до появи в системі автоколивань призводять її незначні зміни.

Лотка розглядав систему



у якій існує резервуар А, автокаталітичне перетворення X на Y і лінійне зменшення Y, лінійне перетворення A на X. У системі із самого початку знехтувано витратами А і не враховано кінцеві перетворення Y, тобто, розглядається відкрита система. Окрім того, автокаталітична реакція представлена як елементарна. За допомогою цих припущень отримуємо системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{x} = k_0 A - k_1 x y, \quad \dot{y} = k_2 x y - k_3 y, \quad (3.1.1)$$

де  $k_0, k_1, \dots$ - додатні константи швидкості реакцій.

У найпростішому випадку  $k_2 = k_1$ . Як хімічні реакції, так і лінійні транспортні процеси у відкритій системі можуть описувати Доданки  $k_0A, k_3y$ .

Нехай введемо заміну, одержимо:

$$u = \frac{k_2}{k_3}x, \quad v = \frac{k_1k_3}{k_0k_2A}y, \quad \tau = k_3t, \quad (3.1.2)$$

Тоді систему (3.1.1) можна представимо у вигляді

$$\dot{u} = \alpha(1 - uv), \quad \dot{v} = uv - v, \quad \text{де } \alpha = \frac{k_0k_2A}{k_3^2}, \quad (3.1.3)$$

Згідно цього, поведінка розв'язків системи (3.1.3) повністю визначається одним параметром  $\alpha$ . Система (3.1.3) має єдину нерухому точку

$$u_0 = v_0 = 1, \quad (3.1.4)$$

Поблизу якої власні значення характеристичного рівняння відповідної матриці Якобі запишуться у вигляді:

$$\delta_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}}{2}, \quad (3.1.5)$$

В системі виникають згасаючі коливання навколо нерухомого стану при  $\alpha < 4$  та корені стають комплексними. Як завгодно малим буде згасання при  $\alpha \rightarrow 0$ , а частота коливань  $\omega$  визначається за допомогою виразу:

$$\omega = \frac{\sqrt{k_0k_2A}}{k_3}.$$

Для великої частини математичних моделей коливних реакцій, які використовують на практиці слугує, саме модель Лотка. У 1920 році Лотка описав модифіковану модель з двома автокатолітичними стадіями і використав її, не тільки для коливань чисельності співіснуючих популяцій (модель жертва – хижак), але й для пояснення хімічних коливань. Згодом таку модель побудував і досліджував В. Вольтерра, а якісне підтвердження моделі Лотка –

Вольтера було отримано в експериментальних дослідженнях Г. Гаузе при дослідженні розвитку найпростіших популяцій. Згодом була виявлена можливість стаціонарного у часі та періодичному в просторі розподілу концентрацій у хімічній системі, де значну роль відіграють процеси дифузії. У зв'язку з проблемами морфогенезу докладніше це питання розглянув А. Тьюрінг (1952). Можливість виникнення концентраційних коливань показано у видатних дослідженнях механізму генерації нервового імпульсу в роботах О. Хакслі (1952) та А. Ходжкіна (1965) і внутрішньоклітинної регуляції синтезу ферментів (Ж. Моно, Ф. Жакоб, 1964). процеси реакцій фотосинтезу, гліколізу та коливаннях ферментативної активності актоміозину були виявлені згасаючі коливання [13, с.266].

### 3.2 Вільні коливання осцилятора Дуффінга з сухим тертям

Вільні коливання системи, мають характерну особливість, вони зумовлені початковим відхиленням від положення статистичної рівноваги, які опишемо диференціальним рівнянням:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \delta x^3 = -fg \operatorname{sign}(\dot{x}), \quad (3.2.1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$\omega^2 = \frac{c_1}{m}$ ;  $\delta = \frac{c_2}{m}$  - характеристики пружності системи,  $m$  – маса осцилятора,  $f$ - коефіцієнт сухого тертя,  $g$ - прискорення вільного падіння,  $x = x(t)$  – коливальне переміщення системи,  $a_0$ - початкове відхилення осцилятора від положення рівноваги в бік від'ємних значень на осі  $Ox$ ,  $t$  – час.

Обчислення ширини області застою. Оскільки в області застою  $x \in [-a_*, a_*]$  осцилятор припиняє рух то обчислимо величину  $a_*$ . Для цього треба розглянемо та розв'яжемо кубічне рівняння:

$$\delta a_*^3 + \omega^2 a_* - fg = 0, \quad (3.2.2)$$

У випадку лінійної пружини, коли  $\delta = 0$ , отримуємо:

$$a_* = \frac{fg}{\omega^2}, \quad (3.2.3)$$

що давно відомо в теорії коливань.

Єдиний дійсний корінь рівняння (3.2.2) додатній, якщо пружина осцилятора нелінійно «жорстка» ( $\delta > 0$ ) і цей корінь досить легко обчислити за формулою:

$$a_* = \sqrt[3]{\sqrt{q^2 - p^3} - q} - \sqrt[3]{\sqrt{q^2 - p^3} + q}, \quad (3.2.4)$$

де

$$q = -\frac{1}{2} \frac{fg}{\delta}; p = -\frac{1}{3} \frac{\omega^2}{\delta}. \quad (3.2.5)$$

Розв'язок кубічного рівняння в формі Кардано приводить до формули (3.2.5).

Рівняння (3.2.4) має три дійсних кореня при «м'якій» нелінійності пружини осцилятора ( $\delta < 0$ ). Менший з додатних коренів  $a_*$ , теж просто знайти по формулі:

$$a_* = \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2 + \delta\beta^2}{\delta}} - \frac{\beta}{2},$$

в якій

$$\beta = 2\sqrt{p} \cos \frac{\alpha}{3}; \alpha = \pi - \arccos \frac{q}{\sqrt{p^3}}$$

Корінь  $a_*$  рівняння (3.2.2) можна також обчислювати наближеними методами крім представлених точних розв'язків. Для прикладу таким методом є метод простих ітерацій, який представлено у формулі:



$$a_{*k} \approx \frac{fg}{\omega^2 + \delta a_{*k-1}^2}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.6)$$

За початкове наближення в формулі (3.2.6), незалежно від знака  $\delta$ , можна прийняти  $a_{*0} \approx 0$ .

Рух осцилятора припиняється, якщо амплітуда відхилення  $j$ -го розмаху при  $\dot{x} = 0$  стане задовольняти нерівності:

$$a_j \leq a_*$$

Вважаємо, що  $a_0 > a_*$  при даних початкових умовах (3.2.6).

Виведення формул для обчислення амплітуд розмахів. Під час руху на першому розмасі, коли  $-a_0 \leq x \leq a_1, \dot{x} > 0$  і рівняння (3.2.5) переписеться у вигляді:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \delta x^3 = -fg, \quad (3.2.7)$$

або

$$v \frac{dv}{dx} = -fg - \omega^2 x - \delta x^3,$$

де  $v = \dot{x}$ .

Отримаємо вираз швидкості руху, якщо проінтегруємо рівняння (3.2.7) по  $x$ :

$$v = \sqrt{2} \sqrt{c_3 - fgx - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{\delta}{4}x^4}.$$

з точністю до довільної сталої  $c_3$ .

Задовольнивши початкові умови (3.2.3) і швидкість руху на першому розмасі:

$$v = \sqrt{2} * \sqrt{\frac{\delta}{4}(a_0^2 - x^4) + \frac{\omega^2}{2}(a_0^2 - x^2) - fg(a_0 + x)}.$$

структура цієї формули збережеться і для  $j$  – го розмаху, коли  $-a_{j-1} \leq x \leq a_j$ , але отримає загальний вигляд:

$$|v| = \sqrt{2} \left( \frac{\delta}{4} (a_{j-1}^4 - x^4) + \frac{\omega^2}{2} (a_{j-1}^2 - x^2) - fg (a_{j-1} + x) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.8)$$

Враховуючи, що вкінці  $j$  – го розмаху  $x = a_j$ ,  $v = 0$  із (3.1.2.4) впливає кубічне рівняння:

$$a_j^3 - a_{j-1} a_j^2 + \left( a_{j-1}^2 + \frac{2\omega^2}{2} \right) a_j - \left( \frac{4fg}{\delta} - \frac{2\omega^2}{2} a_{j-1} - a_{j-1}^3 \right) = 0, \quad (3.2.9)$$

Щоб знайти аналітичні розв'язки рівняння (3.1.2.5) потрібно обчислити допоміжні величини:

$$Q_i = \frac{1}{2} \left( \frac{4fg}{\delta} - \frac{20}{27} a_{j-1}^3 - \frac{4\omega^2}{3\delta} a_{j-1} \right);$$

$$P_i = -\frac{1}{9} \left( 2a_{j-1}^2 + \frac{6\omega^2}{\delta} \right).$$

Якщо виявляється, що  $Q_i^2 - P_i^3 \geq 0$ , то корінь подається виразом:

$$a_i = \frac{a_{j-1}}{3} + \sqrt[3]{\sqrt{Q_i^2 - P_i^3} - Q_i} - \sqrt[3]{\sqrt{Q_i^2 - P_i^3} + Q_i},$$

У випадку, коли  $Q_i^2 - P_i^3 < 0$ , обчислення  $a_i$  доводиться проводити за формулами:

$$a_i = \frac{a_{i-1} - \beta}{2} + \sqrt{-\frac{2\omega^2}{2} - 3 \frac{(a_{i-1} - \beta_i)^2}{4} - a_{i-1} \beta_i},$$

$$\beta_i = 2\sqrt{P_i} \cos\left(\frac{A_j}{3}\right) + \frac{a_{j-1}}{3};$$

$$A_j = \pi - \arccos \frac{Q_i}{\sqrt{P_i^3}}$$

Одним із наближених способів обчислення амплітуд розмахів є метод простих ітерацій на базі співвідношень:

$$a_{*k} \approx a_{j-1} \frac{2fg}{\omega^2 + \frac{\delta}{2}(a_{j-1}^2 + a_{jk-1}^2)}, k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.2.10)$$

Компактна формула (3.2.10) легко застосовується для розрахунків, як при  $\delta > 0$ , так і при  $\delta < 0$ . У випадку лінійної пружини із (3.2.10) отримуємо загальновідому залежність:

$$t_j = \int_{-a_j}^{a_j} \frac{dx}{|v|}$$

Після підстановки (3.1.2.3) у (3.1.2.8), матимемо:

$$t_j = \frac{1}{\sqrt{2}} I(a_{j-1}, a_j) = \int_{-a_j}^{a_j} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\delta}{4}(a_{j-1}^4 - x^4) + \frac{\omega^2}{2}(a_{j-1}^2 - x^2) - fg(a_{j-1} + x)}}$$

При  $\delta = 0$  можливе аналітичне обчислення  $I(a_{j-1}, a_j)$ . Воно призводить до простої формули:

$$t_j = \frac{\pi}{\omega},$$

Коли тривалість всіх розмахів не залежать від амплітуд розмахів та від стартового відхилення  $\alpha_0$  та є однаковими. Порушується саме ця синхронність коливань для нелінійно пружної системи. Значення  $I(a_{j-1}, a_j)$  доводиться знаходити чисельними методами на комп'ютері при  $\lambda \neq 0$ . Зауважимо, що інтеграл  $I(a_{j-1}, a_j)$  відноситься до невласних інтегралів другого роду, бо підінтегральна функція має особливості при  $x = a_{j-1}$  і  $x = a_j$ . Виконаємо

наступні перетворення, щоб позбутися сингулярності. Інтеграл представимо у вигляді суми двох доданків:

$$I(a_{j-1}, a_j) = I(a_{j-1}, 0) + I(0, a_j),$$

де

$$I(a_{j-1}, 0) = \int_{-a_{j-1}}^0 dx (a_{j-1} + x)^{-\frac{1}{2}} dx \left[ \frac{\delta}{4} (a_{j-1}^2 + x^2) (a_{j-1} - x) + \frac{\omega^2}{2} (a_{j-1} - x) fg \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$I(0, a_j) = \int_0^{a_j} dx \left( \frac{\delta}{4} (a_{j-1}^4 - x^4) + \frac{\omega^2}{2} (a_{j-1}^2 - x^2) - fg (a_{j-1} + x) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Уведенням нової змінної  $a_{j-1} + x = \varphi^2$  першому з них надаємо вигляд:

$$I(a_{j-1}, 0) = \int_0^{\sqrt{a_{j-1}}} d\varphi (2a_{j-1} - \varphi^2) \left[ \frac{\delta}{4} (a_{j-1}^2 + (\varphi^2 - a_{j-1})^2) + \frac{\omega^2}{2} \right] - fg)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.2.11)$$

Віднявши під коренем у другому інтегралі вираз:

$$\frac{\delta}{4} (a_{j-1}^2 - a_j^2) + \frac{\omega^2}{2} (a_{j-1}^2 - a_j^2) - fg (a_{j-1} + a_j) = 0,$$

зводимо його до квадратури:

$$I(0, a_j) = \int_0^{a_j} dx \left( (a_{j-1} - x) \left[ \frac{\delta}{4} (a_j^2 + x^2) (a_j + x) \right] + fg \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.2.12)$$

Введемо змінну  $a_j = x = \mu^2$ , щоб позбавитись сингулярності. Згодом

$$I(0, a_j) = 2 \int_0^{\sqrt{a_{j-1}}} d\mu^2 \left( (2a_j - \mu^2) \left[ \frac{\delta}{4} (a_j^2 + (a_j - \mu^2)^2) + \frac{\omega^2}{2} \right] + fg \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.1.3.1)$$

Інтеграли (3.2.11) і (3.2.12) можна обчислювати будь-яким методом на комп'ютері.

Тривалість  $j$ -го розмаху знайдемо за формулою, якщо поступитися точністю визначення  $t_j$ , одержимо:

$$t_j = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 + \frac{3}{16} \delta (a_{j-1} + a_j)^2}}, \quad (3.2.13)$$

Потреба проводити чисельне інтегрування (3.2.11) і (3.2.12) на комп'ютері при такому розрахунку відпадає. В доповнення до (3.2.12) можна запропонувати двобічні оцінки  $t_j$ . У випадку жорсткої характеристики пружності, коли  $c_2 > 0$ , виконуються нерівності:

$$t_j^* < t_j < \frac{\pi}{\omega},$$

тут

$$t_j^* = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 + 0.75 \delta a_{j-1}^2}},$$

Якщо характеристика пружності м'яка, тобто  $c_2 < 0$ , то:

$$\frac{\pi}{\omega} < t_j < t_j^{**},$$

де

$$t_j^* = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 + 0.75 |\delta| a_{j-1}^2}}$$

Вище припускали, що коливання спричинені початковим відхиленням системи від положення рівноваги. У випадку, коли в положенні  $x = 0$  осцилятор миттєво отримає швидкість  $v_0$  теж можна застосовувати отримані формули. При цьому стала  $c_3$  буде дорівнювати  $\frac{1}{2} v_0$ . Швидкість руху осцилятора на проміжку  $0 \leq x \leq a_0$  зміниться:

$$v(x) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2} v_0^2 - f g x - \frac{1}{2} \omega x^2 - \frac{\delta}{4} x^4},$$

Осцилятор зупиниться, коли досягне максимального відхилення  $x = a_1$ .  
Тому:

$$v_0^2 = 2 f g a_1 + \omega a_1^2 + \frac{\delta}{2} a_1^4, \quad (3.2.14)$$

Початкову швидкість, що забезпечує задане стартове відхилення  $a_1 > a^*$  обчислимо за допомогою виразу (3.2.14). Якщо  $a_1 < a^*$ , то осцилятор не вийде з області застою і його подальший коливальний рух неможливий. Задача дещо ускладнюється, коли треба знайти переміщення  $a_1$  по заданому  $v_0$ . Рівняння (3.2.14) доводиться розв'язувати числовими методами при такій постановці задачі.

Для проведення розрахунків приймаємо  $m = 1$  кг;  $f = 0,40775$ ;  $a_0 = 0,05$  м;  $c_1 = 10^3$  Н/м;  $c_2 = \pm 2 \cdot 10^5$  Н/м<sup>3</sup>. Обчислимо ширину області застою. Для вказаних числових даних по формулах (3.2.4)-(3.2.6) знаходимо, що  $10^3 a^* = 4; 3,9873; 4,0129$  м, відповідно при  $\lambda = 0; \lambda > 0; \lambda < 0$ . При м'якій характеристиці пружності ширина області застою дещо більша, ніж при жорсткій характеристиці, що впливає на кількість розмахів до повної зупинки осцилятора. Результати обчислень  $a^*$  методом ітерацій по формулі (3.2.14) записано в табл. 3.1. Початковим наближенням брали  $a_{*0} = 0$ ,  $k$  – номер ітерації.

Результати ітерацій по формулі (3.2.14) Таблица 3.1

k	1	2	3	4
$10^3 a_{*k}$ м, при $\lambda > 0$	4,0000	3,9872	3,9873	3,9873
$10^3 a_{*k}$ м, при $\lambda < 0$	4,0000	4,0128	4,0129	4,0129

Формула (3.2.14) зручна для проведення обчислень  $a^*$ , оскільки процес ітерацій швидко збігається. Одержані за допомогою формули (3.2.6) амплітуди розмахів (з точністю до  $10^{-5}$ ) записано в табл. 3.2. Потреба використання формули (3.2.6) для прийнятих вихідних даних не виникала.

Амплітуди коливань при різних характеристиках пружності осцилятора.

Таблиця 3.2

j	$c_2 > 0$	$c_2 = 0$	$c_2 < 0$
	Значення $10^{-2}a_j$ , м		
1	4,4474	4,2000	3,6958
2	3,8532	3,4000	2,6848
3	3,2141	2,6000	1,7918
4	2,5287	1,8000	0,9574
5	1,7990	1,0000	0,1498
6	1,0320	0,2000	-
7	0,2409	-	-

Кількість розмахів до повної зупинки осцилятора при  $c_2 > 0$  виявилась більшою, ніж при  $c_2 < 0$ . Вона узгоджується з шириною області застою, що в табл. 3.1.

Про швидкість збіжності ітерацій при обчисленні  $a_j$  по формулі (3.2.14), при  $c_2 > 0$  і  $c_2 < 0$  надана в табл. 3 і в табл. 4. Там  $k$  – номер ітерації,  $j$  – номер амплітуди.

Результати ітерацій по формулі (3.2.14), при  $c_2 > 0$ . Таблиця 3.3

k	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
	Значення $100 a_{jk}$ , м				

1	4,4667	3,8742	3,2363	2,5511	1,8194
2	4,4481	3,8539	3,2148	2,5294	1,7995
3	4,4475	3,8532	3,2141	2,5287	1,7990
4	4,4474	3,8532	3,2141	2,5287	1,7990

Результати ітерацій по формулі (13) при  $c_2 < 0$ . Таблиця 3.4

k	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
	Значення $100 a_{jk}$ , м				
1	3,4000	2,5951	1,7501	0,9369	0,1424
2	3,7390	2,6909	1,7933	0,9577	0,1498
3	3,6890	2,6844	1,7918	0,9574	0,1498
4	3,6969	2,6849	1,7918	0,9574	0,1498
5	3,6956	2,6848	1,7918	0,9574	0,1498
6	3,6958	2,6848	1,7918	0,9574	0,1498

За початкове наближення приймали  $a_{j0} = a_{j-1}$ , тобто  $a_{10} = a_0$ ,  $a_{20} = a_1$  і т.д. Збіжність ітерацій прискорюється зі збільшенням  $j$ . Обчислення тривалості  $t_j$  для лінійно пружного осцилятора, при  $c_2 = 0$ , дало  $t_j \approx 0,099346$  с незалежновід  $j$ , що властиво для ізохронних коливань. Результати обчислень  $t_j$  при  $c_2 > 0$  записано в табл. 3.5.

Значення  $t_j^*$  \* і  $t_j$  при  $c_2 > 0$ . Таблиця 3.5

j	$100 t_j^*$	$100 t_j$	j	$100 t_j^*$	$100 t_j$
1	8,472	$\frac{8,598}{8,599}$	5	9,409	$\frac{9,570}{9,603}$
2	8,724	$\frac{8,848}{8,856}$	6	9,702	$\frac{9,748}{9,789}$
3	8,984	$\frac{9,101}{9,117}$	7	9,856	$\frac{9,863}{9,905}$



4	9,244	$\frac{9,347}{9,372}$	-	-	
---	-------	-----------------------	---	---	--

В табл. 3.6 надана інформація про тривалість розмахів при  $c_2 < 0$ . Значення  $t_j$ , записані в чисельниках, одержані чисельним інтегруванням квадратур на комп'ютері. В знаменниках значення  $t_j$  обчисленні за формулою обчисленні за формулою (3.2.2). Розрахунки підтверджують виконання нерівностей (3.2.3) і (3.2.4) зі збільшенням  $j$  тривалості розмахів  $t_j$  близькі до  $\pi/\omega$ , що мали при лінійній пружності осцилятора, коли ігнорували нелінійний доданок. Таблиця 3.6. Значення  $t_j$  і  $t_j^{**}$  при  $c_2 < 0$ . Розрахунки підтверджують виконання нерівностей (3.2.3) і (3.2.4). Зі збільшенням  $j$  тривалості розмахів  $t_j$  близькі до  $\pi/\omega$ , що мали при лінійній пружності осцилятора, коли ігнорували нелінійний доданок.

Значення  $t_j$  і  $t_j^{**}$  при  $c_2 < 0$ . Таблиця 3.6

J	$100 t_j, c$	$100 t_j^{**}, c$	j	$100 t_j^{**}, c$	$100 t_j, c$
1	$\frac{12,068}{11,737}$	12,566	5	$\frac{10,134}{10,078}$	10,183
2	$\frac{10,913}{10,793}$	11,141	4	$\frac{10,003}{9,958}$	10,004
3	$\frac{10,403}{10,330}$	10,520	-	-	-

Таким чином, у зв'язку з нелінійною пружністю, тривалості розмахів осцилятора Дуффінга залежать від амплітуд коливань. При зменшенні амплітуд коливань осцилятора з жорсткою характеристикою пружності зростають тривалості розмахів і зменшуються вони в осциляторі з м'якою характеристикою. В обох випадках вони наближаються до того значення тривалості напівциклу, що має лінійний осцилятор. Виведені формули дають можливість без використання другого інтегралу нелінійного рівняння коливань

осцилятора обчислити його основні кінематичні характеристики, які змінюються в ході руху.[14, с.82]

## ВИСНОВКИ

В даній магістерській роботі, я розглянула практичне застосування однорідного рівняння Дуффінга, знайшла умовні існування періодичного розв'язку даного рівняння, охарактеризувала відмінні риси лінійного осцилятора від нелінійного осцилятора, тобто осцилятора Дуффінга. Навела приклади розв'язування рівняння Дуффінга різними асимптотичними методами, описала застосування осцилятора в теорії коливань.

В даній роботі розглянуто проблеми теорії коливань та методи їх вирішення, одним з яких є створення Георгом Дуффінгом осцилятора з кубічною нелінійністю, який слугує моделлю для фізичних систем.

В магістерській роботі розглянуто та виконано всі поставлені на початку завдання такі: розгляд однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків, набуття вміння розрізняти лінійну систему від нелінійної системи рівнянь, самостійного визначення періоду коливань затухаючих хвиль та на сам кінець доцільно та якісно застосовувати осцилятор Дуффінга при розв'язуванні задач з теорії коливань.

Головною проблемою застосування рівняння Дуффінга є брак знань учнів про сам осцилятор з кубічною нелінійністю, тому що в школі даний матеріал не розглядається, в університеті на цю тему відведено дуже мало годин, тому учні, а в подальшому студенти, не мають змоги чітко та якісно застосовувати рівняння Дуффінга на практиці при розгляді та описі затухаючих хвиль. Саме рівняння Дуффінга відіграє важливу роль в теорії коливань, то му що слугує моделлю механічних та електронних систем, що дозволяє наперед прорахувати поведінку хвиль.

Одним із шляхів подолання цієї проблеми, може слугувати збільшення кількості годин в школах та університетах, для кращого засвоєння учнями та студентами інформації про рівняння Дуффінга або, як його ще називають осцилятор з кубічною нелінійністю.

Вважаю, що результат роботи може бути корисним для подальшого використання студентами фізико – технологічних факультетів, які бажають більше дізнатися у ході вивчення теорії коливань.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азаренков М. О., Гірка В. О., Лапшин В. І., Муратов В. І. Теорія коливань та хвиль: навч. посіб. Харків: Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, 2005. 58с.
2. Боднар Д. І., Буяк Л. М., Возняк О. Г. Диференціальні рівняння: методи розв'язування: навч. посіб. Тернопіль: Богдан, 2010. 84 с.
3. Боронко О. О., Динський С. І., Серeda А. В. Вимушені нелінійні коливання каната з вантажем при горизонтальному кінематичному його збудженні: збірник наук. праць. Київ: Вісник НТУУ «КП», 2011. 25 с.
4. Бугрій О. М. Системи диференціальних рівнянь: навч.- метод. посіб. Львів, 2018. 30 - 33с.
5. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння: навч. посіб. Івано – Франківськ: Сімик, 2012. 230 – 260с.
6. Грінченко Є. М. Геометричне моделювання розв'язків рівняння Дуффінга при розробці механічних систем з проклацуванням. Дисертація Національного технічного університету» Харківський політехнічний інститут». Мелітополь, 2007. 8-9 с.
7. Гудименко Ф. С., Павлюк І. А. , Волкова В. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь: збірник задач та розв'язники. Київ: Вища школа, 1972. 154 с.
8. Диференціальні рівняння. Задачі підвищеної складності: навч. посіб. / за ред. М. О. Перестюка. Київ : ТВіМ, 2005. 24 с.
9. Лавренюк С. П. Курс диференціальних рівнянь: навч. посіб. Львів: наук. – техн. літ., 1997. 216 с.
10. Ловейкін В. С. Динамічні навантаження у нелінійно-пружних елементах механізму підйому вантажу мостових кранів на стадії їх пуску / В. С. Ловейкін, Ю. В. Човнюк, М. Г. Діктерук // Техніка будівництва : наук.-техн. журн. / Київ. нац. ун-т буд-ва і архітектури ; відп. ред. І. І. Назаренко. - Київ, 2002. - Вип. 12. - С. 8-15.

11. Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г. Диференціальні рівняння: підручник. Київ: Вища школа, 1981. 504 с.
12. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по дифференциальным уравнениям: підручник. Київ: Лань, 2002. 432 с.
13. Медична фізика. Динамічні і статичні моделі: у 4 т. / ред. рада: Л. А. Булавина та ін.; Київ: видавничо – поліграфічний центр «Київський університет», 2010. Т. 1. 97 – 266с.
14. Ольшанський В. П., Бурлака В. В., Сліпченко М. В. Інженерія природокористування: наук. журнал / Харків: Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, 2020. 82с.
15. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений: навч. – метод. посіб. Київ: Вища школа, 1973. 560 с.
16. Помтрян Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: посібник. Київ: Наука, 1982. 312с.
17. Розрахунок коефіцієнтів гармонічної лінеаризації нелінійних елементів. Веб сайт: URL: <https://studfile.net/preview/9202052/page:2/> ( дата звернення 28.11.2021)
18. Рудавський Ю. К., Каленюк П. І., Тацій Р. М. Збірник задач з диференціальних рівнянь: збірник. Львів: Нау. ун – ту « Львівська політехніка », 2001. 244 с.
- 19.Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні та інтегральні рівняння: навч. посіб. 2 – ге вид., доповн. Київ: Либидь. 2003. 180 – 325 с.
- 20.Самойленко А. М., Кривошея С., А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах: посібник. Київ: Вища школа. 1994. 322 с.
- 21.Степанов В. В. Курм дифференциальных уравнений: навч. – метод. посіб. Київ: Наука. 1976. 45 с.
- 22.Филлипов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: навч. – метод. посіб. Київ: Наука. 1956. 105 с.

23.Шкіль М. І., Лейпфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння: підручник. Київ: Техніка. 2003. 368 с.