Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

Використання класичних нерівностей при розв’язуванні шкільних олімпіадних задач

Виконала: студентка ІІ курсу магістратури, групи М-М-21
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Павлюк Ірина Юріївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. кафедри вищої математики
Сапіліді Тамара Михайлівна

Рецензент: д-р техн. наук, зав. кафедри комп’ютерних наук і прикладної математики
Турбал Юрій Васильович

Рівне – 2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП ... 3
РОЗДІЛ І. ОСНОВНІ ТРАДИЦІЙНІ МЕТОДИ ДОВЕДЕНЬ НЕРІВНОСТЕЙ 8
1.1. Доведення нерівностей з використанням означення ... 8
1.2. Синтетичний метод доведення нерівностей ... 11
1.3. Аналітичний метод доведення нерівностей ... 15
1.4. Метод від супротивного ... 20
1.5. Доведення нерівностей методом підсилення ... 22
1.6. Метод математичної індукції при доведенні нерівностей ... 29
1.7. Класичні нерівності між середніми, їх доведення ... 34
1.8. Наслідки з нерівності Коші й задачі на відшукання найменших та найбільших значень ... 44
РОЗДІЛ ІІ. НЕРІВНОСТІ В ГЕОМЕТРІЇ ... 48
2.1. Нерівність трикутника ... 48
2.2. Застосування векторів ... 51
2.3. Оцінка площі ... 53
2.4. Геометричний спосіб доведень нерівностей між середнім арифметичним, геометричним, квадратичним та гармонічним ... 58
2.5. Співвідношення між елементами геометричних фігур та їх використання при доведенні нерівностей ... 61
ВИСНОВКИ ... 69
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ... 71

ВСТУП

Крім традиційних для елементарної математики задач на знаходження коренів різного типу рівнянь, розв'язків нерівностей та їх систем, досить часто ми зустрічаємося з необхідністю оцінювати й порівнювати певні величини. Ними можуть виступати деякі числові вирази, а також вирази, що містять змінні. У певних випадках може з'ясуватися, що такі вирази пов'язані між собою відношеннями «>», «≥», «<», «≤» не лише для окремих множин, які містять допустимі значення змінних, а й для усіх таких можливих наборів. Нерівності $a^2+b^2 \geq 2ab$, $a^2+\frac{1}{a^2} \geq 2$, $\sin x < x < tg\, x, \left(x \epsilon \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $lg(1+sin^2 x) \geq 0$, та інші, можуть бути прикладами таких співвідношень [14]. У розглянутих випадках говоритимуть вже про доведення нерівностей, а не про розв'язування.

Перед тим, як перейти до безпосереднього розгляду змісту роботи, зробимо невеличку екскурсію в історію математики.

Виникнення понять «більше» та «менше» поруч з поняттями рівності, було зумовлене необхідністю порівнювати між собою різні величини. Відомо, що поняттями нерівностей користувалися ще аж древні греки. Зокрема Архімед (III ст. до н. е.), працюючи над обчисленням довжини кола, встановив наступне: «Периметр всякого круга дорівнює потроєному діаметру з надлишком, який менше сьомої частини діаметра, але більше десяти сімдесят перших». Інакше кажучи, саме Архімед й вказав границі числа π: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, користуючись при цьому, поняттями нерівностей [13].

Також, добре відомими є перші геометричні нерівності: «довжина перпендикуляра менша довжини будь-якої похилої, проведеної до даної прямої з тієї ж точки», «кожна сторона трикутника є меншою від суми двох його інших сторін», «у трикутнику, проти більшого кута – завжди лежить більша сторона». Ці нерівності належать ще древньогрецькій математиці і, зокрема, містяться в знаменитих «Началах» Евкліда.

У своєму трактаті Евклід приводить цілий ряд нерівностей. Так, наприклад, він доводить, що для двох додатних чисел, середнє геометричне не буде більшим їх середнього арифметичного, тобто істинність нерівності $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ [14].

У «Математичному збірнику» III століття Паппи Олександрійського, доводиться таке: «Якщо $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d$ – додатні числа), то й $ad > bc$» [13].

Однак, усі ці міркування проводилися словесно й, у більшості випадків, спираючись на геометричну термінологію.

Наразі, доволі поширеним є формулювання постановок задач на мові нерівностей у різноманітних сферах застосуваннях математики. Наприклад, велика кількість економічних задач зводиться до детального дослідження систем лінійних нерівностей, що містять доволі велике число змінних. Також, досить часто, різні нерівності служать важливим допоміжним засобом, або, навіть, основною лемою, яка легко дозволяє довести чи навпаки, заперечити існування певних об’єктів (скажімо, розв’язків рівняння), оцінити їхню кількість та провести класифікацію [10].

Наприклад, для того, щоб розв’язати рівняння

$\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 2^{1-|y|}$, необхідно показати, що його ліва частина рівна або більша 2, а права – є не більшою 2, тобто, фактично потрібно скористатися нерівностями $a + \frac{1}{a} \geq 2,\ a > 0$ та $2^{-|a|} \leq 1$.

У наведеному прикладі, рівність буде можливою в тому випадку, коли обидві частини заданого рівняння прийматимуть значення 2. А це виконуватиметься лише при $x = y = 0$ [14].

Нерівність – це твердження про те, що якісь два математичні об’єкти будуть різними між собою, тобто не дорівнюватимуть один одному [11].

Класичні нерівності, з одного боку, – це могутнє джерело різноманітних нерівностей, а з іншого – їх часто використовують при доведенні нерівностей. Саме це, основним чином, й зумовило для них таку своєрідну назву. Отож, і ми, більш детально, розглянемо застосування загальновідомих класичних нерівностей, серед яких найпоширенішими є:

нерівності між середнім арифметичним, геометричним, квадратичним, гармонічним та степеневим; нерівності Коші, Коші – Буняковського, Чебишева, Бернуллі, Юнга, Єнсена, Гальдера, Мінковського; нерівність модулів та ще багато інших алгебраїчних нерівностей.

В даній дипломній роботі **об'єктом дослідження** виступають нерівності й основні методи їх доведень.

Предметом дослідження – класичні нерівності та їх застосування при розв'язуванні шкільних олімпіадних завдань.

Мета даної роботи – дослідження класичних нерівностей й основних методів доведень нерівностей з їхнім використанням при розв'язуванні завдань шкільних олімпіад.

Актуальність обраної теми полягає в тому, що нерівності та системи нерівностей в наш час набули широкого використання як у теоретичних дослідженнях, так і в розв'язуванні важливих практичних задач. Наразі, нерівності – це не лише допоміжний інструмент. Практично у кожній області математики – алгебрі та теорії чисел, геометрії й топології, теорії ймовірностей і теорії функцій, математичній фізиці та теорії диференціальних рівнянь, теорії інформації й дискретній математиці – можна вказати певні фундаментальні результати, сформульовані саме у вигляді нерівностей. Без них також не може обійтися ні хімія, ні фізика, ні астрономія.

У численних розділах математики, особливо в математичному аналізі та прикладній математиці, нерівності зустрічаються набагато частіше, ніж рівняння [19]. Скажімо, дуже рідко вдається точно – у вигляді формули або числа, знайти розв'язки певних практично важливих рівнянь, й для наближеного розв'язання завжди потрібно вказувати оцінку похибки, тобто доводити деяку нерівність.

Задачі, розв'язання яких є досить складним без використання класичних нерівностей, – часті «гості» математичних шкільних олімпіад ([1], [9], [10], [15], [20]) . Традиційно, розв'язання задач такого типу, являє собою деяку послідовність доволі простих міркувань. А вже сама логіка та ідеї усього ланцюжка цих елементарних ланок-міркувань, досить далеко виходять за рамки методів й прийомів, які розглядаються в шкільному курсі математики. Це також зумовлено й тим, що процес отримання, доведення та вивчення нерівностей і їх практичних застосувань, є неформальним й доволі складно алгоритмізується.

Доволі важливим питанням, яке останнім часом виникає все частіше, методики вивчення математики є введення у програму профільного шкільного навчання теми «Доведення нерівностей». Де відповідні задачі розв'язуватимуться, в основному, алгебраїчним способом, який є одним із найкращих засобів розвитку самостійного та творчого мислення [14]. За допомогою спеціально підібраних задач, котрі зможуть зацікавити учнів своєю очевидною простотою і разом тим, що їх розв'язок «дається в руки» не відразу, можна показати учням красу, стрункість та простоту логічних міркувань. Доволі часто, задачі на доведення нерівностей розв'язуються декількома способами. І це дає можливість звернути увагу учнів не лише на найбільш раціональний й красивий спосіб розв'язання поданої задачі, але й на ті способи, котрі можуть використовуватися при розв'язуванні інших задач, й у деяких випадках виявляються єдиними.

Що ж до **структури роботи**, то вона складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Перший розділ – «Основні традиційні методи доведень нерівностей», – присвячений загальним відомостям про нерівності та деяким основним методам їх доведень ([7], [12], [18]). Адже задачі на доведення нерівностей, дають можливість закріпити велике коло теоретичних питань, що вивчаються в шкільному курсі математики, по-новому висвітлити уже відомі факти. Також, у цьому розділі, значна увага приділена використанню саме класичних нерівностей при розв'язуванні олімпіадних задач [16].

В другому розділі роботи, який має назву «Нерівності в геометрії», розглянуто застосування нерівностей в геометрії, а також, використання певних геометричних елементів при доведенні алгебраїчних нерівностей, що й стало, доволі цікавою «родзинкою» цієї дипломної роботи [13].

Стосовно списку використаних джерел, то при розробці практичних завдань, значна увага приділялась задачам українських математичних республіканських олімпіад, задачам Київської МАН та конкурсним задачам підвищеної складності ([1], [3], [6], [9], [10], [11], [15]).

Обсяг роботи – 72 сторінки друкованого тексту.

РОЗДІЛ І. ОСНОВНІ ТРАДИЦІЙНІ МЕТОДИ ДОВЕДЕНЬ НЕРІВНОСТЕЙ

1.1. Доведення нерівностей з використанням означення

Згідно означення вважають, що $a > b$ $(a < b)$, якщо різниця $a - b$ є додатним (від'ємним) числом. Й для доведення нерівності $f(a, b, \ldots, k) > \mathrm{g}(a, b, \ldots, k)$ на заданій множині значень змінних a, b, …, k достатньо розглянути різницю $f(a, b, \ldots, k) - \mathrm{g}(a, b, \ldots, k)$ і показати, що при заданих значеннях змінних a, b, …, k, вона додатна. Аналогічні міркування застосовують для доведення нерівностей виду $f < \mathrm{g}$, $f \geq g$, $f \leq \mathrm{g}$ [19].

Розглянемо приклади таких доведень.

Задача 1.1.1. Довести, що для деяких довільних $a \geq 0$, $b \geq 0$ виконується нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (нерівність Коші).

Доведення: Розглянемо різницю $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ та покажемо, що вона не може бути від'ємною. Отримаємо:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Очевидно, що при довільних невід'ємних значеннях a та b вираз $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ не може бути від'ємним. Отож, різниця $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ невід'ємна, й це означає, що $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Зауважимо, що знак рівності буде можливий тоді і тільки тоді, коли $a=b$.

Задача 1.1.2. Довести, що $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 10 + \pi > 2a + 12b + 6c$ [10].

Доведення: Запишемо різницю $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 10 + \pi - (2a + 12b + 6c)$ й покажемо, що вона додатна. Перегрупувавши доданки, отримуємо: $(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) + \pi - 3 = (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 + \pi - 3$.

Очевидним є те, що отриманий вираз додатний при будь-яких значеннях a, b і c.

Нерівність доведено.

Задача 1.1.3. Довести, що якщо $a+b+c \geq 0$, то $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$.

Доведення: Перетворимо різницю $a^3+b^3+c^3-3abc$ наступним чином:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=(a+b+c)((a+b)^2-ac-bc+c^2-3ab)=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right).$$

Згідно умови задачі, $a+b+c \geq 0$, тому отриманий вираз не може бути від'ємним. Цим й завершуватиметься доведення нерівності.

Знак рівності буде можливим лише у випадках, коли $a+b+c=0$ та $a=b=c$.

Задача 1.1.4. Довести, що якщо $ab>0$, то $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$.

Доведення: Маємо: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$.

Задача 1.1.5. Довести, що для довільного a виконуватиметься нерівність

$$\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}.$$

Доведення:

$$\frac{a^2}{1+a^4}-\frac{1}{2}=\frac{2a^2-1-a^4}{2(1+a^4)}=-\frac{(a^2-1)^2}{2(1+a^4)} \leq 0.$$

Отож, нерівність доведена.

Задача 1.1.6. Довести, що якщо $a+b \geq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Доведення:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2}=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{a^2b^2}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2} \geq 0.$$

Отож, якщо $a + b \geq 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$, то $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Задача 1.1.7. Довести нерівність $\frac{x^3}{y^2} \geq 3x - 2y$ (де x, y – додатні числа).

Доведення: Маємо:

$$\frac{x^3}{y^2} - 3x + 2y = \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{y^2} = \frac{(x-y)(x^2 + xy - 2y^2)}{y^2} = \frac{(x-y)^2(x+2y)}{y^2} \geq 0.$$

Зауважимо, що вище доведена нерівність може використовуватися й при доведенні інших нерівностей методом підсилення (наприклад, задача 1.5.12).

Задача 1.1.8. Довести, що якщо $x > y > z$, то $x^2y + y^2z + z^2x > x^2z + y^2x + z^2y$.

Доведення:

$$x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y = xy(x-y) - (xz + yz)(x-y) + z^2(x-y) =$$
$$= (x-y)(xy - xz - yz + z^2 = (x-y)(z-y)(z-x).$$

Згідно умови задачі, перший множник отриманого виразу додатний, а два інші – від'ємні, таким чином увесь вираз буде додатний.

Задача 1.1.9. Довести нерівність $1 + 2a^4 \geq a^2 + 2a^3$.

Доведення: Доведення цієї нерівності випливатиме з наступних перетворень:

$$1 + 2a^4 - a^2 - 2a^3 = 2a^3(a-1) - (a^2 - 1) = (a-1)(2a^3 - a - 1) = (a-1)^2\left(2a^2 + 1\right) \geq 0.$$

Знак рівності буде можливим лише в тому випадку, коли $a = 1$.

Задача 1.1.10. Довести, що якщо $a \neq 2$, то $\frac{1}{a^2 - 4a + 4} > \frac{2}{a^3 - 8}$ [9].

Доведення: Доведемо нерівність, користуючись наступними співвідношеннями:

$$\frac{1}{a^2 - 4a + 4} - \frac{2}{a^3 - 8} = \frac{a^2 + 2a + 4 - 2(a-2)}{(a-2)^2(a^2 + 2a + 4)} = \frac{a^2 + 8}{(a-2)^2((a+1)^2 + 3)} > 0.$$

Задача 1.1.11. Довести нерівність $a^4+b^4\geq ab^3+a^3b$.

Доведення: Виконаємо перетворення:

$$a^4+b^4-ab^3-a^3b=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2).$$

Оскільки $(a-b)^2\geq 0$, а вираз a^2+ab+b^2 може набувати лише додатних значень (дискримінант цього квадратного тричлена відносно деякої довільної змінної є від'ємним), то нерівність доведено.

Знак рівності буде можливим тоді й тільки тоді, коли $a=b$.

1.2. Синтетичний метод доведення нерівностей

Синтетичний метод полягає в тому, що за допомогою виконання певних перетворень, нерівність, яку потрібно довести, виводять із деяких уже відомих (очевидних, або, як їх ще називають, опорних) нерівностей. В ролі таких нерівностей доволі часто використовують наступні:

а) $(a-b)^2\geq 0$, б) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ при $a\geq 0,\ b\geq 0$, в) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ при $ab>0$,

г) $ax^2+bx+c>0$ при $a>0,\ b^2-4ac<0$ [17].

Логічну схему цього методу доведення можна представити у вигляді імплікацій $A_1\to A_2\to A_3\to\ldots\to A_n\to B$,

де A_1 – деяка початкова правильна нерівність, $A_i\ (i=2,3,\ldots,n)$ – отримані з неї правильні нерівності, B – нерівність, яку необхідно довести. Даний метод є досить ефективним, проте не завжди чітко й відразу зрозуміло, з яких опорних нерівностей потрібно розпочинати доведення. Відповідь на це питання, зазвичай, дає аналітичний метод доведення, який ми більш детально розглянемо у наступному пункті роботи.

Наведемо певні приклади доведень нерівностей з використанням синтетичного методу.

Задача 1.2.1. Довести, що для довільних $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0$ виконуватиметься нерівність $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$.

Доведення: Ми знаємо, що при певних заданих обмеженнях на змінні виконуватимуться нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$. Застосувавши до лівих частин нерівність Коші й використавши записані вище співвідношення, отримуємо:

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}, \quad \text{або} \quad \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Рівність буде можливою тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуватимуться умови $a = b, c = d$ та $\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$, тобто, коли $a = b = c = d$.

Задача 1.2.2. Довести, що $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ для $n = 2, 3, 4, \ldots$ [3].

Доведення: У ролі опорних нерівностей використаємо наступні нерівності Коші:

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n\cdot 1}, \quad \frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1)\cdot 2}, \quad \frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2)\cdot 3}, \ \ldots,$$

$$\frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2\cdot(n-1)}, \quad \frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1\cdot n}.$$

Перемноживши їх, отримаємо:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \sqrt{n\cdot 1\cdot (n-1)\cdot 2\cdot (n-2)\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2\cdot (n-1)\cdot 1\cdot n} = n!.$$

Очевидно, що у першій опорній нерівності при значені $n > 1$ виконання рівності буде неможливим, тоді остаточно матимемо строгу нерівність, тобто, що $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$.

Задача 1.2.3. Довести, що при $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ виконується нерівність

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$ [5].

Доведення: *Перший спосіб.*

Використаємо очевидні нерівності $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ й $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2$. Послідовно додавши їх ліві та праві частини, отримаємо таку нерівність: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 6$.

Запишемо одержане співвідношення у вигляді:

$$\left(1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\geq 9,$$

або

$$\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c}\geq 9.$$

Винісши в лівій частині останньої нерівності вираз $a+b+c$ за дужки, в результаті, отримуємо нерівність, яку й необхідно було довести.

Знак рівності виконуватиметься при $a=b=c$.

Другий спосіб.

Скористаємося розглянутим вище способом доведення нерівностей з використанням означення. Для цього виконаємо такі перетворення:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-6=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-2\right)=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}\geq 0.$$

Звідси можна зробити висновок, що задана нерівність – правильна.

Задача 1.2.4. Доведемо нерівність (нерівність Коші – Буняковського) $\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\right)^2$ [21].

Доведення: Розглянемо опорні нерівності

$(a_1-\lambda b_1)^2\geq 0$, $(a_2-\lambda b_2)^2\geq 0$,, $(a_n-\lambda b_n)^2\geq 0$.

Додавши їх, попередньо скориставшись формулою квадрату різниці, отримаємо нерівність $\lambda^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq 0$, яка виконуватиметься при довільному дійсному значенні числа λ. З того, що старший коефіцієнт $\sum_{i=1}^{n} b_i^2$ отриманого квадратного відносно λ тричлена додатний, випливає те, що його дискримінант однозначно не може бути додатним. Тому

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \le 0.$$

В результаті отримали потрібну нерівність.

Задача 1.2.5. Довести, що для довільних чисел $a > 0$, $b > 0$, виконуватиметься нерівність $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \ge a + b$.

Доведення: Використаємо, в ролі опорних, такі дві очевидні нерівності: $\frac{a^2}{b} \ge 2a - b$ та $\frac{b^2}{a} \ge 2b - a$.

Додавши їх, отримуємо нерівність $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \ge a + b$, яку й потрібно було довести.

Знак рівності виконуватиметься лише в тому випадку, коли $a = b$.

Задача 1.2.6. Довести, що для деяких дійсних чисел a, b, c виконується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$.

Доведення: Додавши послідовно очевидні нерівності $(a - b)^2 \ge 0,\ (b - c)^2 \ge 0,\ (a - c)^2 \ge 0$ й використавши формулу квадрату різниці, отримуємо:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2ab - 2bc - 2ac \ge 0.$$

З отриманого співвідношення випливатиме нерівність, яку ми й доводимо.

Знак рівності можливий лише у випадку, коли $a = b = c$.

Задача 1.2.7. Довести, що при $a_i > 0,\ i = 2, 3, \ldots, n$ виконується нерівність

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$ [14].

Доведення: Розглянемо опорні нерівності

$$\left(\sqrt{a_1} - \frac{\lambda}{\sqrt{a_1}}\right)^2 \geq 0, \quad \left(\sqrt{a_2} - \frac{\lambda}{\sqrt{a_2}}\right)^2 \geq 0, \quad \left(\sqrt{a_n} - \frac{\lambda}{\sqrt{a_n}}\right)^2 \geq 0.$$

Додавши їх, отримаємо нерівність

$$\lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} - 2n\lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i \geq 0,$$

яка виконуватиметься при довільному дійсному числі λ. Тому на дискримінант D отриманого відносно λ квадратного тричлена накладемо таку умову:

$$\frac{1}{4}D = n^2 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leq 0.$$

Звідси й отримаємо потрібну нам нерівність. Дещо пізніше, розглянемо інші способи доведення типових нерівностей, зокрема, використання скалярного добутку та його основних властивостей.

Задача 1.2.8. Довести, що для довільних чисел $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, виконуватиметься нерівність

$$\frac{a+b+c}{3+a+b+c} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Розв'язання: Додавши послідовно три опорні нерівності $\frac{a}{3+a+b+c} < \frac{a}{1+a}$, $\frac{b}{3+a+b+c} < \frac{b}{1+b}$, $\frac{c}{3+a+b+c} < \frac{c}{1+c}$, в результаті ми отримаємо потрібну нерівність.

1.3. Аналітичний метод доведення нерівностей

Інколи може скластися ситуація, що застосування вищевказаних прийомів й методів не даватиме бажаного результату, адже доведення нерівностей з використанням означення, через громіздкість та складність окремих перетворень, може бути не реалізованим, а використання синтетичного методу може стати досить проблематичним через те, що не буде очевидним, з використання яких опорних нерівностей доречно розпочати доведення. Одним із можливих варіантів у цій ситуації може бути використання аналітичного методу доведення. Суть цього методу полягає в отриманні деяких очевидних істинних нерівностей після виконання ряду перетворень над нерівністю, яку необхідно довести [18]. Використовуючи мову логіки, можна реалізували наступну схему пошуку:

$$B \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_n,$$

де B – нерівність, яку необхідно довести, $A_i\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ – нерівності, отримані внаслідок перетворень над даною нерівністю, A_n – кінцева правильна нерівність.

Запропонована схема носить назву аналізу Евкліда. Очевидно, що доведення не може завершитися лише відшуканням кінцевої нерівності A_n, адже імплікація $B \to A_n$ може бути істиною і в тому випадку, коли твердження B – хибне. Тому наступним важливим етапом доведення має бути обґрунтування істинності імплікацій, тобто можливості здійснення зворотних міркувань.

$$A_n \to A_{n-1} \to \ldots \to A_2 \to A_1 \to B.$$

Можна зробити висновок, що фактично, ми матимемо реалізацію схеми синтетичного методу, але з уже відомою початковою опорною нерівністю (у даному випадку – це твердження A_n) [14].

Розглянемо приклади таких доведень.

Задача 1.3.1. Довести, що для довільних невід'ємних чисел a та b виконуватиметься нерівність $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

(задача 1.1.1, розв'язання якої тут представлено іншим методом).

Доведення: Виконаємо над даною нерівністю такі перетворення:

$$a + b \ge 2\sqrt{ab},$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ge 0,$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$$

Отримана нерівність правильна для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$. Очевидно, що звідси легко можна отримати попередню нерівність, а з неї в свою чергу – нерівність, яку й потрібно було довести.

Задача 1.3.2. Довести, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуватиметься нерівність $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

Доведення: Очевидним є те, що якщо $a+b=0$, то виконуватиметься рівність і твердження буде вірним. При $a+b \neq 0$ задача зведеться до доведення нерівності $a^2-ab+b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ або нерівності $3a^2-6ab+3b^2 \geq 0$, яка є очевидною.

У розділі 2. 5 (задача 2.5.2) наведемо доведення цієї нерівності іншим способом, в якому, зокрема, використаємо ідеї опуклості функції.

Задача 1.3.3. Довести, що для довільних невід'ємних значень a та b виконуватиметься нерівність $\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$.

Доведення: Піднісши до квадрату обидві частини нерівності, матимемо:

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \leq (a+b)^2 \Rightarrow a^2+b^2 \leq a^2+2ab+b^2.$$

Отримаємо правильну нерівність $2ab \geq 0$. Також, доволі очевидним є те, що крім неї, правильною буде кожна з попередніх нерівностей.

Задача 1.3.4. Довести, що для довільних додатних чисел a та b $(a>0,\ b>0)$ виконується нерівність $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Доведення: Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності.

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2.$$

Звідси маємо:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b \Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\geq 0.$$

Згідно умови задачі, отримана нерівність правильна. А отже з неї, рухаючись у зворотному порядку, можна отримати й усі попередні нерівності, серед них – і задану.

Задача 1.3.5. Довести, що якщо $a+b\geq 0$, то $ab(a+b)\leq a^3+b^3$.

Доведення: Запишемо різницю правої та лівої частин нерівності:

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)^2(a+b)\geq 0.$$

Використовуючи, в ролі початкової, отриману нерівність й рухаючись у зворотному порядку, приходимо до нерівності, яку й потрібно було довести.

Задача 1.3.6. При яких значеннях параметра k виконуватиметься нерівність $a^2+2ab+2b^2+b+k>0$, якщо a та b – довільні?

Розв'язання: Маємо:

$$a^2+2ab+2b^2+b+k=(a+b)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}.$$

При довільних значеннях a та b, отриманий вираз буде додатним, якщо $k>\frac{1}{4}$.

Задача 1.3.7. Довести, що для $n\geq 1$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

Доведення: Перетворимо нерівність до вигляду $1+\sqrt{n(n-1)}<\sqrt{n(n+1)}$, й піднісши до квадрату, отримуємо:

$$2\sqrt{n(n-1)}<2n-1 \Leftrightarrow 4n^2-4n<(2n-1)^2.$$

Очевидно, що отримана нерівність істина, й можливе виконання перетворень в зворотному порядку.

Це доводить задану нерівність.

Задача 1.3.8. Знайти найменше значення виразу $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7$.

Розв'язання: Перетворимо даний вираз таким чином:

$$2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7=(x-2y)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+2.$$

Бачимо, що найменше значення отриманого виразу дорівнює 2 й досягатиметься воно при $x=2,\ y=1$. Фактично ми довели нерівність $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7\geq 2$.

Задача 1.3.9. Довести нерівність $x^{10}+x^2+1\geq 3x^4$.

Доведення: Виконаємо наступні перетворення над виразом:

$$x^{10}+x^2+1-3x^4=(x^2-1)x^8+(x^2-1)x^6+(x^2-1)x^4-(x^2-1)\cdot 2x^2-(x^2-1)=$$
$$=(x^2-1)(x^8+x^6+x^4-2x^2-1)=$$
$$=(x^2-1)\cdot\left((x^2-1)x^6+(x^2-1)\cdot 2x^4+(x^2-1)\cdot 3x^2+(x^2-1)\right)=$$
$$=(x^2-1)^2\cdot(x^6+2x^4+3x^2+1).$$

Отриманий вираз однозначно не може бути від'ємним, що й доводить задану нерівність.

Знак рівності буде можливим лише у випадку, коли $x=\pm 1$.

Задача 1.3.10. Знайти найменше значення функції $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ [5].

Розв'язання: Перетворимо наш вираз, перемножуючи між собою два крайніх та два середніх множники:

$$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)=(x^2+5x+5)^2-1.$$

Бачимо, що найменше значення функції буде тоді, коли найменшим буде перший доданок. Тобто при всіх значеннях x, які будуть коренями рівняння $x^2+5x+5=0$. Знаходимо $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$. При знайдених значеннях

$$f_{\min} = f\left(\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = -1.$$

1.4. Метод від супротивного

Доведення нерівностей методом від супротивного полягає в запереченні початкового твердження, тобто знак $>$ ($\geq$, $<$, $\leq$) нерівності замінюється на $\leq$ (відповідно $<$, $\geq$, $>$). Після цього обґрунтовують неможливість існування утвореного співвідношення.

Наведемо деякі приклади застосування цього методу.

Задача 1.4.1. Довести, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0$ виконуватиметься нерівність $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ [3].

Доведення: Нехай, при певних значеннях параметрів a, b, c та d виконується нерівність $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$. Піднісши до квадрату обидві частини нерівності та здійснивши деякі очевидні спрощення, отримуємо:

$$ad + bc < 2\sqrt{abcd} \Leftrightarrow \frac{ad+bc}{2} < \sqrt{(ad)\cdot(bc)},$$

що суперечить нерівності Коші. Отже, наше припущення невірне. Таким чином, ми довели правильність початкової нерівності.

Рівність буде можливою, якщо для заданих чисел виконуватиметься умова $ad = bc$.

Задача 1.4.2. Довести, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ та $c \geq 0$ виконується нерівність $\dfrac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Доведення: Припустимо, що існує деякий набір невід'ємних чисел a, b та c, для яких виконується нерівність $\dfrac{a+b+c}{3} > \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності й помноживши їх на 3, отримуємо $(a+b+c)^2 > 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, звідки $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc < 0$

або

$$\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(c-b\right)^2<0,$$

що є неможливим. Тому початкова нерівність правильна.

Рівність можлива тоді, коли для заданих чисел виконуватиметься умова $a=b=c$.

Задача 1.4.3. Довести, що при $a\neq b$ і $ab>0$ число $\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-1\right)$ буде додатним [6].

Доведення: Перепишемо задане число у вигляді $\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{b}$ й припустимо, що воно не додатне. Тоді має виконуватися нерівність

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\leq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\Leftrightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\leq a+b.$$

Звідси дістаємо $a^3+b^3-a^2b-ab^2\leq 0$ або

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)^2(a+b)\leq 0.$$

При будь-яких значеннях змінних, котрі задовольнятимуть умову задачі, отримане співвідношення не виконуватиметься. Таким чином, наше початкове припущення є невірним. Отож, задане число – додатне.

Задача 1.4.4. Довести, що для будь-яких дійсних значень x виконується нерівність

$$(x-6)(x-9)(x^2-5x+4)+x^2+73\geq 10x.$$

Доведення: Нехай $(x-6)(x-9)(x^2-5x+4)+x^2+73<10x$.

Перетворимо добуток виразів у лівій частині нерівності наступним чином:

$$\begin{aligned}&(x-6)(x-9)(x^2-5x+4)+x^2+73-10x=(x-6)(x-9)(x-1)(x-4)+x^2+73-10x=\\&=(x^2-10x+9)(x^2-10x+24)+x^2-10x+73=t(t+15)+t+64=(t+8)^2<0,\end{aligned}$$

де $t=x^2-10x+9$. Очевидно, що отримане співвідношення є неможливим, й, таким чином, показує невірність припущення та доводить задану нерівність.

Задача 1.4.5. Довести, що якщо $a+b\geq 0$, то $ab(a+b)\leq a^3+b^3$.

Доведення: Припустимо виконання нерівності $ab(a+b)>a^3+b^3$, тобто, що вираз $a^3+b^3-ab(a+b)$ є від'ємним. Перетворивши одержаний вираз, матимемо:

$$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2.$$

Згідно умови задачі, отриманий вираз не може бути від'ємним, тому наше припущення невірне.

1.5. Доведення нерівностей методом підсилення

Нехай нам треба довести нерівність $A>B$, де A, B – деякі числові вирази або ж вирази із змінними. Вважатимемо очевидною або, принаймі такою, яку легко довести, деяку нерівність $A_1>B_1$. Якщо ми доведемо нерівності $A>A_1$ та $B_1>B$, тоді, очевидно, що наша задача буде розв'язаною. Це випливатиме з ланцюжка нерівностей $A>A_1>B_1>B$. Інколи можуть траплятися випадки, що такий ланцюжок буде довшим, а інколи навіть коротшим, якщо $A_1=B_1$. Розглянутий вище прийом доведення нерівностей, називають методом підсилення [12].

Під час застосування цього методу, найчастіше користуються наступними співвідношеннями:

$$a^2+b^2\geq 2ab,$$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \text{ при } a\geq 0,\ b\geq 0,$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \text{ при } ab>0,$$

$$\frac{a^2}{b}\geq 2a-b \text{ при } b>0,$$

$$\frac{a}{b}>\frac{a}{b+1} \text{ при } a>0,\ b>0.$$

Наведемо приклади використання методу підсилення при доведені нерівностей.

Задача 1.5.1. Довести нерівність $\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdot\ldots\left(1-\frac{1}{2013^3}\right)>\frac{1}{2}$ [3].

Доведення: Маємо:

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^3}\right)>\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)=$$

$$=\frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\ldots(2013-1)(2013+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 2013^2}=\frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2012\cdot 2014}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 2013^2}=\frac{2014}{2\cdot 2013}>\frac{1}{2}.$$

Задача 1.5.2. Довести, що при $n=2,3,4,\ldots$ виконуватиметься нерівність $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$.

Доведення: Маємо:

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Додавши послідовно ці нерівності, отримаємо:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

Отже, $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$.

Задача 1.5.3. Довести нерівність

$$43<\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}<44.$$

Доведення*:* Спочатку позбудемося ірраціональності в знаменниках дробів. Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2},\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=\sqrt{2013}-\sqrt{2012},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2013}-\sqrt{2012}\right)=\sqrt{2013}-1.$$

Для остаточного доведення нерівності лишилося зауважити, що

$$\sqrt{2013}-1<\sqrt{45^2}-1=44; \quad \sqrt{2013}-1>\sqrt{44^2}-1=43.$$

Задача 1.5.4. Довести нерівність $513^{18}>624^{17}$.

Розв’язання:

$$513^{18}>512^{18}=2^{162}>2^{161}=128^{23}>125^{23}=5^{69}>5^{68}=625^{17}>624^{17}.$$

Задача 1.5.5. Довести нерівність

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<5,$$

якщо в кожному з цих доданків використано 2013 радикалів.

Доведення:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<$$

$$<\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}}}=3+2=5.$$

Задача 1.5.6. Для чисел $a>0$ й $b>0$ довести нерівність $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\geq a+b$.

Доведення: Двічі використавши нерівність $\frac{x^2}{y}\geq 2x-y$, де $x>0,\ y>0$, отримуємо:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\geq\frac{a}{b}(2a-b)+\frac{b}{a}(2b-a)=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)-(a+b)\geq$$

$$\geq 2\big(2a-b+2b-a\big)-(a+b)=a+b,$$

що й потрібно було довести.

Задача 1.5.7. Довести нерівність $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2013}>5$ [3].

Доведення: Очевидними є нерівності

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\ \ldots,$$

$$\frac{1}{513}+\frac{1}{514}+\ldots+\frac{1}{1024}>512\cdot\frac{1}{1024}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{1025}+\frac{1}{1026}+\ldots+\frac{1}{2013}>0.$$

Додавши їх та число $\frac{1}{2}$ – перший доданок суми, отримуємо потрібну нам нерівність.

Задача 1.5.8. Порівняти числа $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ та $2\sqrt{n}$ при $n \geq 1$ [8].

Розв'язання: Порівняємо між собою квадрати заданих чисел, тобто вирази $2n+2\sqrt{n^2-1}$ та $4n$ або ж числа $\sqrt{n^2-1}$ та n. Очевидно, що $\sqrt{n^2-1}<\sqrt{n^2}=n$, тому й перше із заданих чисел буде меншим.

Задача 1.5.9. Довести, що $100!<50^{100}$.

Доведення: Очевидним є те, що $1\cdot 50\cdot 99\cdot 100<50^4$, $2\cdot 98<50^2$, $3\cdot 97<50^2$, …, $49\cdot 51<50^2$. Перемноживши ці нерівності, в результаті отримуємо, що $100!<50^{100}$.

Задача 1.5.10. Довести, що $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Доведення: Очевидними будуть нерівності $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, …, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. Тому

$$a^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}\right)=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}.$$

А звідси, $a<\frac{1}{10}$.

Задача 1.5.11. Довести, що для усіх додатних чисел a, b, c, для яких $abc=1$, виконуватиметься нерівність $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ [9].

Доведення: При $y>0$ із очевидної нерівності $(x-y)^2\geq 0$ випливатиме, що $\frac{x^2}{y}\geq 2x-y$. Використаємо отримане співвідношення при перетворенні доданків заданої нерівності. Отримаємо:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{a^{-2}}{ab+ac}+\frac{b^{-2}}{ab+bc}+\frac{c^{-2}}{ac+bc}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{2}{a}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\left(\frac{2}{b}\right)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{\left(\frac{2}{c}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{4}\left(\left(\frac{4}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{4}{b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{4}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}.$$

Наприкінці доведення, при здійсненні перетворень для чисел $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$, ми використали нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним, яку розглянемо більш детально в пункті 1.7 даної роботи.

Рівність в заданому співвідношенні виконуватиметься лише при $a=b=c=1$.

Задача 1.5.12. Довести, що для довільних чисел $x>0, y>0$ виконуватиметься нерівність $\frac{x^4}{y^3}\geq 4x-3y$.

Доведення: Використавши нерівність $\frac{x^2}{y}\geq 2x-y$, отримаємо:

$$\frac{x^4}{y^3}=\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\geq\frac{1}{y}\cdot(2x-y)^2=\frac{4x^2}{y}-4x+y\geq 4(2x-y)-4x+y=4x-3y.$$

Зауважимо, що розглянуті нерівності, першу з яких ми доводимо й друга, яка використовується при доведенні, є деяким частинним випадком нерівності $\frac{x^n}{y^{n-1}}\geq nx-(n-1)y$, котра випливає з тотожності:

$$x^n-nxy^{n-1}+(n-1)y^n=(x-y)^2(x^{n-2}+2x^{n-3}y+3x^{n-4}y^2+\ldots+(n-2)xy^{n-3}+(n-1)y^{n-2}).$$

Задача 1.5.13. Для деяких чисел a, b, c, кожне з яких є не меншим 1, доведіть нерівність $\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}\geq 1$.

Доведення: Відповідно до умови задачі, маємо: $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2};\ \frac{1}{b+c} \le \frac{1}{2}$. Тому,

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} = \frac{1}{\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}} = \frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}} \ge \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1.$$

Рівність досягатиметься лише в тому випадку, коли $a = b = c = 1$.

Задача 1.5.14. Для деяких чисел a, b, c, причому кожне з них є не меншим 2, доведіть нерівність $(a^3+b)(b^3+c)(c^3+a) \ge 125abc$.

Доведення: Цілком очевидно, що при $a \ge 2$ виконуватиметься нерівність $a^3 \ge 4a$. Аналогічно, при $b \ge 2$ матимемо $b^3 \ge 4b$ й при $c \ge 2$ будемо мати, що $c^3 \ge 4c$. Тому,

$$(a^3+b)(b^3+c)(c^3+a) \ge (4a+b)(4b+c)(4c+a) =$$
$$= (a+a+a+a+b)(b+b+b+b+c)(c+c+c+c+a) \ge 5\sqrt[5]{a^4b}\cdot 5\sqrt[5]{b^4c}\cdot 5\sqrt[5]{c^4a} = 125abc.$$

Рівність досягатиметься при $a = b = c = 2$.

Задача 1.5.15. Довести, що для усіх натуральних чисел m та n, $2^{m+n-2} \ge mn$.

Доведення: Очевидним є те, що дана задача зведеться до доведення нерівності $2^k \ge 2k,\ k \in N$, адже підставивши в неї значення $k = m$ та $k = n$ і перемноживши одержані нерівності, отримуємо співвідношення, яке й доводиться.

Отож маємо, що при $k = 1$ виконуватиметься знак рівності. А при $k > 1$, скориставшись біномом Ньютона, отримаємо:

$$2^k = (1+1)^k = 1^k + k\cdot 1^{k-1}\cdot 1 + \ldots + k\cdot 1\cdot 1^{k-1} + 1^k \ge 2k.$$

Задача 1.5.16. Знайти найменше та найбільше значення виразу $\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}$, якщо кожне з чисел a, b, c належить відрізку [2;3] [15].

Доведення: Виконаємо деякі перетворення даного виразу.

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}=\frac{1}{\frac{a+b+b+c}{(a+b)(b+c)}}=\frac{1}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}}.$$

Згідно умови задачі, матимемо:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{3+3}\le\frac{1}{b+c}\le\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{6}=\frac{1}{3+3}\le\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Отож, величина знаменника $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$ змінюватиметься в межах від $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{2}$, а тому величина усього заданого виразу – від 2 до 3.

Найменше та найбільше значення досягатимуться відповідно при $a=b=c=3$ та $a=b=c=2$.

Задача 1.5.17. Сума деяких двох чисел a та b, причому $a>0$, $b>0$, дорівнює 2013. Довести, що ці числа задовольнятимуть нерівність $a^5+b^5\ge 2013a^2b^2$.

Доведення: Подамо задане співвідношення у вигляді $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\ge 2013$ та, двічі скориставшись нерівністю $\frac{x^2}{y}\ge 2x-y$, перетворимо його ліву частину. В результаті отримаємо:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\ge\frac{a}{b}(2a-b)+\frac{b}{a}(2b-a)=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)-(a+b)\ge$$

$$\ge 2(2a-b+2b-a)-(a+b)=a+b=2013,$$

що й потрібно було довести.

Задача 1.5.18. Довести, що для всіх a з проміжку (0,1) виконуватиметься нерівність

$$a^5+(1-a)^5\ge(a^2-a)^2.$$

Доведення: Запишемо нерівність у вигляді $\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{(1-a)^3}{a^2}\ge 1$. Далі, аналогічно міркуючи, як і в попередній задачі, отримуємо:

$$\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{(1-a)^3}{a^2}\geq\frac{a}{1-a}(2a-1+a)+\frac{1-a}{a}(2-2a-a)=2\left(\frac{a^2}{1-a}+\frac{(1-a)^2}{a}\right)-1-1\geq$$

$$\geq 2\bigl(2a-1+a+2-2a-a\bigr)-2=0,$$

що й необхідно було довести.

Задача 1.5.19. Довести, що якщо m, n, k – натуральні числа, то $mn+nk+mk\leq 3mnk$.

Доведення: Доведення випливатиме із співвідношення $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq 3$, оскільки, у лівій частині нерівності, кожен з трьох доданків не перевищує 1. Рівність буде можлива лише у випадку $m=n=k=1$.

1.6. Метод математичної індукції при доведенні нерівностей

Метод математичної індукції заснований на принципі математичної індукції, який полягає в наступному: деяке твердження $A(n)$ буде істинним для будь-якого натурального n, якщо:

1) воно є істинним для $n=1$;

2) й з істинності $A(n)$ для довільного натурального $k=n$, випливатиме істинність для наступного натурального числа $n=k+1$.

Будь-яке з доведень методом математичної індукції передбачатиме реалізацію таких трьох основних етапів:

перший етап – показуємо істинність твердження $A(1)$;

другий етап – припускаємо істинність твердження $A(k)$ і, виходячи з нього, доводимо істинність твердження $A(k+1)$.

Виконавши ці міркування, можна стверджувати, що твердження $A(n)$ буде істинним для будь-якого натурального n. Відповідний висновок і є третім етапом, який завершуватиме доведення.

Іноді, також користуються узагальненим принципом математичної індукції: твердження $A(n)$ буде істинним для будь-якого натурального $n\geq m$, якщо воно істинне для натурального числа $n=m$ й, з істинності $A(n)$ для довільного натурального $n=k\geq m$ випливатиме істинність для наступного натурального числа $n = k + 1$ [14].

Вищеописаний метод досить часто використовують при обґрунтуванні багатьох математичних тверджень, зокрема й при доведенні нерівностей. Розглянемо це більш детально на прикладах.

Задача 1.6.1. Довести, що для деякого натурального числа n та довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконується нерівність

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$$ [4].

Доведення: При $n = 1$, матимемо виконання рівності, отож, дане твердження буде вірним. Нехай воно буде істинним й при деякому натуральному числі $k = n$, таким чином, очевидною є істинність того, що $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a^k + b^k}{2}$. Користуючись зробленим припущенням, покажемо також істинність нерівності $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$. Оскільки, згідно припущення, ліва частина нерівності обмежена виразом

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2},$$

то для доведення нам буде достатньо показати, що:

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}.$$

Для цього розглянемо різницю

$$(a^k + b^k)(a+b) - 2(a^{k+1} + b^{k+1}) = ab^k + ba^k - a^{k+1} - b^{k+1} = \left(a^k - b^k\right)\left(b - a\right).$$

Отриманий вираз при $a \geq 0,\ b \geq 0$ завжди буде від’ємним або дорівнюватиме 0 (при $a = b$, тому $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$. Відповідно до принципу математичної індукції істинною також буде початкова нерівність $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$.

Задача 1.6.2. Довести, що для деякого натурального числа $n \geq 10$ виконуватиметься нерівність $2^n - n^3 > 23$ [1].

Доведення: При $n = 10$ отримаємо правильну нерівність $2^{10} - 10^3 > 23$. Нехай вона буде правильною і при деякому натуральному числі $k = n \geq 10$, й тому, виконуватиметься нерівність $2^k - k^3 > 23$. Користуючись цим припущенням, покажемо також правильність нерівності $2^{k+1} - (k+1)^3 > 23$. Матимемо:

$$2^{k+1} - (k+1)^3 - 23 = 2\left(2^k - k^3 - 23\right) + k^3 - 3k^2 - 3k - 1 + 23 =$$

$$= 2\left(2^k - k^3 - 23\right) + k^3 - 3k^2 - 3k + 22.$$

Перший доданок отриманого виразу, згідно припущення індукції, буде додатним. Оцінимо також суму інших доданків, тобто виразу $f(k) = k^3 - 3k^2 - 3k + 22$. Функція $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 22$ матиме похідну $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$ та екстремуми у точках $x = 1 \pm \sqrt{2}$, й, очевидно, зростатиме на проміжку $\left[1 + \sqrt{2},\ +\infty\right)$. Попередньо переконавшись, що $f(10) > 0$, можна стверджувати, що при $k \geq 10$ виконуватиметься нерівність $f(k) = k^3 - 3k^2 - 3k + 22 > 0$. Спираючись на принцип математичної індукції, завершуємо доведення.

Задача 1.6.3. Довести, що $2^n > n^2$ для усіх натуральних $n \geq 5$.

Розв'язання: При $n = 5$ отримаємо правильну нерівність $2^5 > 25$. Нехай вона правильна й при деякому натуральному числі $k = n \geq 5$, тобто виконуватиметься нерівність $2^k > k^2$. Користуючись зробленим припущенням, покажемо також правильність нерівності $2^{k+1} > (k+1)^2$. Маємо

1 $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 > (k+1)^2$, оскільки $2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 > 0$ при $k \geq 5$.

Таким чином, користуючись принципом математичної індукції, можемо стверджуємо правильність нерівності, заданої в умові задачі.

Задача 1.6.4. Довести, що для деякого натурального числа n

виконуватиметься нерівність

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$$ [6].

Доведення: При $n = 1$ отримаємо правильну нерівність $1>\frac{1}{2}$. Нехай вона також буде правильною при деякому натуральному числі $k = n$, й таким чином, нехай виконуватиметься нерівність

$$S(k)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}.$$

Використовуючи це припущення, покажемо також й правильність нерівності

$$S(k+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}.$$

Очевидно, що $S(k+1)=S(k)+P(k)$, де $P(k)=\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$. Фактично, вираз $P(k)$ є сумою 2^k дробів, кожен з яких більший, ніж $\frac{1}{2^{k+1}}$. Отож,

$$P(k)=\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $S(k)>\frac{k}{2}$ (згідно припущення) і $P(k)>\frac{1}{2}$.

Тому $S(k+1)=S(k)+P(k)>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$, тобто $S(k+1)>\frac{k+1}{2}$. Спираючись на принцип математичної індукції, можемо стверджувати про виконання заданої нерівності для довільного натурального числа n.

Задача 1.6.5. Довести, що для деякого натурального числа $n \geq 2$ й для довільних дійсних чисел a_i $(i = 2,\ 3, \ldots,\ n)$ виконуватиметься нерівність

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$$ [7].

Доведення: При $n = 2$, нерівність $|a_1+a_2| \leq |a_1|+|a_2|$ правильна. Адже вона буде правильною у випадку, коли, хоча б одне з чисел (або й обидва) рівне 0. У тому випадку, коли обидва числа від'ємні або обидва додатні, виконуватиметься знак рівності. Якщо ж два числа мають різні знаки, то отримуємо строгу нерівність. Цей факт доволі легко довести й з використанням інших методів, зокрема, методом доведення від супротивного або аналітичним методом.

Нехай нерівність правильна при деякому натуральному $n = k$, тобто виконуватиметься співвідношення $|a_1 + a_2 + ... + a_k| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_k|$. Тоді,

$$|a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + ... + a_k) + a_{k+1}| \le |a_1 + a_2 + ... + a_k| + |a_{k+1}| \le$$
$$\le |a_1| + |a_2| + ... + |a_k| + |a_{k+1}|,$$

що, згідно принципу математичної індукції, завершує доведення.

Задача 1.6.6. Довести, що при всіх натуральних n, для $x > -1$ виконуватиметься нерівність $(1+x)^n \ge 1 + nx$ (нерівність Бернуллі) [14].

Доведення: При $n = 1$ виконуватиметься знак рівності, тому твердження буде правильним. Нехай також виконується нерівність $(1+x)^k \ge 1 + kx$. Тоді,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) \ge (1+kx)(1+x) = kx^2 + (k+1)x + 1) \ge 1 + (k+1)x$$

і, відповідно до принципу математичної індукції, нерівність буде правильною.

Задача 1.6.7. Довести, використовуючи метод математичної індукції, що при $n \ge 2$, $\sqrt{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n-2}$.

Доведення: При $n = 2$ матимемо правильну числову нерівність $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Припустимо, що правильною також є нерівність $\sqrt{k} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2k-1}{2k-2}$ і покажемо, що

$$\sqrt{k+1} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2k-1}{2k-2} \cdot \frac{2k+1}{2k}.$$

Із припущення маємо: $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2k-1}{2k-2} \cdot \frac{2k+1}{2k} > \sqrt{k} \cdot \frac{2k+1}{2k}$. Покажемо тепер, що $\sqrt{k}\cdot\frac{2k+1}{2k} > \sqrt{k+1}$. Проаналізувавши різницю квадратів лівої й правої частин нерівності, в результаті отримаємо: $\frac{k(2k+1)^2}{4k^2} - (k+1) = \frac{(2k+1)^2 - 4k(k+1)}{4k} = \frac{1}{4k} > 0$, що й доводить потрібне твердження. Отож, спираючись на принцип математичної індукції, можемо стверджувати про доведення нерівності.

Задача 1.6.8. Довести, що $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$ для усіх натуральних $n \geq 2$.

Доведення: При $n = 2$ отримуємо правильну числову нерівність $4 > 1 + 2\sqrt{2}$. Нехай також виконуватиметься нерівність $2^k > 1 + k\sqrt{2^{k-1}}$. Покажемо, що звідси випливатиме правильність співвідношення $2^{k+1} > 1 + (k+1)\sqrt{2^k}$. Матимемо:

$$2^{k+1} - 1 - (k+1)\sqrt{2^k} > 2\cdot\left(1 + k\sqrt{2^{k-1}}\right) - 1 - (k+1)\sqrt{2^k} = 1 + \sqrt{2^k}\left(k(\sqrt{2}-1) - 1\right).$$

Отриманий вираз буде додатним при $k \geq 3$. Таким чином, згідно припущення правильності нерівності при $n = k$, випливатиме те, що вона правильна й при $n = k + 1$. Отож на основі принципу математичної індукції можемо зробити висновок, що нерівність виконуватиметься при довільному натуральному $n \geq 2$.

1.7. Класичні нерівності між середніми, їх доведення

Середнім для дійсних чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$ називатимемо довільне дійсне число x, котре не перевищуватиме найбільшого із заданих чисел й буде не меншим від найменшого. Тобто,

$$\min x_i \leq x \leq \max x_i,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Якщо $\min x_i < \max x_i$, то середніх чисел буде безліч [12]. Середні величини часто зустрічаються у статистиці, техніці, фізиці. Їхнє використання, передусім, зумовлене необхідністю оцінювання результатів багаторазових вимірювань одних й тих же самих величин, а також багаторазових визначень дослідним шляхом одних й тих самих параметрів.

Можна легко обґрунтувати те, що середнім числом для дробів $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ із додатними знаменниками буде число $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$, а для додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ середніми будуть величини $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$, $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$.

З множини усіх середніх, зазвичай, виокремлюють ті, які отримали в результаті деяких цілеспрямованих обчислень. В математиці такими вважають: середнє квадратичне, середнє гармонічне, середнє арифметичне та середнє геометричне. Всі вони між собою пов'язані певними залежностями, які носять назву класичних нерівностей між середніми.

Розглянемо більш детально ці класичні нерівності між середніми. Вище уже було зазначено, що для n додатних чисел x_i такими будуть:

середнє квадратичне $K_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$;

середнє гармонічне $H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$;

середнє арифметичне $A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;

середнє геометричне $G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Ці середні величини пов'язанні між собою такими співвідношеннями:

$$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n \ [14].$$

Є ряд способів для їх доведення. Поки що, розглянемо із них три найпоширеніших, причому два доведення наведемо дещо пізніше, згідно відповідності до розглянутих методів доведень.

Отож, зупинимося на першому способі, й для початку, доведемо таке твердження:

Лема: Якщо добуток n додатних чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ дорівнюватиме 1, то їхня сума буде не меншою від n, тобто $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$. Причому дана рівність матиме місце лише тоді, коли $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Виконаємо доведення, користуючись при цьому методом математичної індукції. При $n = 2$, нам необхідно показати, що для додатних двох чисел $x_1,\ x_2$, причому таких, що $x_1 x_2 = 1$, виконуватиметься нерівність $x_1 + x_2 \geq 2$. Дійсно,

$$x_1 + x_2 - 2 = x_1 + \frac{1}{x_1} - 2 = \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} \geq 0 .$$

Очевидним є те, що знак рівності виконуватиметься при $x_1 = 1$. Але тоді і $x_2 = 1$, тобто $x_1 = x_2$.

Нехай для k додатних чисел, причому таких, що $x_1 x_2 \ldots x_k = 1$, виконуватиметься нерівність $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq k$. Дана рівність матиме місце лише в тому випадку, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$. Покажемо, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$, як тільки $x_i > 0$ і $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} = 1$.

Можливі такі два випадки:

1) всі числа x_i є рівними між собою, тобто $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x_{k+1} = 1$. Тоді, $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1$;

2) не всі числа x_1 рівні між собою. У даному випадку, серед них однозначно знайдуться числа як менші, так і більші 1. Для зручності міркувань вважатимемо $x_1 > 1,\ x_{k+1} < 1$. Припустивши, що $y_1 = x_1 x_{k+1}$, матимемо: $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} = y_1 x_2 \ldots x_k = 1$. Тому, згідно припущення, для чисел $y_1,\ x_2, \ldots,\ x_k$ виконуватиметься нерівність $y_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq k$. Звідси,

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = (y_1 + x_2 + \ldots + x_k) + x_1 + x_{k+1} - y_1 > (k+1) + x_1 + x_{k+1} - y_1 - 1 = \\ &= (k+1) + x_1 + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} - 1 = (k+1) + (x_1 - 1)(1 - x_{k+1}) \geq k + 1 . \end{aligned}$$

Спираючись на принцип математичної індукції, можемо вважати, що лема доведена.

Тепер застосуємо дану лему при доведенні нерівностей

$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$. Ці доведення можна виконувати різними методами. Ми ж зупинимось на використанні методу математичної індукції. При цьому основою (початковим етапом нашого доведення) для її використання стануть нерівності $K_2 \geq A_2 \geq G_2 \geq H_2$, тобто нерівності:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}.$$

Розглянемо їх детальне доведення.

Серед багатьох можливих способів доведення нерівності $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1+x_2}{2}$ скористаємося методом доведення від супротивного. Нехай, $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} < \frac{x_1+x_2}{2}$. Піднісши до квадрату обидві частини нерівності, отримуємо $2x_1^2+2x_1^2<(x_1+x_2)^2$ або $(x_1-x_2)^2<0$, що є невірним.

Отож, зроблене нами припущення неправильне, й, таким чином, вихідна нерівність доведена.

Нерівність між середнім геометричним й середнім гармонічним можна довести, підставляючи у нерівність Коші $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ значення $a=\frac{1}{x_1},\ b=\frac{1}{x_2}$.

Маємо: $\sqrt{\frac{1}{x_1x_2}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}$, звідки легко знаходимо, що $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$.

Зауважимо, що середнє геометричне для двох чисел – $\sqrt{ab}$, інколи називають середнім пропорційним, адже в даному випадку це число буде розв’язком рівняння $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$.

Доведення нерівностей $K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$ при $n>2$, умовно поділимо на доведення таких співвідношень: $A_n \geq G_n$, $K_n \geq A_n$ та $G_n \geq H_n$.

Розпочнемо із доведення нерівності $A_n \geq G_n$ або $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Візьмемо n додатних чисел $\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}, \ldots, \frac{x_n}{p}$, де $p = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$. Бачимо, що їх добуток дорівнюватиме 1. В силу доведеної леми, $\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p} + \ldots + \frac{x_n}{p} \geq n$, причому рівність матиме місце лише в тому випадку, коли $\frac{x_1}{p} = \frac{x_2}{p} = \ldots = \frac{x_n}{p}$.

Звідси, $p \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, тобто $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Рівність матиме місце лише за умови, що $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Для доведення наступного співвідношення – $K_n \geq A_n$ або ж $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$ припустимо, що воно істинне при $n = k$, тобто, що виконуватиметься нерівність $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}{k}}$, або $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2 \leq k(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2)$.

Покажемо, що з даного припущення випливає істинність нерівності

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}}{k+1} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2}{k+1}},$$

або

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1})^2 \leq (k+1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2).$$

Маємо:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1})^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{k+1} + x_{k+1}^2 \leq$$

$$\leq k(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2) + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{k+1} + x_{k+1}^2 =$$

$$(k+1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2) - (x_1 - x_{k+1})^2 - (x_2 - x_{k+1})^2 - \ldots - (x_k - x_{k+1})^2 \leq$$

$$\leq (k+1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2).$$

Таким чином, опираючись на принцип математичної індукції, нерівність $K_n \geq A_n$ буде доведена.

Доведення співвідношення $G_n \geq H_n$ або $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$ випливатиме з нерівності $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, використовуючи при цьому такі заміни: $a_1 = \frac{1}{x_1},\ a_2 = \frac{1}{x_2}, \ldots,\ a_n = \frac{1}{x_n}$.

Таким чином, усі нерівності $K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$ доведено. Зауважимо те, що знак рівності в них досягатиметься лише тоді, коли $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ [14].

Класичні співвідношення між середніми, також доволі часто використовуються при доведенні інших нерівностей.

Розглянемо деякі приклади.

Задача 1.7.1. Довести, що для довільних чисел $a > 0$, $b > 0$ та $c > 0$, виконується нерівність

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{z}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{y}\right) \geq 8.$$

Доведення: Використовуючи нерівність Коші, запишемо такі три істинні нерівності:

$$1 + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{1 \cdot \frac{y}{x}} = 2\sqrt{\frac{y}{x}},\ 1 + \frac{x}{z} \geq 2 \cdot \sqrt{1 \cdot \frac{x}{z}} = 2\sqrt{\frac{x}{z}},\ 1 + \frac{z}{y} \geq 2 \cdot \sqrt{1 \cdot \frac{z}{y}} = 2\sqrt{\frac{z}{y}}.$$

Перемноживши їх, отримаємо:

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{z}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{y}\right) \geq 8\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y}} = 8.$$

Виконання нерівності доведено.

Задача 1.7.2. Довести, що для довільних невід'ємних чисел a та b виконується нерівність

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$$ [10].

Доведення: Зауважимо, що дана нерівність є частинним випадком уже відомої нам нерівності

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2},$$

яка була доведена раніше з використанням методу математичної індукції. Отож, наразі виберемо інший спосіб доведення.

З істинної нерівності $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$, яка пов'язує середнє квадратичне та середнє арифметичне, отримуємо $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

Покажемо, що $\frac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$, чим і спробуємо довести початкову нерівність. Дійсно, після виконання декількох елементарних перетворень, отримуємо, що $2\left(a^4+b^4\right)-\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2 \ge 0$.

Задача 1.7.3. Довести, що для деяких чисел $a_i > 0,\ i=1,\ 2,...,\ n$ виконуватиметься нерівність

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+...+\frac{a_n}{a_1}>n.$$

Доведення: Для чисел $\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_3},...,\frac{a_n}{a_1}$ скористаємося нерівністю між середнім арифметичним й середнім геометричним. В результаті, отримаємо нерівність

$$\frac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot...\cdot\frac{a_n}{a_1}}=1,$$

з якої випливатиме необхідне твердження.

Задача 1.7.4. Довести, що для усіх чисел $a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0$ виконується нерівність

$$\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 9abc.$$

Доведення: Для кожного з множників лівої частини, скористаємося нерівністю між середнім арифметичним й середнім геометричним. Отримаємо:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc},\qquad \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Перемноживши отримані співвідношення, в кінцевому результаті матимемо нерівність, яку й потрібно було довести.

Задача 1.7.5. Довести, що для довільних чисел $a>0$, $b>0$ та $c>0$, виконується нерівність

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Доведення: Виконаємо деякі перетворення цієї нерівності:

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{a+c}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{3}{2}+3,$$

$$\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}.$$

В отриманому співвідношенні, застосуємо до виразів нерівність між середнім арифметичним й середнім гармонічним. Матимемо:

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)}{3}\geq$$

$$\geq\frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}}=\frac{3}{2},$$

звідки отримуємо шукану нерівність.

Задача 1.7.6. Довести, що при $a_i>0,\ i=2,\ 3,\dots,n$ виконуватиметься нерівність

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2.$$

Доведення: Для доданків першого й другого множників, скористаємося нерівністю $A_n \geq G_n$. В результаті, отримаємо такі дві нерівності:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Перемноживши отримані співвідношення, матимемо потрібний нам результат.

Задача 1.7.7. Довести, що при $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуватиметься нерівність

$$\frac{a^3 + b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4.$$

Доведення: Перепишемо дану нерівність у вигляді $\frac{a^3 + b^6 + 8}{3} \geq 2ab^2$ й для перетворень її лівої частини, зокрема для чисел $a^3,\ b^6,\ 8$, використаємо нерівність $A_3 \geq G_3$.

Остаточно отримуємо: $\frac{a^3 + b^6 + 8}{3} \geq \sqrt[3]{8a^3 b^6} = 2ab^2$, звідки очевидним буде виконання заданої нерівності.

Доведено.

Задача 1. 7. 8. Довести, що при $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуватиметься нерівність

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

Розв'язання: Перепишемо нерівність у вигляді $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}}{5} \geq \sqrt[5]{ab}$, й для перетворень її лівої частини скористаємося нерівністю $A_5 \geq G_5$. В результаті отримуємо співвідношення $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}}{5} \geq \sqrt[5]{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}} = \sqrt[5]{ab}$, яке й доводить задану нерівність.

Задача 1.7.9. Для чисел $a > 0,\ b > 0$ та $c > 0$, довести нерівність

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge a+b+c.$$

Доведення: Розпочнемо із перетворення чисельників у кожному з доданків лівої частини, використовуючи при цьому нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним. Отримуємо:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge \frac{(a+b)^2}{2(a+b)}+\frac{(b+c)^2}{2(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{2(c+a)}=a+b+c.$$

Задача 1.7.10. При додатних *a, b, c* знайти найменше можливе значення виразу

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\ [4].$$

Розв'язання: Насамперед, покажемо виконання для перших трьох доданків нерівності

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Для цього виконаємо такі перетворення:

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{a+c}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{3}{2}+3,$$

$$\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)\ge\frac{9}{2}.$$

Тепер, скориставшись нерівністю між середнім арифметичним й середнім гармонічним, отримаємо:

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)}{3}\ge\frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}}=\frac{3}{2}.$$

Групу з решти трьох доданків перетворимо наступним чином:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\ge 2+2+2=6.$$

Отож, найменше значення виразу дорівнюватиме $\frac{15}{2}$, й досягатиметься воно при $a = b = c$.

Задача 1.7.11. При додатних a, b, c довести нерівність

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + 16}{a^2 b + b^2 c + c^2 a} \geq \frac{8}{3}.$$

Доведення: Двічі скориставшись нерівністю Коші, отримуємо:

$$2a^4 + b^4 + 16 \geq 2a^4 + 8b^2 \geq 8a^2 b.$$

Аналогічно матимемо ще дві нерівності:

$$2b^4 + c^4 + 16 \geq 8b^2 c, \quad 2c^4 + a^4 + 16 \geq 8c^2 a.$$

Додаючи між собою всі три нерівності, отримуємо:

$$3(a^4 + b^4 + c^4 + 16) \geq 8(a^2 b + b^2 c + c^2 a),$$

звідки й слідуватиме істинність нерівності, яку ми доводимо.

1.8. Наслідки з нерівності Коші й задачі на відшукання найменших та найбільших значень

Повернемося до нерівності $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$, де $x_i \geq 0$. Вище було зауважено, що знак рівності тут досягатиметься лише у випадку, коли всі значення x_i будуть рівними між собою. Звідси отримуємо два цікавих факти, котрі мають ряд застосувань.

1. Якщо добуток $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ буде сталою величиною, то сума $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ прийматиме своє найменше значення.

При $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = c$, це значення дорівнюватиме $n\sqrt[n]{c}$.

2. Якщо сума $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ буде сталою величиною, то добуток $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ прийматиме своє найбільше значення.

При $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$ воно дорівнюватиме $\left(\frac{c}{n}\right)^n$ [14].

Наведені міркування дозволяють також доводити окремі нерівності із новими постановками задач.

Задача 1.8.1. Знайти найбільше та найменше значення функції

$\arcsin^3 x + \arccos^3 x$ [16].

Розв'язання: Нехай $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$. Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = y.$$

Значення функції буде найменшим тоді, коли значення добутку $\alpha\beta$ буде найбільшим.

Оскільки $\beta \geq 0$, то найбільше значення $\alpha\beta$ необхідно шукати при $\alpha > 0$.

Використовуючи нерівність Коші, матимемо: $\alpha \cdot \beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$. Але ж, $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$, тому $\alpha \cdot \beta \leq \frac{\pi^2}{16}$.

Найбільше значення $\alpha \cdot \beta$ прийматиме при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$. Тоді: $\arcsin x = \frac{\pi}{4};\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, й найменше значення функції буде: $y_{\min} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{32}$.

Найменше значення $\alpha\beta$ очевидно буде має досягатися при $\alpha < 0$.

Якщо $x = -1$, то матимемо, що $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$. Врахувавши ці значення, отримаємо, що добуток буде мінімальним тому, що α прийматиме мінімальне значення, а β – максимальне. Отож, при $x = -1$ функція прийматиме своє найбільше значення

$$y_{\max} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \pi \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi^3}{8}.$$

Таким чином, найбільшим значенням функції буде $\frac{7\pi^3}{8}$, а найменшим – $\frac{\pi^3}{32}$.

Задача 1.8.2. Знайти найбільше значення виразу $a^2 \cdot b^4$, за умови, що $4a^2 + b^2 = 16$.

Розв'язання: Згідно умови задачі, вираз $4a^2 b^4$ (а, отже, й $a^2 b^4$) набуватиме свого найбільшого значення, якщо $4a^2 = b^2$, тобто при $a^2 = 2$.

Отож, $a^2 \cdot b^4 = 2 \cdot 64 = 128$.

Задача 1.8.3. Знайти найменше значення виразу $4a^2 + b^2$, за умови, що $ab = 3$.

Розв'язання: Оскільки добуток виразів $4a^2$ й b^2 є сталим (з умови випливатиме, що $4a^2 \cdot b^2 = 36$), тоді вираз прийматиме своє найменше значення, якщо $4a^2 = b^2$, тобто при $b = 2a$.

Врахувавши, що $a^2 = \dfrac{3}{2}$, остаточно матимемо: $4a^2 + b^2 = 12$.

Задача 1.8.4. Знайти найбільше значення функції $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 4}$.

Розв'язання: При $x = 0$, значення функції дорівнюватиме 0. При $x \neq 0$, перепишемо вираз даної функції у вигляді: $y = \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{4}{x^2}}$. Знайдемо значення при якому, знаменник виразу буде найменшим. Зауваживши, що добуток виразів x^2 й $\dfrac{4}{x^2}$ є сталим числом, можна зробити висновок, що знаменник буде найменшим, якщо $x^2 = \dfrac{4}{x^2}$, тобто при $x^2 = 2$. Значення функції в цьому випадку буде максимальним й дорівнюватиме $\dfrac{1}{4}$.

Задача 1.8.5. Довести, що для деяких чисел $a_i > 0,\ i = 1,\ 2, ...,\ n$ виконуватиметься нерівність

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1} > n.$$

Доведення: Вище уже було розглянуто доведення даної нерівності, з використанням при цьому нерівності Коші. Зупинимося тепер на інших міркуваннях. З того, що добуток чисел $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, ..., \frac{a_n}{a_1}$ буде сталою величиною, легко зробити висновок, що їхня сума

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_n}{a_1} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{a_1}} = n.$$

Задача 1.8.6. Оцінити значення виразу $\sin^{2012} x + \cos^{2012} x$ [3].

Розв'язання: Нехай $\sin^2 x = \alpha$, $\cos^2 x = \beta$. Тоді,

$$\alpha^{1006} + \beta^{1006} \geq 2\sqrt{\alpha^{1006} \cdot \beta^{1006}} = 2(\alpha\beta)^{503}$$

й сума прийматиме найменше значення, якщо добуток $\alpha\beta$ буде найбільшим. Оскільки вираз $\alpha + \beta = 1$ є сталим, тоді максимальне значення досягатиметься при $\alpha = \beta$, тобто, якщо $\sin^2 x = \cos^2 x$, або при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. Значення поданого виразу в цьому випадку дорівнюватиме $\frac{1}{2^{1005}}$. Таким чином, ми отримали нижню оцінку нашого виразу. Верхня оцінка випливатиме з нерівностей $\sin^{2012} x + \cos^{2012} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Рівність буде досягається у точках $x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Отож, $\frac{1}{2^{1005}} \leq \sin^{2012} x + \cos^{2012} x \leq 1$.

РОЗДІЛ ІІ. НЕРІВНОСТІ В ГЕОМЕТРІЇ

Доволі часто можна спостерігати, що геометричні фігури, окрім притаманних їм певних чисто геометричних властивостей, також описуються своїми кількісними характеристиками, зокрема величинами кутів, довжинами відрізків, площами, об’ємами, тощо. В практичній діяльності такі величини досить часто доводиться порівнювати, оцінювати межі, в яких вони можуть змінюються (фактично, аналізувати певні числові величини, меншими яких вони не можуть бути, або ж, навпаки, не перевищуватимуть їх). Таким чином, виник цілий ряд геометричних задач, які пов’язанні з необхідністю оцінки геометричних величин й доведенням нерівностей, що виникатимуть при цьому.

Деякі міркування, що стосуватимуться класифікації методів доведень таких нерівностей, ми розглянемо, більш детально, у вигляді наступних задач.

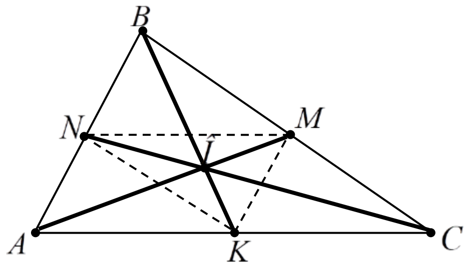
2.1. Нерівність трикутника

Добре відомим є те, що для довільних трьох точок A, B й C виконуватиметься нерівність $AB + BC \geq AC$ (нерівність буде строгою тоді, коли точка B не лежатиме між двома іншими точками). Очевидно матимемо, що довжина ламаної не перевищуватиме відстані між її кінцями. Саме такі елементарні міркування зазвичай виступають ключовими під час доведень нерівностей для відстаней.

Задача 2.1.1. Довести, що довжини медіан m_a, m_b, m_c трикутника та його периметр P задовольнятимуть нерівності:

$$\frac{3P}{4} < m_a + m_b + m_c < P \quad [11].$$

Доведення: Нехай в трикутнику ABC: $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$; $AM = m_a$, $BN = m_b$, $CK = m_c$ – медіани (мал. 1).



(мал. 1)

Із ΔAMK маємо: $m_a = AM < AK + KM = \dfrac{b+c}{2}$.

Аналогічно отримаємо нерівності $m_b < \dfrac{a+c}{2}$ та $m_c < \dfrac{a+b}{2}$.

Додаючи отримані співвідношення, матимемо праву частину нерівності, яка доводиться. Із ΔOBC маємо:

$$a = BC < BO + OC = \frac{2}{3}\left(m_b + m_c\right).$$

Аналогічно отримуємо нерівності $b < \dfrac{2}{3}\left(m_a + m_c\right)$, $c < \dfrac{2}{3}\left(m_a + m_b\right)$, й послідовно додаючи їх та попередню, в результаті отримаємо ліву частину співвідношення, яке доводиться.

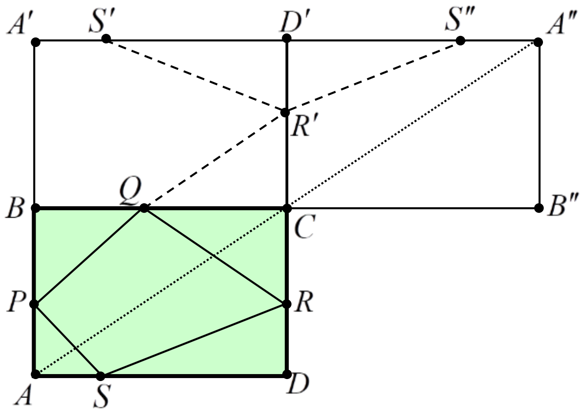
Пригадуючи співвідношення, які допомагають через сторони трикутника виразити довжини медіан, зокрема $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, й на основі вище доведеного твердження, можемо зробити висновок, про фактичну реалізацію геометричного доведення алгебраїчної нерівності:

$$\frac{3}{2}(a+b+c) < \sqrt{2a^2+2b^2-c^2} + \sqrt{2b^2+2c^2-a^2} + \sqrt{2a^2+2c^2-b^2} < 2(a+b+c),$$

де a, b, c – деякі додатні числа, причому такі, що сума двох з них буде більшою від третього.

Задача 2.1.2. У прямокутнику $ABCD$ на його сторонах AB, BC, CD та AD вибрано деякі точки P, Q, R й S (по одній на кожній із сторін). Довести, що периметр отриманого чотирикутника не менший $2AC$.

Доведення: Симетрично відобразимо прямокутник $ABCD$, спочатку відносно його сторони BC, а вже потім – відносно прямої CD. В результаті утворяться нові прямокутники $A'D'CB$ й $CD'A''B''$ (мал. 2).



(мал. 2)

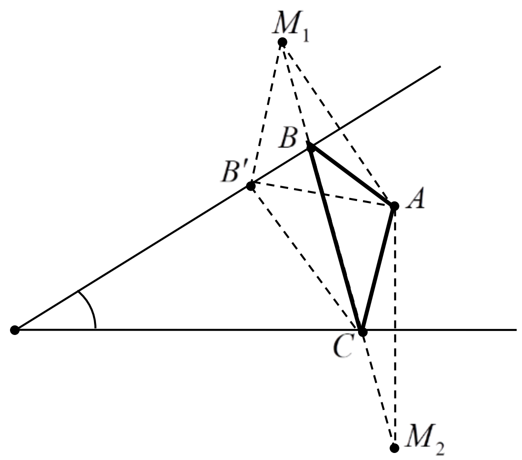
Очевидним є те, що периметр чотирикутника $PQRS$ дорівнюватиме:

$$PQ + QR + RS + SP = = PQ + QR' + R'S' + SP = (PQ + QR' + R'S'') + SP$$

й оскільки, $PS \le AP + AS = AP + A''S''$, то він не перевищуватиме довжини ламаної $APQR'S''A''$, яка ж, в свою чергу, не перевищуватиме довжини відрізка $AA'' = 2AC$.

Задача 2.1.3. Дано гострий кут й деяку точку A всередині нього. Знайдіть на сторонах цього кута такі точки B і C, щоб значення периметра трикутника ABC було мінімальним.

Розв'язання: Нехай задана точка A лежить у внутрішній області кута α. Відобразимо симетрично відносно обох сторін кута цю точку, отримаємо точки M_1 й M_2. Проведемо пряму $l_1 l_2$, яка перетинатиме сторони кута в деяких точках B і C (мал. 3). Покажемо, що трикутник ABC – шуканий трикутник.



(мал. 3)

Насамперед, зауважимо, що відрізки симетричні відносно прямої будуть рівними, й отримаємо: $AB = BM_1$ та $AC = CM_2$. Отож,

$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = BM_1 + BC + CM_2 = M_1M_2.$$

У випадку, якщо точка B займатиме інше положення на стороні кута (наприклад, точка B'), матимемо:

$$P_{\Delta AB'C} = AB' + B'C + CA = B'M_1 + B'C + CM_2 > M_1M_2.$$

Аналогічно периметр трикутника ABC збільшуватиметься й при зміні, на іншій стороні кута, положення точки C. Отож, точки B та C – шукані.

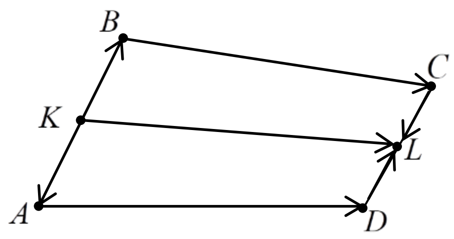
Бачимо, що якщо заданий кут є гострим, то пряма $l_1 l_2$ завжди перетинатиме сторони кута, й таким чином, дана задача матиме єдиний розв’язок.

2.2. Застосування векторів

Обґрунтування нерівності для відстаней іноді зручно проводити, використовуючи вектори. Також, при цьому може досить широко застосовуватися векторний аналог для нерівності трикутника: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$. У задачах, пов’язаних з центром ваги трикутника, використовують рівність $\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} = \overline{0}$, де A, B, C – вершини трикутника, M – точка перетину медіан [2].

Задача 2.2.1. На деякій площині задано два відрізки AB та CD. Доведіть, що довжина відрізка, який сполучає їх середини, не буде більшою за півсуму відрізків AC і BD[13].

Доведення: Нехай точки K і L – середини відповідних відрізків AB й CD (мал. 4).



(мал. 4)

Очевидним буде виконання таких векторних рівностей:

$\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BC} + \overline{CL}$ та $\overline{KL} = \overline{KA} + \overline{AD} + \overline{DL}$. Додавши їх, отримаємо рівність $2\overline{KL} = \overline{BC} + \overline{AD}$, з якої, перейшовши до довжин векторів, випливатиме наступне: $2|\overline{KL}| \leq |\overline{BC}| + |\overline{AD}|$, що й доводить задане твердження.

Знак рівності можливий лише за умови, що $BC \| AD$, тобто, коли заданий чотирикутник буде трапецією або паралелограмом.

Задача 2.2.2. В чотирикутнику $ABCD$, кут A – тупий, F – середина сторони BC. Доведіть, що $2AF < BD + CD$.

Доведення: Нехай точка O – середина відрізка BD. Досить очевидним є те, що точка A буде знаходитись всередині кола з діаметром BD, отож, $AO < \frac{1}{2}BD$ (O – центр кола). З того, що $OF = \frac{1}{2}CD$, як середня лінія трикутника BCD, матимемо: $AF \leq AO + OF < \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CD$, що й потрібно було довести.

Задача 2.2.3. На площині задано два трикутники $A_1B_1C_1$ й $A_2B_2C_2$. Нехай M_1 і M_2 – точки перетину їхніх медіан. Доведіть, що

$3M_1M_2 \le A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$.

Доведення: Очевидним є виконання таких векторних рівностей:

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2A_2}$,

$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2B_2}$,

$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2C_2}$.

Послідовно додавши їх, отримаємо, що $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{M_1M_2}$, звідки й випливатиме нерівність, яку ми доводимо.

Задача 2.2.4. Вершину S піраміди $SABC$ сполучили з точкою M, яка є центром ваги трикутника ABC. Доведіть, що $3 \cdot SM < SA + SB + SC$.

Доведення: Очевидно, що виконуватимуться наступні векторні рівності: $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CM}$. Додавши їх та, врахувавши при цьому, що $\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} = \overline{0}$, отримуємо співвідношення $3\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$, із якого випливатиме задана нерівність.

Знак рівності у ній буде неможливим, адже вектори $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ не колінеарні, й тому:

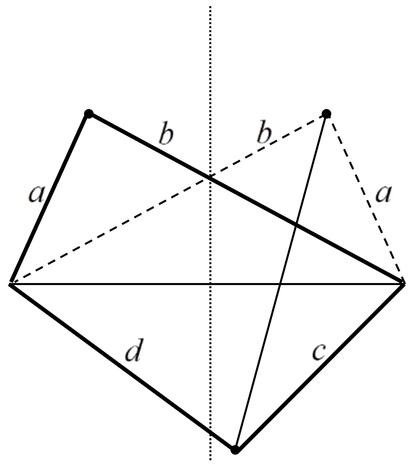
$|\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC}| < SA + SB + SC.$

2.3. Оцінка площі

Ми знаємо, що площа трикутника в жодному випадку не перевищуватиме половини добутку двох його довільних сторін, а також те, що площа опуклого чотирикутника не перевищуватиме половини добутку його діагоналей. Даними фактами можна доволі ефективно скористатись при розв'язуванні окремих задач. Розглянемо деякі приклади.

Задача 2.3.1. Нехай a, b, c, d – довжини сторін деякого опуклого чотирикутника. Доведіть, що його площа не перевищуватиме значення виразу $\frac{1}{2}(ac + bd)$ [14].

Розв'язання: Проведемо діагональ чотирикутника таким чином, щоб по один бік від неї були сторони із довжинами $a,\ b$. Відносно серединного перпендикуляра до цієї діагоналі, симетрично відобразимо вказані сторони (мал. 5).



(мал. 5)

В результаті, утвориться новий чотирикутник такої ж площі, що і заданий, із довжинами послідовних сторін $b,\ a,\ c,\ d$. Провівши в ньому діагональ, отримуємо два трикутники, площі кожного з яких не перевищуватимуть $\frac{1}{2}ac$ та $\frac{1}{2}bd$.

Задача 2.3.2. Периметр опуклого чотирикутника дорівнює 4. Доведіть, що його площа не перевищуватиме 1.

Розв'язання: Позначимо сторони чотирикутника як $a,\ b,\ c,\ d$, а його площу – S. Тоді, $a+b+c+d=4$. Скориставшись попередньою задачею, матимемо: $S \le \frac{1}{2}(ac+bd)$. Очевидно, що також виконуватиметься нерівність $S \le \frac{1}{2}(ab+cd)$. Тоді ,

$$4S \le ab+bc+cd+ad=(a+c)(b+d) \le \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2=4 \Rightarrow S \le 1.$$

Врахувавши це, можна зробити доволі корисний й, уже доведений, висновок: квадрат має найбільшу площу із усіх опуклих чотирикутників з фіксованим периметром.

Задача 2.3.3. Довжини двох сторін трикутника – a і b, – задовольняють умову $a > b$, а довжини висот, проведених до цих сторін, відповідно дорівнюють h_a і h_b. Довести нерівність $a + h_a \geq b + h_b$ й встановити, коли досягатиметься рівність [13].

Доведення: Площа S трикутника ABC дорівнює $\frac{1}{2}ab\sin C$, звідси $\sin C = \frac{2S}{ab}$. Крім того, $S = \frac{ah_a}{2}$, звідки $h_a = \frac{2S}{a}$ і $S = \frac{bh_b}{2}$, отож, $h_b = \frac{2S}{b}$. Перетворимо задану нерівність наступним чином:

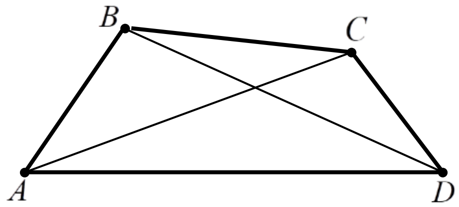
$$a + \frac{2S}{a} - b - \frac{2S}{b} = (a-b) - \frac{2S(a-b)}{ab} = (a-b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) = (a-b)(1-\sin C)$$.

Очевидно, що, згідно умови задачі, отриманий вираз не буде від’ємним.

Рівність досягатиметься при $\sin C = 1$, тобто в тому випадку, коли трикутник буде прямокутним.

Задача 2.3.4. Показати, що відношення найменшої із відстаней між вершинами довільного опуклого чотирикутника до найбільшої з таких відстаней, не перевищує $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв’язання: Нехай M – найбільша із відстаней між вершинами чотирикутника, а m – найменша. Ми знаємо, що в опуклому чотирикутнику, принаймі один з кутів не є гострим. Так, наприклад, на малюнку 6 таким кутом буде – $\angle ABC$.



(мал. 6)

Скористаємося теоремою косинусів:

$M^2 \geq AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$.

Оскільки $\cos\angle B \leq 0$, то

$M^2 \geq AC^2 \geq AB^2 + BC^2 \geq m^2 + m^2 = 2m^2$.

Звідси випливатиме, що $\frac{M}{m} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Знак рівності виконуватиметься, наприклад, для квадрата.

Задача 2.3.5. Доведіть, що серед всіх вписаних у коло n-кутників, правильний n-кутник матиме найбільшу площу.

Розв'язання: Нехай деякий n-кутник $A_1A_2...A_n$ є вписаним у коло з центром в точці O та радіусом R. Позначимо: $\angle A_iOA_{i+1} = \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., n$, $\alpha_i \in (0, \pi]$.

Тоді $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 2\pi$ (знак строгої нерівності буде лише у тому випадку, коли центр кола лежатиме поза площиною многокутника). Для площі многокутника S матимемо, що $S = \sum_{i=1}^{n} S_{\Delta OA_iA_{i+1}} = \frac{R^2}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i$. Функція $\sin x$ на заданій множині значень є опуклою вгору. Використавши нерівність Єнсена: $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, отримаємо, що:

$$\frac{nR^2}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \leq \frac{nR^2}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n},$$

а саме останньому значенню й дорівнюватиме площа правильного многокутника вписаного в коло.

Задача 2.3.6. В квадраті з довжиною сторони 15, розміщено довільним чином 20 квадратиків із довжиною сторони 1. Доведіть, що в цьому квадраті можна додатково помістити коло з радіусом 1, яке при тому, не матиме жодних спільних точок із заданими квадратиками [20].

Розв'язання: Спочатку знайдемо положення для центра кола. Очевидно, що він має знаходитися на відстані ≥ 1, рахуючи від сторін даного квадрата (тобто всередині деякого квадрата з довжиною сторони 13), а також від сторін маленьких квадратиків. Для кожного такого квадратика, множина точок, які знаходитимуться від нього на відстані < 1, складатиметься із точок самого квадратика, а також чотирьох квадратиків, які побудовані на його сторонах, й точок чотирьох чвертей кругів з радіусом 1, центри яких знаходяться у вершинах квадратика. Площа фігури, утвореної цими точками, дорівнюватиме $5+\pi$. А, оскільки, сума всіх таких площ дорівнює $20(5+\pi)<13^2$, то у квадраті 13×13 знайдеться точка, яка не входитиме до жодної із перерахованих множин. Таким чином, саме вона може бути обрана центром шуканого кола.

Задача 2.3.7. Дано деякий трикутник ABC й точку M всередині нього. Нехай відрізки h_a, h_b, h_c – висоти трикутника, які проведені до відповідних сторін, а p_a, p_b, p_c – відстані від точки M до цих сторін. Доведіть, що

$$\frac{h_a}{p_a}+\frac{h_b}{p_b}+\frac{h_c}{p_c}\ge 9.$$

Розв'язання: Маємо:

$$\frac{h_a}{p_a}=\frac{S_{ABC}}{S_{MBC}},\ \frac{h_b}{p_b}=\frac{S_{ABC}}{S_{MAC}},\ \frac{h_c}{p_c}=\frac{S_{ABC}}{S_{MBA}},\quad \frac{p_a}{h_a}+\frac{p_b}{h_b}+\frac{p_c}{h_c}=1.$$

Скориставшись нерівністю Коші, отримуємо:

$$\frac{h_a}{p_a}+\frac{h_b}{p_b}+\frac{h_c}{p_c}=\left(\frac{h_a}{p_a}+\frac{h_b}{p_b}+\frac{h_c}{p_c}\right)\left(\frac{p_a}{h_a}+\frac{p_b}{h_b}+\frac{p_c}{h_c}\right)\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{h_a}{p_a}\cdot\frac{h_b}{p_b}\cdot\frac{h_c}{p_c}}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{p_a}{h_a}\cdot\frac{p_b}{h_b}\cdot\frac{p_c}{h_c}}=9.$$

2.4. Геометричний спосіб доведень нерівностей між середнім арифметичним, геометричним, квадратичним та гармонічним

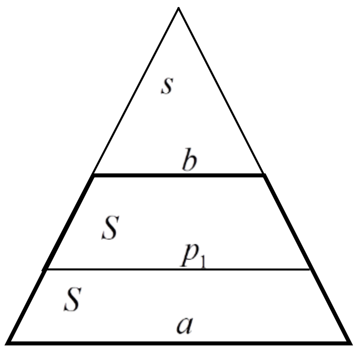
Задача 2.4.1. Доведіть нерівності між середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним й гармонічним у випадку для двох чисел, або, іншими словами, той факт, що для деяких довільних $a > 0,\ b > 0$ виконуватимуться співвідношення:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$ [14].

Доведення: Наведемо один з можливих геометричних способів доведення.

Розглянемо трапецію з основами a і b $(a > b)$. Середню лінію трапеції позначимо через p_2. Тоді $p_2 = \dfrac{a+b}{2}$ буде середнім арифметичним для чисел a та b.

Проведемо відрізок p_1, паралельно до основ трапеції, і, таким чином, поділимо її на деякі дві рівновеликі трапеції (мал. 7).



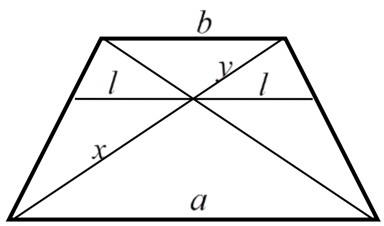
(мал. 7)

Позначимо через S – площу кожної із них. Тоді, продовживши бічні сторони трапеції до точки їх перетину, через s позначимо площу трикутника, який утворився поза трапецією. Далі, з подібності трьох утворених трикутників, випливатиме пропорція $\dfrac{b^2}{s} = \dfrac{p_1^2}{S+s} = \dfrac{a^2}{2S+s}$. Звідки отримаємо рівність

$\frac{p_1^2 - b^2}{S} = \frac{a^2 - p_1^2}{S}$ або $p_1 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. Отож, відрізок p_1 буде середнім квадратичним для відрізків a та b. Бачимо, що середня лінія трапеції, яка розташована вище від відрізка p_1, й ділить трапецію на дві, причому, верхня з яких має площу меншу, ніж нижня. Таким чином, довжина даної середньої лінії буде меншою, ніж довжина відрізка p_1. Цим самим і показано, що $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$, тобто те, що середнє квадратичне більше середнього арифметичного.

Нехай відрізок p_3 буде паралельним до основ трапеції й поділятиме її на дві, подібні між собою, трапеції. З подібності випливатиме пропорція $\frac{p_3}{b} = \frac{a}{p_3}$, тобто, що $p_3 = \sqrt{ab}$ буде середнім геометричним чисел a та b.

Нехай, тепер відрізок p_4 паралельний основам трапеції й проходить через точку, в якій перетинаються її діагоналі. З подібності трикутників, ми можемо легко встановити, що частини заданого відрізка, які починаються в точці перетину діагоналей трапеції й проведені до її бічних сторін, будуть рівними. Позначимо через l їхні довжини, а частини довільної із діагоналей, кінцями якої, з одного боку, буде точка перетину діагоналей, а з іншого – вершини трапеції, через x та y (мал. 8).



(мал. 8)

З подібності трикутників випливатимуть співвідношення: $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ та $\frac{a}{l} = \frac{x + y}{y}$, звідки $\frac{a}{l}=\frac{x}{y}+1=\frac{a}{b}+1=\frac{a+b}{b}$.

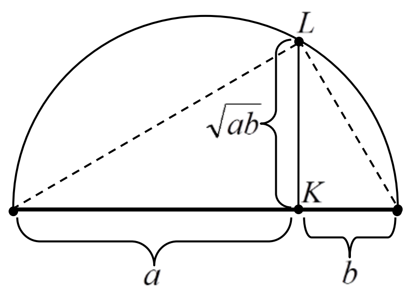
Тому $l=\frac{ab}{a+b}$ й $p_4=2l=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, таким чином, p_4 є середнім гармонічним для чисел a та b.

Тепер, чисто геометрично, досить легко показати, що відрізки p_i задовольнятимуть нерівності $p_1<p_2<p_3<p_4$, що й завершуватиме доведення алгебраїчних нерівностей.

Розглянемо ще геометричне доведення нерівності Коші.

Задача 2.4.2. Довести, що $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, де $a\geq 0,\ b\geq 0$.

Розв'язання: Нехай a та b – деякі задані відрізки. Побудуємо коло, діаметром якого буде відрізок $a+b$. Й з точки K, яка буде спільною для цих відрізків, проведемо до перетину з колом перпендикуляр KL (мал. 9).



(мал. 9)

З подібності прямокутних трикутників випливатиме, що $\frac{a}{LK}=\frac{LK}{b}$, звідки $KL=\sqrt{ab}$. Очевидно, що довжина цього відрізка, не перевищуватиме довжини радіуса кола, як дорівнює $\frac{a+b}{2}$. Отож, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

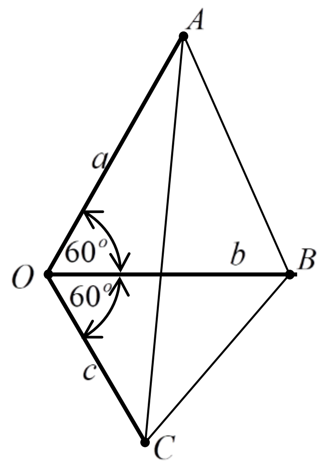
2.5. Співвідношення між елементами геометричних фігур та їх використання при доведенні нерівностей

Добре відомі нам співвідношення між геометричними фігурами можна використовувати в окремих випадках доведень нерівностей. Мається на увазі, що додатним значенням змінних, котрі фігурують в нерівності, присвоюватимуться певні кількісні характеристики геометричних фігур (площі, об'єми, довжини відрізків), й після цього, чисто геометричними методами, встановлюватимуться необхідні для задачі співвідношення: спочатку між певними геометричними величинами, і вже згодом, робитимуться відповідні висновки й про саму алгебраїчну нерівність.

Задача 2.5.1. Довести, що при деяких додатних числах a, b, c виконуватиметься нерівність

$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + \tilde{n}^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$ [6].

Доведення: Розглянемо відрізки *OA, OB* й *OC* такі, що $OA = a,\ OB = b,\ OC = c$ та $\angle AOB = 60^0$, $\angle COB = 60^0$ (мал. 10).



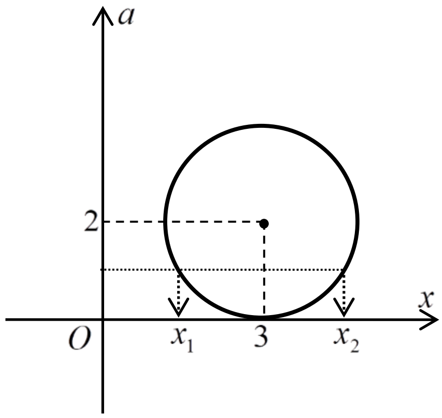
(мал. 10)

Матимемо: $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + \tilde{n}^2}$, $AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$ й оскільки $AB + BC \geq AC$, то нерівність доведено.

Задача 2.5.2. Знайдіть значення параметра a, при яких відстань між коренями рівняння:

$x^2 - 6x + a^2 - 4a + 9 = 0$, буде приймати найбільше значення [11]?

Розв'язання: Перепишемо подане в умові рівняння у вигляді $(x-3)^2 + (a-2)^2 = 4$, й побудуємо графік отриманої залежності в системі координат xOa (мал. 11).



(мал. 11)

Бачимо, що при перетині кола деякою прямою $a = const$, коренями цього рівняння є абсциси точок перетину. Очевидним буде, що довжина діаметру кола й буде найбільшою відстанню між коренями рівняння, й дорівнюватиме 2 при $a = 2$.

Задача 2.5.3. Знайти найменше значення виразу

$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$.

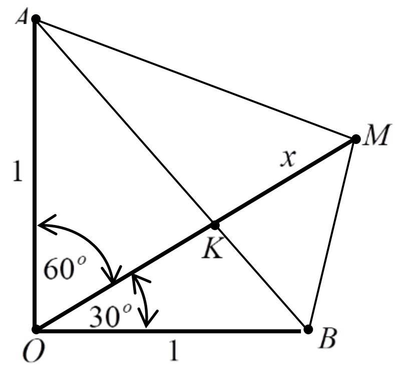
Розв'язання: Введемо в розгляд функцію:

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$.

Насамперед зауваживши, що для всіх $x < 0$ $f(x) > f(0)$. Тепер, доволі зрозумілим буде те, що точку, у якій функція досягатиме свого найменшого значення, необхідно шукати серед усіх невід'ємних значень змінної.

Для початку, розглянемо випадок, коли $x > 0$. Тоді можливою буде така геометрична конструкція:

Відкладаємо два перпендикулярних відрізки a і b, а також відрізок OM, таким чином, щоб $OA = OB = 1$, $OM = x$, $\angle MOB = 30^0$, $\angle MOA = 60^0$ (мал. 12).



(мал. 12)

Згідно теореми косинусів із трикутників OMB та OMA отримаємо:

$$MA = \sqrt{x^2 - x + 1}, \; MB = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$$

Окрім цього бачимо, що $MA + MB \ge AB = \sqrt{2}$.

Рівність досягатиметься тільки в тому випадку, коли точка M співпаде з точкою K, яка є точкою перетину відрізка AB та променя OM, тобто при $x = OK$. Довжину невідомого відрізка OK знайдемо з ΔOKB зі стороною $OB = 1$ та кутами $\angle MOB = 30^0$, $\angle OBA = 45^0$. За теоремою синусів матимемо:

$$\frac{OB}{\sin\angle OKB} = \frac{OK}{\sin\angle OBA},$$

або

$$\frac{1}{\sin\left(30^0 + 45^0\right)} = \frac{OK}{\sin 45^0},$$

звідси:

$$OK = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

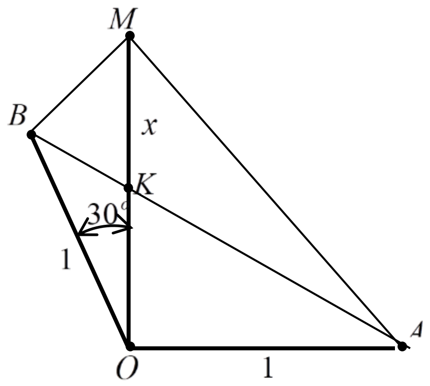
У випадку $x = 0$, отримаємо: $2 = f(0) > f\left(\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt{2}$.

Отож, найменше значення виразу дорівнюватиме $\sqrt{2}$.

Задача 2.5.4. Довести нерівність $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1} \ge \sqrt{3}$.

Доведення: Розглянемо спочатку випадок, коли $x > 0$. Тут буде можливою наступна геометрична конструкція:

Відкладемо відрізки OA, OB та OM таким чином, щоб $OA = OB = 1$, $OM = x$, $\angle AOB = 120^0$, $\angle MOA = 90^0$ та $\angle MOB = 30^0$ (мал. 13).



(мал. 13)

Тоді,

$$MA = \sqrt{x^2 + 1},\ MB = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}.$$

Тому,

$$MA + MB = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1} \geq AB = \sqrt{3}.$$

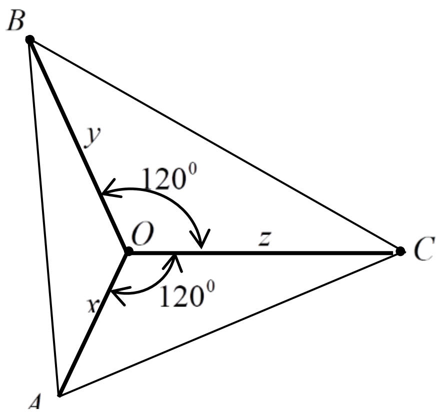
У випадку, коли $x \leq 0$, позначимо $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$.

Бачимо, що тоді, для всіх $x \leq 0$ от маємо, що $f(x) \geq f(0) = 2 > \sqrt{3}$. Отож, можемо зробити висновок, що задана нерівність виконуватиметься при довільних значеннях x.

Задача 2.5.5. Довести, що для деяких значень змінних x, y, z виконуватиметься нерівність

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Доведення: Для початку розглянемо випадок, коли $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$. Відкладаємо відрізки OA, OB й OC під кутом 120^0 так, щоб $OA = x,\ OB = y,\ OC = z$ (мал. 14).



(мал. 14)

Зауваживши, що

$$OA = \sqrt{x^2 + xy + y^2},\ OB = \sqrt{x^2 + xz + z^2},\ OC = \sqrt{y^2 + yz + z^2}\ .$$

З нерівності трикутника можемо зробити висновок, що задане співвідношення буде істинним.

Виконавши у даній нерівності циклічну перестановку змінних x, y, z, в результаті, отримуємо ще дві нерівності, аналогічні до даної:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} \geq \sqrt{x^2 + xz + z^2}\ ,$$

$$\sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{x^2 + xy + y^2}\ .$$

Розглянемо тепер випадок, коли дві змінні прийматимуть від'ємні значення, а третя – додатне (наприклад, $x > 0,\ y < 0,\ z < 0$). Перепозначивши y на $-y$ й z на $-z$, отримаємо доведену в прикладі 2.5.1. нерівність.

Якщо дві змінні прийматимуть додатні значення, а третя – від'ємне (наприклад, $x < 0,\ y > 0,\ z > 0$), то, перепозначивши x на $-x$ можемо скористатися нерівністю, розглянутою в прикладі 4.2.1.

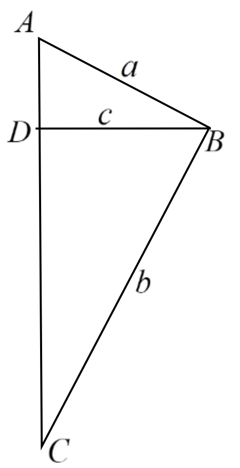
Той випадок, коли усі три змінні набуватимуть від'ємних значень, зводитиметься до початкового доведення нерівності шляхом перепозначення x на $-x$, y на $-y$ й z на $-z$.

Коли одна, дві або й усі три змінні приймають значення 0, доведення нерівності будуть очевидними.

Задача 2.5.6. Довести нерівність

$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{c}\quad (a\ge c>0,\ b\ge c)\ [10]$$

Доведення: При $a=c$ або $b=c$ нерівність буде очевидною. Розглянемо ж випадок, коли $a>c$ й $b>c$. Перепишемо нерівність у вигляді $\frac{1}{2}c\sqrt{a^2-c^2}+\frac{1}{2}c\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{2}$ й побудуємо два прямокутні трикутники із спільним катетом c, гіпотенузи яких дорівнюватимуть a та b (мал. 15).



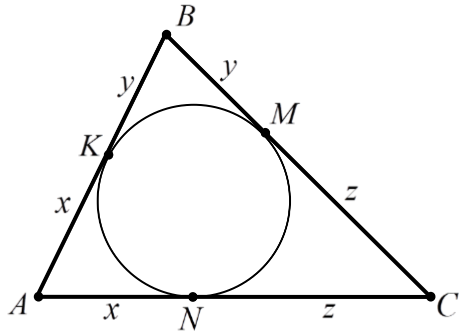
(мал. 15)

Ліва частина перетвореної нерівності тепер визначатиме суму площ трикутників ABD й BDC, тобто площу S трикутника ABC.

Оскільки $S=\frac{1}{2}ab\sin\angle B\le\frac{ab}{2}$, тому, нерівність доведена.

Задача 2.5.7. Довести, що $(x+y)(x+z)\ge 2$, якщо $xyz(x+y+z)=1$ й $x>0,\ y>0,\ z>0$ [3].

Доведення: Очевидним є те, що при $x>0,\ y>0,\ z>0$ існуватиме трикутник ABC такий, що $AB=c=x+y$, $BC=a=y+z$, $AC=b=x+z$ (мал. 16).



(мал. 16)

Нехай точки $K,\ M,$ … ки дотику вписаного кола зі сторонами $AB,\ BC,\ AC$ відповідно. Матимемо: $x+y+z=p$, де p – півпериметр трикутника. Й, крім того:

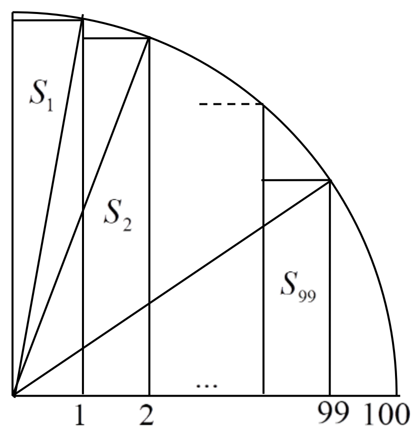
$$AK = AN = p-a = x,\ BK = BM = p-b = y,\ CM = CN = p-c = z.$$

Але, згідно умови задачі, $xyz(x+y+z)=S^2=1$ (S – площа трикутника ABC), звідси $S=1$. З іншого боку, $2S = AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC \le AB\cdot AC = (x+y)(x+z)$. Тоді, $(x+y)(x+z)\ge 2S = 2$.

Задача 2.5.8. Довести нерівність

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+...+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

Доведення: Розглянемо четверту частину круга з радіусом 100. Тоді, впишемо у нього деяку ступінчату фігуру, яка складатиметься з 99 прямокутників у яких довжина нижньої основи дорівнюватиме 1 (мал. 17).



(мал. 17)

Тоді, площа першого прямокутника дорівнюватиме:

$$S_1 = 1 \cdot \sqrt{100^2 - 1^2} = \sqrt{99 \cdot 101}.$$

Для другого прямокутника матимемо:

$$S_2 = 1 \cdot \sqrt{100^2 - 2^2} = \sqrt{98 \cdot 102},\ \ldots,$$

$$S_{99} = 1 \cdot \sqrt{100^2 - 99^2} = \sqrt{1 \cdot 199}.$$

Площа ступінчатої фігури є меншою від площі чверті круга, а тому:

$$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \ldots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < \frac{100^2 \pi}{4}.$$

Доведено.

ВИСНОВКИ

Нерівності відіграють досить вагому роль у сучасній математиці. Дослідження функцій, лінійне та нелінійне програмування, теорія ігор просто неможливі без нерівностей.

Практична діяльність показує, що при розв'язуванні нерівностей, учні допускають доволі багато помилок й, не рідко, завдання на доведення, навіть найпростіших нерівностей, викликають неабиякі труднощі. А зустрічаючи нерівності, які містять степені чи радикали, більшість учнів потрапляють у «глухий кут».

В шкільному курсі математики, нерівності переважно застосовують при вивченні похідної, елементів теорії рядів, інтеграла. За допомогою нерівностей, знаходять також найбільше та найменше значення функції, розв'язують деякі задачі на доведення нерівностей. Спеціальної літератури присвяченої доведенням нерівностей дуже мало, тому й завдання такого типу є одними з найважчих задач шкільного курсу. Без доведення нерівностей також не проходять і математичні олімпіади, тому обрана тема є доволі актуальною.

У даній дипломній роботі, було розглянуто деякі загальні відомості про нерівності та основні методи їх доведень. Особлива увага відводилась, використанню класичних нерівностей при розв'язуванні олімпіадних завдань та конкурсних задач підвищеної складності. Й варто підкреслити те, що цікавим елементом роботи стало використання певних геометричних елементів при доведенні алгебраїчних нерівностей, а також, застосування нерівностей у геометрії.

Матеріал цієї роботи може стати корисною платформою при підготовці учнів до олімпіад, проведень факультативних занять, а також, для студентів математичних спеціальностей та всіх тих, хто цікавиться нерівностями й застосовує їх у практичній діяльності.

Результати роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2021 рік.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агаханов Н. Х. Математика. Обласні олімпіади. 8-11 класи: навч. посіб. Київ: Освіта, 2010. 239 с.
2. Андрійчук В. І., Забавський Б. В. Лінійна алгебра: навч. посіб. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008. 369 с.
3. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Конкурсні задачі з математики: навч. посіб. Київ: Вища школа, 2013. 154 с.
4. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики. Харків: Основа, 2018. 255 с.
5. Збірник завдань з математики для вступників у вузи / за ред. М. І. Сканаві. Київ: Вища школа, 1992. 461 с.
6. Київські математичні олімпіади 1984 – 1993 рр. / Вишенський В. А., Карташов М. В., Михайловський В. І., Ядренко М. Й. Київ: Либідь, 1993. 162 с.
7. Коваленко В. Г., Гельфанд М. Б., Ушаков Р. Н. Доведення нерівностей. Київ: Вища Школа, 1979. 250 с.
8. Кругликов А. В., Плакса С. А. Сборник заданий для довузовской підготовки по математике: учеб. пособие. Київ: НТУУ «КПІ», 1999. 317 с.
9. Математичні олімпіади школярів України: 1991 – 2000 рр. / Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Київ: Техніка, 2003. 295 с.
10. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навч. посіб. Київ: А.С.К., 2004. 187 с.
11. Сарана О. А., Ясінський В.В. Конкурсні задачі підвищеної складності з математики: навч. посіб. для слухачів ФДП НТУУ «КПІ». Київ: Факт, 2006. 263 с.
12. Седракян Н. М., Авоян Н. М. Неравенства. Методы доказательства: учеб. пособие. Москва: Физматлит, 2002. 256 с.
13. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах: учеб. пособие. Москва: Наука, 1997. 216 с.

14. Собкович Р. І., Кульчицька Н. В. Основні методи доведення нерівностей: навч. посіб. Івано-Франківськ: ОІППО, 2014. 116 с.
15. Українські математичні олімпіади / Вишенський В. А. та ін. Київ: Вища школа, 1997. 238 с.
16. Ушаков Р. П. О едином подходе к доказательству классических неравенств. *Математика сегодня.* 2011. Вып. 10. С. 61-66.
17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. пособие. Москва: изд-во технико-теорет. лит-ры, 1995. 690 с.
18. Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы: учеб. пособие. Москва: Наука, 1989. 372 с.
19. Шунда Н. М., Томусяк А. А. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення: навч. посіб. Київ: Вища школа, 1993. 375 с.
20. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування: навч. посіб. для вступників до вищих навч. закл. Київ: Фенікс, 2002. 341 с.
21. Ясінський В. В. Про один аналог нерівності Коші – Буняковського. *Математика в школі.* 2005. № 1. С. 47-51.