Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему
Алгоритми і методи лінійного програмування в задачах моделювання детермінованих процесів

Виконала: студентка 4 курсу,
групи МІ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Пилат Інна Михайлівна
Керівник: д. техн. наук,
проф. Бичков О.С.
Рецензент: к. техн. наук, доц.
кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій НУВГП
Присяжнюк О.В.

Рівне-2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Лінійне програмування є найпростішим і найкраще вивченим розділом математичного програмування, яке полягає у знаходженні екстремального значення лінійної функції багатьох змінних за наявності лінійних обмежень, які пов'язують ці змінні.

Вперше лінійне програмування вивчалося у 1939 році, коли було надруковано брошуру радянського економіста Леоніда Віталійовича Канторовича «Математичні методи організації та планування виробництва». Оскільки ідеї Л. В. Канторовича не зустріли розуміння в момент їх зародження, його робота була перервана. Незабаром після Другої світової війни концепції Канторовича були перевідкриті на Заході. Американський економіст Т. Купманс протягом багатьох років привертав увагу математиків до ряду задач, пов'язаних із військовою тематикою. Він активно сприяв тому, щоб був організований математичний колектив для розробки цих проблем. У результаті було усвідомлено, що треба навчитися розв'язувати задачі про пошук екстремумів лінійних функцій на многогранниках, що задаються лінійними нерівностями. На пропозицію Купманса, цей розділ математики отримав назву лінійне програмування.

Американський математик А. Данциг у 1947 році розробив конкретний метод чисельного розв'язування задач лінійного програмування (він отримав назву симплекс-методу).

Вдруге лінійне програмування зустрічається на початку п'ятдесятих років із появою комп'ютерів. Тоді почалося масове захоплення лінійним програмуванням, що викликало, у свою чергу, розвиток інших розділів математичного програмування.

Актуальність теми. Лінійне програмування відіграє важливу роль у різноманітних галузях науки. Його використовують в економіці і бізнесі, але можна використати і в інженерних задачах. Серед галузей, які використовують лінійне програмування можна згадати перевезення, енергетику, телекомунікації і виробництво. Воно вигідне у моделюванні різних типів проблем у плануванні, маршрутизації, призначенні задач і дизайні.

Мета і завдання. Розкрити суть алгоритмів і методів лінійного програмування в задачах моделювання детермінованих процесів.

Для досягнення мети було поставлено наступні завдання:

1) проаналізувати та систематизувати наявну літературу з теми;

2) ознайомитися з основними поняттями лінійного програмування в задачах моделювання детермінованих процесів;

3) охарактеризувати алгоритми і методи лінійного програмування;

4) розглянути і навести приклади реальних задач, які розв’язуються уже відомими методами ЛП;

5) підібрати та погрупувати методичні матеріали для проведення практичних занять з теми.

Об’єкт дослідження. Загальна теорія лінійного програмування в задачах моделювання детермінованих процесів.

Предмет дослідження. Алгоритми і методи лінійного програмування.

Структура роботи. Робота складається із вступу, трьох основних розділів, висновків та списку використаних джерел. Перший розділ присвячений реальним задачам, математичні моделі яких є задачами лінійного програмування, в ньому наведені форми запису цих задач. У другому розділі розглядається геометрична інтерпретація задач ЛП, графічний та симплексний методи їх розв’язування. Третій розділ містить приклади задач та завдання для самостійної роботи.

Апробація роботи. Матеріали роботи доповідалися на звітній науковій конференції студентів та співробітників РДГУ.

РОЗДІЛ 1. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1. Приклади реальних задач, математичні моделі яких є задачами лінійного програмування

Оптимізаційна задача – це задача, яка складається з знаходження оптимального (максимального або мінімального) значення цільової функції, причому значення змінних повинні належати деякій області допустимих значень. В загальному вигляді задача математично записується так:

$$Z(x) \longrightarrow \max_{x\in\Omega}\left(\min_{x\in\Omega}\right),$$

де

$$x = (x_1, x_2, \dots , x_n)^T \in R^n ,$$

$\boldsymbol{\Omega}$ - множина допустимих значень змінних $x_1, x_2, \dots , x_n$,

$Z(x)$ - цільова функція.

Розв’язати оптимізаційну задачу – це означає знайти її оптимальний розв’язок, тобто вказати $x^*\in\boldsymbol{\Omega}$ таке, що $Z(x^*)\geq Z(x)$ $(Z(x^*)\leq Z(x))$ при будь-якому $x \in \boldsymbol{\Omega}$.

Оптимізаційна задача є нерозв’язною, якщо вона не має оптимального розв’язку. Зокрема, задача максимізації буде нерозв’язною, якщо цільова функція $Z(x)$ не обмежена зверху на допустимій множині $\boldsymbol{\Omega}$.

Якщо цільова функція $Z(x)$ є лінійною, а множину обмежень $\boldsymbol{\Omega}$ задано системою лінійних рівнянь і нерівностей, то така оптимізаційна задача буде задачею лінійного програмування (ЛП) [1].

В загальному вигляді задача лінійного програмування записується наступним чином:

$$Z(x) := \langle c, x\rangle \to max, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ \ i \in [1 : k], \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i \in [k+1 : m], \tag{1.3}$$

$$x_j \geq 0, j \in [1: s], \tag{1.4}$$

де $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n$, $\langle c, x \rangle = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$.

Система рівнянь і нерівностей (1.2)-(1.4) визначає у просторі R^n множину $\boldsymbol{\Omega}$ допустимих значень змінних задачі ЛП, що називається також поліедром планів. Вектор $x \in \boldsymbol{\Omega}$ називають допустимим планом, або просто планом задачі ЛП.

Позначимо

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in R^m,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

$A^i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), i \in [1 : m]$, $A_i = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$, $j \in [1 : n]$.

Математичною моделлю системи (виробничою, економічною, фінансовою і ін.) називається абстрактна схема, складена за допомогою математичних символів операцій [1].

Процес побудови математичної моделі називається математичним моделюванням та зводиться до отримання відповідей на наступні питання:

1) охарактеризувати предметну область і визначити вхідні дані;

2) ідентифікувати вхідні змінні, значення яких потрібно отримати в процесі розв'язування задачі;

3) визначити обмеження на змінні, виходячи із внутрішніх можливостей системи і зовнішніх факторів впливу;

4) поставити мету задачі, для досягнення якої з усіх допустимих значень змінних потрібно вибрати ті, які будуть відповідати її досягненню [1].

Наразі відома чимала кількість реальних задач, математичні моделі яких є задачами ЛП.

Приклад 1. Визначення оптимального асортимету продукції [11].

Підприємство виготовляє два види продукції – $П_1$ і $П_2$, яка надходить на оптовий продаж. Для виробництва продукції використовується два види сировини – α і β. Максимально можливі запаси сировини на добу складають 9 і 13 одиниць відповідно. Добова витрата сировини на одиницю продукції виду $П_1$ і виду $П_2$ дана в таблиці 1. Досвід роботи показав, що добовий попит на продукцію $П_1$ ніколи не перевищує попиту на продукцію $П_2$ більше, ніж на 1од. Крім того, відомо, що попит на продукцію $П_2$ ніколи не перевищує 2 од. на добу. Оптова ціна одиниці продукції $П_1$ складає 3 г. од., а $П_2$ – 4 г. од.

Яку кількість продукції кожного виду повинно виготовляти підприємство, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Таблиця 1

Сировина	Витрати сировини на 1од. продукції		Запас сировини,одиниць
	$П_1$	$П_2$	
α	2	3	9
β	3	2	13

Побудуємо математичну модель даного виробничого процесу, відповідаючи на задані питання.

В цьому прикладі моделюється виробничий процес, при якому відбувається переробка сировини в готову продукцію за нормами витрат, які показані в таблиці 1.

Позначимо через x_1 і x_2 добові обсяги виробництва продукції $П_1$ і $П_2$ відповідно. Оскільки виробництво продукції $П_1$ і $П_2$ обмежене наявною у розпорядженні підприємства сировиною кожного виду і попитом на дану продукцію, а, також враховуючи, що кількість виробів, що виготовляються не може бути від’ємною, отримуємо наступну систему обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13; \\ x_1 - x_2 \leq 1; \\ x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Дохід від реалізації x_1 одиниць продукції Π_1 і x_2 одиниць продукції Π_2 складе $Z(x)$:=$3x_1$+$4x_2$. Потрібно з усіх обсягів випуску x_1 і x_2, що задовольняють систему нерівностей (1.6), вибрати ті, при яких дохід буде максимальним:

$$3x_1+4x_2 \to max. \qquad (1.7)$$

Приклад 2. Задача оптимального планування [11].

Нехай підприємство за один цикл виробництва з m видів ресурсів виготовляє n видів продукції, витрачаючи на виробництво одиниці j-го виду продукції a_{ij} одиниць ресурсу i-го виду. Матриця A в (1.5), складена з питомих норм витратів ресурсів, називається технологічною.

Нехай c_j є величина питомого прибутку від реалізації одної одиниці продукції i-го виду. Дохід від реалізації виготовленої продукції – це скалярний добуток $\langle c, x\rangle = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$, де $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots , x_n)^T$ – план.

Нехай b_i означає кількість одиниць i-го ресурсу запасеного на складі. Тоді матрична нерівність $Ax \leq b$, де $b = (b_1, b_2, \dots , b_m)^T \in R^m$, означає необхідність враховувати обмеженість ресурсів при розгляді планів виробництва.

Задача оптимального планування полягає у знаходженні такого допустимого плану, при виконанні якого підприємство отримало б максимальний дохід:

$$\langle c, x\rangle \to max_x,\ Ax \leq b,\ x \geq 0_n,\ \text{де } 0_n := (0, \dots , 0)^T \in R^n.$$

Приклад 3. Транспортна задача [1].

Нехай деякий однорідний продукт (зерно, нафта і т.д.) зберігається на m складах і споживається в n пунктах. Відомі наступні параметри:

a_i - запас продукту на i-му складі, $a_i > 0$, $i \in [1 : m]$;

b_j - потреба в продукті в j-му пункті споживання, $b_j > 0$, $j \in [1 : n]$;

c_{ij} - вартість перевезення одиниці продукту з i-го складу в j-ий пункт, c_{ij}>0, $i \in [1 : m]$, $j \in [1 : n]$;

Якщо ситуація на ринку така, що платоспроможний попит в точності відповідає наявним на складі запасам товару, то

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (1.8)$$

Позначимо через x_{ij} кількість продукту, перевезеного з i-го складу в j-ий пункт. Потрібно так організувати перевезення продукції з складів в пункти призначення, тобто знайти $X = (x_{ij})$, щоб при повному задоволенні потребностей мінімізувати сумарні транспортні витрати. Тоді задача запишеться у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i \in [1{:}m], \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j \in [1{:}n],$$

$$x_{ij} \geq 0, i \in [1{:}m], j \in [1{:}n]. \qquad (1.9)$$

Зауважимо що умова (1.8) є необхідою і достатньою для існування принаймні, одної допустимої матриці перевезень $X = (x_{ij})$.

Приклад 4**.** Задача про раціон [1].

Нехай деяке підприємство має можливість купувати m різних видів сировини, з яких може виготовляти різні види харчових продуктів.

Кожен вид сировини містить набір поживних компонентів (інгредієнтів).

Введемо умовні позначення:

x_i - кількість i-ї сировини у виготовленому продукті споживання;

n - кількість інгрідієнтів в сировині;

a_{ij} - кількість інгрідієнту j, що містився в одиниці i-ї сировини;

b_j - мінімальна допустима кількість інгрідієнту j, що містився в одиниці готового продукту;

c_i - вартість одиниці сировини i;

q - мінімальна вага готового продукту.

Потрібно виготовити продукцію мінімальної вартості, дотримуючись вимог поживності та вагових норм. Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq b_j, j \in [1:n],$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq q, x_i \geq 0, i \in [1:m]. \quad (1.10)$$

1.2. Форми запису задач лінійного програмування

Задачі лінійного програмування можна групувати по-різному. Наприклад, за змістом задачі, за сферою використання, за видами математичних моделей і т. д.

Розрізняють три основні форми запису задач лінійного програмування в залежності від наявності обмежень різного типу: стандартна, канонічна та загальна [1].

Стандартна форма запису задачі ЛП має вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,$$

або в матричному записі,

$$max \langle c, x\rangle$$

$$Ax \leq b, \; x \geq 0,$$

де

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), c = (c_1, c_2, \ldots, c_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

$A = (a_{ij})$ – матриця коефіцієнтів. Вектор c називається вектором коефіцієнтів лінійної форми, b - вектором обмежень.

Стандартна задача важлива через наявність великого числа прикладних моделей, що зводяться найбільш природним чином до цього класу завдань лінійного програмування.

Задача у канонічній формі ставиться так:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots , x_n \ge 0,$$

або в матричному записі

$$max \ \langle c, x \rangle$$

$$Ax = b, \ x \ge 0.$$

Основні обчислювальні схеми розв'язання задач лінійного програмування розроблені саме для канонічної задачі.

У задачі лінійного програмування в загальній формі частина обмежень має характер нерівностей, а частина є рівняннями. Крім того, не на всі змінні накладено умову невід'ємності:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k; \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}; \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \dots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots , x_n \ge 0,$$

тут $k \le m, r \le n$.

Всі ці три перелічені форми задач еквівалентні в тому сенсі, що кожну з них можна простими перетвореннями привести до будь-якої із двох інших.

Тому, якщо відомо спосіб розв'язування однієї з цих задач, то тим самим ми вміємо розв'язувати будь-яку із трьох задач лінійного програмування [2].

РОЗДІЛ 2. АЛГОРИТМИ І МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Розглянемо задачу лінійного програмування в стандартній формі запису:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,$$

Покладемо, n=2, тобто розглянемо цю задачу на площині [3].

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{2.2}$$

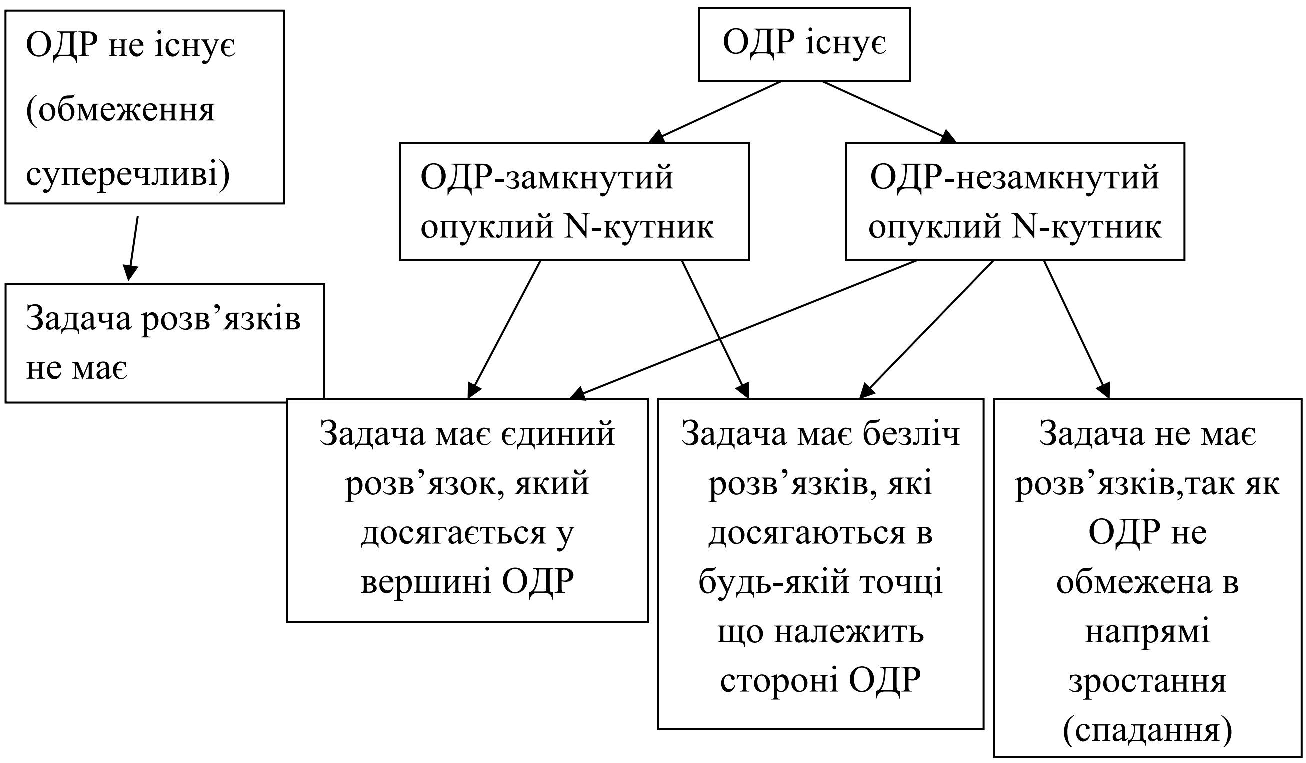
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to max\ (min). \tag{2.3}$$

Ці вирази допускають просте геометричне тлумачення.

Розглянемо спочатку геометричне тлумачення системи обмежень задачі. Кожну впорядковану пару змінних x_1, x_2 можна зобразити точкою на площині, якщо ввести систему координат і по одній осі відкладати x_1, а по другій x_2. З'ясуємо, що геометрично означає сукупність розв'язків однієї окремо взятої нерівності: $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$.

Розглянемо пряму на площині з рівнянням: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ [3]. Ця пряма ділить площину на дві півплощини, в одній з яких справедлива наша нерівність, а в іншій – протилежна. Для того, щоб перевірити, яка з півплощин складається з розв'язків нашої нерівності, слід взяти точку з будь-якої півплощини і перевірити, чи виконується наша нерівність у цій точці. Множина розв'язків окремо взятої лінійної нерівності є півплощиною. Для системи з кількох таких нерівностей точки, координати яких задовольняють всі нерівності одночасно, повинні перебувати у всіх відповідних півплощинах, тобто належати теоретико-множинному перетині цих півплощин. Множина точок площини, що задовольняють систему обмежень, становлять, таким чином, деяку опуклу многокутну область (область допустимих розв'язків). Сукупність таких точок називають многокутником розв'язків. Він може бути точкою, відрізком, променем, многокутником, не обмеженою многокутною областю. Умови невід'ємності змінних $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ призводять до того, що ця область знаходиться у перші координатній чверті.

При розв'язуванні двовимірних задач лінійного програмування можливі такі ситуації (ОДР-область допустимих розв'язків) розв'язків [1]:



2.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод ґрунтується на геометричній інтерпретації задачі лінійного програмувння та застосовується, в основному, при розв'язуванні задач двовимірного простору і лише деяких задач тривимірного простору, так як досить важко побудувати багатогранник розв'язків, який утворюється внаслідок перетину півпросторів. Задачу простору розмірності більше трьох зобразити графічно взагалі неможливо [8].

Розв'язати задачу лінійного програмування геометрично означає знайти таку точку многокутника розв'язків, координати якої надають лінійній цільовій функції максимальне (мінімальне) значення, причому допустимими розв'язками є всі точки многокутника розв'язків.

Ця точка існує тоді, коли многокутник розв'язків не порожній і на ньому цільова функція обмежена зверху. За зазначених умов в одній із вершин многокутника розв'язків функція набуває максимального значення. Для визначення даної вершини побудуємо лінію рівня $C_1x_1 + C_2x_2= h$ (де h - деяка стала), що проходить через многокутник розв'язків, і будемо пересувати її в напрямку вектора $\vec{C} = (C_1, C_2)$ до тих пір, поки вона не пройде через останню її спільну точку з многокутником розв'язків. Координати зазначеної точки і визначають оптимальний план даної задачі [4].

Зазначимо, що при знаходженні розв'язку задачі (2.1)-(2.3) можуть виникнути випадки, зображені на Рис. 2.1 - 2.4. Рис. 2.1 характеризує такий випадок, коли цільова функція набуває максимального значення в єдиній точці A. З Рис. 2.2 видно, що максимального значення цільова функція приймає у будь-якій точці відрізка AB. На Рис. 2.3 зображено випадок, коли цільова функція необмежена зверху на множині допустимих розв'язків, а на Рис. 2.4 – випадок коли система обмежень задачі несумісна, тобто якщо система нерівностей (2.1) за умови (2.2) не має розв'язків.

Також відзначимо, що знаходження мінімального значення лінійної функції при даній системі обмежень відрізняється від знаходження її максимального значення при тих же обмеженнях лише тим, що лінія рівня $C_1x_1 + C_2x_2= h$ пересувається не в напрямку вектора $\vec{C} = (C_1, C_2)$, а в протилежному напрямку. Таким чином, зазначені вище випадки, що трапляються при знаходженні максимального значення цільової функції, мають місце і при визначенні її мінімального значення [4].

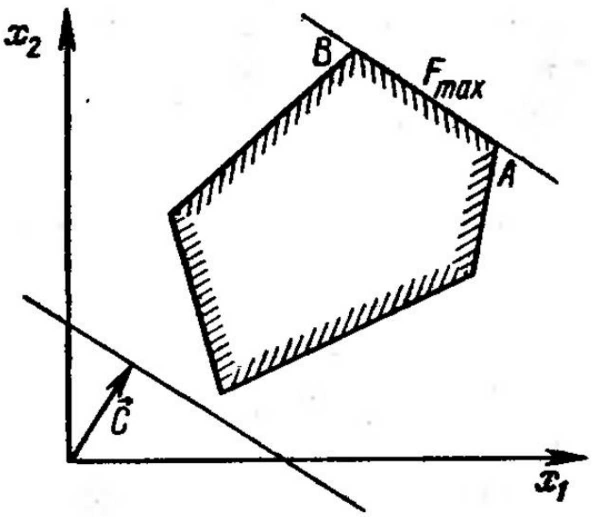
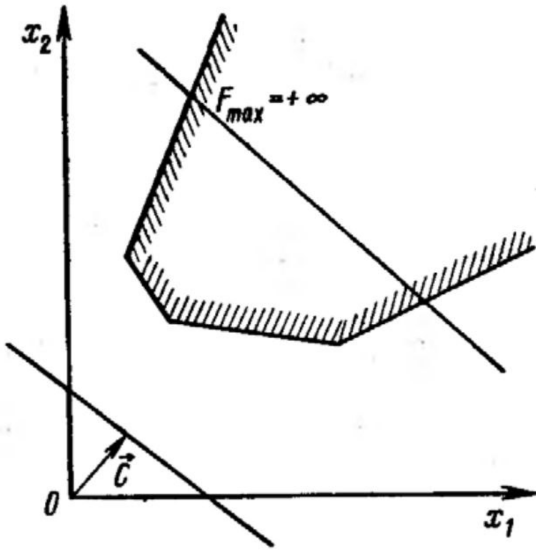


Рис. 2.1.

Рис. 2.2.



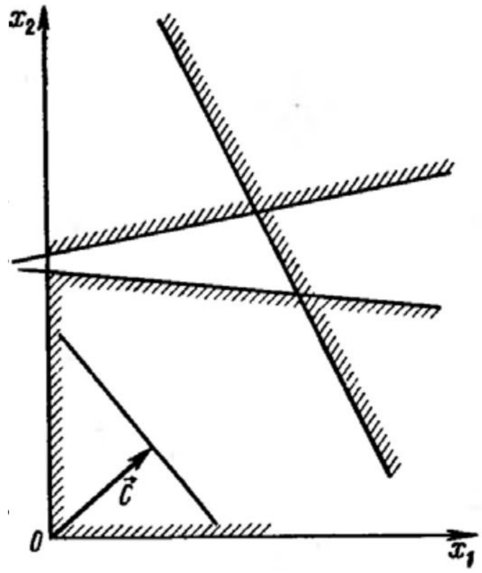


Рис. 2.3.

Рис. 2.4.

При розв’язуванні задач ЛП графічним способом можна користуватися наступним алгоритмом [13]:

1) Побудувати область допустимих розв’язків.

2) Якщо область допустимих розв’язків є порожньою множиною, то задача не має розв’язку через несумісність системи обмежень.

3) Якщо область допустимих розв’язків є не порожньою множиною, побудувати нормаль ліній рівня $n = (c_1, c_2)$ і одну з ліній рівня, яка має спільні точки з цією областю.

4) Лінію рівня перемістити до опорної прямої в задачі на максимум в напрямку нормалі, в задачі на мінімум – у протилежному напрямку.

5) Якщо при переміщенні лінії рівня по області допустимих розв’язків у напрямі, що відповідає наближенню до екстремуму цільової функції, лінія рівня іде в нескінченність, то завдання не має розв’язків через необмеженість цільової функції.

6) Якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв’язок, то для його знаходження потрібно розв’язати систему рівнянь прямих, що обмежують область, і мають загальні точкі з відповідною опорною прямою. Якщо цільова функція задачі досягає екстремуму у двох кутових точках, то задача має безліч розв’язків. Оптимальним розв’язком є будь-яка опукла лінійна комбінація цих точок. Після знаходження оптимальних розв’язків обчислити значення цільової функції на цих розв’язках.

Геометрична інтерпретація економічних задач дає можливість наочно уявити їх структуру, виявити особливості та відкриває шляхи дослідження найскладніших якостей. Задачу лінійного програмування із двома змінними завжди можна розв'язати графічно. Проте вже в тривимірному просторі таке розв'язання ускладнюється, а у просторах розмірністю більше трьох графічне розв'язання практично неможливе [7]. Таким чином, даний метод розв'язання задачі лінійного програмування має дуже вузькі рамкі застосування. Проте метод представляє великий інтерес з точки зору вироблення наочних уявлень про сутність задач лінійного програмування.

2.3. Симплекс-метод

Двовимірні задачі лінійного програмування розв’язуються графічно.

Для випадку N=3 можна розглянути тривимірний простір та цільова функція досягатиме свого оптимального значення в одній із вершин многогранника.

У загальному вигляді, коли в задачі беруть участь N невідомих, можна сказати, що область допустимих розв'язків, що задається системою обмежуваних умов, є опуклим многогранником у n-вимірному просторі та оптимальне значення цільової функції досягається в одній або кількох вершинах.

Для розв'язання ЗЛП будь-якої розмірності існує універсальний спосіб розв'язання задач лінійного програмування, який називається симплекс-методом [6].

Існує така кутова точка многогранника розв'язків, в якій лінійна функція досягає свого найменшого (найбільшого) значення. Кожній кутовій точці многогранника розв'язків відповідає опорний план. Кожний опорний план визначається системою m лінійно незалежних векторів, що містяться в даній системі з n векторів $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для відшукання оптимального плану необхідно досліджувати лише опорні плани. Верхня межа кількості опорних планів, що містяться в цій задачі, визначається числом комбінацій C_n^m. За великих m і n знайти оптимальний план, перебираючи всі опорні плани задачі, дуже складно. Тому необхідно мати схему, що дозволяє здійснювати упорядкований перехід від одного опорного плану до другого.

Такою схемою є симплекс-метод, який дозволяє, виходячи з відомого опорного плану задачі, за скінченне число кроків отримати її оптимальний план. Кожен із кроків (або ітерацій) полягає у знаходженні нового плану, якому відповідає менше значення лінійної функції, ніж значення цієї функції в попередньому плані. Процес продовжують до отримання оптимально плану. Якщо задача не має планів або її лінійна функція не обмежена на многограннику розв'язків, то симплекс-метод дозволяє встановити це у процесі розв'язання [7].

Нехай поставлена задача лінійного програмування: знайти мінімальне значення функції $F = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$ при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad x_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, n),$$

де $b_i \geq 0$ (i = 1, … , m) [11].

Припустимо спочатку, що система обмежень задачі містить m одиничних векторів, причому без обмеження загальності можна покласти, що одиничними є перші m векторів. Тоді необхідно мінімізувати лінійну функцію

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \tag{2.4}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots \\ x_m + a_{m,n}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, n). \tag{2.6}$$

Запишемо систему (2.5) у векторній формі:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \cdots + x_nA_n = A_0, \tag{2.7}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \cdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Вектори $A_1, A_2, \ldots, A_m$ - лінійно незалежні одиничні вектори m вимірного простору. Вони й утворюють базис цього простору. Тому в розкладі (2.7) за базисні невідомі вибираємо $x_1, x_2, \ldots, x_m$, вільні невідомі $x_{m+1}, \ldots, x_n$ прирівнюємо нулю і, враховуючи, що $b_i \geq 0$ (i = 1, … , m), а вектори $A_1, A_2, \ldots, A_m$- одиничні, отримуємо початковий план:

$$X_0 = (x_1 = b_1;\ x_2 = b_2;\ \dots;\ x_m = b_m;\ x_{m+1} = 0;\ \dots;\ x_n = 0). \qquad (2.8)$$

Плану (2.8) відповідає розклад:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_mA_m = A_0, \qquad (2.9)$$

де вектори $A_1, A_2, \dots, A_m$ лінійно незалежні, отже, побудований початковий план є і опорним [9].

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану (2.8), можна побудувати другий опорний план.

Вектори $A_1, A_2, \dots, A_m$ утворюють базис в m вимірному просторі, тому кожен із даних n векторів співвідношення (2.7) можна розкласти за векторами базису, причому єдиним чином:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i\,, \mathrm{j} = 1, \dots, n.$$

Припустимо, що для деякого вектора, що не входить у базис, наприклад, для вектора A_{m+1}, додатній хоча б один з коефіцієнтів $x_{i,m+1}$ у розкладі

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+2}A_2 + \dots + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1}. \qquad (2.10)$$

Задамося деякою величиною $\Theta > 0$ (поки невідомою), помножимо на її обидві частини рівності (2.10) та віднімемо результат почленно з рівності (2.9).

Отримуємо

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{m,m+1})A_m +$$
$$+\theta A_{m+1} = A_0. \qquad (2.11)$$

Таким чином, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1};\ x_2 - \theta x_{2,m+1};\ \dots;\ x_m - \theta x_{m,m+1};\ 0;\ 0;\ \dots;\ 0)$$

є планом, коли його компоненти невід’ємні.

Оскільки $\Theta > 0$, всі компоненти вектора X_1, у які входять недодатні $x_{i,m+1}$, невід’ємні. Тому треба розглянути лише компоненти, що включають додатні $x_{i,m+1} (i = 1, \dots, m)$, тобто необхідно визначити таке $\Theta > 0$, при якому для всіх $x_{i,m+1} > 0$

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0. \qquad (2.12)$$

З (2.12) отримуємо $\theta \leq x_i/x_{i,m+1}$, отже, вектор X_1 - план задачі для будь-якого Θ, що відповідає умові

$$0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}\,, \tag{2.13}$$

де мінімум береться по i, для яких $x_{i,m+1} > 0$.

Опорний план не може містити m+1 додатних компонентів, тому у плані X_1 необхідно перетворити на нуль хоча б один з компонентів [9].

Покладемо в (2.13), що

$$0 = \theta = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}\,; \tag{2.14}$$

тоді компонент плану X_1, для якого досягається мінімум, перетворюється в нуль. Нехай цей компонент стоїть на першому місці, тобто

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}\,.$$

Підставляючи значення θ_0 в (2.11), маємо

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1}\right) A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1}\right) A_2 + \cdots +$$

$$+ \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1}\right) A_m + \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

звідки отримуємо розклад

$$x_2' A_2 + x_3' A_3 + \cdots + x_m' A_m + x_{m+1}' A_{m+1} = A_0,$$

якому відповідає опорний план:

$$X_1 = (0;\, x_2';\, x_3';\, \ldots\,;\, x_m';\, x_{m+1}';\, 0;\, \ldots\,;\, 0),$$

де $x_i' = x_i - \theta_0 x_{i,m+1}$ (i = 2,3, … , m), $x_{m+1}' = \theta_0$ [9].

Виключення одного вектора з базису та включення замість нього іншого за допомогою θ_0 відповідає переходу від одного базису до іншого за допомогою методу Жордана-Гаусса, тому система векторів $A_2, A_3, \ldots, A_m, A_{m+1}$ лінійно незалежна є новим базисом.

Для визначення наступного опорного плану необхідно будь-який вектор,що не входить у базис $A_2, A_3, \ldots, A_m, A_{m+1}$, розкласти за векторами цього базису, а потім визначити таке θ_0 >0, при якому виключався б один із векторів цього базису.

Таким чином, процес отримання нових опорних планів полягає у виборі вектора, який підлягає включенню в базис, та визначення вектора, що підлягає виключенню з базису. Критерій, що використовується для визначення вектора, який включається в базис, є одним з основних елементів симплекс-методу. Зауважимо, що якщо вектор A_{m+1} підлягає включенню в базис, а в його розкладі (2.10) всі $x_{i,m+1} \leq 0$, то, очевидно, не можна вибрати таке Θ >0, що виключало б один із векторів розкладу (2.11). У цьому випадку план X_1 має *m+1* додатніх компонентів, а система векторів $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ лінійно залежна та визначає не кутову, а внутрішню точку многогранника розв'язків, в яких лінійна функція не може досягати мінімального значення. Це вказує на те, що гіперплощина, відповідна лінійній функції, не може стати опорною для многограника розв'язків, як далеко не переміщати її в напрямку, протилежному вектору $\vec{C}$, тобто лінійна функція не обмежена на многограннику розв'язків.

Отже, якщо система обмежень задачі лінійного програмування при невід'ємних вільних членах містить одиничний базис, то без додаткових обчислень можна отримати початковий опорний план, а також коефіцієнти розкладу векторів за векторами базису [9].

Припустимо, що задача лінійного програмування (2.4)-(2.6) має плани, і кожен її опорний план невироджений. В цьому випадку для опорного плану (2.8) маємо:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m = A_0, \tag{2.15}$$

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_m C_m = F(X_0), \tag{2.16}$$

де всі $x_i > 0$, а $F(X_0)$- значення лінійної функції, що відповідають цьому плану.

Розклад будь-якого вектору A_j за векторами даного базису $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ єдиний:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + \cdots + x_{mj} A_m = A_j \ (j = 1,\dots, n), \tag{2.17}$$

тому розкладу вектора A_j у базисі відповідає і єдине значення лінійної функції

$$x_{1j}C_1 + x_{2j}C_2 + \cdots + x_{mj}C_m = F_j \ (j = 1,\ldots, n), \tag{2.18}$$

де F_j -значення лінійної функції, якщо в неї замість невідомих підставити відповідні коефіцієнти розкладу j-го вектора за векторами базису.

Позначимо через C_j коефіцієнт лінійної функції, відповідний вектору A_j. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова F_j-C_j>0, то план X_0 не є оптимальним, і можна побудувати такий план *X*, для якого виконується нерівність *F*(X)<*F*(X_0) [10].

Доведення. Помножуючи (2.17) і (2.18) на Θ >0 та віднімаючи результати відповідно з (2.15) і (2.16), маємо

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \cdots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0, \tag{2.19}$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})C_1 + (x_2 - \theta x_{2j})C_2 + \cdots + (x_m - \theta x_{mj})C_m + \theta C_j =$$

$$= F(X_0) - \theta(F_j - C_j). \tag{2.20}$$

У співвідношенні (2.20) до обох частин додано величину θC_j для *j*=1,...,*n.* В (2.19) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ додатні, тому завжди можна вибрати таке Θ >0, щоб всі коефіцієнти при векторах $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m, A_j$ були невід'ємними, тобто отримати новий план задачі: $X = (x_1 - \theta x_{1j};\ x_2 - \theta x_{2j}; \ldots;\ x_m - \theta x_{mj}; 0; 0; \ldots; 0)$, якому згідно (2.20) відповідає значення лінійної функції

$$F(X) = F(X_0) - \theta(F_j - C_j). \tag{2.21}$$

Оскільки за умовою теореми F_j - C_j > 0 і Θ >0, то *F*(X) < *F*(X_0).

Якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j (*j*=1,...,*n*) в даному базисі задовольняють умову

$$F_j - C_j \leq 0, \tag{2.22}$$

то план X_0 є оптимальним.

Нерівності (2.22) є умовою оптимальності плану задачі для знаходження мінімального значення лінійної функції, а значення F_j - C_j називаються оцінками плану.

Таким чином, для того, щоб план задачі для знаходження мінімального значення лінійної функції був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки були недодатними.

Для задачі лінійного програмування (2.4)-(2.5), що полягає у знаходженні максимального значення лінійної функції, справедлива наступна теорема.

Теорема 2**.** Якщо для певного вектора A_j виконується умова F_j- C_j *<0,* то план X_0 не є оптимальним і можна побудувати такий план X, для якого виконується нерівність *F*(X)>*F*(X_0) [13].

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1.

Таким чином, якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j (*j*=1,...,*n*) в даному базисі задовольняють умову

$$F_j\text{-}\ C_j \geq 0, \tag{2.23}$$

то план X_0 є оптимальним.

Нерівність (2.23) $-$ умова оптимальності плану задачі на знаходження максимального значення лінійної функції.

Отже, для того, щоб план задачі на знаходження максимального значення лінійної функції був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки були невід'ємними.

Як випливає з теореми 1 і теореми 2, починаючи з початкового опорного плану задачі можна отримати послідовність опорних планів, що завершуються оптимальним планом.

Продовжуємо розгляд задачі лінійного програмування (2.4)-(2.6) на знаходження мінімального значення лінійної функції, опорний план якої X_0=($x_1 = b_1$; $x_2 = b_2; \ldots$; $x_m = b_m$; $x_{m+1} = 0$; …; $x_n = 0$) визначається системою m вимірних одиничних векторів A_1 , $A_2, A_3, \ldots, A_m$ [9]. Для дослідження цього опорного плану на оптимальність необхідно вектори $A_j (j = 1, \ldots, n)$ системи (2.5) розкласти за векторами базису $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ і підрахувати значення оцінок F_j- C_j. Базис є одиничним, тому коефіцієнтами розкладу вектору A_j за базисом служать його компоненти, тобто $x_{ij} = a_{ij}$ $(i =$

$1, \ldots, m; j = 1, \ldots,$ n). Наступні обчислення зручніше проводити, якщо умови задачі та початкові дані, отримані після визначення першого опорного плану, записати в симплексну таблицю (таблиця 2). У стовпці С базису запишемо коефіцієнти лінійної функції, які відповідають векторам базису. В стовпці A_0-початковий опорний план X_0, в ньому ж в результаті обчислень отримуємо оптимальний план, в стовпцях $A_j (j = 1, \ldots,$ n) записуємо коефіцієнти розкладу j-го вектора за базисом, що позначаються в подальшому через X_j. В $(m + 1)$ - му рядку в стовпці A_0 записуємо значення лінійної функції F(X_0), яке вона приймає при знайденому опорному плані, а в стовпцях A_j $-$ значення оцінок F_j- C_j. Функції F(X_0) і F_j = F(X_j) знаходимо, підставляючи в лінійну функцію відповідно компоненти опорного плану та коефіцієнти розкладу j-го вектора за векторами базису, тому ці значення в таблиці 2 можна отримати як скалярний добуток:

$$\text{F}(X_0) = C_б X_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i,$$

$$F_j = C_б X_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij}, j = 1, \ldots, n,$$

де C_i - коефіцієнти лінійної функції, відповідні векторам базису.

Таблиця 2.

i	базис	$C_б$	A_0	C_1	C_2	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_k	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	x_1	1	0	…	0	…	0	$x_{1,m+1}$	…	x_{1j}	…	x_{1k}	…	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2	0	1	…	0	…	0	$x_{2,m+1}$	…	x_{2j}	…	x_{2k}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
l	A_l	C_l	x_l	0	0	…	1	…	0	$x_{l,m+1}$		x_{lj}	…	x_{lk}	…	x_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_m	C_m	x_m	0	0	…	0	…	1	$x_{m,m+1}$	…	x_{mj}	…	x_{mk}	…	x_{mn}
m+1	F_j- C_j		F_0	0	0	…	0	…	0	$F_{m+1} - C_{m+1}$	…	$F_j - C_j$	…	$F_k - C_k$	…	$F_n - C_n$

Після складання таблиці 2 переглядаємо (m+1) –й рядок. Якщо для всіх j=1,..., n різниці $F_j - C_j \leq 0$, то опорний план X_0 оптимальний і мінімальне значення лінійної функції рівне F(X_0).

Нехай одна з оцінок $F_j - C_j > 0$, тоді план не є оптимальним, і включаючи в базис вектор, відповідний цій оцінці, можна побудувати інший опорний план, якому відповідає менше значення лінійної функції [9].

Якщо додатних оцінок кілька, то на підставі співвідношення (2.21) у базис повинен бути включений вектор, якому відповідає max [$\theta_{0j}(F_j - C_j)$], де максимум береться по тих j, для яких $F_j - C_j > 0$ і θ_{0j} визначається для кожного j. Це дає можливість на цьому кроці перейти до вершини многогранника розв'язків, що відповідає найбільшому зменшенню лінійної функції та в більшості випадків, що призводить до зменшення кількості ітерацій, що при розв'язуванні задачі ``вручну`` дозволяє швидше отримати оптимальний розв'язок. При розв'язанні задачі на комп'ютері вектор, що підлягає включенню в базис, вибирається за max $(F_j - C_j)$. Якщо є кілька однакових максимальних значень $\theta_{0j}(F_j - C_j)$, то з відповідних їм векторів влючається в базис раніше всього вектор, якому відповідає min C_j. Якщо хоча б для одної додатньої оцінки $F_j - C_j > 0$ коефіцієнти розкладу відповідного вектора невід'ємні, то лінійна функція не обмежена на многограннику розв'язків і, вибираючи θ, її значення можна зробити як завгодно малим; многогранник розв'язків в цьому випадку являє собою необмежену многогранну область [8].

Нехай max [$\theta_{0j}(F_j - C_j)$]= $\theta_{ok}(F_k - C_k)$, тобто максимальне значення досягається до k-го вектору, m < k $\leq n$. Тоді в базис включається вектор A_k та виключається вектор, якому відповідає θ_{ok} = min(x_i / x_{ik})($x_{ik} > 0$).

Припустимо, що θ_{ok} = min(x_i / x_{ik})= x_l / x_{lk} досягається до вектору базису, що складається в l-му рядку; тоді вектор A_l виключається з базису. Елемент x_{lk} називається розв'язуваним, а стовпець і рядок на перетині яких він перебуває, – напрямним. Новому опорному плану відповідає базис, що складається з векторів A_1,…, A_{l-1}, A_k, $A_{l+1}, \dots, A_m$.

Щоб обчислити новий опорний план та перевірити його на оптимальність, необхідно всі вектори $A_0,\ A_j$ (j=1,…,n) розкласти за вектором базису.

Початковий базис був одиничним ($A_1,\ A_2,\ A_3, \dots,\ A_m$) =E, тому

$$A_0 = x_1 A_1 + \dots + x_l A_l + \dots + x_m A_m, \tag{2.24}$$

$$A_k = x_{1k} A_1 + \dots + x_{lk} A_l + \dots + x_{mk} A_m, \tag{2.25}$$

$$A_j = x_{1j} A_1 + \dots + x_{lj} A_l + \dots + x_{mj} A_m. \tag{2.26}$$

З (2.25) маємо

$$A_l = 1/x_{lk}(A_k - x_{1k} A_1 - \dots - x_{mk} A_m. \tag{2.27}$$

Підставляючи вираз A_l в (2.24), отримуємо

$$A_0 = x_1 A_1 + \dots + x_l \left[\frac{1}{x_{lk}} (A_k - \ x_{1k} A_1 - \ \dots - x_{mk} A_m) \right] + \dots + x_m A_m,$$

або

$$A_0 = (x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k}) A_1 + \dots + \frac{x_l}{x_{lk}} A_k + \dots + (x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk}) A_m.$$

Таким чином, новий опорний план X_0 = $(x_1', x_2', \dots, x_k', \dots, x_m')$ обчислюється за формулами

$$\begin{cases} x_i' = \ x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}\ (i \neq l), \\ \quad x_k' = \ \frac{x_l}{x_{lk}}\ (i = l). \end{cases} \tag{2.28}$$

Підставляючи в (2.27), в (2.28), отримуємо розклад вектору A_j за векторами нового базису:

$$A_j = x_{1j}' A_1 + \dots + x_{kj}' A_k + \dots + x_{mj}' A_m\ ,$$

де

$$\begin{cases} x_{ij}' = \ x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}\ (i \neq l), \\ \quad x_{kj}' = \ \frac{x_{lj}}{x_{lk}}\ (i = l). \end{cases} \tag{2.29}$$

Об'єднуючи (2.27) і (2.28), знаходимо, що новий опорний план і розклад векторів у новому базисі при j=0,1,…,n визначається за формулами

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \ (i \neq l), \\ x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \ (i = l). \end{cases} \tag{2.30}$$

Припускаючи *j*=*k,* маємо

$$\begin{cases} x'_{ik} = x_{ik} - \frac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} = 0 \ (i \neq l), \\ x'_{lk} = \frac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1 \qquad (i = l), \end{cases}$$

тобто всі коефіцієнти розкладу вектора, що вводиться в базис, за винятком одного, перетворюються в нуль, а коефіцієнт, взятий за розв'язуючий елемент, − в одиницю. Вектору базису відповідає оцінка рівна нулю, тому для обчислення значень (m+1)- го рядка також використовуємо формули (2.30) [9].

Таким чином, щоб отримати коофіцієнт розкладу векторів A_0, A_j (*j*=1,…,*n*) за векторами нового базису, значення оцінок нового опорного плану та значення лінійної функції, потрібно розділити всі елементи напрямного рядка на розв'язуючий елемент і, виконуючи один повний крок за методом Жордана-Гаусса за допомогою цього перетвореного рядка , скласти симплексну таблицю 3 [12].

Формули

$$F(X_0) = C_б X_0; \ F_j - C_j = C_б X_j - C_j \tag{2.31}$$

використовують для контролю за правильністю проведених обчислень.

Якщо в таблиці 3 в (m+1)-му рядку всі оцінки $F_j - C_j \leq 0,$ то отриманий план X_0 є оптимальним; якщо ж є додатні оцінки, то шукають наступний опорний план.

Процес продовжують або до отримання оптимального плану, або до встановлення необмеженості лінійної функції розв'язуваної задачі, якщо серед оцінок оптималього плану тільки нульові оцінки, відповідні базисним векторам, це говорить про єдиність оптимального плану. Якщо нульова оцінка відповідає вектору, що не входить до базису, то в загальному випадку це означає, що оптимальний план не єдиний.

Використовуючи теорему 2, розв’язуємо задачу лінійного програмування для пошуку максимального значення лінійної функції [11].

Таблиця 3

i	базис	$C_б$	A_0	C_1	C_2	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_k	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	x'_1	1	0	…	x'_{1l}	…	0	$x'_{1,m+1}$	…	x'_{1j}	…	0	…	x'_{1n}
2	A_2	C_2	x'_2	0	1	…	x'_{2l}	…	0	$x'_{2,m+1}$	…	x'_{2j}	…	0	…	x'_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
l	A_l	C_l	x'_l	0	0	…	x'_{ll}	…	0	$x'_{l,m+1}$		x'_{lj}	…	1	…	x'_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_m	C_m	x'_m	0	0	…	x'_{ml}	…	1	$x'_{m,m+1}$	…	x'_{mj}	…	0	…	x'_{mn}
m+1	F_j- C_j		F'_0	0	0	…	$F'_l - C_l$	…	0	$F'_{m+1} - C_{m+1}$	…	$F'_j - C_j$	…	0	…	$F'_n - C_n$

При не виконанні умови оптимальності (2.23) в базис включають насамперед той вектор, якому відповідає $min\ [\theta_{0j}(F_j - C_j)]$, де мінімум береться за тими j, для яких $F_j - C_j$ <0. Якщо мінімальних оцінок кілька, то у базис, насамперед, включають вектор, якому відповідає $max\ C_j$. У всьому іншому симплексний процес аналогічний процесу, що має місце при знаходженні мінімального значення лінійної функції.

Якщо обмеження задачі лінійного програмування можна перетворити до виду $AX \leq A_0$ коли $A_0 \geq 0$, то система обмежень завжди містить одиничну матрицю. Багато задач лінійного програмування, мають розв'язки, що не містять одиничної матриці і не приводяться до зазначеного виду. У цьому випадку для пошуку початкового опорного плану застосовується метод штучного базису. Розглянемо задачу лінійного програмування.

Знайти мінімальне значення лінійної функції

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n),$$

де $b_i \geq 0$ і система обмежень не містить одиничної матриці [12].

Для отримання одиничної матриці до кожної рівності додамо по одній змінній $x_{n+i} \geq 0$ ($i = 1, \ldots, m$), які назвемо штучними, і розглянемо розширену задачу, пов'язану з знаходженням найменшого значення лінійної функції

$$\bar{F} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n+m).$$

За використання штучних змінних, що вводяться в цільову функцію, накладається так званий штраф величиною M. Величина M передбачається досить великим додатнім числом, якщо задача розв'язується на знаходження мінімального значення лінійної функції, і досить малим від'ємним числом, якщо знаходиться максимальне значення лінійної функції. Одиничні вектори A_{n+1}, $A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$, що відповідають штучним змінним, утворюють штучний базис.

Слід зауважити, що штучні змінні не мають відношення до змісту поставленої задачі, проте вони дозволяють збудувати стартову точку, а процес оптимізації змушує ці змінні приймати нульові значення та забезпечити допустимість оптимального розв'язання.

Для пошуку оптимального плану вихідної задачі використовують наступну теорему [14].

Теорема 3. Якщо в оптимальному плані $\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = 0$ ($i = 1, \ldots, m$), то план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є оптимальним планом вихідної задачі.

Доведення. Зауважимо, що якщо план $\bar{X}$ - оптимальний план розширеної задачі, то план X – план початкової задачі, при цьому $\bar{F}(\bar{X}) = F(X)$. Рівність значень функції випливає з того, що план $\bar{X}$ від плану X відрізняється m останніми компонентами, рівними нулю.

Доведемо, що план X – оптимальний план вихідної задачі. Припустимо, що X не є оптимальним планом. Тоді існує такий оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, для якого $F(X^*) < F(X)$. Звідси, для вектора $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)$, що є планом розширеної задачі, отримуємо

$$\bar{F}(\bar{X}^*) = F(X^*) < F(X) = \bar{F}(\bar{X}),$$

тобто

$$\bar{F}(\bar{X}^*) < \bar{F}(\bar{X}).$$

Таким чином, план $\bar{X}$ розширеної задачі не є оптимальним, що суперечить умові теореми.

Застосування симплекс-методу до розширеної задачі забезпечує побудова плану, в якому кожна зі штучних змінних $x_{n+i} = 0$. Якщо початкова задача не має планів (тобто вона не сумісна), то оптимальний розв'язок розширеної задачі містить, принаймні, одне $x_{n+i} > 0$.

Для пошуку оптимального плану розширеної задачі у випадку, якщо заздалегідь не задана величина M, застосовується симплекс-метод з складанням симплексних таблиць, які мають на один рядок більше, ніж звичайна симплексна таблиця. За цим (m+2)-м рядком визначають вектор, що підлягає включенню в базис. Ітераційний процес по (m+2)-му рядку проводять для виключення з базису всіх штучних векторів, потім процес пошуку оптимального плану продовжують по (m+1)-му рядку [12].

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕМИ

3.1. Приклади застосування графічного методу до розв’язування задач лінійного програмування

Задача 1. Нехай є два верстати (S_1, S_2), на кожному з яких можна виробляти два види продукції (P_1, P_2). Верстат S_1 виробляє одиницю продукції P_1 за 1 годину, а одиницю продукції P_2 - за 2 години. Верстат S_2 витрачає на одиницю продукції P_1 - 2 години, а на одиницю продукції P_2 - 1 годину. Верстат S_1 може працювати на добу не більше 10 год, а верстат S_2 - не більше 8 год. Вартість одиниці продукції P_1 становить C_1 грн., а вартість одиниці продукції P_2 - C_2 грн. Потрібно визначити такі обсяги випуску продукції P_1 і P_2 на верстат, щоб виручка від реалізації виробничої продукції була максимальною [10].

Розв’язання. Для наочності зведемо умову задачі таблиця 1.

Таблиця 1

Тип ресурсу	Число одиниць ресурсу, що витрачається на виготовлення одиниці продукції		Запас ресурсу
	P_1	P_2	
S_1	1	2	10

S_2	2	1	8
Прибуток за одиницю продукції	C_1	C_2	

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 і x_2 кількості продукції P_1 і P_2, які планується виробити на кожному окремому верстаті. Вартість виробленої продукції $F = c_1x_1 + c_2x_2$. Потрібно визначити x_1 і x_2 так, щоб величина F була максимальною. Змінні x_1, x_2 не можуть набувати довільних значень. Їх значення обмежені умовами виробництва, а саме тим, що верстати можуть працювати обмежений час. На виготовлення продукції P_1 верстат $С_1$ витрачає 1 x_1 годин, а на виготовлення продукції P_2 – 2 x_2 годин. Оскільки час роботи верстата S_1 не перевищує 10 год, то величини x_1 і x_2 повинні задовольняти нерівності x_1 +2 $x_2 \leq 10$. Аналогічно можна отримати нерівність для верстата S_2: $2x_1$+$x_2 \leq 8$. Крім того, величини x_1 і x_2 не можуть бути від'ємними: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ за змістом задачі [10].

Такі задачі коротко записуються наступним чином:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{3.2}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max. \tag{3.3}$$

Отже, математична модель задачі: знайти такий план випуску продукції X=(x_1, x_2), що задовольняє системі (3.1) та умові (3.2), при якому функція (3.3) набуває максимального значення.

Розв'язки, що задовольняють системі обмежень (3.1) та вимогам невід'ємності, є допустимими, а розв'язки, що задовольняють одночасно і вимоги (3.3) − оптимальними.

Розглянемо геометричне тлумачення задачі. Візьмемо c_1=1 і c_2=1.

Математична модель задачі:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10; \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$F = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \max \qquad (3.4)$$

Побудуємо прямокутну систему координат. Так як, x_1 і x_2 невід'ємні, можна обмежитися розглядом першого квадранта.

Розглянемо перше обмеження: $x_1 + 2x_2 \le 10$.

x_1	0	10
x_2	5	0

Розглянемо друге обмеження: $2x_1 + x_2 \le 8$.

x_1	0	4
x_2	8	0

Відкладемо отримані точки на числових осях і знайдемо півплощини.

Побудуємо нормаль ліній рівня *n* = (c_1, c_2).

Лінію рівня *F* перемістимо до опорної прямої в напрямку нормалі, так як у задачі необхідно визначити максимум цільової функції.

Точкою максимуму тут є точка *C,* координати якої визначаються із системи рівнянь (3.1), розв'язуючи яку, отримуємо точку максимуму *C* (2,4), F_{max}=6 (див. рис. 3.1).

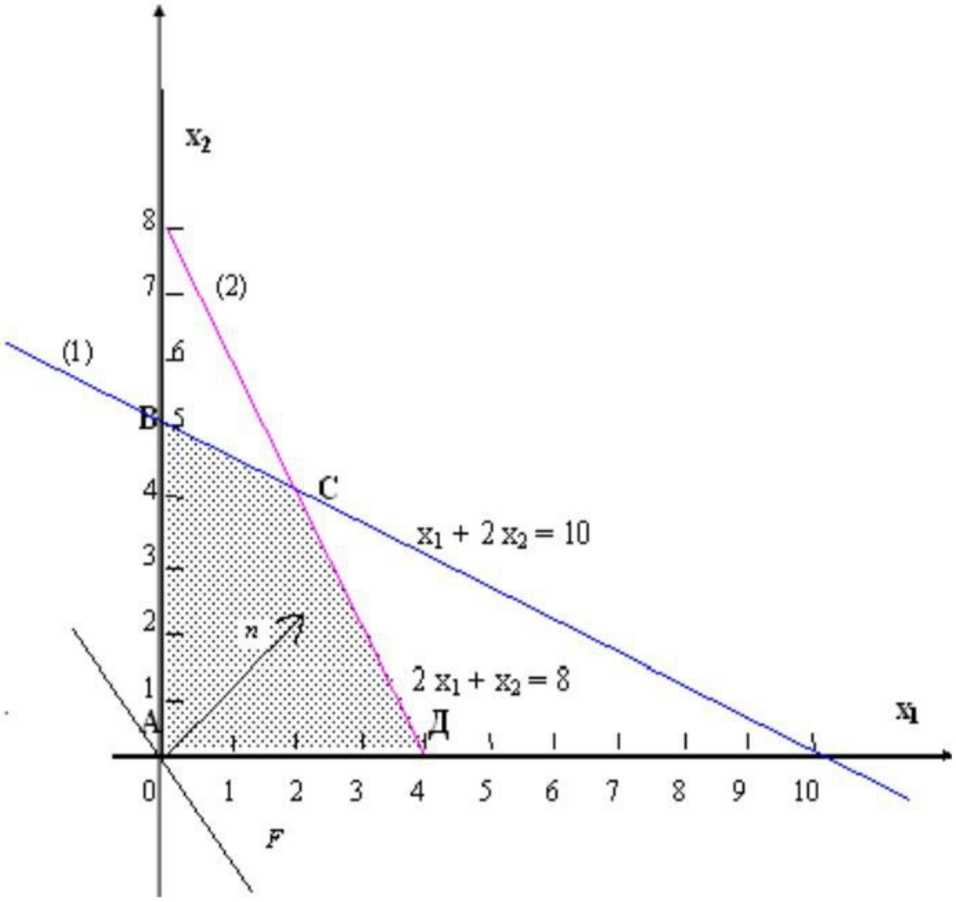


Рис. 3.1.

Задача 2. Меблева фабрика випускає книжкові полиці та шафи. Їх виробництво обмежене наявністю необхідних ресурсів (дерево-стружкових плит (ДСП), високоякісних дощок (ВД), та скла) [14].

Норми витрат ресурсів на одиницю продукції , запаси ресурсів та прибуток від одиниці виробленої продукції наведені у таблиці. Потрібно скласти виробничий план випуску продукції з урахуванням наявних ресурсів , який забезпечував би найбільший прибуток.

Види ресурсів	Види продукції		Запаси ресурсів
	Полиці	Шафи	
ДСП	3	2	27
ВД	2	4	28
Скло	2	3	23
Прибуток	4	7	

Нехай x_1, x_2 - кількість полиць та шаф відповідно, заплановані до випуску. Тоді сумарний прибуток від реалізації всієї планової продукції (цільова функція) складе $F(x_1, x_2)$=4x_1+7x_2 →*max*. При цьому загальна витрата ДСП дорівнює 3x_1+2x_2, і вона не повинна перевищувати наявний запас 27. Це призводить до обмеження 3x_1+2x_2 $\leq$ 27. Аналогічно враховуються обмеження з ВД та скла: 2 x_1 +4 x_2 $\leq$ 28, 2 x_1 +3 x_2 $\leq$ 23. Оскільки обсяги виробів не можуть бути від'ємними, то $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Отже, математична модель задачі має вигляд:

$$F(x_1, x_2)=4x_1+7x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 27; \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 28; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 23; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти невід'ємні значення x_1, x_2, що задовольняють цим обмеженням, для яких функція *F* набуває найбільшого значення.

Введемо на площині прямокутну декартову систему координат $0x_1, x_2$. Замінимо в умовах обмежень знаки нерівностей на знак " = ":

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 27; \\ 2x_1 + 4x_2 = 28; \\ 2x_1 + 3x_2 = 23; \\ x_1 = 0; \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

та визначимо півплощини, що відповідають кожному з обмежень задачі. Як їх перетин знайдемо многогранник розв'язків (Рис. 3.2). Поряд з цим розглянемо форму $F(x_1, x_2)$=4x_1+7x_2 [14]. Вона, очевидно, є лінійною функцією координат (x_1, x_2) точки на площині.

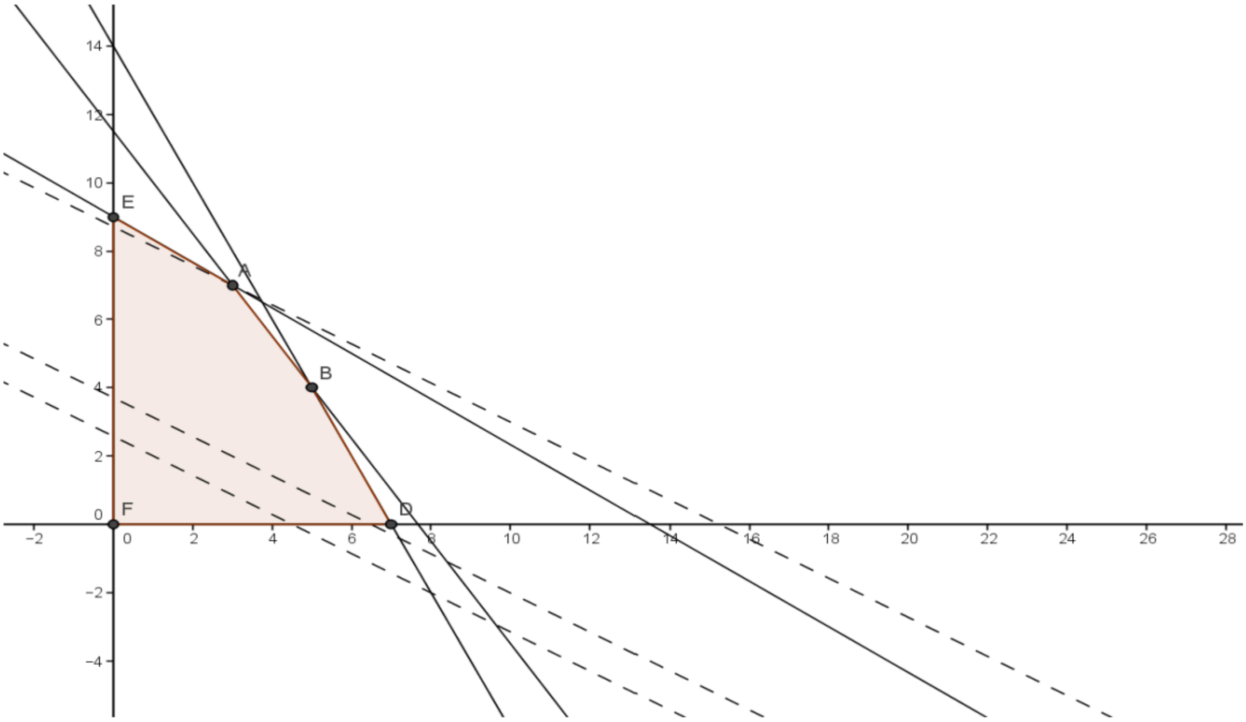


Рис. 3.2.

Розглянемо будь-яку точку $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ многогранника розв'язків. Через цю точку проходить пряма сімейства паралельних прямих. Вздовж всієї цієї прямої функція F приймає таке саме значення, як і в точці P_0, тобто

$$C_0 = 4x_1 + 7x_2.$$

Пряму сімейства паралельних прямих рухатимемо паралельно самої собі ближче до допустимої множини. Тепер зрозуміло, що оптимальний розв'язок визначається точкою B(3;7), а найбільше значення функції F=4·3+7·7=61. Отже, оптимальний розв'язок задачі знайдено:

$$x_1=3,\ x_2=7.$$

Якщо згадати умову цієї задачі, то можна побачити, що для найбільш раціонального плану випуску продукції, що гарантує підприємству найбільший дохід, слід випускати 3 одиниці полиці та 7 одиниць книжкової шафи, причому максимальний дохід становитиме F=61. Ще можна відзначити те, що ресурси ВД та скла використовуються повністю, а ДСП не повністю.

На цьому прикладі можна побачити всі основні особливості задач лінійного програмування: у них допустима множина точок являє собою опуклий многогранник, що вийшов в результаті перетину півплощин, та найбільше значення цільової функції досягається у його вершині – ”крайній “ точці [14].

Задача 3. Для збереження здоров’я та працездатності людина повинна споживати за добу деяку кількість поживних речовин, наприклад білків, жирів, вуглеводів, води та вітамінів. Запаси цих інгредієнтів у різних видах n_i (i=1,2,…) їжі різні. Розглядається два види їжі. Потрібно так організувати харчування, щоб вартість його була найменшою, але організм отримав би не менше мінімальної добової норми поживних речовин усіх видів [10].

Поживні речовини	Мінімальна норма	Види їжі	
		$ї_1$	$ї_2$
B_1- жири	10	1	5
B_2- білки	12	3	2
B_3- вуглеводи	16	2	4
B_4- вода	10	2	2
B_5- вітаміни	1	1	0
Вартість		2	3

Нехай x_1, x_2 - кількість їжі видів $ї_1$ і $ї_2$, що купуються людиною. У такому разі загальні запаси жирів у двох видах їжі складають: x_1+5x_2 і не повинні бути меншими від мінімальної норми 10 (у придбаній їжі жирів може виявитися і більше мінімальної норми). Виходить така нерівність: x_1+5x_2 ≥10. Аналогічні міркування призводять до решти нерівностей, і в результаті отримуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 10; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12; \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16\ ; \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 10; \\ x_1 \geq 1. \end{cases}$$

Оскільки кількість їжі не може бути від'ємною, то можна включити ще дві умови: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, але нерівність $x_1 \geq 0$ є наслідком $x_1 \geq 1$ і її можна не брати до уваги.

А тепер розглянемо загальну вартість: $F(x_1, x_2)$=2x_1+3x_2.

Цільова функція матиме вигляд: $F(x_1, x_2)$=2x_1+3x_2 →*min*.

Отже, ми прийшли до наступної математичної задачі. Задана система:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 10; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12; \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16; \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 10; \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

і цільова функція $F(x_1, x_2)$=2x_1+3x_2 →*min.*

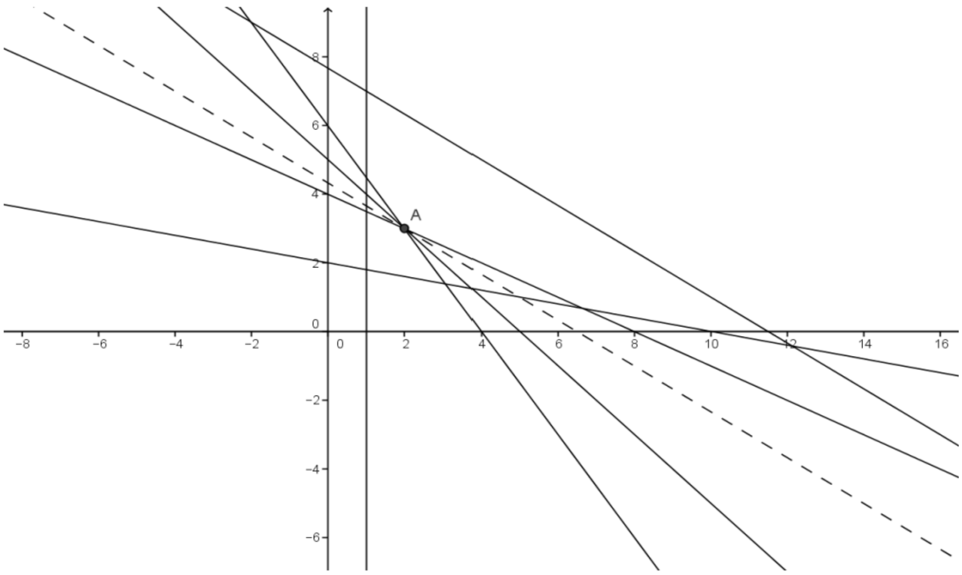


Рис. 3.3.

Нам потрібно серед усіх невід'ємних розв'язків системи знайти такий, що надає функції *F* найменшого значення.

Многокутник розв'язків та одна з ліній рівня функції зображені на рисунку 3.3.

Оптимальний розв'язок досягається у точці A(2;3). Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, *F*=13. У розглянутій задачі многогранник розв'язків необмежений зверху і тому не існує на многограннику найбільшого значення *F*. Це означає, що харчування можна організувати як завгодно дорого.

Задача 4. Іван – студент-першокурсник. Він дійшов висновку, що одне тільки навчання, без щоденної гри у баскетбол, погано впливає на його розумовий, моральний та фізичний розвиток. Тому він вирішив розподілити свій денний час (приблизно 10 годин) для навчання та гри в баскетбол. Привабливість ігрового часу він оцінює вдвічі вище, ніж привабливість часу, витраченого на навчання. Але, маючи совість і почуття обов'язку, Іван вирішив, що час гри не повинен перевищувати час навчання. Крім цього, він помітив, що, якщо виконувати всі навчальні завдання, на гру залишиться не більше 4 годин в день. Допоможіть Івану розподілити час так, щоб він отримував максимальне задоволення і від навчання, і від гри.

Задача 5. Біржовий маклер хоче вкласти в акції деяку суму грошей для того, щоб до кінця року мати не менше 10 тис. дол. Існує два типи акцій, в які варто робити вкладення: акції надійних компаній з мінімальним ризиком (так звані "блакитні фішки"), що приносять у середньому 10% річних, і акції компаній, що займаються високими технологіями. Останні акції мають більш високу прибутковість – в середньому 25% річних, проте вони значно ризикованіші. Тому маклер вирішив вкладати в них не більше 60% коштів. На яку суму та яких акцій треба придбати маклеру для досягнення бажаної мети?

Задача 6. Нафтова компанія OilCo будує новий нафтопереробний завод для виробництва 4 видів продукції: дизельне паливо, бензин, мастильні матеріали та авіаційне паливо. Попит на ці види продукції складає відповідно 14, 30, 10 і 8 тис. барелів на день. Компанія уклала контракти з Іраном і ОАЕ на постачання сирої нафти танкерами. Оскільки обсяг видобутку нафти квотується постановами ОПЕК (Організація країн – експортерів нафти), компанія розраховує, що не менше 40% нафти вона отримуватиме з Ірану, а решту – з Арабських Еміратів. OilCo також прогнозує, що протягом найближчих 10 років попит на її продукцію та квоти на сиру нафту залишаться незмінними. Нафта, що поставляється з Ірану та ОАЕ, відрізняється своїми властивостями. З одного барреля іранської нафти можна виготовити 0,2 бареля дизельного палива, 0,25 бареля бензину, 0,1 бареля мастильних матеріалів та 0,15 бареля авіаційного палива. Відповідні числа для нафти з ОАЕ становлять 0,1; 0,6; 0,15 та 0,1. Компанії OilCo необхідно визначити мінімальне завантаження сирою нафтою свого нового нафтопереробного заводу [13].

Задача 7. Визначте напрям зростання цільової функції z в наступних випадках:

a) максимізувати $z = x_1 - x_2$;

b) максимізувати $z = -5x_1 - 6x_2$;

c) максимізувати $z = -x_1 + 2x_2$;

d) максимізувати $z = -3x_1 + x_2$.

3.2. Розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом

Розглянемо порядок розв’язання задачі за допомогою симплекс-таблиць на прикладі.

Задача 1. Для виробництва чотирьох видів виробів A_1, A_2, A_3, A_4 завод повинен використовувати три види сировини 1, 2, 3 запаси якого на запланований період становлять відповідно 1000, 600 та 150 умовних одиниць. У наведеній нижче таблиці наведено технологічні коефіцієнти, тобто витрата кожного виду сировини на виробництво одиниці кожного виробу та прибуток від реалізації одиниці виробу кожного виду [15].

Потрібно скласти такий план випуску вказаних виробів, щоб забезпечити максимальний прибуток від реалізації.

Таблиця 2

Види сировини	Запаси сировини	Технологічні коефіцієнти			
		A_1	A_2	A_3	A_4

1	1000	5	1	0	2
2	600	4	4	2	1
3	150	1	0	2	1
Прибуток від реалізації		6	2	2,5	4

Розв'язання. Позначимо через $x_{1,}$ $x_{2,}$ $x_{3,}$ $x_{4,}$ кількість одиниць відповідних виробів $A_{1,}$ $A_{2,}$ $A_{3,}$ A_4.

Тоді математична модель задачі буде така:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 600 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 150 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$F = 6x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + 4x_4 \to max$$

Для побудови початкового опорного плану систему нерівностей зведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових невід'ємних змінних (перехід до канонічної форми). У 1-й нерівності вводимо базисну змінну x_5. В 2-й нерівності вводимо змінну x_6. У 3-й нерівності − змінну x_7.

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 1000 \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 600 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 1 \cdot x_7 = 150 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7.$$

Базисні змінні – це змінні, які входять лише до одного рівняння системи обмежень, і до того ж одиничним коефіцієнтом.

Матриця коефіцієнтів A=a(ij) цієї системи рівнянь має вигляд:

5	1	0	2	1	0	0
4 1	2 0	2 2	1 1	0 0	1 0	0 1

Економічний сенс додаткових змінних: додаткові змінні ЗЛП позначають надлишки сировини, часу, інших ресурсів, що залишаються у виробництві цього оптимального плану.

Розв'яжемо систему рівнянь відносно змінних: x_5, x_6, x_7.

Вважаючи, що вільні змінні дорівнюють 0, отримаємо початковий опорний план: X_1=(0,0,0,0,1000,600,150).

Таблиця 3

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	1000	5	1	0	2	1	0	0
x_6	600	4	2	2	1	0	1	0
x_7	150	1	0	2	1	0	0	1
F(X_0)	0	-6	-2	-2.5	-4	0	0	0

Переходимо до основного алгоритму симплекс-методу [15].

Ітерація №0.

1) *Перевірка критерію оптимальності.*

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться від'ємні коефіцієнти.

2) *Визначення нової базисної змінної.*

В індексному рядку F(x) вибираємо максимальний за модулем елемент. Як напрямний, виберемо стовпець, що відповідає змінній x_1, так як це максимальний коефіцієнт по модулю.

3) *Визначення нової вільної змінної.*

Обчислимо значення D_i за рядками як від ділення b_i/a_{i1} і з них виберемо найменше: $\min\left(\frac{1000}{5};\frac{600}{4};\frac{150}{1}\right) = 150$. Відповідно, 2-ий рядок є напрямним.

Розв'язуючий елемент дорівнює 4 і знаходиться на перетині напрямного стовпця і напрямного рядка.

Таблиця 4

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	1000	5	1	0	2	1	0	0	200
x_6	600	**4**	2	2	1	0	1	0	**150**
x_7	150	1	0	2	1	0	0	1	150
F(X_1)	0	**-6**	-2	-2.5	-4	0	0	0	0

Оскільки в останньому стовпці є кілька мінімальних елементів 150, то номер рядка вибираємо за правилом Креко.

Метод Креко полягає в наступному. Елементи рядків, що мають однакові найменші значення min=150, поділяються на передбачувані розв’язувальні елементи, а результати заносяться в додаткові рядки. За напрямний рядок вибирається той, в якому раніше зустрінеться частково найменше під час читання таблиці зліва направо стовпчиками.

4) *Перерахунок симплекс-таблиці.*

Формуємо наступну частину симплексної таблиці. Замість змінної x_6 в плані 1 піде змінна x_1. Рядок, відповідний змінній x_1 в плані 1, отриманий в результаті розподілу всіх елементів рядка x_6 плану 0 на розв'язуючий елемент РЕ=4. На місці розв'язуваного елементу в плані 1 отримуємо 1. У решті клітин стовпця x_1 в плані 1 записуємо нулі. Таким чином, в новому плані 1 заповнений рядок x_1 і стовпець x_1. Всі наступні елементи нового плану 1, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника. Для цього вибираємо зі старого плану чотири числа, які розташовані у вершинах прямокутника та завжди включають розв’язуючий елемент РЕ.НЕ=СТЕ – (A*B)/РЕ, СТЕ – елемент старого плану, РЕ – розв’язуючий елемент (4), A і B елементи старого плану, що утворюють прямокутник з елементами СТЕ та РЕ. Подамо розрахунок кожного елементу у вигляді таблиці 5.

Таблиця 5

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1000-$\frac{600\cdot5}{4}$=250	5- $\frac{4\cdot5}{4}$=0	1- $\frac{2\cdot5}{4}$=-1.5	0- $\frac{2\cdot5}{4}$=-2	2-$\frac{1\cdot5}{4}$=0.75	1- $\frac{0\cdot5}{4}$=1	0-$\frac{1\cdot5}{4}$=-1.25	0-$\frac{0\cdot5}{4}$=0
600/4=150	4/4=1	2/4=0.5	2/4=0.5	1/4=0.25	0/4=0	1/4=0.25	0/4=0
150- $\frac{600\cdot1}{4}$=0	1- $\frac{4\cdot1}{4}$=0	0-$\frac{2\cdot1}{4}$=-0.5	2- $\frac{2\cdot1}{4}$=1.5	1-$\frac{1\cdot1}{4}$=0.75	0-$\frac{0\cdot1}{4}$=0	0-$\frac{1\cdot1}{4}$=-0.25	1-$\frac{0\cdot1}{4}$=1
0- $\frac{600(-6)}{4}$=900	-6- $\frac{4(-6)}{4}$=0	-2- $\frac{2(-6)}{4}$=1	-2.5- $\frac{2(-6)}{4}$=0.5	-4-$\frac{1(-6)}{4}$=-2.5	0-$\frac{0(-6)}{4}$=0	0-$\frac{1(-6)}{4}$=1.5	0-$\frac{0(-6)}{4}$=0

Після перетворень отримуємо нову таблицю 6.

Таблиця 6

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	250	0	-1.5	-2.5	0.75	1	-1.25	0
x_1	150	1	0.5	0.5	0.25	0	0.25	0
x_7	0	0	-0.5	1.5	0.75	0	-0.25	1
F(X_1)	900	0	1	0.5	-2.5	0	1.5	0

Ітерація №1

1) *Перевірка критерію оптимальності.*

Поточний опорний план не оптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться від'ємні коефіцієнти [15].

2) *Визначення нової базисної змінної.*

В індексному рядку F(x) вибираємо максимальний за модулем елемент. Як напрямний, виберемо стовпець, що відповідає змінній x_4, так як це максимальний коефіцієнт по модулю.

3) *Визначення нової вільної змінної.*

Обчислимо значення D_i за рядками як від ділення b_i/a_{i4} і з них виберемо найменше: $\min\left(\frac{250}{0.75};\frac{150}{0.25};\frac{0}{0.75}\right) = 0$. Відповідно, 3-ий рядок є напрямним. Розв'язуючий елемент дорівнює 0.75.

Таблиця 7

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	250	0	-1.5	-2.5	0.75	1	-1.25	0	333.33
x_1	150	1	0.5	0.5	0.25	0	0.25	0	600
x_7	0	0	-0.5	1.5	**0.75**	0	-0.25	1	0
F(X_2)	900	0	1	0.5	-2.5	0	1.5	0	0

4) *Перерахунок симплекс-таблиці.*

Формуємо наступну частину симплексної таблиці. Замість змінної x_7 в плані 2 піде змінна x_4. Рядок, відповідний змінній x_4 в плані 2, отриманий в результаті ділення всіх елементів рядка x_7 плану 1 на розв'язуючий елемент РЕ=0.75. На місці розв'язуючого елементу в плані 2 отримуємо 1. У решті клітинок стовпця x_4 в плані 2 записуємо нулі. Таким чином, в новому плані 2 заповнений рядок x_4 і стовпець x_4. Всі наступні елементи нового плану 2, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника. Після перетворень отримуємо нову таблицю 8 [15].

Таблиця 8

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	250	0	-1	-4	0	1	-1	-1
x_1	150	1	0.67	0	0	0	0.33	-0.33
x_4	0	0	-0.67	2	1	0	-0.33	1.33
F(X_2)	900	0	-0.67	5.5	0	0	0.67	3.33

Ітерація №2

1) *Перевірка критерію оптимальності.*

Поточний опорний план не оптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться від'ємні коефіцієнти.

2) *Визначення нової базисної змінної.*

В індексному рядку F(x) вибираємо максимальний за модулем елемент. Як напрямний, виберемо стовпець, що відповідає змінній x_2 , так як це максимальний коефіцієнт по модулю.

3) *Визначення нової вільної змінної.*

Обчислимо значення D_i за рядками як від ділення b_i/a_{i2} і з них виберемо найменше: $\min\left(-;\frac{150}{0.67};-\right) = 225$. Відповідно, 2-ий рядок є напрямним. Розв'язуючий елемент дорівнює 0.67.

4) *Перерахунок симплекс-таблиці.*

Формуємо наступну частину симплексної таблиці. Замість змінної x_1 в плані 3 піде змінна x_2. Рядок, відповідний змінній x_2 в плані 3, отриманий в результаті ділення всіх елементів рядка x_1 плану 2 на розв'язуючий елемент РЕ=0.67.

Таблиця 9

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	250	0	-1	-4	0	1	-1	-1	-
x_1	150	1	**0.67**	0	0	0	0.33	-0.33	**225**
x_4	0	0	-0.67	2	1	0	-0.33	1.33	-
F(X_3)	900	0	**-0.67**	5.5	0	0	0.67	3.33	0

На місці розв'язуючого елементу в плані 3 отримуємо 1. У решті клітинок стовпця x_2 в плані 3 записуємо нулі. Таким чином, в новому плані 3 заповнений рядок x_2 і стовпець x_2. Всі наступні елементи нового плану 3, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника. Після перетворень отримуємо нову таблицю 10 [15].

Таблиця 10

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	475	1.5	0	-4	0	1	-0.5	-1.5
x_2	225	1.5	1	0	0	0	0.5	-0.5
x_4	150	1	0	2	1	0	0	1
F(X_3)	1050	1	0	5.5	0	0	1	3

Серед значень індексного рядка немає від’ємних. Тому ця таблиця визначає оптимальний план задачі:

x_2=225

x_4=150

F(*X*)=2· 225+4·150=1050.

Відповідь. Оптимальним буде розв'язок *(0; 225; 0; 150; 475; 0; 0)*, за якого F_{max}*=1050*, тобто для отримання найбільшого прибутку, що дорівнює *1050* грошових одиниць, підприємство повинно випускати *225* одиниць продукції виду A_2, *150* одиниць продукції виду A_4 (продукцію виду A_1 і A_3 в даних умовах виготовляти невигідно); при цьому сировина типу 2 та 3 буде використана повністю, а *475* одиниць сировини типу 1 залишається невитраченими.

Задача 2**.** Розв'язати задачу лінійного програмування [15]

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 \le 12; \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 \ge 6; \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 \ge 1; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 \to min$$

Розв'язання. Для побудови початкового опорного плану систему нерівностей зведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних (перехід до канонічної форми). У першій нерівності вводимо базисну змінну x_5. У 2-й нерівності вводимо змінну x_6 з знаком мінус. У 3-й нерівності − змінну x_7 зі знаком мінус:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 12; \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 = 6; \\ 3x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 1x_7 = 1. \end{cases}$$

Введемо штучні змінні: в 2-й рівності вводимо змінну x_8; в 3-й рівності вводимо змінну x_9.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 = 12; \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 + 1x_8 + 0x_9 = 6; \\ 3x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 1x_7 + 0x_8 + 1x_9 = 1. \end{cases}$$

Для встановлення задачі на мінімум цільову функцію запишемо так:

$$F(X) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 + Mx_8 + Mx_9 \to min.$$

З рівнянь виражаємо штучні змінні:

$$x_8 = 6 - 4x_1 + 13x_2 - 10x_3 - 5x_4 + x_6,$$

$$x_9 = 1 - 3x_1 - 7x_2 - x_3 + x_7,$$

які підставимо в цільову функцію:

$$F(X) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 + M(6 - 4x_1 + 13x_2 - 10x_3 - 5x_4 + x_6) + M(1 - 3x_1 - 7x_2 - x_3 + x_7) \to min$$

або

$$F(X)=(2 - 7M)x_1 + (5 + 6M)x_2 + (3 - 11M)x_3 + (8 - 5M)x_4 + (M)x_6 + (M)x_7 + (7M) \to min.$$

Матриця коефіцієнтів A = a(ij) цієї системи рівнянь має вид:

3	6	-4	1	1	0	0	0	0
4	-13	10	5	0	-1	0	1	0
3	7	1	0	0	0	-1	0	1

Розв’яжемо систему рівнянь щодо базисних змінних: x_5, x_8, x_9.
Вважаючи, що вільні змінні дорівнюють 0, отримаємо початковий опорний план: X_1 = (0;0;0;0;12;0;0;6;1) [15].

Таблиця 11

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	12	3	6	-4	1	1	0	0	0	0
x_8	6	4	-13	10	5	0	-1	0	1	0
x_9	1	3	7	1	0	0	0	-1	0	1
F(X_0)	7M	-2+7M	-5-6M	-3+11M	-8+5M	0	-M	-M	0	0

Переходимо до основного алгоритму симплекс-методу.

Ітерація №0.

1) *Перевірка критерію оптимальності.*

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться додатні коефіцієнти.

2) *Визначення нової базисної змінної.*

Як напрямний, виберемо стовпець, що відповідає змінній x_3, так як це найбільший коефіцієнт.

3) *Визначення нової вільної змінної.*

Обчислимо значення D_i за рядками як від ділення b_i/a_{i3} і з них виберемо найменше: $\min\left(-;\frac{6}{10};\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{5}$. Відповідно, 2-ий рядок є напрямним. Розв'язуючий елемент дорівнює 10 і знаходиться на перетині напрямного стовпця та напрямного рядка [15].

Таблиця 12

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	min
x_5	12	3	6	-4	1	1	0	0	0	0	-
x_8	6	4	-13	**10**	5	0	-1	0	1	0	3/5
x_9	1	3	7	1	0	0	0	-1	0	1	1
F(X_1)	7M	-2+7M	-5-6M	**-3+11M**	-8+5M	0	-M	-M	0	0	0

4) *Перерахунок симплекс-таблиці.*

Формуємо наступну частину симплексної таблиці. Замість змінної x_8 в плані 1 увійде змінна x_3. Рядок, відповідний змінній x_3 в плані 1, отриманий в результаті ділення всіх елементів рядка x_8 плану 0 на розв'язуючий елемент PE=10. На місці розв'язуючого елементу в плані 1 отримуємо 1. У решті клітинок стовпця x_3 в плані 1 записуємо нулі. Таким чином, в новому плані 1 заповнений рядок x_3 і стовпець x_3. Всі наступні елементи нового плану 1, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника. Отримуємо нову симплекс-таблицю.

Таблиця 13

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^2/_5$	$4^3/_5$	$^4/_5$	0	3	1	$^{-2}/_5$	0	$^2/_5$	0
x_3	$^3/_5$	$^2/_5$	$-1^3/_{10}$	1	$^1/_2$	0	$^{-1}/_{10}$	0	$^1/_{10}$	0
x_9	$^2/_5$	$2^3/_5$	$8^3/_{10}$	0	$^{-1}/_2$	0	$^1/_{10}$	-1	$^{-1}/_{10}$	1
$\text{F}(X_1)$	$1^4/_5 + {}^2/_5$ М	$-\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}$М	$-8\frac{9}{10}+8\frac{3}{10}$М	0	$-6\frac{1}{2}$-М	0	$-\frac{3}{10}$+М	-М	3 $\frac{3}{10}-1\frac{1}{10}$М	0

Ітерація №1.

1) *Перевірка критерію оптимальності.*

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться додатні коефіцієнти.

2) *Визначення нової базисної змінної.*

Як напрямний, виберемо стовпець, що відповідає змінній x_2, так як це найбільший коефіцієнт.

3) *Визначення нової вільної змінної.*

Обчислимо значення D_i за рядками як від ділення b_i/a_{i2} і з них виберемо найменше: $\min\left(14\,{}^2/_5 \div {}^4/_5, -, {}^2/_5 \div 8\,{}^3/_{10}\right) = {}^4/_{83}$. Відповідно, 3-ій рядок є напрямним. Розв'язуючий елемент дорівнює $8\,{}^3/_{10}$.

Таблиця 14

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^2/_5$	$4^3/_5$	$^4/_5$	0	3	1	$^{-2}/_5$	0	$^2/_5$	0
x_3	$^3/_5$	$^2/_5$	$-1^3/_{10}$	1	$^1/_2$	0	$^{-1}/_{10}$	0	$^1/_{10}$	0
x_9	$^2/_5$	$2^3/_5$	$\mathbf{8^3/_{10}}$	0	$^{-1}/_2$	0	$^1/_{10}$	-1	$^{-1}/_{10}$	**1**
$\text{F}(X_1)$	$1^4/_5 + {}^2/_5$ М	$-\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}$М	$-8\frac{9}{10}+8\frac{3}{10}$М	0	$-6\frac{1}{2}$-М	0	$-\frac{3}{10}$+М	-М	3 $\frac{3}{10}-1\frac{1}{10}$М	0

4) *Перерахунок симплекс-таблиці.*

Формуємо наступну частину симплексної таблиці. Замість змінної x_9 в план 2 увійде змінна x_2. Рядок, відповідний змінній x_2 в плані 2, отриманий в результаті ділення всіх елементів рядка x_9 плану 1 на розв'язуючий елемент РЕ=$8\,{}^{3}/_{10}$. На місці розв'язуючого елементу в плані 2 отримуємо 1. У решті клітинок стовпця x_2 в плані 2 записуємо нулі. Таким чином, в новому плані 2 заповнений рядок x_2 і стовпець x_2. Всі наступні елементи нового плану 2, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника. Отримуємо нову симплекс-таблицю [15].

Таблиця 15

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14\,{}^{30}/_{83}$	$4\,{}^{29}/_{83}$	0	0	$3\,{}^{4}/_{83}$	1	${}^{-34}/_{83}$	${}^{8}/_{83}$	${}^{34}/_{83}$	${}^{-8}/_{83}$
x_3	${}^{55}/_{83}$	${}^{67}/_{83}$	0	1	${}^{35}/_{83}$	0	${}^{-7}/_{83}$	${}^{-13}/_{83}$	${}^{7}/_{83}$	${}^{13}/_{83}$
x_2	${}^{4}/_{83}$	${}^{26}/_{83}$	1	0	${}^{-5}/_{83}$	0	${}^{1}/_{83}$	${}^{-10}/_{83}$	${}^{-1}/_{83}$	${}^{10}/_{83}$
F(X_2)	$2\,{}^{19}/_{83}$	$1\,{}^{82}/_{83}$	0	0	$-7\,{}^{3}/_{83}$	0	${}^{-16}/_{83}$	$-1\,{}^{6}/_{83}$	${}^{16}/_{83}$-M	$1\,{}^{6}/_{83}$-M

Ітерація №2.

1) *Перевірка критерію оптимальності.*

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться додатні коефіцієнти.

2) *Визначення нової базисної змінної.*

Як напрямний, виберемо стовпець, що відповідає змінній x_1, так як це найбільший коефіцієнт.

3) *Визначення нової вільної змінної.*

Обчислимо значення D_i за рядками як від ділення b_i/a_{i1} і з них виберемо найменше: min $\left(14\,{}^{30}/_{83} \div 4\,{}^{29}/_{83},\ {}^{55}/_{83} \div {}^{67}/_{83}, {}^{4}/_{83} \div {}^{26}/_{83}\right) = {}^{166}/_{1079}$. Відповідно, 3-ій рядок є напрямним. Розв'язуючий елемент дорівнює ${}^{26}/_{83}$.

Таблиця 16

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	min
x_5	$14^{30}/_{83}$	$4^{29}/_{83}$	0	0	$3^{4}/_{83}$	1	$^{-34}/_{83}$	$^{8}/_{83}$	$^{34}/_{83}$	$^{-8}/_{83}$	$3\frac{9047}{29963}$
x_3	$^{55}/_{83}$	$^{67}/_{83}$	0	1	$^{35}/_{83}$	0	$^{-7}/_{83}$	$^{-13}/_{83}$	$^{7}/_{83}$	$^{13}/_{83}$	$\frac{4565}{5561}$
x_2	$^{4}/_{83}$	$^{26}/_{83}$	1	0	$^{-5}/_{83}$	0	$^{1}/_{83}$	$^{-10}/_{83}$	$^{-1}/_{83}$	$^{10}/_{83}$	$\frac{166}{1079}$
F(X_3)	$2^{19}/_{83}$	$1^{82}/_{83}$	0	0	-$7^{3}/_{83}$	0	$^{-16}/_{83}$	-$1^{6}/_{83}$	$^{16}/_{83}$-M	$1^{6}/_{83}$-M	0

4) *Перерахунок симплекс-таблиці.*

Формуємо наступну частину симплексної таблиці. Замість змінної x_2 в план 3 увійде змінна x_1. Рядок, відповідний змінній x_1 в плані 3, отриманий в результаті ділення всіх елементів рядка x_2 плану 2 на розв'язуючий елемент РЕ=$^{26}/_{8}$. На місці розв'язуючого елементу в плані 3 отримуємо 1. У решті клітинок стовпця x_1 в плані 3 записуємо нулі. Таким чином, в новому плані 3 заповнений рядок x_1 і стовпець x_1. Всі наступні елементи нового плану 3, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника [15]. Отримуємо нову симплекс-таблицю.

Таблиця 17

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^{9}/_{13}$	0	-$13\frac{1909}{2158}$	0	$3^{23}/_{26}$	1	$^{-15}/_{26}$	$1^{10}/_{13}$	$^{15}/_{26}$	-$1^{10}/_{13}$
x_3	$^{7}/_{13}$	0	-$2\frac{1245}{2158}$	1	$^{15}/_{26}$	0	$^{-3}/_{26}$	$^{13778}/_{89557}$	$^{3}/_{26}$	$^{-13778}/_{89557}$
x_1	$^{166}/_{1079}$	1	$3\frac{5}{26}$	0	-$\frac{415}{2158}$	0	$^{1}/_{26}$	$^{-10}/_{83}$	$^{-1}/_{26}$	$^{5}/_{13}$
F(X_3)	$1^{12}/_{13}$	0	-$6\frac{747}{2158}$	0	-$6^{17}/_{26}$	0	$^{-7}/_{26}$	-$1^{6}/_{83}$	$^{7}/_{26}$-M	$^{4}/_{13}$-M

1) *Перевірка критерію оптимальності.*

Серед значень індексного рядка немає додатніх. Тому ця таблиця визначає оптимальний план задачі. Оскільки в оптимальному розв'язку відсутні штучні змінні (вони дорівнюють нулю), то цей розв'язок є допустимим. Оптимальний план можна записати так:

$x_3 = {}^{7}/_{13}$

$x_1 = {}^{166}/_{1079}$

$F(X) = 3\cdot \frac{7}{13} + 2\cdot \frac{166}{1079} = 1\frac{12}{13}$ [15].

Задача 3. Розв'язати симплекс-методом наступну задачу ЛП [5]

$$5x_1+x_2+2x_3+x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_1-x_2+x_3=1,$$

$$2x_1+x_2+x_4=5,$$

$$x_j \geq 0,\ j=1:4$$

використовуючи початковий опорний план $x=(0; 0; 1; 5)^T$.

Розв'язання. Маємо $n=4$, $m=2$, $c=(5; 1; 2; 1)^T$, $b=(1; 5)^T$,

$A=(A_1\ \ A_2\ \ A_3\ \ A_4)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Оскільки $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, то вектор $x=(0; 0; 1; 5)^T$ дійсно є опорним планом задачі, а стовпці $A_3=\binom{1}{0}$ і $A_4=\binom{0}{1}$ матриці A утворюють у просторі R^2 базис, який називають природним базисом (природним базисом у просторі R^m називається набір m упорядкованих стовпців (окремі орти у просторі R^m), які складають одиничну матрицю). Легко переконатися, що коефіцієнти розкладу стовпців за природним базисом збігаються з компонентами цих стовпців у матриці.

Отже, маємо $J=\{3; 4\}$. Будуємо першу симплекс-таблицю T^0:

Симплекс-таблиця T^0

T^0	A_1	A_2	A_3	A_4	x
A_3	1	-1	1	0	x_3=1
A_4	2	1	0	1	x_4=5
Δ	-1	-2	0	0	$\langle c, x\rangle$=7

Дотримуючись правила Бленда, вибираємо *s*=1. Стовпець A_1 буде напрямним, і його доведеться запровадити в базис. Тепер вибираємо напрямний рядок таблиці. Підрахуємо величини:

$$\frac{x_3}{\lambda_{31}} = \frac{x_4}{\lambda_{41}} = 2.5.$$

Оскільки перше число менше, беремо *r*=3. Стовпець A_3 виводиться з базису. Напрямний елемент λ_{31}=1 позначається іншим кольором (симплекс-таблиця T^0).

Новим базисом буде набір стовпців$\{A_1, A_4\}$ з номерами J'={1; 4}.

Використовуючи формули $\begin{cases} x_j - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}} \cdot x_r, \text{ якщо } j \in J \backslash \{r\}, \\ \frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}} \cdot x_r, \text{ якщо } j = s, \\ 0, \text{ якщо } j \notin J'. \end{cases}$ та Δ'=Δ_k - $\frac{\Delta_s}{\lambda_{rs}} \cdot \lambda_{rk}$,

$k \in 1{:}\, n$, переходимо до симплекс-таблиці T' [5].

Опишемо правила переходу:

1) для отримання рядка A_4 таблиці T' з рядка A_4 таблиці T^0 віднімається рядок A_3 таблиці T^0, помножений на коефіцієнт $\frac{\lambda_{41}}{\lambda_{31}} = 2$:

$$A_4' = A_4^0 - 2A_3^0;$$

2) для отримання рядка A_1 таблиці T' рядок A_3 таблиці T^0 ділимо на напрямний елемент λ_{31}=1, $A_1' = A_3^0$;

3) для отримання рядка Δ таблиці T' з рядка Δ таблиці T^0 віднімається рядок A_3 таблиці T^0, помножений на коефіцієнт $\frac{\Delta_1}{\lambda_{31}}$ = -1:

$$\Delta' = \Delta^0 + A_3^0.$$

Симплекс-таблиця T'

T'	A_1	A_2	A_3	A_4	x'
A_1	1	-1	1	0	x_1'=1
A_4	0	3	-2	1	x_4'=3
Δ	0	-3	1	0	$\langle c, x' \rangle$=8

Напрямний елемент λ_{42}=3 вибирається однозначно. Новим базисом буде система стовпців $\{A_1;\ A_2\}$, $J''=\{1;2\}$. Для переходу до симплекс-таблиці T'' здійснюємо наступні перетворення таблиці T':

1)$A_1'' = A_1' - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{42}} A_4' = A_1' + \frac{A_4'}{3}$; 2) $A_2'' = \frac{A_4'}{\lambda_{42}} = \frac{A_4'}{3}$;

3)$\Delta'' = \Delta' - \frac{\Delta_2}{\lambda_{42}} A_4' = A_1' + A_4'$.

Симплекс-таблиця T''

T''	A_1	A_2	A_3	A_4	x''
A_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	x_1''=2
A_2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	x_2''=1
Δ	0	0	-1	1	$\langle c, x'' \rangle$=11

Напрямний елемент $\lambda_{13}=\frac{1}{3}$ вибирається однозначно. Новим базисом буде система стовпців $\{A_2;\ A_3\}$. Для переходу до симплекс-таблиці T''' здійснюємо наступні перетворення таблиці T'':

1)$A_2''' = A_2'' - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}} A_1'' = A_2'' + 2A_1''$; 2) $A_3''' = \frac{A_1''}{\lambda_{13}} = 3A_1''$;

3)$\Delta''' = \Delta'' - \frac{\Delta_3}{\lambda_{13}} A_1'' = \Delta'' + 3A_1''$ [5].

Симплекс-таблиця T'''

T'''	A_1	A_2	A_3	A_4	x'''
A_3	3	0	1	1	x_3'''
A_2	2	1	0	1	x_2'''=5
Δ	3	0	0	2	$\langle c, x''' \rangle$=17

Оскільки всі $\Delta_k \geq 0$, $\forall\ k \in 1:4$. Відповідно, план $x^* = (0; 5; 6; 0)^T$ є розв’язком задачі, а максимальне значення цільової функції знаходиться у “ правому нижньому” кутку таблиці і становить $\langle c, x^* \rangle$=17.

Задача 4. Розв’язати симплекс-методом наступну задачу ЛП [7]:

$$-(x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6) \to max,$$

$$x_1 + x_4 = 20,$$

$$x_2 + x_5 = 50,$$

$$x_3 + x_6 = 30,$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 60,$$

$$x_j \geq 0,\ j \in 1:6.$$

Розв'язання. Для даної задачі n =6, m =4, c =$(-1; -9; -5; -3; -4; -14)^T$,

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб скористатися симплекс-методом, нам потрібно мати базисний план задачі. Знайдемо його методом штучного базису.

По суті, для знаходження базисного плану достатньо звести матрицю системи A до діагонального вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стовпці A_4, A_2, A_6 та A_5 отриманої матриці є лінійно незалежними та утворюють одиничну матрицю. Позначимо $b := (20; 40; 30; 10)^T$.

Отримуємо наступну задачу:

$$-(x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6) \to max,$$

$$Ax = b,\ \ x_j \geq 0,\ \ j \in 1{:}6\ [7].$$

Початковий опорний план $x^0 = (0; 40; 0; 20; 10; 30)^T$, і його базис { A_2, A_4 , A_5, A_6}.

Розв'язуємо задачу симплекс-методом.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$\boldsymbol{x}$
A_4	1	0	0	1	0	0	20
A_5	-1	0	-1	0	1	0	10
A_2	1	1	1	0	0	0	40
A_6	0	0	1	0	0	1	30
Δ	-7	0	-14	0	0	0	-880
A_2	0	1	1	-1	0	0	20
A_1	1	0	0	1	0	0	20
A_5	0	0	-1	1	1	0	30
A_6	0	0	1	0	0	1	30
Δ	0	0	-14	7	0	0	-740
A_3	0	1	1	-1	0	0	20
A_1	1	0	0	1	0	0	20
A_5	0	1	0	0	1	0	50
A_6	0	-1	0	1	0	1	10
Δ	0	14	0	-7	0	0	-460
A_3	0	0	1	0	0	1	30
A_1	1	1	0	0	0	-1	10
A_5	0	1	0	0	1	0	50
A_4	0	-1	0	1	0	1	10
Δ	0	7	0	0	0	7	-390

Оптимальний план $x^* = (10; 0; 30; 10; 50; 0)^T$, і $\langle c, x^* \rangle = 390$ [7].

Задача 5. Розв'язати симплекс-методом задачу (x^0 - початковий базисний план):

$$3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 \to max,$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 3,$$

$$4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 - 7x_6 = -2,$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:6, \qquad x^0 = (0; 0; 1; 0; 1; 0)^T.$$

Задача 6. Розв'язати симплекс-методом задачу (x^0 - початковий базисний план):

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 \to max,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2,$$

$$-4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = -4,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:5, x^0 = (1; 0; 0; 0; 0)^T.$$

Задача 7. Розв'язати симплекс-методом задачу:

$$z(x) := x_1 - x_2 - 3x_3 \to min,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1,$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2,$$

$$3x_1 + x_3 \leq 5,$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:3.$$

Вказівка: звести задачу до канонічної форми і знайти початковий базисний план.

Задача 8. Розв'язати симплекс-методом задачу, розпочавши із зазначеного базисного плану [1]:

$$4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to max,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 11,$$

$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \quad x^0 = (0,0,{}^4\!/_5, 1,0)^T.$$

ВИСНОВКИ

Під час написання бакалаврської роботи було опрацьовано наявну літературу з теми, поглиблено та систематизовано знання про лінійне програмування в задачах моделювання детермінованих процесів, охарактеризовано алгоритми і методи лінійного програмування, розглянуто приклади задач і наведено завдання для самостійної роботи.

Розглянутий нами графічний метод для розв'язування реальних задач непридатний, оскільки математична модель для його застосування повинна мати дві – три змінні (види діяльності). На практиці такі задачі не виникають.

Якщо математична модель описує реальні технологічні та економічні процеси, то вона, як правило, має сотні чи навіть тисячі змінних і обмежень. Для розв'язування таких задач використовується симплексний метод, із застосуванням якого теоретично можна отримати оптимальний розв'язок довільної лінійної математичної задачі.

Графічний метод є важливим для пізнання сутності оптимізації, геометричної інтерпретації постановки та розв'язку задач лінійного програмування. Проте, є багато технологічних та економічних процесів, які з достатньою для практики точністю можна описати лінійними залежностями, тобто такі моделі є лінійними, а отже, для знаходження їх оптимального розв'язку застосовується симплексний метод.

Матеріали даної бакалаврської роботи можуть бути використані у майбутній магістерській роботі та для проведення лекційних і практичних занять студентами ВНЗ при вивчені даної теми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Выгодчикова И. Ю. Введение в линейное программирование: учебное пособие. Саратов: Издательский центр «Наука», 2014. 47с.
2. Ашманов С. А., Тимохов А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. Изд. 2, стер. СПб.: «Лань», 2012. 448 с.
3. Навчальний посібник «Лінійне програмування» для студентів напрямів підготовки 122 Комп'ютерні науки та 121 Інженерія програмного забезпечення / О. О. Ємець, О. С. Пічугіна, О. Б. Маций, К. П. Коробчинський. Х. : ХНАДУ, 2019. 102 с.
4. Богданова Е. Л. Оптимизация в проектном менеджменте: линейное программирование: учебное пособие / Е. Л. Богданова, К. А. Соловейчик, К. Г. Аркина. СПб. : Университет ИТМО, 2017. 165 с.
5. Цегелик Г. Г. Лінійне програмування. Львів: Світ, 1995. 215 с.
6. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М. : Высш. шк., 1986. 394 с.
7. Ашманов С. А. Линейное программирование. М. : Наука, 1981. 354 с.
8. Гасс С. Линейное программирование. М. : Физматгиз, 1961. 294 с.
9. Артеменко Ю. Ф., Огліх В. В. Навчальний посібник з курсу математичне програмування. Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2003. 103 с.
10. Артеменко Ю. Ф., Огліх В. В. Навчальний посібник з курсу математичне програмування (частина 2). Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2005. 294 с.

11. Бережная Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем. М. : Финансы и статистика, 2001.

12. Сагитов Р. В., Шершнев В. Г. Линейная алгебра. Часть 2. Линейное программирование, динамическое программирование и теория игр: Учебно-методическое пособие. М. : Издательство «Менеджер», 2007. 192 с.

13. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.: ил. Парал. тит. англ.

14. Колемаев В. А. Математическая экономика. М., 2005.

15. Дудов С. И., Сидоров С. П. Курс математической экономики. Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 2002.