Рівненький державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

«Застосування теорії функціональних рівнянь до знаходження розв’язку задач математичної фізики»

Виконала: студентка ІІ курсу магістратури, групи М-М-21 спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Шарко Віта Костянтинівна

Керівник: доктор технічних наук, професор Бичков О.С.

Рецензент: доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики НУВГП
Мартинюк П.М.

Рівне – 2021 року

Зміст

ВСТУП

Функціональні рівняння передбачають знаходження виду функцій, для яких рівняння буде виконуватись при будь-яких значеннях змінної (в заданій області). Звісно, диференціальні, різницеві, інтегральні та інші рівняння охоплюють це означення, але у вигляді функціонального рівняння зазвичай розглядаються ті, в яких до функцій застосовані лише алгебраїчні операції.

Вивчення цієї теми бере свій початок з робіт Ейлера. Функціональні рівняння розв'язував і Лобачевський при створенні неевклідової геометрії. В подальшому до них зверталось багато сучасних авторів, але вивчати дану тему було складно, через відсутність систематизованих загальних знань (як і мовою оригіналу, так і перекладених робіт), які давали б досить широке уявлення про функціональні рівняння. Значним поштовхом у розвитку, стало створення та переклад книги Я. Ацела та Ж. Домбра. На даний час, дослідження функціональних рівняння набуває популярності, розвивається та широко застосовується.

Актуальність теми. Функціональні рівняння можуть виникати в задачах різного змісту, тому поглиблення і розвиток знань з цієї теми в останні роки стало посідати чільне місце серед завдань вчених.

Мета дослідження: систематизувати відомості про функціональні рівняння та їх застосування в конкретних задачах математичної фізики.

Об'єкт дослідження: функціональні рівняння та диференціальні рівняння з частинними похідними.

Предмет дослідження: застосування теорії функціональних рівнянь до розв'язування задач математичної фізики.

Завдання дослідження:

- розкрити зміст понять функціональних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- розглянути функціональні рівняння Коші;
- ознайомитися з класифікаціями диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку;

- розглянути задачі які приводять до рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типів;
- показати на практиці застосування поданих знань;
- зробити висновки.

Методи дослідження: аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення, індукція, дедукція, пояснення, класифікація.

Практична значущість дослідження полягає в тому, що дана робота може бути використана в таких напрямках математики, як алгебра, геометрія, математичний аналіз, функціональний аналіз та теорія ймовірності, а також - із теорією інформатики, фізики, економіки, механіки тощо.

РОЗДІЛ 1. Загальні поняття й означення теорії функціональних рівнянь та теорії функціональних рівнянь з частинними похідними

1.1. Історичний нарис

1.1.1. Визначення лінійних і квадратичних функцій за допомогою функціональних рівнянь в середньовіччі. Застосування отриманої характеристики Галілеєм

Функціональні рівняння беруть свій початок із розвитку поняття функції. З великим трудом, можна тлумачити тексти Евкліда і Архімеда, як формулювання функціональних рівнянь (хоча б не явних), встановлення для даних функцій властивостей, виявлення всіх функцій з такими властивостями, та вирішення цих рівнянь з причин відсутності у них будь-яких означень функції.

Важливість функціональних рівнянь полягає в тому, що за їх допомогою визначалися функції. Але в багатьох працях не доводилось, що ці функції є єдиним розв’язком цих рівнянь. В якості прикладу, згадаємо Орезма, який використовував у окремому різновиді координати і увів «однорідні декартові» (афінні) «якості», що й привели до функціонального рівняння

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)}=\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3} \text{ для всіх } x_1,\ x_2, x_3 \text{ при } x_1>x_2>x_3 \qquad (1.1)$$

У відповідному уривку із робіт вченого говориться наступне: «Рівнозмінна властивість це така, в якій для будь-яких трьох точок відношення відстані між першою і другою до відстані між другою і третьою дорівнює відношенню надлишку інтенсивності першої порівняно з другою до надлишку інтенсивності другої порівняно з третьою... . Всі, що відрізняються від описаних вище, називаються різнозмінними і можуть бути описані методом від супротивного, а саме: ця властивість є не у всіх своїх частинах однаково інтенсивною і відношення між надлишками інтенсивності трьох точок (першої порівняно з другою та другої порівняно з третьою) не дорівнює відношенню їх відстані» [3].

Якщо у відношенні (1.1) x_2 взяти по середині між x_1 та x_3, то отримаємо рівняння Єнсена

$$f\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2}. \qquad (1.2)$$

Воно має зв'язок з результатом, який відомий нам «мертонська теорема». Цей результат був відомий Орезму і часто повторювався в підручниках виданих пізніше, що доводить його педагогічне значення.

Ця теорема стверджує наступне: відстань, на якій знаходиться об'єкт, що рухається по прямій з «рівнозмінною» швидкістю, така ж, як і для об'єкта, швидкість якого постійна та дорівнює середньому арифметичному від початкової та кінцевої швидкості першого об'єкта. В сучасних позначеннях, якщо $x(t)$ це відстань, яку проходить перший об'єкт, а $v(t)$ - це швидкість, то ми отримаємо функціональне рівняння (для двох функцій)

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{v(t_1)+v(t_2)}{2}(t_2 - t_1).$$

В роботах Орезма (1352) воно використовується в вигляді

$$x(t_2) - x(t_1) = v\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)(t_2 - t_1), \tag{1.3}$$

що розуміється як рівність (в сучасних позначеннях)

$$v\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) = \frac{v(t_1)+v(t_2)}{2}. \tag{1.4}$$

На сучасній мові мертонська теорема пов'язує інтегральне числення з функціональним рівнянням (1.4). Орезм (1352 р.) ввів геометричне значення цього результату, використовуючи площу трапеції та прямокутника (рис. 1.1) для доведення рівності (1.3).

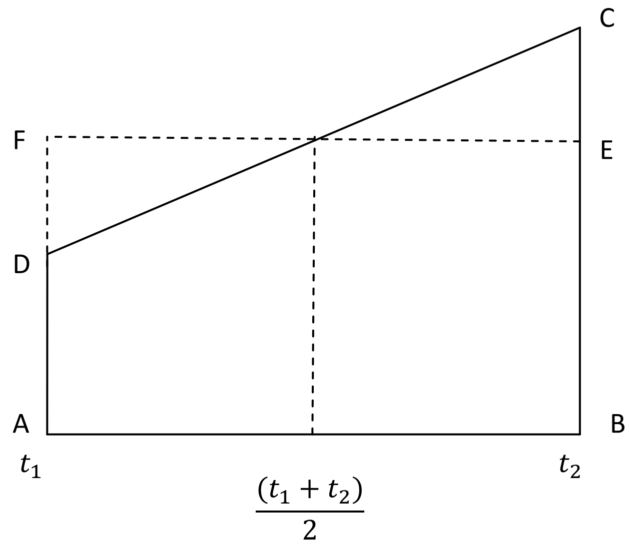

Рис. 1.1.

Рівняння (1.4) приводить до формули $v(t) = at + b$, а рівність (1.3) набуває виду

$$x(t_2) - x(t_1) = \left(a\frac{t_1+t_2}{2} + b\right)(t_2 - t_1). \tag{1.5}$$

Раніше (в 1347 р.) Орезм увів «заключне» t_0, для якого $v(t_0) = 0$ (таким чином, в формулі (1.5) $b = -at_0$), і вибрав три точки (де тільки дві з них незалежні) так, що $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$. Це перетворює (1.5) в рівність двох відношень:

$$\frac{x(t_3)-x(t_2)}{x(t_2)-x(t_1)} = \frac{(t_0-t_2)+(t_0-t_3)}{(t_0-t_1)+(t_0-t_2)}. \tag{1.6}$$

Звісно, поклавши тут $t_3 = 2t_2 - t_1$, отримаємо функціональне рівняння з двома незалежними змінними, справедливе для $x(t) = (t_0 - t)^2$. Якщо не враховувати умову $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$, то замість (1.6) отримаємо із (1.5) рівняння (з трьома незалежними змінними t_1, t_2, t_3)

$$\frac{x(t_3)-x(t_2)}{x(t_2)-x(t_1)} = \frac{t_3^2-2t_0t_3-t_2^2+2t_0t_2}{t_2^2-2t_0t_2-t_1^2+2t_0t_1},$$

яке ще більш зрозуміло показує, що x може бути многочленом другого степеня. Але це, звісно, виходить за рамки математичних означень, позначень і методів того часу.

Однак Орезм в 1347 р. усвідомив квадратичну природу процесу, оперуючи цілочисельним варіантом рівняння (1.6), де $t_0 - t_1$, $t_0 - t_2$, $t_0 - t_3$ є послідовними кратними деякого відрізку, так що відношення приросту дорівнює відношенню послідовних непарних чисел:

$$\frac{x(t_0-(n+1)t)-x(t_0-nt)}{x(t_0-nt)-x(t_0-(n-1)t)} = \frac{2n+1}{2n-1}. \tag{1.7}$$

Говорячи словами Орезма (1347 р.): «Якщо предмет так розділений (на рівні частини) і найбільш далека частина вважається першою, відношення властивостей частин… таке ж, як ряд непарних чисел». Для зображення він накреслив рис. 1.2 наведений нижче. В тій же роботі Орезм прийшов до наступного висновку: « … що у випадку будь-якого предмету, рівнозмінного до градуса рівного нулю, відношення всієї властивості до властивості частини, закінчується градусом рівним нулю, таке ж, як і квадрат відношення всього предмету до цієї частини». В сучасних позначеннях (t_0 таке, що $v(t_0)$=0):

$$\frac{x(t)}{x(t')} = \left(\frac{t_0 - t}{t_0 - t'}\right)^2,$$

або $x(t) = c(t_0 - t)^2$ (тут c виходить рівним половині величини a із (1.5). Орезм перевірив також те, що такі функції задовольняють рівняння (1.7).

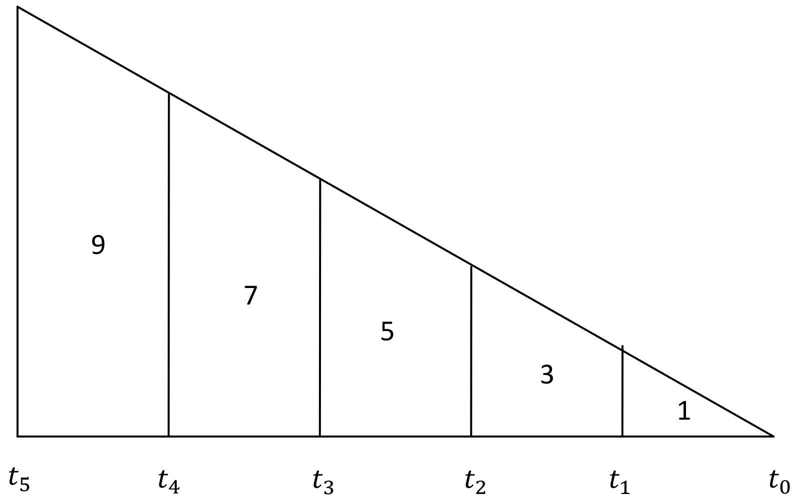

Рис. 1.2.

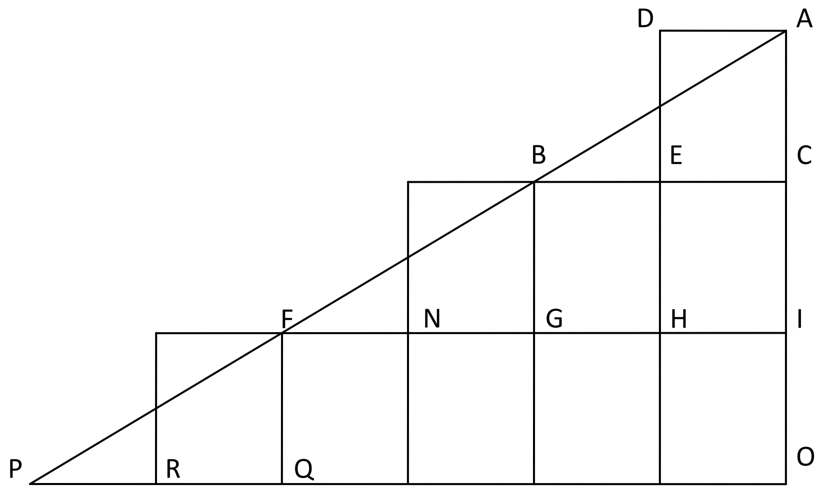

Рис.1.3.

Майже три століття потому Галілей (1638 р.) при розгляді задачі падіння тіл використовував варіант того самого функціонального рівняння (1.7):

$$\frac{x((n+1)t) - x(nt)}{x(nt) - x((n-1)t)} = \frac{2n+1}{2n-1}, \tag{1.8}$$

а також його розв'язок. Так що він, можливо, перший використовував функціональні рівняння в фізиці. Помітимо, що вище перерахована середньовікова класифікація «властивостей» представлена теоретично, тоді коли Галілей вивчав справжній рух, такий як падіння тіл. Він використовував рівняння (1.8) і відповідно рис. 1.3 (по суті дзеркальне відображення рис. 1.2), оскільки він вважав $t_0 = 0$ в момент, коли рух починається з швидкістю рівною нулю. Його опис рівняння (1.8) тісно переплітається з Орезмом. І ось його висновок: «Якщо щось починає рух зі стану спокою з однорідним прискоренням, то пройдена відстань знаходиться у відношенні, що дорівнює квадрату відношення відповідних проміжків часу, тобто відношення квадратів рівняння (1.8) характеризує квадратний закон (хоча і не довів це в обидві сторони), що в своїх експериментах з падіння тіл він перевіряв саме (1.8) для підтвердження цього закону.

Галілей дав також інші доведення мертонської теореми наслідком «методу неподільних» Кавальєрі. Як добре відомо, саме він заявив, що «закони природи написані математичною мовою» [4].

1.1.2. Функціональні рівняння логарифмів і показникової функції

Орезм і Евклід знали та використовували властивості степенів:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ і } a^m a^n = a^{m+n}$$

для цілих додатних показників та в деяких інших часткових випадках (Орезм - навіть для деяких раціональних показників, які він ввів). В роботі Штіфеля (1544р.) знаходження степеня і ці рівняння поширювались на будь-які (не тільки додатні) цілі числа.

Ці рівняння використав Бюргі (1620); пізніше Брігс (1624) відповідні властивості логарифмів:

$$\lg xy = \lg x + \lg y,$$

застосовуються для побудови логарифмів, введених цим автором і Непером. Використовуючи цілком певний варіант неперервності, Брігс розв'язав функціональне рівняння

$$g(xy) = g(x) + g(y) \tag{1.9}$$

в тому розумінні, що побудував деякий його розв'язок. Можемо розглядати це як перший приклад визначення нової функції за допомогою функціонального рівняння (в працях Орезма функціональні рівняння використовувались для роботи з лінійними і квадратичними функціями, які вже були відомі). Технічні викладки з логарифмами згодом перекреслили цю точку зору. Але вона чітко показала себе, коли де Сен-Венсан (1647) усвідомив, що інтеграл від $\frac{1}{x}$ задовольняє аналогічне рівняння. Його студент де Сарада (1649) вивів з цього, що цей визначений інтеграл як функція верхньої межі дорівнює логарифму з точністю до сталої, а саме: де Сен-Венсан вибрав точки $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$,… на гіперболі $y = \frac{1}{x}$ (рис. 1.4) таким чином, що площи під відповідними відрізками гіперболи рівні.

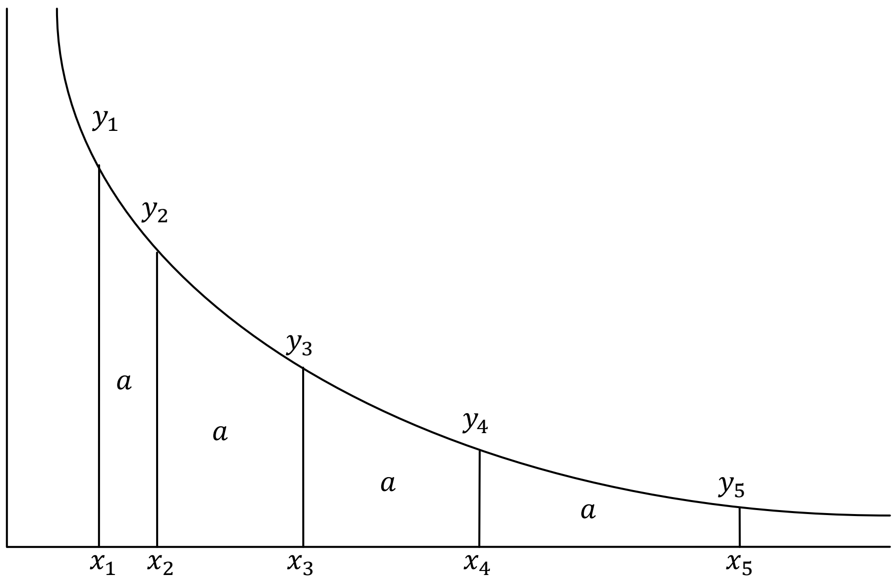

Рис. 1.4.

Архімедівським методом вичерпування він отримав, що

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4} = \cdots \text{, тобто } \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \cdots$$

Перше рівняння цього ланцюга дає $x_2^2 = x_1 x_3$ тоді як із умови на площі слідує рівність

$$g(x_2) - g(x_1) = g(x_3) - g(x_2),$$

де $g(x)$ - площа під відрізком гіперболи між точками (1,1) та $\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

Звідси

$$2g(x_2) = g(x_1) + g(x_3),$$

тобто

$$2g\left((x_1 x_3)^{\frac{1}{2}}\right) = g(x_1) + g(x_3).$$

Оскільки $g(1) = 0$, то $2g\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = g(x)$ звідки отримуємо

$$g(x_1 x_3) = g(x_1) + g(x_3),$$

тобто рівняння (1.9). Після чого де Сарада формулює твердження, що оскільки логарифм має таку ж властивість, то $g(x)$ є логарифмом з точністю до мультиплікативної сталої (яка не обов'язково повинна дорівнювати 1, оскільки можливі різні основи логарифмів). Говорячи словами де Саради (1649 р.): «як наслідок, ці площі можуть бути використані замість логарифмів» [13].

1.1.3. Функціональні рівняння в роботах Ейлера

Ньютон, Лейбніц і їх послідовники, особливо Ейлер, дали чітке формулювання аналізу нескінченно малих, і це, звісно, в великій мірі розвинуло уявлення в термінах функцій, але в основному його використовують до диференціальних рівнянь. Тим не менш, в роботах Ейлера (1748) і Лейбніца (1768) зібрані – для тригонометричних та гіперболічних функцій – різні функціональні рівняння, хоча, звісно, у вигляді формул, що описують поведінку функції, коли аргументи складаються, віднімаються і так далі. Перехід від однієї такої властивості до іншої без звернення до визначень може розглядатися як оперування функціональними рівняннями [20].

Крім того, Ейлер (1764) за допомогою геометричних методів звів функціонально-диференціальне рівняння

$$g[x + g(x)g'(x)]^2 = g(x)^2[1 + g'(x)^2]$$

(яке він отримав із геометричної задачі, сформульованої для навчальних цілей) до «чисто» функціонального рівняння

$$f[x + f(x)] = f(x), \tag{1.10}$$

де $f(x) = g'(x)g(x)$. Ейлер розв'язав рівняння (1.10) за допомогою геометричних методів, використовуючи нескінченно малі. Ці методи він пізніше застосовував до інших подібних рівнянь. Він не побачив, що тут всі неперервні розв'язки є сталими, і тому навряд чи міг помітити, що знайдені ним розв'язки мають розриви.

З іншого боку, Ейлер розв'язував і функціональні рівняння з кількома змінними. А між іншим, він зауважив (1768) як найбільш очевидний факт: «однорідна функція нульового порядку… при $y = ux$ перетворюється в функцію від u», що складає випадок $n = 2$, $g(u) \equiv 1$. Для більш загального випадку $g(u) = u^c$ Ейлер (1755) дав приклад зведення функціонального рівняння до рівняння з частинними похідними: він вивів «диференціальне рівняння Ейлера»

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = cf \tag{1.11}$$

із рівняння

$$f(x_1 u, x_2 u, \dots, x_n u) = u^c f(x_1, \dots, x_n),$$

а також показав (1770), що загальний (диференційований) розв'язок рівняння (1.11) для додатних змінних має вигляд

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^c F\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

1.2. Рівняння Коші. Базис Гамеля

1.2.1. Загальні питання, продовження та регулярні розв'язки

Розглянемо *рівняння Коші*:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ при всіх } (x, y) \in R^2, \tag{1.12}$$

а також

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \text{ при всіх } (x, y) \in \overline{\mathrm{R}}_+^2 \tag{1.13}$$

де R - множина всіх дійсних чисел, R_+- множина всіх додатних, а $\bar{R}_+$ - всіх не від'ємних, і в усіх випадках мається на увазі звичайна топологія; для будь-якої множини S вважаємо $S^2 =: \{(x, y) | \, x \in S, y \in S\}$.) Порівнявши (1.12) з (1.13), бачимо різницю. В другому випадку рівняння вважається виконання тільки для всіх невід'ємних x, y, а в першому – для будь-яких дійсних. Множина всіх значень змінної, для яких рівняння має розв'язок, називається областю визначення цього рівняння (не слід плутати її з областю визначення невідомої функції; для рівняння (1.12) областю визначення є R^2, а для функції f – вісь дійсних чисел). Функція, що задовольняє рівняння в даній області, називається розв'язком рівняння в цій області. Інколи (але не завжди) можна продовжити розв'язок рівняння на більшій області. Наприклад, для (1.13), це означає наступне.

Теорема 1.1. Кожному розв'язку $g: \bar{R}_+ \to R$ рівняння (1.13) відповідає розв'язок $f: R \to R$ рівняння (1.12), такій, що

$$f(x) = g(x) \text{при всіх } x \in \bar{R}_+. \tag{1.14}$$

Доведення. Побудуємо шукану функцію f тобто продовжимо g на всю R, за допомогою формули

$$f(s - t) = g(s) - g(t) \text{ при всіх } (s, t) \in \bar{\mathrm{R}}_+^2. \tag{1.15}$$

Таке визначення є коректним (тобто дійсно є визначенням): якщо $(s - t) = (u - v)$ для деяких $s, t, u, v \in \bar{R}_+$, тоді $(s + v) = (t + u)$ з огляду на (1.13)

$$g(s) + g(v) = g(s + v) = g(u + t) = g(u) + g(t),$$

звідки

$$g(s) - g(t) = g(u) - g(v),$$

що й потрібно. Виконується і (1.14): якщо $s, t, u \in \bar{R}_+$, $s - t = u$ тоді $s = u + t$ і

$$g(s) = g(u + t) = g(u) + g(t), \tag{1.16}$$

тобто

$$f(u) = f(s - t) = g(s) - g(t) = g(u).$$

(можливо також спочатку вивести рівність $g(0) = 0$, із (1.13), а після чого і рівняння (1.14) із (1.15)). Тепер доведемо, що функція f, визначена формулою

(1.15), задовольняє рівняння (1.12). Справді, нехай $x = s - t$, $y = u - v$ і відповідно $x + y = (s + u) - (t + v)$ де $s, t, u, v \in \bar{R}_+$. З огляду на (1.15)

$f(x) = g(s) - g(t)$ $f(y) = g(u) - g(v)$ з урахуванням рівняння (1.13)

$$f(x + y) = g(s + u) - g(t + v) = g(s) + g(u) - g(t) - g(v) = f(x) + f(y)$$

Теорема 1.1 доведена.

Теорема 1.1 (як і її доведення) зберігається при заміні $\bar{R}_+$ на R_+ і навіть при заміні R на будь-яку абелеву групу G, вироджену під напівгрупою S, із заміною $\bar{R}_+$ (або R_+) на S. Невідома функція f також може приймати значення не в R, а в будь-якій абелевій групі.

Розв'язок $f: S \to R$ рівняння Коші на групоїді називається адитивним відображенням із S в R, а при $S = R$ - адитивною функцією. Така ж термінологія використовується, коли f приймає значення не в R, а в будь-якій групі, або навіть групоїді ($f: S \to G$).

Розглянемо деякі наслідки з рівняння (1.12).

Лема 1.2. Якщо виконується рівняння (1.12), то справедливо також те, що

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(x_k) \tag{1.17}$$

при будь-яких $x_k \in R, r_k \in Q, k = 1,2, \dots, n$ $(n \geq 1)$.

Доведення. Підставимо в (1.12) $y = 0$ і $y = -x$, отримаємо відповідно

$$f(0) = 0 \tag{1.18}$$

і

$$f(-x) = -f(x). \tag{1.19}$$

Крім того, отримаємо із рівняння (1.12)

$$f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n) \tag{1.20}$$

для всіх натуральних n і дійсних $x_1, \dots, x_n$.

Покладемо $x_1 = \dots = x_n = x$. Отримаємо

$$f\ (nx) = nf(x) \tag{1.21}$$

при всіх дійсних x і всіх натуральних n.

Нехай $m,\ n$ – натуральні числа, $r = \frac{m}{n}$, t будь-яке дійсне. Якщо $x = rt = \left(\frac{m}{n}\right)t$, тоді $nx = mt$ і з огляду на (1.21)

$$nf(x) = f(nx) = f(mt) = mf(t),$$

звідки

$$f(rt) = f(x) = \frac{m}{n}f(t) = rf(t).$$

В силу (1.18) і (1.19) це правильно і для від'ємних раціональних чисел і нуля, тобто

$$f(rt) = \ rf(t) \tag{1.22}$$

для всіх раціональних r і всіх дійсних t. З урахуванням (1.20) звідси слідує (1.17), і лема 2 доведена.

Покладемо в рівності (1.22) $t = 1,\ t(1) = c$. Маємо

$$f(r) = rf(1) = cr \text{ при всіх } r \in Q, \tag{1.23}$$

де Q – множина всіх раціональних чисел. Дослідимо, чи можна поширити ці результати на всі дійсні числа, а це можливо, якщо функція f неперервна. Розв'язки рівняння (1.12) і (1.13) при деяких умовах мають вид

$$f(x) = cx \text{ при всіх } x \in R, \tag{1.24}$$

де c - дійсна стала. Без сумніву, всі функції виду (1.24) задовольняють рівняння (1.12). Наступна теорема показує, що всі інші розв'язки цього рівняння мають досить «дивний» вигляд.

Графіком функції f, заданої на множині S називається множина

$$G = \{(x,y)|y = f(x), x \in S\}.$$

В нашому випадку $S = R\ \ f(S) = \{f(x)|x \in S\} \subset R$ і графік є підмножиною в R^2:

$$G = \{(x,y)|y = f(x), x \in R\}. \tag{1.25}$$

Теорема 1.3. Якщо розв'язок рівняння (1.12) не може бути наведено у виді (1.24), то його графік скрізь щільний в площині R^2.

Доведення. Якщо функцію f не можна подати в виді (1.24), то існують $x_1, x_2 \neq 0$ для яких

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2} \tag{1.26}$$

(в протилежному випадку покладемо $c = \frac{f(x_1)}{x_1}$, і нехай $x_2 = x$ проходить через ненульові дійсні числа; отримуємо (1.24) для $x \neq 0$ і з огляду на (1.18) також для $x = 0$). Таким чином,

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Як наслідок, вектори $p_1 = (x_1, f(x_1))$ і $p_2 = (x_2, f(x_2))$ лінійно незалежні і це означає, що вони породжують всю площину R^2, тобто для будь-якого $p \in R^2$ існують такі ρ_1, ρ_2, що

$$p = \rho_1 p_1 + \rho_2 p_2.$$

Далі, множина (пар) раціональних чисел скрізь щільна в множині (пар) дійсних чисел; таким чином можна знайти вектор виду $r_1 p_1 + r_2 p_2$ з раціональними r_1, r_2, довільно близький до заданого $p \in R^2$. Але

$$r_1 p_1 + r_2 p_2 = r_1(x_1, f(x_1)) + r_2(x_2, f(x_2)) = (r_1 x_1 + r_2 x_2, r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2)) =$$
$$= (r_1 x_1 + r_2 x_2, f(r_1 x_1 + r_2 x_2)$$

(остання рівність випливає із (1.17)). Тому, якщо $x_1 (\neq 0)$ і $x_2 (\neq 0)$ задовольняють умови (1.26), то множина

$$G_{1,2} = \{(x, y) |\, y = f(x), \qquad x = r_1 x_1 + r_2 x_2, (r_1, r_2) \in Q^2\}$$

всюди щільна в R^2. Із рівняння (1.25) зрозуміло, що графік G містить $G_{1,2}$ і тому теж щільний в R^2. Теорема 1.3 доведена.

Застосуємо теорему 1.3 для того, щоб із (1.13) і (1.14) вивести рівність $f(x) = cx$. Тому потрібно переконатися, що в наших міркуваннях не має зачарованого кола). Додавання векторів у вищенаведеному доведенні задано безпосередньо як покоординатне:

$$q_1 + q_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Відповідно до теореми 1.3, якщо розв’язок рівняння (1.12) не можна представити у виді (1.24), то його графік скрізь щільний в R^2. Тим не менш, в роботах Джонса (1942) наведено приклади, коли такий графік зв’язний.

Теорема 1.3 показує, що якщо розв’язок рівняння (1.12) не можна представити у вигляді (1.24), то він загально нестійкий. Із цієї теореми легко вивести і його часткову непостійність.

Наслідок 1. Якщо розв’язок рівняння (1.12) не можна представити у вигляді (1.24), то образ будь-якого інтервалу $[a, b]$, де $a < b$, щільний в R.

З іншого боку, цей факт показує, що деяка постійність такого розв’язку вже приводить до формули (1.24).

Наслідок 2. Якщо функція f задовольняє рівняння (1.12) і при цьому неперервна в точці, або ж монотонна, чи обмежена з одного боку на додатному інтервалі, то f має вигляд (1.24) для деякої сталої c.

Дійсно (див. рис. 1.5), при будь-якій із цих умов графік функції f не містить областей, заштрихованих на рисунку, а тому не скрізь щільний в R^2. Але тоді по теоремі (1.3) функція повинна мати вигляд (1.24).

Навпаки, функція виду (1.24), як зазначено вище, задовольняє рівняння (1.12) при будь-яких c, але обмеження на сталу можуть виникати із умов монотонності, або обмеженості функції. Наприклад, якщо в $\bar{R}_+$, чи на якомусь проміжку в $\bar{R}_+$ функція f невід’ємна, то $c \geq 0$.

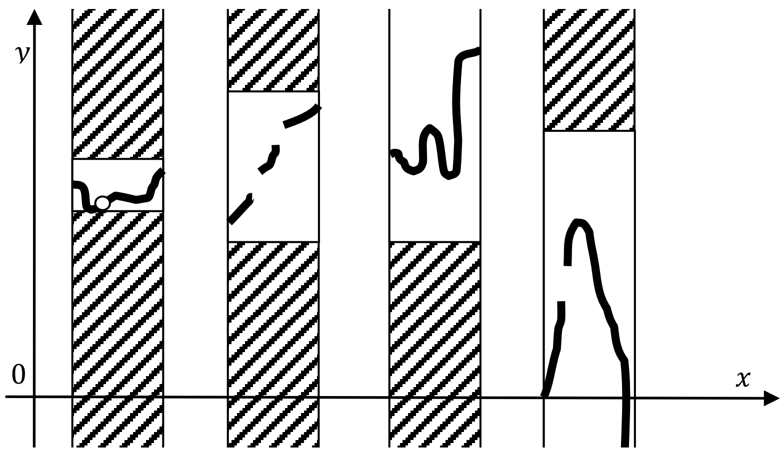

Рис.1.5.

Узагальнимо наслідок 2: покажемо, що розв’язок рівняння (1.12) має вид (1.24), якщо він обмежений з одного боку на множині додатної міри. Таким чином, якщо розв'язок не можна представити у такому виді, то він не є обмеженим на будь-якій множині додатної міри.

Теорема 1.4. Якщо $S \subset \mathrm{R}$ має додатну лебегову міру, то множина

$$S + S \coloneqq \{x + y | x \in S, y \in S\}$$

містить інтервал додатної довжини.

Доведення. Досить знайти такий інтервал I додатної довжини, що для всіх $z \in I$ перетин множини S і $z - S$ не порожній ($z - S$ складається із всіх $z - y$ де y перетинає S). Для цього досить довести, що $m((z - S) \cap S) > 0$.

В лемі (1.5) ми покажемо, що можливо знайти інтервал додатньої довжини, маючи досить великий перетин з S, а саме

$$m(S \cap J) \geq \alpha m(J), \tag{1.27}$$

де $\frac{4}{5} < \alpha < 1$. Тоді для доведення теореми (1.4) можна використовувати множину $S \cap J$ замість S. Тому без втрат загальності можна вважати, що $S \subset J$, до того ж довжина інтервалу J кінцева і додатна. Для інтервалу $J = [a, b]$, де $a < b$, завжди знайдеться таке (мале) додатне δ що із $|a + b - z| < \delta$ випливає

$$m((z - J) \cap J) > \frac{m(J)}{2}.$$

Із (1.27) отримуємо $m\left(\frac{J}{S}\right) \leq (1 - \alpha)m(J)$ тому для таких z маємо

$$m\big((z - S) \cap S\big) > \left[\frac{1}{2} - 2(1 - \alpha)\right] m(J) > \frac{m(J)}{10}.$$

Отже, $(x - S) \cap S \neq \emptyset$ для будь-яких $z \epsilon [a + b - \delta, a + b + \delta]$. Залишилось довести існування інтервала J, для якого виконується (1.27). Це зроблено нижче в окремій лемі.

Лема 1.5. Якщо $S \subset \mathrm{R}$ має додатну лебегову міру і $0 < \alpha < 1$, то існує інтервал J, для якого виконується відношення (1.27).

Доведення. Без загальних втрат можливо «зменшити» множину S і обмежитись випадком $0 < m(S) < \alpha$. Оскільки всі відкриті множини вимірні за Лебегом, то існує відкрита множина $U \supset \mathrm{S}$, для якої $\alpha m(U) \leq m(S) (\leq m(U))$. Але U являє собою зліченне об'єднання непересічних інтервалів J_n додатної довжини. Враховуючи σ- адитивність міри Лебега отримуємо, що

$$\alpha m(U) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(S \cap J_n) = m(S).$$

Тому, хоча б для одного натурального n_0 вірно, що

$$\alpha m(J_{n_0}) \leq m(S \cap J_{n_0})$$

і умова (1.27) виконується при $J = J_{n_0}$. Тим самим доведена лема 1.5, а разом із нею і теорема 1.4.

Теорема 1.6. Функція $f : R \to R$ має вид (1.24) для деякого дійсного c, тоді і тільки тоді якщо вона задовольняє рівняння (1.12) і обмежена (знизу, або зверху) на множині додатної міри.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ обмежена зверху на множині S додатної лебегової міри:

$$f(x) \leq M \text{ при всіх } x \in S. \tag{1.28}$$

З урахуванням (1.12) звідси слідує, що $f(x + y) = f(x) + f(y) \leq 2M$ при всіх $x, y \in S$, тобто $f(z) \leq 2M$ при $z \in S + S$. За теоремою 1.4 множина $S + S$ містить інтервал додатної довжини. Так як функція f на ньому обмежена, то з огляду на наслідок 2 вона має вид (1.24).

Наслідок 3. Нехай функція $f : \underline{R}_{+} \to R$ задовольняє рівняння (1.13) і при цьому, або неперервна в точці, або монотонна, або вимірна за Лебегом, або обмежена (з будь-якого боку) на множині додатної міри.Тоді існує така стала c, що

$$g(x) = cx \text{ при всіх } x \geq 0. \tag{1.29}$$

Зокрема, якщо виконується (1.13) при $g(x) \geq 0$, то (1.29) також виконується при деяких $c \geq 0$.

Як показують ці результати, буває цікаво знайти всі розв'язки даного рівняння в деякому класі допустимих функцій (наприклад, неперервних в точці, обмежених на проміжку, або виміряних). Множина всіх таких розв'язків називається загальним розв'язком в даному класі. Зокрема, ми могли б враховувати будь-яку функцію, яка відображає дану область в даній множині). Функції нерідко бувають задані формулами, які дають всі їх значення, коли аргументи проходять область визначення; подібно цьому, загальний розв'язок функціонального рівняння нерідко можна виразити формулою, яка дасть всі конкретні розв'язки (в даному класі) при конкретизації сталих, що входять в неї, або інших невідомих елементів (наприклад, функцій). Так, загальний невід'ємний розв'язок рівняння (1.13), визначається формулою (1.29) при $c \geq 0$, а загальне розв'язок рівняння (1.12), неперервного в точці, - формулою (1.24) [32].

1.2.2. Загальний розв'язок

Нехай x_0, y_0 - дійсні числа. За винятком випадку коли $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ завжди існує функція $f : R \to R$, що задовольняє рівняння Коші (1.12) і така, що

$$f(x_0) = y_0 \,. \tag{1.30}$$

При $x_0 \neq 0$ можна покласти $f(x) = \left(\frac{y_0}{x_0}\right) x$, а при $x_0 = 0, y_0 = 0$ - взяти тотожне нулю.

Неперервний розв'язок рівняння (1.12) однозначно визначається рівністю (1.30) при $x_0 \neq 0$, але для розривних розв'язків, як ми побачимо, це не є правильно. Замінивши $\{x_0\}$ довільною множиною дійсних чисел E, природно виникає запитання: на яких множинах розв'язок рівняння (1.12) можна задати довільно? Ми, як наслідок, шукаємо такі множини $E \subset \mathrm{R}$, що для будь-якого відображення $g : E \to R$ існує єдине відображення f, таке, що задовольняє рівняння (1.12) і співпадаюче з g на E. Тут нам знадобиться базис Гамеля. В роботах Hamel (1905) доведено з використанням аксіоми вибору, що існує така підмножина H в R, що кожне дійсне число x, представляється єдиним чином (з точністю до нульового коефіцієнта) у виді

$$x = \sum_{k=1}^{n} r_k h_k \,, \tag{1.31}$$

де $h_k \in H, r_k$ раціональне, $k = 1, \ldots, n$, H - це базис Гамеля, а формула (1.31) – розклад Гамеля для x з коефіцієнтами r_k $(k = 1, \ldots, n)$. Зауважимо, що число доданків в сумі (1.31) скінченне, але залежить від x. Базис Гамеля - не що інше, як базис (в лінійній алгебрі) для R як лінійний простір над полем раціональних чисел Q.

Тепер покажемо, що цікава нам множина E - це базис Гамеля H.

Теорема 1.7. Загальний розв'язок $f : R \to R$ визначається безпосередньо розкладом Гамеля (1.31). А саме, слід задати f на множині H довільно і покласти

$$f(x) = F\left(\sum_{k=1}^{n} r_k h_k\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(h_k). \qquad (1.32)$$

Доведення. Наведене визначення функції f є доречним, оскільки нулеві коефіцієнти не змінюють ні (1.31), а ні (1.32). Зокрема, якщо $x = h \in H,$ то (1.32) дасть тотожність $f(h) = f(h)$, тобто не обмежує вибір значень функції на множині H. З огляду на (1.31) і (1.17) будь-який розв'язок рівняння (1.12) можна записати у виді (1.32).

І навпаки, всі функції $f : R \to R$ вказаного виду задовольняють рівняння (1.12). Дійсно, візьмемо два дійсних числа з розкладу Гамеля

$$x = \sum_{k=1}^{m} r_k h_k \text{ і } y = \sum_{k=1}^{m} s_k h_k$$

$(h_k \in H;\ r_k, s_k \in Q; k = 1,2,\dots,m).$

Додавши, якщо потрібно, доданки з нульовим коефіцієнтом, завжди можна вважати, що в двох розкладах число доданків і елементів базиса Гамеля однакове.) Тоді $x + y$ в базисі H має єдиний розклад

$$x + y = \textstyle\sum_{k=1}^{m}(r_k + s_k)h_k \quad (h_k \in H;\ r_k + s_k \in Q; k = 1,2,\dots,m),$$

з точністю до нульових коефіцієнтів (як будь-який розклад на базисі Гамеля). Зважаючи на (1.32)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} r_k f(h_k), \quad f(y) = \sum_{k=1}^{m} s_k f(h_k), \quad f(x+y) = \sum_{k=1}^{m}(r_k + s_k) f(h_k),$$

тобто рівняння (1.12) дійсно виконується. Теорема 1.7 доведена.

Наслідок 4. **З**агальний розв'язок $g : \bar{R}_+ \to R$ рівняння (1.13) можна отримати, якщо обмежити на $\bar{R}_+$ загальний розв'язок рівняння (1.12), побудований в теоремі (1.7).

Таким чином, теорема 1.3 показує, що якщо розв'язок рівняння (1.12) неможливо показати у виді (1.24), то його графік всюди щільний в R^2. Але це не доводить, що такий розв'язок існує. Однак, теорема 1.7 і наслідок 4 показують, що існує розв'язок рівняння (1.12) та (1.13), які не можна показати у виді (1.24) і (1.29) відповідно. Щоб отримати такий розв'язок, досить на двох елементах h_1, h_2 базиса Гамеля покласти такі значення функції f, що $\frac{f(h_1)}{h_1} = \frac{f(h_2)}{h_2}$. З огляду на наслідок 2 такі розв'язки ніде не можуть бути неперервними, або монотонними. Зважаючи на наслідок 3 вони не є локально вимірними за Лебегом, не обмежені з усіх боків на будь-якій множині додатної міри, і згідно з теоремою 1.3 їх графіки скрізь щільні в R^2.

Припущення 1. Довільна функція, задана на множині $E \subset R$, без сумніву продовжується до адитивної (тобто тпкої, що задовольняє рівняння (1.12)) функції на R, тоді і тільки тоді, якщо E є базисом Гамеля.

Доведення. Нехай на базис Гамеля H задана функція $g : H \to R$. З огляду на теорему 1.7 вона продовжується до адитивної функції на R. Нехай тепер h - адитивна функція на R, до того ж $h = g$ на H. Для будь-якого $x \in R$ виду (1.32) маємо

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k h(x_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k g(x_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(x_k) = f(x)$$

$(x_k \in H, r_k \in Q)$, тобто функція f єдина.

Нехай тепер $E \subset R$ має ті самі властивості, що й функція, довільно задана на E, єдиним чином продовжується до адитивної функції f на R. По-перше, доведемо, що множина E лінійно незалежна над Q. Дійсно, в протилежному випадку існує не тривіальне відношення

$$\sum_{k=1}^{n} r_k x_k = 0,$$

де $x_k \in E$ $(x_i \neq x_j$ при $i \neq j)$, $r_k \in Q$; $(k = 1,2,\dots,n)$, і хоча б одне r_k не дорівнює нулю. Тоді з урахуванням (1.17) і (1.18) будь-яка адетивна функція f повинна задовольняти умови

$$\sum_{k=1}^{n} r_k f(x_k) = 0,$$

тобто значення $f(x_k)$ $(k = 1,2,\dots,n)$ не можуть бути довільними. Інакше кажучи, не всяка функція на множині E є обмеженою адитивною функцією, що суперечить нашому припущенню.

По-друге, покажемо, що E породжує R (як лінійний простір над Q). В протилежному випадку множину E, незалежну над Q, можна доповнити до базиса Гамеля H, який містить E. Тоді для будь-якого відображення $g : E \to R$ знайдеться два різних продовження на H, припустимо, що це g_1 і g_2. Відповідно до теореми 1.7 існують такі адитивні функції f_1 і f_2, що $f_i(y) = g_i(y)$ $(i = 1,2)$ при всіх $y \in H$. Отже, f_1 і f_2 - дві різні адитивні функції, які є продовженням для g. Це суперчить припущенню, що g може містити не більше одного такого продовження.

Отже, ми довели, що E нзалежна над Q і продовжує R як лінійний простір над Q. Але це і означає, що E є базисом Гамеля.

*Наслідок 5***.** Множина $E \subset R$ містить базис Гамеля, тоді і тільки тоді, якщо довільна функція f, що задовольняє рівняння (1.12) і дорівнює нулю на E, тотожно дорівнює нулю. ■

Із наслідку 5 і теореми 1.2 випливає, що довільний відрізок додатної довжини, і навіть довільна підмножина в R з додатною лебеговою мірою, містить базис Гамеля. Але його може містити і множина міри нуль. Побудуємо таку множину.

Канторова множина C складається із усіх таких $t \in [0,1]$, що в деякому їх троїстому розкладі не міститься одиниць:

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i},$$

де всі ε_i дорівнюють 0, або 2.

Для початку покажемо, що канторова множина містить базис Гамеля. Нехай $x \in [0,1]$, тоді

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \tag{1.33}$$

де $x_i = 0,1,2$.

Якщо x_i дорівнює 0, або 2, то покладемо $y_i = z_i = x_i$. Якщо $x_i = 1$, то при парності i покладемо $y_i = 0, z_i = 2$. Числа

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i} \quad \text{і} \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{3^i}$$

належать канторовій множині, до того ж

$$x = \frac{y+z}{2}. \tag{1.34}$$

Нехай тепер адитивна функція f дорівнює нулю на C. Зважаючи на (1.33) і лему 1.2 вона дорівнює нулю на [0,1], а отже і на всій осі. Відповідно до наслідку 5 множина C містить базис Гамеля.

З іншого боку, загальновідомо, що кантова множина має міру 0. Для цілого викладення ми це доведемо, використовуючи інший спосіб побудови кантової множини. Нехай E_1 складається із всіх $t \in [0,1]$, для якої хоча б в одному троїстому розкладі n-на координата t_n відмінна від 1. Множини $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$ замкнуті в $[0,1]$. Лебегова міра E_n дорівнює $\frac{2}{3}$ лебегової міри E_{n-1}. Канторовою множиною є перетин всіх E_n $(n \geq 1)$. Тому ця міра менша ніж $\frac{2^n}{3}$, для будь-якого $n \geq 1$ і буде дорівнювати нулю [16].

РОЗДІЛ 2. Постановка крайових та змішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними

2.1. Класифікація рівнянь з частинними похідними 2-го порядку

Рівняння з частинними похідними можна класифікувати за багатьма ознаками. Кваліфікація рівнянь важлива тим, що як виявилось, для кожного класу існує своя загальна теорія і методи розв'язування.

Наведемо шість основних методів кваліфікації рівнянь.

1) Порядок рівняння. Порядком рівняння називається найвищий порядок частинних похідних, які входять в рівняння.

2) Число змінних. Числом змінних називається число незалежних змінних.

3) Лінійність. Рівняння з частинними похідними може бути лінійним, або нелінійним. В лінійні рівняння залежна змінна і всі її частинні похідні входять лінійним чином, в часткових випадках вони не перемножаються між собою, не зводяться до квадрату і так далі.

4) Однорідність. Рівняння називається однорідним, якщо його права частина тотожно дорівнює нулю. Якщо ж права частина відмінна від нуля, то рівняння називається неоднорідним.

5) Види коефіцієнтів. Якщо коефіцієнти рівняння сталі, то рівняння називають рівнянням із сталими коефіцієнтами (в протилежному випадку рівнянням зі змінними коефіцієнтами).

6) Три основних типи лінійних рівнянь. Всі лінійні рівняння з частинними похідними другого порядку виду відносяться до одного із типів: параболічного, гіперболічного, або еліптичного [9].

Рівнянням з частинними похідними 2-го роду з двома незалежними змінними x, y називається відношення між невідомою функцією $u(x, y)$ та її частинними похідними 2-го роду включно:

$$F\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right) = 0.$$

Аналогічно записують рівняння і для більшого числа незалежних змінних.

Рівняння називається лінійним відносно старшої похідної, якщо воно має вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (2.1)$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22} є функціями від x і y.

Якщо коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} залежать не тільки від x і y, а є подібними до F_1 функціями x, y, u, u_x, u_y , то таке рівняння називається квазілінійним.

Рівняння називається лінійним, якщо воно лінійне як відносно старших похідних u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} так і відносно функції u і її перших похідних u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \quad (2.2)$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ функції тільки для x і y. Якщо коефіцієнт рівняння (2.2) не залежить від x і y, то воно являє собою лінійне рівняння з постійними коефіцієнтами. Рівняння називається однорідним, якщо $f(x, y) = 0$.

За допомогою перетворення похідних

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y),$$

яке дозволяє обернене перетворення, ми отримуємо нове рівняння, еквівалентне початковому. Природно виникає питання: як вибрати ξ і η, щоб рівняння з цими змінними мало найбільш просту форму?

Перетворюючи похідні до нових змінних, отримуємо

$$\begin{cases} u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x, \\ u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Підставимо значення похідних із (2.3) в рівняння (2.1), отримаємо:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (2.4)$$

де

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

а функція $\bar{F}$ не залежить від другої похідної. Бачимо, що якщо початкове рівняння лінійне, тобто

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f,$$

то $\bar{F}$ має вид

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta,$$

тобто рівняння залишається лінійним.

Виберемо змінні ξ та η так, щоб коефіцієнт $\bar{a}_{11}$ дорівнював нулю. Розглянемо рівняння з частинними похідними 1-го порядку

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \tag{2.5}$$

Нехай, $z = \varphi(x, y)$ – якийсь частковий розв'язок цього рівняння. Якщо покласти $\xi = \varphi(x, y)$, то коефіцієнт $\bar{a}_{11}$, без сумніву буде дорівнювати нулю. Таким чином, згадане вище завдання про вибір нових незалежних змінних переплітається з розв'язком рівняння (2.5).

Лема 2.1. Якщо $\mathrm{z} = \varphi(x, y)$, є частковим розв'язком рівняння

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0,$$

то відношення $\varphi(x, y) = C$ являє собою загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx\, dy + a_{22} dx^2 = 0. \tag{2.6}$$

Лема 2.2. Якщо $\varphi(x, y) = C$ являє собою загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx\, dy + a_{22} dx^2 = 0,$$

то функція $\mathrm{z} = \varphi(x, y)$ задовольняє рівняння (2.5).

Рівняння (2.6) називається характеристичним для рівняння (2.1), а його інтеграли – характеристиками.

Вважаючи $\xi = \varphi(x, y)$, де $\varphi(x, y) = const$ є загальним інтегралом рівняння (2.6), ми перетворюємо в нуль коефіцієнт біля $u_{\xi\xi}$. Якщо $\psi(x, y) = const$ є другим загальним інтегралом рівняння (2.6), не залежним від $\varphi(x, y)$, то, вважаємо $\eta = \psi(x, y)$, а також ми перетворимо в нуль коефіцієнт біля u_η.

Рівняння (2.6) розпадається на два рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (2.9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (2.10)$$

Знак підкореневого виразу визначає тип рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0$$

Це рівняння називають в точці M рівнянням:

гіперболічного типу, якщо в точці M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

еліптичного типу, якщо в точці M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

параболічного типу, якщо в точці M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Неважко переконатись в справедливості рівності

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y,$$

із якої випливає інваріантність типу рівняння при перетворенні змінних, так як функціональний визначник (якобіан) D перетворення змінних відмінний від нуля. В різних точках області визначення рівняння може мати різний тип.

Розглянемо область G, в усіх точках якої рівняння має однаковий тип. Через кожну точку області G проходять дві характеристики, до того ж для рівняння гіперболічного типу характеристики дійсні різні, для рівнянь еліптичного типу – комплексні і різні, а для рівнянь параболічного типу – дійсні і рівні.

Розглянемо кожний випадок окремо.

Для рівнянь гіперболічного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ і праві частини рівнянь (2.9) та (2.10) дійсні і різні. Загальний їхній інтеграл $\varphi(x, y) = C$ і $\psi(x, y) = C$ визначають сім'ю дійсних характеристик. Нехай

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y), \quad (2.11)$$

зведемо рівняння (2.4) після ділення на коефіцієнти при $u_{\xi\eta}$ до виду

$$u_{\xi\eta} = W(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \text{ де } W = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

Це - так звана канонічна форма рівняння гіперболічного типу. Часто користуються другою канонічною формою. Покладемо

$$\xi = \alpha + \beta, \ \eta = \alpha - \beta,$$

тобто

$$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}, \beta = \frac{\xi-\eta}{2},$$

де α і β – нові змінні. Тоді

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta),\ u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

В результаті рівняння (2.4) набуде вигляду

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = W_1 \ \ (W_1 = 4W).$$

Для рівняння параболічного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ рівняння (2.9) та (2.10) співпадають і ми отримуємо один загальний інтеграл рівняння (2.6): $\varphi(x,y) = const$. Покладемо в цьому випадку

$$\xi = \varphi(x,y), \eta = \eta(x,y),$$

де $\eta(x,y)$ - довільна функція, не залежна від φ. При такому виборі змінних коефіцієнтів

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

так як $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; звідси слідує, що

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$

$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0.$$

Після ділення рівняння (2.4) на коефіцієнти біля $u_{\eta\eta}$ отримаємо канонічну форму для рівняння параболічного типу

$$u_{\eta\eta} = W(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), W = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}.$$

Якщо в праву частину не входить u_ξ, то це рівняння буде звичайним диференціальним рівнянням, що залежить від ξ як параметр.

Для рівняння еліптичного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ та правих частини рівнянь (2.9) і (2.10) комплексні. Нехай $\varphi(x,y) = C$ – комплексний інтеграл рівняння (2.9). Тоді $\varphi^*(x,y) = C$, де φ^* спряжена з φ функція, буде являти собою загальний інтеграл спряженого рівняння (2.10). перейдемо до комплексних змінних, припустивши

$$\xi = \varphi(x,y), \eta = \varphi^*(x,y).$$

При цьому рівняння еліптичного типу приводить до такого ж виду, що й гіперболічне.

Щоб не мати справи з комплексними змінними, введемо нові змінні α і β, що дорівнюють

$$\alpha = \frac{\varphi+\varphi^*}{2},\ \beta = \frac{\varphi-\varphi^*}{2i},$$

так що

$$\xi = \alpha + i\beta,\ \ \eta = \alpha - i\beta.$$

В цьому випадку

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2\right) - \Big(a_{11}\beta_x^2 +$$

$$2a12\beta x\beta y+a22\beta y2+2ia11\alpha x\beta x+a12(\alpha x\beta y+\beta x\alpha y)+a22\alpha y\beta y=0,$$

тобто

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \text{ і } \bar{a}_{12} = 0.$$

Рівняння (2.4) після ділення на коефіцієнт біля $u_{\alpha\alpha}$ приймає вид

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = W\left(x, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right)\ \ W = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}.$$

Таким чином, в залежності від знаку виразу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ мають місце наступні канонічні форми рівняння (2.1):

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (гіперболічний тип) $u_{xx} - u_{yy} = W$, або $u_{xy} = W$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (еліптичний тип) $u_{xx} + u_{yy} = W$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (параболічний тип) $u_{xx} = W$.

2.2. Задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу. Постановка крайових задач

2.2.1. Рівняння малих поперечних коливань струни

Рівняння з частинними похідними 2-го порядку гіперболічного типу найчастіше зустрічаються в фізичних задачах, пов’язаних з процесами коливань. Просте рівняння гіперболічного типу

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

зазвичай називається рівнянням коливань струни [14].

Кожну точку струни довжиною l можна охарактеризувати значенням її абсциси x. Опис процесу коливань струни може бути проведено за допомогою задання положення точок струни в різні моменти часу. Для визначення положення струни в момент часу t достатньо задати компоненти вектора зміщення $\{u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\}$ точки x в момент часу t.

Розглянемо найбільш просту задачу про коливання струни. Будемо вважати, що зміщення струни лежать в одній площині (x,u) і що вектор зміщення u перпендикулярний в будь-який момент до осі x; тоді процес коливання можливо описати однією функцією $u(x,t)$, що характеризує вертикальне переміщення струни. Будемо розглядати струну як гнучку пружну нитку. Математичний вираз поняття гнучкості полягає в тому, що напруга, яка виникає у струні, завжди направлена по дотичній до її миттєвого профілю (рис 2.1). Ця умова виражає собою те, що струна не опирається згину.

Величина натягу, який виникає в струні внаслідок пружності, може бути визначена за законом Гука. Будемо розглядати малі коливання струни і нехтувати квадратом u_x.

Користуючись цією умовою, порахуємо видовження, яке відбувається на частині струни (x_1, x_2). Довжина дуги цієї частини дорівнює

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u_x)^2}dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

Таким чином, в межах прийнятої точності, видовження частин струни в процесі коливання не відбувається; звідси, з урахуванням закону Гука, випливає, що величина натягу T в кожній точці не змінюється з часом. Покажемо, що натяг не залежить від x, тобто

$$T(x) = T_0 = const.$$

Знайдемо проекцію натягу на осі x та u (позначимо їх T_x і T_u):

$$T_x(x) = T(x)\cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x)\sin\alpha \cong T(x)\,\mathrm{tg}\,\alpha = T(x)u_x,$$

де α - кут дотичної до кривої $u(x,t)$ з віссю x. На частину (x_1, x_2) діє сила натягу, зовнішні сили та сили інерції. Сума проекцій всіх сил на осі x повинна дорівнювати нулю (ми розглянемо тільки поперечні коливання). Так як сили інерції і зовнішні сили за припущенням направлені в напрямку осі u, то

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0, \text{ або } T_x(x_1) = T_x(x_2). \tag{2.18}$$

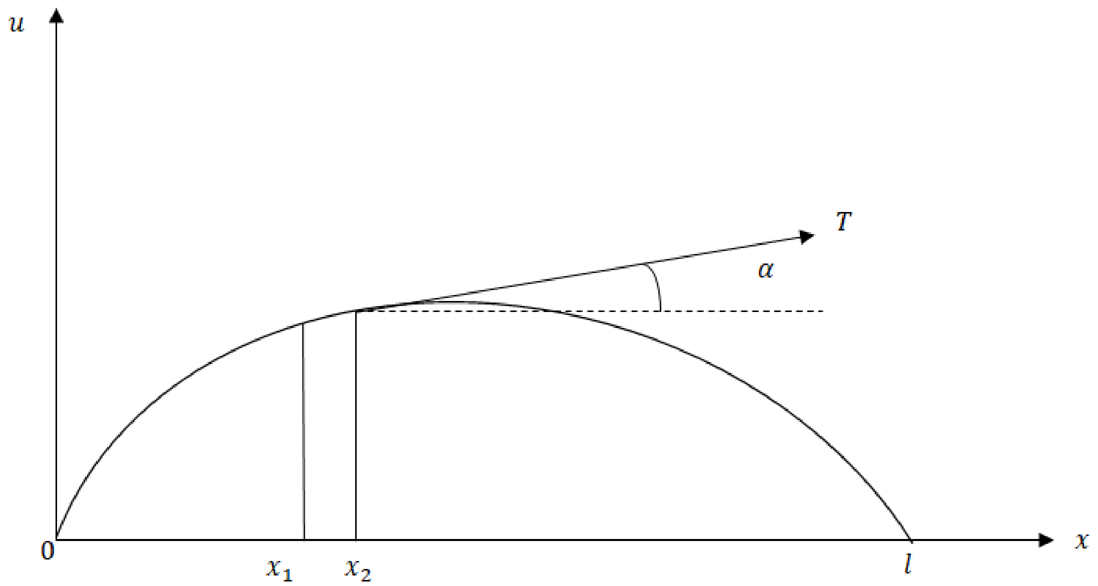

Рис. 2.1.

Звідси, зважаючи на довільність x_1 і x_2, випливає, що натяг не залежить від x тобто для всіх значень x та t

$$T(x) \equiv T_0. \tag{2.19}$$

Після зроблених попередньо зауважень перейдемо до виведення рівняння поперечних коливань струни. Використаємо другий закон Ньютона. Складова кількості рухів частини струни (x_1, x_2) по осі u дорівнює

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t)\rho(\xi)d\xi \,,$$

де ρ – лінійна щільність струни. Порівняємо змінення кількості руху за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]d\xi$$

та імпульс діючих сил, що складаються із натягу

$$T_0 u_x|_{x=x_2} - T_0 u_x|_{x=x_1}$$

в точках x_2 і x_1 і зовнішніх сил, які будемо вважати неперервно-розподіленими із густиною (навантаженням) $F(x,t)$, розрахованою на одиницю довжини. В результаті отримаємо рівняння поперечного коливання елемента струни в інтегральній формі

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\rho(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi\, d\tau \qquad (2.20)$$

Для переходу до диференціального рівняння припустимо існування і неперервність других похідних від $u(x,t)$. Тоді формула (2.20) після подвійного застосування теореми про середнє приймає вид

$$u_{tt}(\xi^*, t^*)\rho(\xi^*)\Delta t\Delta x = \{T_0[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\}\Delta t\Delta x,$$

де

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), \text{ а } \ t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2).$$

Скоротивши на $\Delta t\Delta x$ і переходячи до границі при $x_2 \to x_1$, $t_2 \to t_1$, отримаємо диференціальне рівняння поперечних коливань струни

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x,t). \qquad (2.21)$$

У випадку постійної щільності $\rho = const$ цьому рівнянню зазвичай надають вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right), \qquad (2.22)$$

де

$$f(x,t) = \frac{1}{\rho} F(x,t), \qquad (2.23)$$

якщо густина сили, віднесена до одиниці маси. При відсутності зовнішніх сил отримаємо однорідне рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \text{ або } u_{xx} - u_{yy} = 0 \ (y = at),$$

що описує вільні коливання струни. Це рівняння є простим прикладом рівняння гіперболічного типу [18].

2.2.2. Рівняння поздовжніх коливань струни і стрижня

Рівняння поздовжніх коливань струни, стрижня і пружини записуються однаково. Розглянемо стрижень, розміщений на відрізку $(0, l)$ осі x. Процес поздовжніх коливань може бути описаний однією функцією $u(x,t)$, що являє собою зміщення точки в момент t, і має в положенні рівноваги абсцису x. При поздовжніх коливаннях це зміщення відбувається вздовж стержня. При виведенні рівняння будемо припускати, що натяг, який виникає в процесі коливання, випливає із закону Гука.

Порахуємо відносне видовження елемента $(x, x + \Delta x)$ в момент t. Координати кінців цього відрізка в момент t мають значення

$$x + u(x,t), x + \Delta x + u(x + \Delta x, t),$$

а відносне видовження дорівнює

$$\frac{[\Delta x + u(x+\Delta x, t) - u(x,t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta\Delta x, t) \ \ (0 \le \theta \le 1).$$

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо, що відносне видовження в точці x визначається функцією $u_x(x,t)$. З урахуванням закону Гука натяг $T(x,t)$ дорівнює

$$T(x,t) = k(x) u_x(x,t). \tag{2.26}$$

де $k(x)$ - модуль Юнга в точці x $(k(x) > 0)$.

Користуючись теоремою про зміну кількості руху, отримаємо інтегральне рівняння коливань

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2) u_x(x_2, \tau) - k(x_1) u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi \, d\tau, \tag{2.27}$$

де $F(x,t)$ – густина зовнішніх сил, розрахована на одиницю довжини.

Припустимо існування і неперервність других похідних функції $u(x,t)$. Застосовуючи теорему про середнє і виконуючи граничний перехід при $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ і $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, приходимо до диференціального рівняння поздовжніх коливань стрижня

$$[k(x)u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x,t). \tag{2.28}$$

Якщо стрижень однорідний ($k(x) = const,\ \rho = const$), то це рівняння записується наступним чином:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)\left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \tag{2.29}$$

де

$$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho} \tag{2.30}$$

густина сили, віднесена до одиниці маси [31].

2.2.3. Крайові і початкові умови

При математичному описані фізичного процесу потрібно перш за все поставити задачу, тобто сформулювати умови, достатні для однозначного визначення процесу.

Диференціальні рівняння зі звичайними і, тим більше, з частинними похідними мають, взагалі кажучи, нескінченну множину розв'язків. Отже, в тому випадку, коли фізична задача приводить до рівнянь з частинними похідними, для однозначної характеристики процесу необхідно до рівняння приєднати деякі додаткові умови.

У випадку звичайного диференціального рівняння 2-го порядку розв'язок може бути визначений початковими умовами, тобто заданням значень функції і її першою похідною при «початковому» значенні аргументу (задача Коші). Зустрічаються і інші форми додаткових умов, коли, наприклад, задають значення функції в двох точках (задача про ланцюгову лінію). Для рівнянь з частинними похідними можливі також різні форми додаткових умов.

Розглянемо спочатку просту задачу про поперечні коливання струни, закріпленої на кінцях. В цій задачі $u(x,t)$ дає відхилення струни від осі x. Якщо кінці струни $0 \le x \le l$ закріплені, то повинні виконуватись «крайові умови»

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0. \tag{2.67}$$

Так як процес коливань залежить від її початкової форми і розповсюдження швидкості, то слід задати «початкові умови»:

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) = \psi(x). \end{cases} \qquad 68)$$

Таким чином, додаткові умови складаються із початкових і крайових умов, де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - задані функції точки. Надалі ми покажемо, що ці умови визначають розв'язок рівняння коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \qquad (2.69)$$

Якщо кінці струни рухаються з заданим законом, то крайові умови (2.67) приймають інший вид:

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t), \end{cases} \qquad (2.67')$$

де $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$ - задані функції часу t. Аналогічно ставиться задача для поздовжніх коливань струни, або пружини.

Можливі і інші типи крайових умов. Розглянемо, наприклад, задачу про поздовжні коливання пружини, один край якої закріплений (точка підвішування), а інший – вільний. Закон руху вільного кінця не заданий і часто є шуканою функцією.

В точці підвішування $x = 0$ натяг пружини

$$T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} \qquad (2.70)$$

дорівнює нулю (немає зовнішніх сил), таким чином математичне формулювання умов вільного кінця має вид

$$u_x(l, t) = 0.$$

Якщо кінець $x = 0$ рухається за визначеним законом $\mu(t)$, а при $x = l$ задана сила $\bar{\nu}(t)$, то

$$u(0, t) = \mu(t), u_x(l, t) = \nu(t), \left(\nu(t) = \frac{1}{k}\bar{\nu}(t)\right).$$

Типовим явищем є також умова пружного закріплення, скажемо для $x = l$,

$$k u_x(l, t) = -\alpha u(l, t),$$

або

$$u_x(l, t) = -h u(l, t) \ \left(h = \frac{\alpha}{k}\right), \qquad (2.71)$$

при якому кінець $x = l$ може переміщатися, але пружна сила закріплення викликає на цьому кінці натяг, що прагне повернути зміщені кінці в попереднє положення. Ця сила, відповідно до закону Гука, пропорційна зміщенню $u(l,t)$; коефіцієнт пропорційності α називається коефіцієнтом жорсткості закріплення [30].

Якщо точка (система), відносно якої має місце пружне закріплення, переміщується і її відхилення від початкового положення дається функцією $\theta(t)$, то крайові умови набувають вигляду

$$u_x(l,t) = -h[u(l,t) - \theta(t)\,],\ h = \frac{\alpha}{k} > 0. \qquad (2.72)$$

Умова пружного закріплення на лівому кінці $x = 0$ має вид

$$u_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)\,],\ h > 0$$

(формально можна вважати, що (2.72) має місце і при $\dot{x} = 0$, але $h < 0$). Слід відмітити, що в випадку жорсткого закріплення (α велике), коли навіть невеликі зміщення кінця викликають великий натяг, гранична умова (2.72) переходить в умову $u(l,t) = \mu(t)$ $(\alpha = \infty)$ при $\mu(t) = \theta(t)$. У випадку не жорсткого закріплення (α мале), при якому великі зміщення кінця викликають слабкий натяг, крайова умова переходить в умови вільного кінця

$$u_x(l,t) = 0\ (\alpha = 0).$$

Загалом, говорять про три основні типи крайових умов:

крайова умова 1-го роду $u(0,t) = \mu(t)$ - заданий режим,

крайова умова 2-го роду $u_x(0,t) = \nu(t)$ - задана сила,

крайова умова 3-го роду $u_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)\,]$ пружне закріплення.

Аналогічно задають граничні умови і на другому кінці $x = l$. Якщо функції, що задаються в правій частині $(\mu(t), \nu(t), \theta(t))$, дорівнюють нулю, то крайові умови називаються однорідними [23].

Комбінуючи різні перераховані типи граничних умов, отримують шість типів простих крайових задач.

Більш складна крайова умова має місце, наприклад, при пружному закріпленні, що не підпорядковується закону Гука, коли натяг на кінці є нелінійною функцією зміщення $u(l,t)$, так, що

$$u_x(l,t) = \frac{1}{k} F[u(l,t)]. \tag{2.73}$$

Ці умови на відміну від розглянутих вище є нелінійними. Можливі, далі, відношення між зміщенням і натягом на різних кінцях системи. Наприклад, в задачах про коливання кільця, коли $x = 0$ і $x = l$ мають на увазі одну і ту саму фізичну точку, крайові умови приймають вид

$$u(l,t) = u(0,t);\; u_x(0,t) = u_x(l,t), \tag{2.74}$$

тобто, зводяться до потрібної неперервності u і u_x. Похідні по t можуть також входити в крайові умови. Якщо кінець пружини відчуває опір середовища, пропорційний швидкості його руху (до кінця пружини прикріплена пластина, площина якої перпендикулярна осі пружини), тоді крайова умова набуває виду

$$ku_x(l,t) = -\alpha u_t(l,t). \tag{2.75}$$

Якщо до кінця $x = l$ пружини прикріпити вантаж масою m, то при $x = l$ повинна виконуватися умова

$$mu_{tt}(l,t) = -ku_x(l,t) + mg. \tag{2.76}$$

Для поперечних коливань струни всі крайові умови записуються в такій же формі із заміною k на T_0.

Сформулюємо першу крайову задачу для рівняння (2.5):

знайти функцію $u(x,t)$, визначену на області $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, що задовольняє рівняння

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ для } 0 < x < l, t > 0,$$

крайовим

$$\begin{matrix} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t), \end{matrix} \quad (t > 0), \tag{2.77'}$$

і початковим умовам:

$$\begin{matrix} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{matrix} \quad (0 < x < l). \tag{2.77''}$$

Аналогічно ставиться задача і для рівняння (2.11).

Якщо на обох кінцях беруться крайові умови 2-го, або 3-го роду, то відповідні задачі називають другою, або третьою крайовими задачами. Якщо крайові умови при $x = 0$ і $x = l$ мають різні типи, то такі крайові задачі називають змішаними, не проводячи більш детальної їх класифікації.

Розглянемо тепер граничний випадок поставленої задачі. Вплив крайових умов в точці M_0, досить віддаленої від межі, на якій вони задані, проявляється через досить великий проміжок часу.

Якщо нас цікавить явище протягом невеликого проміжку часу, коли вплив межі ще не значний, то замість повної задачі можна розглядати крайову задачу з початковими умовами для необмеженої області:

знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ для } -\infty < x < \infty,\, t > 0,$$

із початковими умовами

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \text{при } -\infty < x < \infty. \tag{2.78}$$

Цю задачу часто називають задачею Коші [5].

Якщо ж явище вивчається поблизу однієї із меж і вплив граничного режиму на другій межі не має суттєвого значення протягом проміжку часу, який розглядається, то в такому випадку приходимо до постановки задачі на напівобмеженій прямій $0 \le x < \infty$, коли крім рівняння дано ще й додаткові умови:

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu(t), \quad t \ge 0, \\ \left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \quad 0 \le x < \infty \end{cases} \tag{2.79}$$

Характер явища для моменту часу, досить віддаленого від початкового моменту $t = 0$, визначається граничним значенням, так як вплив початкових умов завдяки тертю, характерному всякій реальній системі, з плином часу стає слабшим. Задачі цього типу зустрічаються особливо часто у випадках, коли система порушується періодичним граничним режимом, діючим довгий час. Такі задачі «без початкових умов» (на встановлений режим) формулюються наступним чином:

знайти розв'язок рівняння, що вивчається для $0 \le x \le l$ і $t > -\infty$ при крайових умовах

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), \\ u(l,t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Аналогічно ставиться задача без початкових умов для напівобмеженої прямої.

Розглядають не тільки основні крайові задачі, а й крайові задачі:

1) в нескінченній області, коли одна, або дві границі знаходяться в нескінченності;

2) без початкових умов (на встановлений режим), коли розглядається розв'язок, визначений протягом нескінченного проміжку часу [19].

2.2.4. Редукція загальної задачі

При розв'язуванні складної задачі природно прагнути звести її розв'язок до розв'язку більш простих задач. З цією метою представимо розв'язок загальної крайової задачі в виді суми розв'язків ряду часткових крайових задач.

Нехай $u_i(x,t)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ – функція, задовольняюча рівняння

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x,t) \tag{2.81}$$

при $0 < x < l$, $t > 0$ і додатковим умовам

$$\begin{cases} u_i(0,t) = \mu_1^i(t), \\ u_i(l,t) = \mu_2^i(t), \\ u_i(x,0) = \varphi^i(x), \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = \psi^i(x). \end{cases}$$

Очевидно, що має місце суперпозиція розв'язків, тобто функція

$$u^{(0)}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x,t) \tag{2.73}$$

задовольняє аналогічне рівняння з правої частини

$$f^{(0)}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f^{i}(x,t) \tag{2.74}$$

і додаткових умов, праві частини яких є функції

$$\begin{cases} \mu_k^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_k^{i}(t) \quad (k = 1{,}2), \\ \varphi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^{i}(x), \\ \psi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi^{i}(x). \end{cases} \tag{2.85}$$

Вказаний принцип суперпозиції відноситься, очевидно, не тільки до даної задачі, але й до будь-якого лінійного рівняння з лінійними додатковими умовами.

Розв'язок загальної крайової задачі

$$\begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t) \\ 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t); \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.86}$$

може бути представлено у вигляді суми

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t), \tag{2.87}$$

де u_1, u_2, u_3, u_4 – розв'язок наступних часткових крайових задач:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i = 1{,}2{,}3), \\ \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x,t), \end{array}\right. \quad (0 < x < l,\ t > 0),$$

$$\begin{cases} u_1(0,t) = 0, \quad u_2(0,t) = \mu_1(t), \quad u_3(0,t) = 0, \quad u_4(0,t) = 0, \\ u_1(l,t) = 0, \quad u_2(l,t) = 0, \quad u_3(l,t) = \mu_2(t), \quad u_4(l,t) = 0, \\ u_1(x,0) = \varphi(x), \quad u_2(x,0) = 0, \quad u_3(x,0) = 0, \quad u_4(x,0) = 0, \\ u_{1t}(x,0) = \psi(x), \quad u_{2t}(x,0) = 0 \quad u_{3t}(x,0) = 0 \quad u_{4t}(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.88}$$

Ми обмежимось тут цією формальною редукцією для того, щоб охарактеризувати часткові крайові задачі, що є складовою основних етапів при розв'язуванні загальної задачі. Аналогічна редукція може бути відтворена і для граничних випадків загальної крайової задачі [28].

2.3. Задачі, що приводять до рівнянь параболічного типу. Постановка крайових задач

2.3.1. Лінійна задача про поширення тепла

Розглянемо однорідний стержень довжиною l, теплоізольований з боків і досить тонкий, щоб у будь-який момент часу температуру в усіх точках поперечного перерізу можна було вважати однаковою. Якщо кінці стержня підтримувати в постійних температурах u_1 і u_2, то, як загально відомо, вздовж стержня встановлюється лінійний розподіл температури (рис. 2.4)

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \tag{2.106}$$

При цьому від більш нагрітого до менш нагрітого кінця стержня буде перетікати тепло. Кількість тепла, що протікає через перетин стержня площею S за одиницю часу, дається експериментальною формулою

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \tag{2.107}$$

де k- коефіцієнт теплопровідності, що залежить від матеріалу стержня.

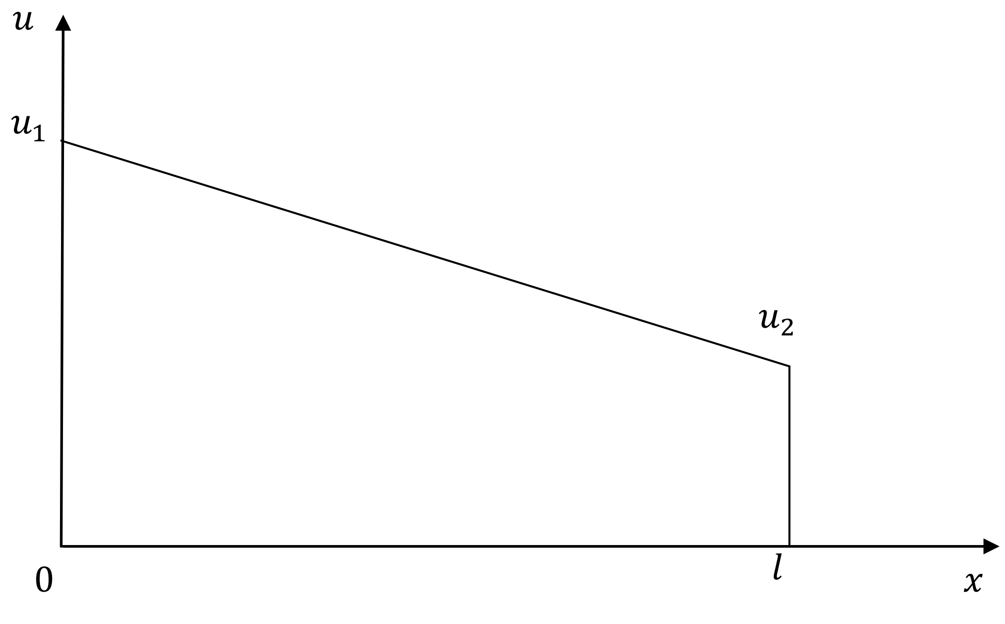

Рис. 2.4.

Величина теплового потоку вважається додатною, якщо тепло тече в сторону зростання x.

Розглянемо процес поширення температури в стрижні. Цей процес може бути описаний функцією $u(x,t)$, що представляє температуру в перетині x в момент часу t. Знайдемо рівняння, яке буде задовольняти функція $u(x,t)$. Для цього сформулюємо фізичні закономірності, що будуть визначати процес, пов'язаний з розповсюдженням тепла.

Закон Фур'є: якщо температура тіла не рівномірна, то в ньому виникає тепловий потік, направлений із місця з більш високою температурою в місце із більш низькою температурою [25].

Кількість тепла, що протікає через перетин x за проміжок часу $(t, t+dt)$, дорівнює

$$dQ = qSdt, \tag{2.108}$$

де

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.109}$$

– густина теплового потоку, дорівнює кількості теплу, що пройшла через площу в 1 см^2 за одиницю часу. Цей закон представляє узагальнення формули (2.107). Йому можна також надати інтегральної форми

$$Q = -S\int_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt, \tag{2.110}$$

де Q – кількість тепла, що протікає за проміжок часу (t_1, t_2) через перетин x. Якщо стержень не однорідний, то k є функцією x.

Кількість тепла, яка необхідна для того, щоб підняти температуру тіла на Δu, дорівнює

$$Q = cm\Delta u = c\rho V\Delta u, \tag{2.111}$$

де c питома теплоємність, m - маса тіла, ρ - його густина, V - об'єм.

Якщо зміна температури має різну величину на різних ділянках стержня, або якщо стержень не однорідний, то

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\Delta u\,(x)dx. \tag{2.112}$$

Всередині стержня тепло може виникати, або поглинатися (наприклад, при проходженні струму, внаслідок хімічної реакції і так далі). Виділення тепла може характеризуватись густиною теплових джерел $F(x,t)$ в точці x в момент часу t. В результаті дії цих джерел на ділянку стержня $(x, x+dx)$ за проміжок часу $(t, t+dt)$ виділиться кількість тепла

$$dQ = SF(x,t)dxdt\,, \tag{2.113}$$

або в інтегральній формі

$$Q = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dxdt, \tag{2.114}$$

де Q - кількість тепла, що виділяється на ділянці стержня (x_1, x_2) за деякий проміжок часу (t_1, t_2).

Рівняння теплопровідності отримується при підрахуванні рівноваги тепла на деякому відрізку (x_1, x_2) за деякий проміжок часу (t_1, t_2). Використовуючи закон збереження енергії і користуючись формулами (2.109), (2.112) і (2.113), можемо написати рівність

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1}\right]d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]d\xi \int_{x_1}^{x_2} c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]d\xi, \tag{2.115}$$

яке і є рівнянням теплопровідності в інтегральній формі [26].

Щоб отримати рівняння теплопровідності в диференціальній формі, будемо вважати, що функція $u(x,t)$ має неперервні похідні u_{xx} і u_t^2.

Користуючись теоремою про середнє, отримуємо рівність

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1}\right]_{\tau=t_3}\Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t =$$

$$= \{c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]\}_{\xi=x_3}\Delta x, \tag{2.116}$$

яку за допомогою теореми про скінченний приріст можна перетворити до виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{\substack{x=x_5\\t=t_3}}\Delta t\Delta x+F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t=\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{\substack{x=x_3\\t=t_5}}\Delta x\Delta t, \qquad (2.117)$$

де t_3, t_4, t_5 і x_3, x_4, x_5 – проміжкові точки інтервалів (t_1, t_2) і (x_1, x_2).

Звідси, після скорочення на $\Delta t\Delta x$, знаходимо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=x_5\\t=t_3}}+F(x,t)|_{\substack{x=x_4\\t=t_4}}=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{x=x_4\\t=t_4}}. \qquad (2.118)$$

Всі ці міркування відносяться до довільних проміжків (t_1, t_2) і (x_1, x_2). Перейшовши до границі при $x_1, x_2 \to x$ і $t_1, t_2 \to t$, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (2.119)$$

яке називається рівнянням теплопровідності [27].

Розглянемо деякі частинні випадки.

1) Якщо стержень однорідний, то k, c, ρ можна вважати сталими, і рівняння зазвичай записують в такому виді

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$
$$\left(a^2=\frac{k}{c\rho}\right), f(x,t)=\frac{F(x,t)}{c\rho},$$

де a^2- стала, називається коефіцієнтом теплопровідності. Якщо джерело відсутнє, тобто $F(x,t)=0$, то рівняння теплопровідності приймає простий вид:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \qquad (2.119')$$

2) Густина теплових джерел може залежати від температури. В випадку теплообміну з навколишнім середовищем, що підпорядковується закону Ньютона, кількість тепла, що втрачається, розраховане на одиницю довжини і часу, дорівнює

$$F_0 = h(u-\theta),$$

де $\theta(x,t)$ - температура навколишнього середовища, h - коефіцієнт теплообміну. Таким чином, густина теплових джерел в точці x в момент t дорівнює

$$F = F_1(x,t) - h(u-\theta), \qquad (2.120)$$

де $F_1(x,t)$ - густина інших джерел тепла.

Якщо стержень однорідний, то рівняння теплопровідності з стороннім теплообміном має наступний вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x,t),$$

де $\alpha = \frac{h}{c\rho}$; $f(x,t) = \alpha\theta(x,t) + \frac{F_1(x,t)}{c\rho}$ – відома функція.

3) Коефіцієнти k і c, як правило, є функціями температури, що повільно змінюються. Тому зроблене вище припущення про сталість цих коефіцієнтів можливо лише при умові розгляду невеликих інтервалів зміни температури. Вивчення температурних процесів у великих інтервалах зміни температури призводить до квазілінійного рівняння теплопровідності, яке для неоднорідного середовища записується у виді

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t) = c(u,x)\rho(u,x)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

2.3.2. Рівняння дифузії

Якщо середовище нерівномірно заповнене газом, то має місце дифузія його із місць з більш високою концентрацією в місця з меншою концентрацією. Це явище має місце також і в розчинах, якщо концентрація розчиненої речовини в об'ємі не постійна.

Розглянемо процес дифузії в порожній трубі, або в трубі, що заповнена пористим середовищем, вважаючи, що в будь-який момент часу концентрація газу (розчину) по перерізу труби однакова. Тоді процес дифузії може бути описаний функцією $u(x,t)$, що представляє концентрацію в перерізі x в момент часу t.

Відповідно до закону Нернста маса газу, що протікає через переріз x за проміжок часу $(t, t+\Delta t)$, дорівнює

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)Sdt = WSdt,$$

$$W = -D\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.121}$$

де D - коефіцієнт дифузії, S - площа перерізу труби, $W(x,t)$ – густина дифузійного потоку, що дорівнює масі газу, протікаючого за одиницю часу через одиницю площі [2].

За визначенням концентрації, кількість газу в об'ємі V дорівнює

$$Q = uV;$$

звідки випливає, що зміна маси газу на ділянці труби (x_1, x_2) при зміні концентрації на Δu дорівнює

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x)\Delta u \cdot S dx,$$

де $c(x)$ - коефіцієнт пористості.

Складемо рівняння рівноваги маси газу на ділянці (x_1, x_2) за проміжок часу (t_1, t_2):

$$S\int_{t_1}^{t_2}\left[D(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau) - D(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau)\right]d\tau = S\int_{x_1}^{x_2} c(\xi)[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]d\xi.$$

Звідси отримуємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2.122}$$

яке є рівнянням дифузії. Воно цілком аналогічне рівнянню теплопровідності. При виведенні цього рівняння ми вважали, що в трубі немає джерел речовини і дифузія через стінки труби відсутня. Врахування цих явищ призводить до рівняння, подібного до рівнянь (2.119) і (2.120)

Якщо коефіцієнт дифузії сталий, то рівняння дифузії набуде виду

$$u_t = a^2 u_{xx}, \text{ де } a^2 = \frac{D}{c}.$$

Якщо коефіцієнт пористості $c = 1$, а коефіцієнт дифузії сталий, то рівняння дифузії має вид

$$u_t = Du_{xx}.$$

2.3.3. Постановка крайових задач

Для виділення єдиного розв’язку рівняння теплопровідності необхідно до рівняння приєднати початкові і крайові умови.

Початкова умова на відміну від гіперболічного типу складається лише із задання значень функції $u(x,t)$ в початковий момент часу t_0.

Крайові умови можуть бути різними в залежності від температурного режиму на границі. Розглядають три основні типи крайових умов.

1) На кінці стержня $x = 0$ задана температура

$$u(0,t) = \mu(t),$$

де $\mu(t)$ – функція, задана на деякому проміжку $t_0 \leq t \leq T$, до того ж T є проміжком часу, протягом якого вивчається процес.

2) На кінці $x = l$ задано значення похідної

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \nu(t).$$

До цієї умови ми приходимо, якщо задана величина теплового потоку $Q(l,t)$, що протікає через торцевий переріз стержня,

$$Q(l,t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(l,t),$$

звідки $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \nu(t)$, де $\nu(t)$ – відома функція, що виражається через заданий потік $Q(l,t)$ за формулою

$$\nu(t) = -\frac{Q(l,t)}{k}.$$

3) На кінці $x = l$ задано лінійне відношення між похідною і функцією

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\lambda[u(l,t) - \theta(t)].$$

Ця крайова умова відповідає теплообміну по закону Ньютона на поверхні тіла в оточуючому середовищі, температура якої θ невідома. Користуючись двома виразами для теплового потоку, витікаючого через переріз $x = l$,

$$Q = h(u - \theta)$$

і

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

отримуємо математичне формулювання третьої граничної умови в виді

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\lambda[u(l,t) - \theta(t)],$$

де $\lambda = \frac{h}{k}$ - коефіцієнт теплообміну, $\theta(t)$ - деяка задана функція. Для кінця $x = 0$ стержня $(0,l)$ третя гранична умова має вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \lambda[u(0,t) - \theta(t)].$$

Крайові умови при $x = 0$ і $x = l$ можуть бути різних типів, так що число різних задач є великим.

Перша крайова задача в знаходженні розв'язку $u = u(x, t)$ рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ при } 0 < x < l,\, 0 < t \leq T,$$

такого, що задовольняє умови

$$u(x, 0) = \varphi(x),\, 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = \mu_1(t),\, u(l, t) = \mu_2(t),\, 0 \leq t \leq T,$$

де $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$ – задані функції.

Аналогічно ставляться і інші крайові задачі з різними комбінаціями крайових умов при $x = 0$ і $x = l$. Можливі крайові умови більш складного типу, ніж ті, які були розглянуті вище.

Нехай, наприклад, на кінці $x = 0$ стержня розміщена зосереджена теплоємність C_1 (наприклад, тіло з великою теплопровідністю, внаслідок чого температуру по всьому об'єму цього тіла можна вважати сталою) і відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем згідно закону Ньютона. Тоді крайові умови при $x = 0$ (що виражають рівняння теплової рівноваги) будуть мати вид

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$

де u_0 – температура зовнішнього середовища. Ця умова містить похідну $\frac{\partial u}{\partial t}$ (або $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо врахувати рівняння $u_t = a^2 u_{xx}$).

Якщо середовище неоднорідне і коефіцієнти рівняння є різними функціями, то проміжок $(0, l)$, в якому шукається розв'язок задачі, розбивається точками розриву коефіцієнтів на декілька частин, всередині яких функція u задовольняє рівняння теплопровідності, а на межах – умову спряженості.

В простому випадку ці умови полягають в неперервності температури і неперервності теплового потоку

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t),$$

де x_i – точки розриву коефіцієнтів.

Крім названих тут задач, часто зустрічаються їх граничні випадки. Розглянемо процес теплопровідності в дуже довгому стрижні. Протягом короткого проміжку часу вплив температурного режиму, заданого на межі, в центральній частині стрижня дається взнаки дуже слабо, і температура на цій ділянці визначається в основному тільки початковим розподілом температури. В цьому випадку точне врахування довжини стрижня не має значення, так як зміна довжини стрижня не дасть суттєвого впливу на температуру ділянки, що нас цікавить; в задачах подібного типу зазвичай вважають, що стрижень має нескінченну довжину. Таким чином, ставиться задача з початковими умовами (задача Коші) про розподіл температури на нескінченній прямій:

знайти розв'язок рівняння теплопровідності в області $-\infty < x < +\infty$ і $t \geq t_0$, що задовольняє умови

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \ (-\infty < x < +\infty),$$

де $\varphi(x)$ – задана функція.

Аналогічно, якщо ділянка стрижня, температура якої нас цікавить, знаходиться поблизу одного кінця і далеко від іншого, то в цьому випадку температура практично визначається температурним режимом кінця, що знаходиться поблизу і початковими умовами. В задачах подібного типу зазвичай вважають, що стрижень напівнескінченний, і координата, що вираховується від кінця, змінюється в межах $0 \leq x \leq +\infty$. Приведемо у якості прикладу формулювання першої крайової задачі для напівнескінченного стрижня:

знайти розв'язок рівняння теплопровідності в області $0 < x < +\infty$ і $t \geq t_0$, що задовольняє умови

$$\left.\begin{array}{ll} u(x, t_0) = \varphi(x) & (0 < x < \infty) \\ u(0, t) = \mu(t) & (t \geq t_0) \end{array}\right\}$$

де $\varphi(x)$ і $\mu(t)$ - задані функції.

Наведені вище задачі являють собою граничний випадок головних крайових задач. Можливі граничні випадки головних задач і інших типів, коли нехтують точним врахуванням початкових умов. Вплив початкових умов при розповсюдженні температури по стрижню слабне з плином часу. Якщо момент, що нас цікавить досить далекий від початкового, то температура стрижня практично визначається граничними умовами, так як зміна початкових умов не вплинула б на температурний стан стрижня в межах точності спостереження. В цьому випадку можна вважати, що дослід продовжувався нескінченно довго, і початкові умови тим самим відпадають.

Таким чином, ми приходимо до крайової задачі без початкових умов, коли шукається розв'язок рівняння теплопровідності для $0 \le x \le l$ і $-\infty < t$, що задовольняє умови

$$u(0,t) = \mu_1(t),$$
$$u(l,t) = \mu_2(t).$$

В залежності від характеру граничного режиму можливі і інші види задач без початкових умов.

Дуже важливою є задача без початкових умов для напівнескінченного стрижня $(l = \infty)$, коли потрібно знайти розв'язок рівняння теплопровідності для $0 < x < \infty, t > -\infty$, що задовольняє умови

$$u(0,t) = \mu(t),$$

де $\mu(t)$ – задана функція.

Найчастіше зустрічаються задачі без початкових умов при періодичному граничному режимі.

$$\mu(t) = A\cos\omega t\ .$$

Природно вважати, що через великий проміжок часу температура стрижня практично так само змінюється за періодичним законом із тією ж частотою. Однак, якщо ми захочемо з точністю врахувати початкові умови, то формально ніколи не отримаємо періодичного розв'язку, так як вплив початкових умов, хоча і буде ставати менш значним з плином часу, але в нуль не перетвориться; враховувати цей вплив як помилку спостереження не має жодного сенсу. Розглядаючи періодичний розв'язок, ми нехтуємо впливом початкових даних.

Постановка крайових задач, викладена вище, відноситься не тільки до рівнянь зі сталим коефіцієнтом. Під словами «рівняння теплопровідності» ми могли б розуміти будь-яке рівняння попередніх пунктів.

Крім перерахованих вище лінійних крайових задач, ставляться також задачі з нелінійними крайовими умовами, наприклад, виду

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sigma[u^4(0,t) - \theta^4(0,t)].$$

Ці умови відповідають випромінюванню за законом Стефана-Больцмана з торця $x = 0$ в середовище з температурою $\theta(t)$. Зупинимось більш детально на постановці крайової задачі. Розглянемо першу крайову задачу для обмеженої області.

Розв'язком першої крайової задачі буде називатись функція $u(x,t)$, що має наступні властивості:

1) $u(x,t)$ визначена і неперервна в замкненій області

$$0 \le x \le l,\, t_0 \le t \le T;$$

2) $u(x,t)$ задовольняє рівняння теплопровідності в відкритій області

$$0 < x < l,\, t_0 < t$$

3) $u(x,t)$ задовольняє початкову та крайові умови, тобто

$$u(x,t_0) = \varphi(x),\, u(0,t) = \mu_1(t),\, u(l,t) = \mu_2(t),$$

де $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$ – неперервні функції, що задовольняють умови спряженості

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0)\ [= u(0,t_0)] \text{ і } \varphi(l) = \mu_2(t_0)\ [= u(l,t_0)],$$

що є необхідними для неперервності $u(x,t)$ в замкненій області.

Розглянемо площину фазових станів (x,t) (рис. 2.5). В нашій задачі шукається функція $u(x,t)$, визначена всередині прямокутника $ABCD$. Ця область визначається самою умовою задачі, так як вивчається процес розповсюдження тепла в стрижні $0 \le x \le l$ за проміжок часу $t_0 \le t \le T$, під час якого нам відомий тепловий режим на краях. Нехай $t_0 = 0$; ми припустимо, що $u(x,t)$ задовольняє рівняння тільки при $0 < x < l$, $0 < t \le T$, але не при $t = 0$ (сторона AB) і не при $x = 0$, $x = l$ (сторони AD і BC), де початкові і крайові умови безпосередньо задають значення цієї функції. Якби ми вимагали, щоб рівняння задовольнялось, наприклад, при $t = 0$, то цим ми вимагали б, щоб існувала похідна $\varphi'' = u_{xx}(x,0)$, що входить у рівняння. Цією вимогою ми обмежили б область в якій вивчаємо фізичні явища, виключивши із розглядання ті функції, для яких ця вимога не виконується, без припущення неперервності $u(x,t)$ в області $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ (тобто, у замкненому прямокутнику $ABCD$), або іншої умови, що замінює це припущення, втрачає сенс. Дійсно, розглянемо функцію $v(x,t)$, що визначена наступним чином:

$$v(x,t) = C \ (0 < x < l, \ 0 < t \leq T),$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \ \ (0 \leq x \leq l),$$

$$\left.\begin{matrix} v(0,t) = \mu_1(t), \\ v(l,t) = \mu_2(t) \end{matrix}\right\} \ (0 \leq t \leq T\ ),$$

де C – довільна стала. Функція $v(x,t)$, вочевидь, задовольняє умову 2), а також крайові умови. Але ця функція не представляє процес поширення тепла в стрижні при початковій температурі $\varphi(x) \neq C$ і температурах границь $\mu_1(t) \neq C$ і $\mu_2(t) \neq C$, так як вона має розриви при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$.

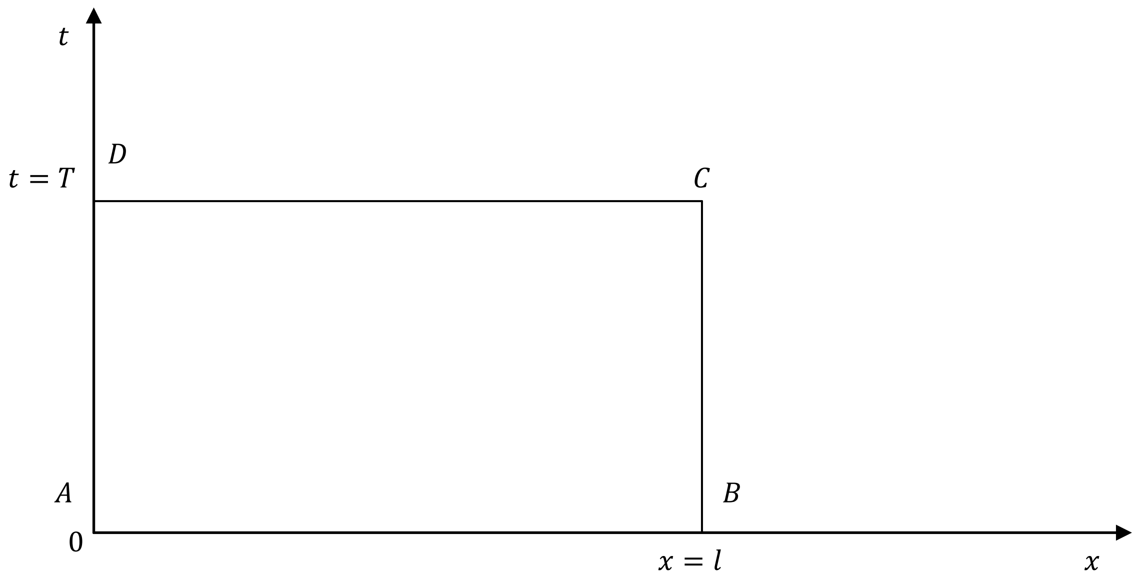

Рис. 2.5.

Неперервність функції $u(x,t)$ при $0 < x < l, \ 0 < t \leq T$ випливає із того, що ця функція задовольняє рівняння. Таким чином, вимога неперервності $u(x,t)$ при $0 \leq x \leq l, \ 0 \leq t \leq T$, по суті відноситься тільки до тих точок, де задаються крайові і початкові значення.

Аналогічно ставляться і інші крайові задачі, в тому числі і задачі на нескінченному стрижні і задачі без початкових умов.

У відношенні кожної із поставлених задач виникають наступні питання:

1) єдиність розв’язку поставленої задачі,

2) існування розв’язку,

3) неперервна залежність розв’язку від додаткових умов.

Якщо поставлена задача має декілька розв’язків, то слова «розв’язок задачі» не мають певного сенсу. Тому, перш ніж говорити про розв’язок задачі, потрібно довести його єдиність. На практиці найбільш суттєвим є питання 2), так як доведення існування розв’язку зазвичай дається способом визначення розв’язку.

Процес називається фізично визначеним, якщо при незначних змінах початкових і крайових умов задачі її розв’язок мало змінюється [14].

2.3.4. Принцип максимального значення

Надалі будемо розглядати рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$v_t = \alpha^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v.$$

Як було показано вище, це рівняння підстановкою

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \text{ при } \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^4}$$

зводиться до виду

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Доведемо наступну властивість розв’язку цього рівняння, яку називають принципом максимального значення.

Якщо функція $u(x,t)$, визначена і неперервна в замкненій області $0 \le x \le l$ і $0 \le t \le T$, задовольняє рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2.124}$$

в точках області $0 < x < l,\ 0 < t \le T$, то максимальне і мінімальне значення функції $u(x,t)$ досягається або в початковий момент часу, або в межових точках $x = 0,$ або $x = l$.

Функція $u(x,t) = const$, вочевидь, задовольняє рівняння теплопровідності і досягає максимального (мінімального) значення в будь-якій точці. Однак це не суперечить теоремі, так як із її умови випливає, що якщо максимальне (мінімальне) значення досягається всередині області, то воно також (а не тільки) повинно досягатися або при $t = 0$, або при $x = 0$, або при $x = l$.

Фізичний сенс цієї теореми очевидний: якщо температура на межі і в початковий момент часу не перевищує деякого значення M, то при відсутності джерел всередині тіла не може утворитись температура, більша M. Зупинимось спочатку на доведенні теореми про максимальне значення .

Доведення теореми ведеться від супротивного. Позначимо через M максимальне значення $u = (x, t)$ при $t = 0$ $(0 \leq x \leq l)$, або при $x = l$ $(0 \leq t \leq T)$ і припустимо, що в деякій точці (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l, 0 < t_0 \leq T)$ функція $u = (x, t)$ досягає свого максимального значення, що дорівнює

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Порівняємо знаки лівої і правої частини рівняння (2.124) в точці (x_0, t_0). Так як в точці (x_0, t_0) функція досягає свого максимального значення, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \text{ і } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0. \qquad (2.125)$$

Далі, так як $u(x_0, t_0)$ досягає максимального значення при $t = t_0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0. \qquad (2.126)$$

Порівнюючи знаки правої і лівої частини рівняння (2.124), бачимо, що вони різні. Однак це міркування ще не доводить теореми, так як права і ліва частина можуть дорівнювати нулю, що не несе за собою протиріччя.

Для повного доведення знайдемо точку (x_1, t_1), в якій $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$ і $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$. Для цього розглянемо допоміжну функцію

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \qquad (2.127)$$

де k - деяке стале число. Очевидно, що

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

і

$$k(t_0 - t) \leq kT.$$

Виберемо $k > 0$ так, щоб kT буле менше $\frac{\varepsilon}{2}$, тобто $k < \frac{\varepsilon}{2T}$; тоді максимальне значення $v(x, t)$ при $t = 0$, або при $x = 0$, $x = l$ не буде перевищувати $M + \frac{\varepsilon}{2}$, тобто

$$v(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2} \text{ (при } t = 0, \text{ або } x = 0, \text{ або } x = l), \qquad (2.128)$$

так як для цих аргументів перша складова формули (2.127) не перевищує M, а друга - $\frac{\varepsilon}{2}$.

В силу неперервності функції $v(x,t)$ вона повинна в деякій точці (x_1,t_1) досягати свого максимального значення. Очевидно, що

$$v(x_1,t_1) \geq v(x_0,t_0) = M + \varepsilon.$$

Тому $t_1 > 0$ і $0 < x_1 < l$, так як при $t = 0$, або $x = 0$, або $x = l$ має місце нерівність (2.128). В точці (x_1,t_1), по аналогії з (2.125) і (2.126), повинно бути $v_{xx}(x_1,t_1) \leq 0$, $v_t(x_1,t_1) \geq 0$. Враховуючи (2.127), знаходимо:

$$u_{xx}(x_1,t_1) = v_{xx}(x_1,t_1) \leq 0,$$

$$u_t(x_1,t_1) = v_t(x_1,t_1) + k \geq k > 0.$$

Звідси слідує, що

$$u_t(x_1,t_1) - \alpha^2 u_{xx}(x_1,t_1) \geq k > 0,$$

тобто рівняння (2.124) у внутрішній точці (x_1,t_1) не задовольняється. Тим самим доведено, що розв'язок $u = (x,t)$ рівняння теплопровідності (2.124) всередині області не може приймати значення, що перевищують найбільше значення $u = (x,t)$ на границі.

Аналогічно може бути доведена і друга частина теореми про мінімальне значення. Втім, це не потребує окремого доведення, так як функція $u_1 = -u$ набуває максимального значення там, де u – мінімального [8].

2.3.5. Теорема єдиності

Якщо дві функції, $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$, визначенні і неперервні в області $0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T$, задовольняють рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ (для } 0 < x < l, t > 0), \tag{2.129}$$

та однакові початкові і крайові умови

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x),$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \mu_1(t),$$

$$u_1(l,t) = u_2(l,t) = \mu_2(t),$$

то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Для доведення цієї теореми розглянемо функцію

$$v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t).$$

Оскільки функції $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$ неперервні при

$$0 \le x \le l,$$
$$0 \le t \le T,$$

то і функція $v(x,t)$, що дорівнює їх різниці, неперервна в цій же області як різниця двох розв'язків рівняння теплопровідності в цій області. Таким чином, принцип максимального значення застосовується і до цієї функції, тобто вона досягає свого максимального і мінімального значення або при $t = 0$, або при $x = 0$, або при $x = l$. Однак, за умовою маємо:

$$v(x,0) = 0,\, v(0,t) = 0,\, v(l,t) = 0.$$

Тому

$$v(x,t) \equiv 0,$$

тобто

$$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t).$$

Звідси слідує, що розв'язок першої крайової задачі єдиний [22].

Доведемо ще ряд прямих наслідків із принципу максимального значення.

1) Якщо два розв'язки рівняння теплопровідності $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$ задовольняють умови

$$u_1(x,0) \le u_2(x,0),$$
$$u_1(0,t) \le u_2(0,t),\; u_1(l,t) \le u_2(l,t),$$

то $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ для всіх значень $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$.

Дійсно, різниця $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ задовольняє умови, при яких встановлений принцип максимального значення, і, крім того,

$$v(x,0) \ge 0,\, v(0,t) \ge 0,\, v(l,t) \ge 0.$$

Тому

$$v(x,t) \ge 0,\; \text{для } 0 < x < l,\, 0 < t \le T,$$

так як інакше функція $v(x,t)$ мала б від'ємне мінімальне значення в області

$$0 < x < l,\, 0 < t \le T,$$

Якщо три розв'язки рівняння теплопровідності

$$u(x,t), \underline{u}(x,t), \overline{u}(x,t)$$

задовольняють умови

$$u(x,t) \leq \underline{u}(x,t) \leq \overline{u}(x,t) \text{ при } t=0, x=0 \text{ і } x=l,$$

то ці нерівності виконуються тотожно, тобто для всіх x, t при $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.

Це твердження є застосуванням наслідку до функцій

$$u(x,t), \underline{u}(x,t), \overline{u}(x,t).$$

2) Якщо для двох розв'язків рівняння теплопровідності $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$ має місце нерівність

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)| \leq \varepsilon \text{ для } t=0, x=0, x=l,$$

то

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)| \leq \varepsilon$$

тотожно, тобто має місце для всіх x, t

$$0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T.$$

Це твердження виплиаває із вже відомого наслідку, якщо його застосувати до розв'язків рівняння теплопровідності

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

$$\underline{u}(x,t) = -\varepsilon,$$

$$\overline{u}(x,t) = \varepsilon.$$

Ще один наслідок дозволяє встановити неперервну залежність розв'язку першої крайової задачі від початкового і крайового значення. Якщо в деякій фізичній задачі замість розв'язку рівняння теплопровідності, що відповідає початковим і крайовим умовам

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u(0,t)=\mu_1(t), u(l,t)=\mu_2(t),$$

взяти розв'язок $u(x,t)$, що відповідає іншим початковим і крайовим умовам, визначеним функціями $\varphi^*(x)$, $\mu_1^*(t)$ і $\mu_2^*(t)$, що не відрізняються в межах заданого степеня точності ε від функцій $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$:

$$|\varphi(x)-\varphi^*(x)| \leq \varepsilon, |\mu_1(t)-\mu_1^*(t)| \leq \varepsilon, |\mu_2(t)-\mu_2^*(t)| \leq \varepsilon,$$

то функція $u_1(x,t)$ буде відрізнятись від функції $u(x,t)$ в межах тої ж точки ε

$$|u(x,t) - u_1(x,t)| \leq \varepsilon.$$

В цьому й полягає принцип фізичної визначеності задачі [29].

Теорема єдиності першої крайової задачі для обмеженої області в просторі двох, або трьох вимірів може бути доведена буквальним повторенням приведених вище міркувань.

Подібні питання виникають при вивченні інших задач. Ці задачі вимагають деякої видозміни методу доведення.

Єдиність розв’язку задачі для необмеженої області, або задачі без початкових умов має місце тільки при накладанні деяких додаткових умов на функції, що вивчаються .

2.3.6. Теорема єдиності для нескінченної прямої

При розв’язуванні задачі на нескінченній прямій суттєвою є вимога обмеженості шуканої функції по всій області, тобто існування такого M, що $|u(x,t)| < M$ для всіх

$$-\infty < x < +\infty \text{ і } t \geq 0.$$

Якщо $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$ – неперервні, обмежені на всій області зміни змінних (x,t) функції, такі, що задовольняють рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} \; (-\infty < x < \infty,\; t > 0) \tag{2.124}$$

і умови

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) \;\; (-\infty < x < \infty),$$

то

$$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t) \;\; (-\infty < x < \infty,\; t \geq 0).$$

Розглянемо функцію

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Функція $v(x,t)$ неперервна, задовольняє рівняння теплопровідності, обмежена в області

$$|v(x,t)| \leq |\, u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| < 2M \; (-\infty < x < \infty,\; t \geq 0)$$

і задовольняє умову $v(x,0)=0$.

Принцип максимального значення, яким користувалися при доведенні єдиності задачі для відрізка, тут застосувати не можна, так як в необмеженій області функція $v(x,t)$ може ніде не досягати максимального значення. Щоб скористатись цим принципом, розглянемо область

$$|x| \leq L,$$

де L – допоміжне число, яке потім будемо необмежено збільшувати, і функцію

$$V(x,t)=\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right). \qquad (2.130)$$

Функція $V(x,t)$ неперервна, задовольняє рівняння теплопровідності, в чому не важко переконатись диференціюванням, і крім того, володіє наступними властивостями:

$$V(x,t) \geq |v(x,0)| = 0,$$
$$V(\pm L,t) \geq 2M \geq |v(\pm L,t)|. \qquad (2.131)$$

Для обмеженої області $|x| \leq L,\ 0 \leq t \leq T$ справедливий принцип максимального значення. Використовуючи наслідок із попереднього пункту для функції $u = v(x,t)$, $\underline{u} = -V(x,t)$, $\overline{u} = V(x,t)$ і враховуючи (2.131), отримуємо:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right) \leq v(x,t) \leq \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right).$$

Фіксуємо деякі значення (x,t) і, користуючись довільністю вибору L, будемо його необмежено збільшувати. Переходячи до границі при $L \to \infty$, отримаємо:

$$v(x,t) \equiv 0,$$

що і доводить теорему [23].

2.4. Рівняння еліптичного типу. Задачі, що приводять до рівнянь Лапласа

2.4.1. Стаціонарне теплове поле. Постановка крайових задач

При дослідженні стаціонарних процесів різної фізичної природи (коливання, теплопровідність, дифузія і інші) зазвичай приходять до рівнянь еліптичного типу. Найбільш розповсюдженими рівнянням цього типу є рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Функція u називається гармонічною в області T, якщо вона неперервна в цій області разом зі своїми похідними до 2-го порядку і задовольняє рівняння Лапласа.

При вивченні властивостей гармонічної функції були розроблені різні математичні методи, що виявились плідними і в застосуванні до рівнянь гіперболічного і параболічного типів.

Розглянемо стаціонарне теплове поле. В попередньому пункті було показано, що температура нестаціонарного теплового поля задовольняє диференціальне рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 \Delta u \ \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right).$$

Якщо процес стаціонарний, то встановлюється розподіл температури $u(x, y, z)$, що не змінюється з часом і, як наслідок, задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{2.132}$$

При наявності джерел тепла отримуємо рівняння

$$\Delta u = -f, \ f = \frac{F}{k}, \tag{2.133}$$

де F - густина теплових джерел, а k - коефіцієнт теплопровідності. Неоднорідне рівняння Лапласа (2.133) часто називають рівнянням Пуассона [7].

Розглянемо деякий об'єм T, обмежений поверхнею Σ. Задача про стаціонарний розподіл температури $u(x, y, z)$ всередині тіла T формується наступним чином:

знайти функцію $u(x, y, z)$, що задовольняє всередині T рівняння

$$\Delta u = -f(x, y, z) \qquad (2.133)$$

і крайові умови, які можуть бути використані в одному із наступних видів:

I. $u = f_1$ на Σ (перша крайова задача),

II. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Σ (друга крайова задача),

III. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третя крайова задача),

де f_1, f_2, f_3, h - задані функції, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - похідна по зовнішній нормалі до поверхні Σ.

Фізичний сенс цих граничних умов очевидний. Першу крайову задачу для рівняння Лапласа часто називають задачею Діріхле, а другу – задачею Неймана.

Якщо шукається розв'язок в області T_0, внутрішньої (або зовнішньої) по відношенню до поверхні Σ, то відповідну задачу називають внутрішньою (або зовнішньою) крайовою задачею [6].

2.4.2. Потенціальний рух рідини. Потенціал стаціонарного струму і електричного поля

В якості другого прикладу розглянемо потенціальний рух рідини без джерел. Нехай всередині деякого об'єму T з межею Σ має місце стаціонарний рух рідини, що не стискається (густина $\rho = const$), і характеризується швидкістю $v(x, y, z)$. Якщо рух рідини не вихровий, то швидкість v є потенційним вектором, тобто

$$v = -grad\ \varphi, \tag{2.134}$$

де φ – скалярна функція, що називається потенціалом швидкості. Якщо відсутнє джерело, то

$$div\ v = 0. \tag{2.135}$$

Підставивши сюди вираз (2.134) для v, отримаємо:

$$div\ grad\ \varphi = 0,$$

або

$$\Delta\varphi = 0, \tag{2.136}$$

тобто, потенціал швидкості задовольняє рівняння Лапласа.

Нехай в однорідному провідному середовищі існує стаціонарний струм з об'ємною густиною $j(x, y, z)$. Якщо в середовищі немає об'ємних джерел струму, то

$$div\ j = 0. \tag{2.137}$$

Електричне поле E визначається через густину струму із диференціального закону Ома

$$E = \frac{j}{\lambda}, \tag{2.138}$$

де λ – провідність середовища. Оскільки процес стаціонарний, то електричне поле є безвихровим, або потенціальним, тобто існує така скалярна функція $\varphi(x, y, z)$, для якої

$$E = -grad\ \varphi\ (j = -\lambda grad\ \varphi). \tag{2.139}$$

Звідси, зважаючи на формули (2.137) і (2.138), робимо висновок, що

$$\Delta\varphi = 0, \tag{2.140}$$

тобто потенціал електричного поля стаціонарного струму задовольняє рівняння Лапласа.

Розглянемо електричне поле стаціонарних зарядів. Із стаціонарного процесу слідує, що

$$rot\ E = 0, \tag{2.141}$$

тобто, поле є потенціальним і

$$E = -grad\ \varphi. \tag{2.139}$$

Нехай $\rho(x, y, z)$ – об'ємна густина зарядів, що є в середовищі, що характеризується діелектричною сталою $\varepsilon = 1$. Виходячи із основного закону електродинаміки

$$\iint\limits_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint\limits_T \rho d\tau \tag{2.142}$$

де T - деякий об'єм, S – поверхня, що обмежує його, $\sum e_i$ – сума всіх зарядів всередині T, і користуючись теоремою Остроградського

$$\iint\limits_S E_n dS = \iiint\limits_T div\ E d\tau \tag{2.143}$$

отримуємо:

$$div\ E = 4\pi\rho.$$

Підставляючи сюди вираз (2.139) для E, будемо мати:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{2.144}$$

тобто, електростатичний потенціал φ задовольняє рівняння Пуассона. Якщо об'ємних зарядив немає ($\rho = 0$), то потенціал φ повинен задовольняти рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Основні крайові задачі для стаціонарних процесів відносяться до трьох типів, наведених вище [1].

2.4.3. Гармонічні функції і аналітичні функції комплексної змінної

Загальним методом розв'язування двовимірних задач для рівняння Лапласа є метод, що використовує функції комплексної змінної.

Нехай

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

– деяка функція комплексної змінної $z = x + iy$, причому u і v є дійсними функціями змінних x і y. Найбільший інтерес представляють аналітичні функції, для яких існує похідна

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Приріст $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, може прямувати до нуля не одним способом. Для кожного способу прямування Δz до нуля, взігалі кажучи, може отриматись своє значення границі. Однак, якщо функція $w = f(z)$ аналітична, то границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$$

не залежить від вибору шляху.

Необхідними і достатніми умовами аналітичної функції є умова Коші-Рімана

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}\right\} \qquad (2.168)$$

Цю умову можна отримати, наприклад, наступним чином.

Нехай $w = u + iv = f(z)$ – аналітична функція. Визначаючи похідні

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz}$$

$$w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_y = i\frac{dw}{dz}$$

і вимагаючи рівність значень $\frac{dw}{dz}$, що визначаються із цих двох відношень, отримаємо:

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz},$$

звідки і випливає умова Коші-Рімана.

В теорії функцій комплексних змінних доводиться, що функція, аналітична в деякій області G площини $z = x + iy$, має в цій області похідні всіх порядків і розкладається в степеневий ряд. В тому числі, для такої функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ мають неперервні похідні 2-го порядку по x і y.

Диференціюючи першу рівність формули (2.168) по x, а другу по y, отримаємо:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \text{ або } \Delta_2 v = 0.$$

Подібним чином, змінюючи порядок диференціювання, знаходимо:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \text{ або } \Delta_2 u = 0.$$

Таким чином, дійсна і уявна частина аналітичної функції задовольняє рівняння Лапласа. Зазвичай кажуть, що u і v, які задовольняють умови Коші-Рімана, є спряженими гармонічними функціями. Розглянемо перетворення

$$\left.\begin{matrix} x = x(u,v) & u = u(x,y), \\ y = y(u,v) & v = v(x,y), \end{matrix}\right\} \tag{2.169}$$

яке взаємно однозначно відображає деяку області G площини (x,y), на область G' площини (u,v), так що кожній точці області G відповідає однозначно визначена точка області G' і, навпаки, кожній точці області G' відповідає однозначно визначена точка області G.

Нехай

$$U = U(x,y)$$

– деяка дійсна двічі неперервно диференційована функція, визначена всередині області G.

З'ясуємо, як зміниться при цьому перетворенні оператор Лапласа функції $U = U[x(u,v), y(u,v)] = \widetilde{U}(u,v)$.

Знайдемо похідні функції

$U_x = \widetilde{U}_u u_x + \widetilde{U}_v v_x,\ U_y = \widetilde{U}_u u_y + \widetilde{U}_v v_y,$

$U_{xx} = \widetilde{U}_{uu} u_x^2 + \widetilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\widetilde{U}_{uv} u_x v_x + \widetilde{U}_u u_{xx} + \widetilde{U}_v v_{xx},$

$U_{yy} = \widetilde{U}_{uu} u_y^2 + \widetilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\widetilde{U}_{uv} u_y v_y + \widetilde{U}_u u_{yy} + \widetilde{U}_v v_{yy},$

звідки отримаємо:

$$U_{xx} + U_{yy} = \widetilde{U}_{uu}\left(u_x^2 + u_y^2\right) + \widetilde{U}_{vv}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + 2\widetilde{U}_{uv}\left(u_x v_x + u_y v_y\right) + \\ + \widetilde{U}_u\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + \widetilde{U}_v\left(v_{xx} + v_{yy}\right). \quad (2.170)$$

Якщо u і v є спряженими гармонічними функціями, то перетворення (2.169) еквівалентне перетворенню, що здійснюється аналітичною функцією

$$w = f(z) = u + iv \ \ (z = x + iy). \quad (2.171)$$

В цьому випадку в силу умов Коші-Рімана (1.168) для функцій u і v повинні виконуватись відношення

$$u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2,$$

$$u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

Формула (2.170) набуде виду

$$U_{xx} + U_{yy} = \left(\widetilde{U}_{uu} + \widetilde{U}_{vv}\right)|f'(z)|^2, \quad (2.172)$$

або

$$\Delta_{u,v}\widetilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2}\Delta_{x,y}U. \quad (2.172')$$

Звідси слідує, що в результаті перетворення (2.170) гармонічна в області G функція $U(x,y)$ переходить в функцію $\widetilde{U} = U(u,v)$, гармонічну в області G', якщо тільки $|f'(z)|^2 \neq 0$ [21].

Розділ 3. Застосування функціональних властивостей до розв'язування крайових та мішаних задач

3.1. Метод функціонального відокремлення змінних. Структура розв'язку

Нелінійні рівняння, отримані заміною $w = F(z)$ із лінійних рівнянь математичної фізики із змінними які відокремлюються для функції $z = z(x, y)$, будуть мати точний розв'язок виду

$$w(x, y) = F(z),$$

де

$$z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\,\psi_m(y). \tag{3.1}$$

Багато нелінійних рівнянь із частинними похідними, які не зводяться до лінійних, також мають точний розв'язок виду (3.1). Такі розв'язки називають розв'язками із функціональним відокремленням змінних. В загальному випадку функції $\varphi_m(x)$, $\psi_m(y)$, $F(z)$ в (3.1) є заздалегідь не відомими і їх ще слід визначити.

Основна ідея методу: диференціально-функціональне рівняння, отримане в результаті підстановки виразу (3.1) в рівняння з частинними похідними яке розглядається, потрібно звести до стандартного білінійного функціонального рівняння

*Зауваження 1***.** При функціональному відокремленні змінних пошук розв'язків простого виду $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ і $w = F(\varphi(x)\psi(y))$ приводить до однакових результатів, оскільки справедливою є рівність

$$F\big(\varphi(x)\psi(y)\big) = F_1\big(\varphi_1(x) + \psi_1(y)\big),$$

де $F_1(z) = F(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln \varphi(x)$, $\psi_1(y) = \ln \psi(y)$.

Зауваження 2. При побудові розв'язків із функціональним відокремленням змінних виду $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ вважається, що $\varphi \neq const$ і $\psi \neq const$.

Зауваження 3. Функція $F(z)$ може описуватись як одним звичайним диференціальним рівнянням, так і перевизначеною системою рівнянь (при проведенні аналізу, слід враховувати дві цих можливості)[10].

3.2. Розв'язки із функціональним відокремленням змінних спеціального виду

3.2.1. Розв'язки типу узагальненої біжучої хвилі

Для спрощення аналізу деякі функції можна задавати апріорно, а інші знаходити в процесі розв'язування. Такі розв'язки будуть називають розв'язками із функціональним відокремленням змінних спеціального виду.

Далі будуть наведені найбільш прості розв'язки $w = F(z)$ із функціональним відокремленням змінних спеціального виду (x і y можна поміняти місцями):

$z = \psi_1(y)x + \psi_2(y)$ (аргумент z лінійний по x);

$z = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y)$ (аргумент z квадратичний по x);

$z = \psi_1(y)e^{\lambda x} + \psi_2(y)$ (аргумент z містить експериментальну функцію x).

Перший розв'язок називають розв'язком типу узагальненої біжучої хвилі. В останній формулі замість $e^{\lambda x}$ можуть стояти також функції $ch(ax + b)$, $sh(ax + b)$, $\sin(ax + b)$.

Після підстановки будь-якого із вказаних виразів у рівняння, яке ми розглядаємо, потрібно виключити x за допомогою виразу для z. В результаті отримаємо функціонально-диференціальне рівняння із двома незалежними змінними y і z [11].

Алгоритм побудови розв'язків типу біжучої хвилі може також використовуватись для побудови точних розв'язків більш загального виду

$$w = \sigma(t)F(z) + \varphi_1(t)x + \psi_1(t),$$

де

$$z = \varphi_2(t)x + \psi_2(t).$$

Слід зауважити, що розв’язок із узагальненим відокремленням змінних є розв’язком із функціональним відокремленням змінних часткового виду, що відповідає випадку $F(z) = z$.

Розглянемо приклади нелінійних рівнянь, що допускають точні розв’язки із функціональним відокремленням змінних спеціального виду, коли складений аргумент z лінійний, або квадратичний по одній із незалежних змінних.

<u>Приклад 1.</u> Розглянемо нестаціонарне рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(w). \tag{3.2}$$

Шукаємо точний розв’язок рівняння (3.2) із функціональним відокремленням змінних спеціального виду

$$w = w(z), z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{3.3}$$

Потрібно знайти функції $w(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ і праву частину рівняння $F(w)$.

Підставивши вираз (3.3) в (3.2) і поділивши на $w_z^{'}$, маємо

$$\varphi_t' x + \psi_t' = \varphi^2 \frac{w_{zz}^{''}}{w_z^{'}} + \frac{F(w)}{w_z^{'}} = 0. \tag{3.4}$$

Виразимо в (3.3) x через z і підставимо його в (3.4). Як результат приходимо до функціонально-диференціального рівняння, що має дві змінні t і z:

$$-\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' - \frac{\varphi_t'}{\varphi} z + \varphi^2 \frac{w_{zz}^{''}}{w_z^{'}} + \frac{F(w)}{w_z^{'}} = 0,$$

яке можна розглядати як функціональне рівняння

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0,$$

де

$$\Phi_1 = -\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t', \Phi_2 = -\frac{\varphi_t'}{\varphi}, \Phi_3 = \varphi^2, \Phi_4 = 1,$$

$$\Psi_1 = 1, \Psi_2 = z, \Psi_3 = \frac{w_{zz}^{''}}{w_z^{'}}, \Psi_4 = \frac{F(w)}{w_z^{'}}.$$

Підставивши ці вирази в формули

$$\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4,$$

$$\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2,$$

отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} -\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' = A_1\varphi^2 + A_{2,} & -\frac{\varphi_t'}{\varphi} = A_3\varphi^2 + A_4, \\ \frac{w_{zz}''}{w_z'} = -A_1 - A_3 z, & \frac{F(w)}{w_z'} = -A_2 - A_4 z, \end{cases} \tag{3.5}$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 – довільні сталі.

Випадок 1. При $A_4 \neq 0$ розв'язок системи (3.5) має вид

$$\begin{gathered} \varphi(t) = \pm\left(C_1 e^{2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\right)^{-1/2}, \\ \psi(t) = -\varphi(t)\left[A_1 \int \varphi(t)dt + A_1 \int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right], \\ w(z) = C_3 \int \exp\left(-\frac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\right)dz + C_4, \\ F(w) = -C_3(A_4 z + A_2)\exp\left(-\frac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\right), \end{gathered} \tag{3.6}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні сталі. Залежність $F = F(w)$ задається двома останніми виразами в параметричному виді (z виступає в ролі параметра). При $A_3 \neq 0$ функцію джерела $F(w)$ в (3.6) можна виразити через елементарні функції і функцію, обернену інтегралу ймовірностей.

В частковому випадку $A_3 = C_4 = 0$, $A_1 = -1$, $C_3 = 1$ функцію джерела можна представити у явному виді:

$$F(w) = -w(A_4 \ln w + A_2). \tag{3.7}$$

Розв'язок рівняння (3.2) в цьому випадку також можна отримати за допомогою групового аналізу.

Випадок 2. При $A_4 = 0$ розв'язки перших двох рівнянь (3.5) мають вид

$$\varphi(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2A_3 t + C_1}}, \psi(t) = \frac{C_2}{\sqrt{2A_3 t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3 t + C_1),$$

а розв'язок інших рівнянь описуються двома останніми формулами (3.6) при $A_4 = 0$.

<u>Приклад 2.</u> Розглянемо більш загальне рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial w}{\partial x} + c(t)F(w),$$

що містить довільні функції $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$.

Розв'язок шукаємо у виді (3.3). В цьому випадку в системі (3.5) змінюється тільки перших два рівняння, а функції $w(z)$ і $F(w)$ будуть описуватись двома останніми функціями (3.6).

<u>Приклад 3.</u> Нелінійне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[G(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]+F(w)$$

також має розв'язок виду (3.3). Шукані величини описуються системою (3.5), в якій w''_{zz} потрібно замінити на $[G(w)w'_z]'_z$. Функція $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ визначаються двома першими формулами в (3.6). Одна із двох функцій $G(w)$ або $F(w)$ може бути задана довільним чином, а інша знаходиться в процесі розв'язування. В частковому випадку $F(w)=const$ можна отримати

$$G(w)=C_1e^{2kw}+(C_2w+C_3)e^{kw}.$$

<u>Приклад 4.</u> Аналогічним чином розглянемо нелінійне рівняння n-го порядку

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^n w}{\partial x^n}+F(w).$$

Як і в попередніх випадках розв'язки шукаються у виді (3.3). В цьому випадку в системі (3.5) величини φ^2 і w''_{zz} потрібно замінити відповідно на φ^n і $w_z^{(n)}$. Зокрема, при $A_3=0$ крім рівняння з логарифмічною нелінійністю виду (3.7) отримаємо і інші рівняння.

<u>Приклад 5.</u> Для нелінійних рівнянь n - го порядку

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^n w}{\partial x^n}+F(w)\frac{\partial w}{\partial x},$$

пошук точного розв'язку виду (3.3) приводить до наступної системи рівнянь для визначення функцій $w(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $F(w)$:

$$-\psi'_t+\frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t=A_1\varphi^n+A_2\varphi,\ -\frac{\varphi'_t}{\varphi}=A_3\varphi^n+A_4\varphi,$$

$$\frac{w_z^{(n)}}{w'_z}=-A_1-A_3z,\ F(w)=-A_2-A_4z,$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 – довільні сталі.

При $n=3$, поклавши $A_3=0$ і $A_1>0$, як частковий випадок, отримаємо $F(w)=-A_2-A_4\arcsin(kw)$.

<u>Приклад 6.</u> Можна шукати розв'язок рівняння (3.2) із квадратичною залежністю складеного аргументу по x:

$$w=w(z),\ z=\varphi(t)x^2+\psi(t). \qquad (3.8)$$

Підставимо цей вираз в (3.2). В результаті отримаємо рівняння, яке містить члени з x^2(і не містить членів, лінійних по x). Виключивши із отриманого рівняння x^2 за допомогою (3.8), маємо

$$-\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' + 2\varphi - \frac{\varphi_t'}{\varphi}z + 4\varphi z\frac{w_{zz}''}{w_z'} - 4\varphi\psi\frac{w_{zz}''}{w_z'} + \frac{F(w)}{w_z'} = 0.$$

Для розв'язування цього функціонально-диференціального рівняння з двома аргументами застосуємо метод розщеплення. Можна показати, що рівняння (3.2) з логарифмічною нелінійністю (3.7) має розв'язок виду (3.8) [24].

Приклад 7. Розглянемо нелінійне рівняння m-го порядку

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + F(w).$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^n w}{\partial y^2} = f(x)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{n-1}\frac{\partial^m w}{\partial y^m},$$

яке в частковому випадку $f(x) = const,\ m = 3$ описує прикордонний шар степеневої рідини на плоскій пластині (w – функція струму, x і y – поздовжні і поперечні координати, n – реологічний параметр; значення $n = 1$ відповідає ньютонівській рідині).

Пошук точного розв'язку виду

$$w = w(z), z = \varphi(x)y + \psi(x)$$

приводить до рівності

$$\varphi_x'(w_z')^2 = f(x)\varphi^{2n+m-3}(w_{zz}'')^{n-1}w_z^{(m)},$$

яка не залежить від функції ψ. Відокремлюючи змінні і інтегруючи, отримаємо

$$\varphi(x) = \left[\int f(x)dx + C\right]^{\frac{1}{4-2n-m}},$$

де $\psi(x)$ – довільна, а функція $w = w(z)$ визначається шляхом розв'язування звичайного диференціального рівняння

$$(w_z')^2 = (4 - 2n - m)(w_{zz}'')^{n-1}w_z^{(m)}.$$

Приклад 8. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^{n+1} w}{\partial x^n \partial y} = f(w). \tag{3.9}$$

Шукаємо розв’язок із функціональним відокремленням змінних спеціального виду

$$w = w(z), z = \varphi(y)x + \psi(y). \qquad (3.10)$$

Підставимо (3.10) в (3.9), після чого виключимо x за допомогою виразу для z. Як результат після ділення на $w_z^{(n+1)}$ і перегрупування членів отримаємо функціонально-диференціальне рівняння з двома аргументами:

$$\varphi^n \psi_y' - \varphi^{n-1}\psi\varphi_y' + \varphi^{n-1}\varphi_y'\left(z + n\frac{w_z^{(n)}}{w_z^{(n+1)}}\right) - \frac{f(w)}{w_z^{(n+1)}} = 0. \qquad (3.11)$$

Воно зводиться до тричленного білінійного функціонального рівняння, яке має два розв’язки. Відповідно до цього, розглянемо два випадки.

В першому випадку вираз в круглих дужках і останній дріб в (3.11) прирівнюємо до сталих. В результаті після елементарних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} &w = A\ln|z| + B_{n-1}z^{n-1} + \cdots + B_1 z + B_0, \\ &f(w) = AC_2 n!\,(-1)^n z^{-n-1}, \\ &\psi(y) = C_2\varphi(y)\int \frac{dy}{[\varphi(y)]^{n+1}} + C_3\varphi(y), \end{aligned} \qquad (3.12)$$

де A, B_n, C_3 - довільні сталі, $\varphi(y)$ - довільна функція.

Перших дві функції в (3.12) дають параметричне представлення для функції $f(w)$. В частковому випадку при $B_{n-1} = \cdots = B_0 = 0$ після виключення z приходимо до експоненціальної залежності

$$f(w) = \alpha e^{\beta w}, \alpha = AC_2 n!\,(-1)^n, \beta = 1(n+1)/A.$$

В силу (3.12) відповідний розв’язок рівняння (3.9) буде мати функціональну довільність.

В другому випадку (3.11) розкладається на три звичайних диференціальних рівняння:

$$\begin{aligned} &\varphi^{n-1}\varphi_y' = C_1, \\ &\varphi^n\psi_y' - \varphi^{n-1}\psi\varphi_y' = C_2, \\ &(C_1 z + C_2)w_z^{(n+1)} + C_1 n w_z^{(n)} - f(w) = 0, \end{aligned} \qquad (3.13)$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі. Ров’язок двох перших рівнянь має вид

$$\varphi = (C_1 nt + C_3)^{\frac{1}{n}}, \psi = C_4 (C_1 nt + C_3)^{\frac{1}{n}} - \frac{C_2}{C_1}.$$

Ці формули разом із останнім рівнянням (3.13) дають автомодельний розв’язок виду (3.10) [17].

3.2.2. Розв’язування шляхом зведення до рівнянь з квадратичною нелінійністю

В ряді випадків пошук розв’язків в виді (3.2) вдається провести в два етапи. Спочатку шукають перетворення, що зводить початкове рівняння до рівняння з квадратичною (інколи степеневою) нелінійністю. Після чого розв’язуємо отримане рівняння.

Рівняння з квадратичною нелінійністю іноді вдається отримати за допомогою підстановки виду $w = F(z)$. Найбільш розповсюджені підстановки мають вид:

$w = z^{\lambda}$ (для рівнянь зі степеневою нелінійністю),

$w = \lambda \ln z$ (для рівнянь із експонентною нелінійністю),

$w = e^{\lambda z}$ (для рівнянь з логарифмічною нелінійністю),

де λ - стала, яку потрібно визначати. Вказаний підхід еквівалентний апріорному поданню виду функції $F(z)$ у виразі (3.2) [12].

Приклад 9. Нелінійне рівняння теплопровідності з джерелом логарифмічного типу

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t) w \ln w$$

заміною $w = e^z$ зводиться до рівняння з квадратичною нелінійністю

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(t) z,$$

яке допускає точний розв’язок з узагальненим відокремленням змінних виду

$$z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t),$$

де $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, а функція $\psi_k(t)$ описується відповідною системою звичайних диференціальних рівнянь [15].

ВИСНОВКИ

XXI століття – це час стрімкого розвитку різноманітних сфер науки, але найбільш бурхливо розвивається техніка та високі технології. Різні технічні пристрої полегшують нам життя і є його невід’ємною складовою, а кожний такий винахід створюється на основі математичних знань. В усіх напрямках науки, математика має своє застосування.

В роботі розкрито зміст таких понять, як функціональні рівняння та диференціальні рівняння з частинними похідними, а саме, показано історію розвитку, та наведено основні означення, властивості, теореми тощо. Розглянуто функціональні рівняння Коші та їх розв’язання. Детально розписано класифікацію диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку.

Також, наведено приклади задач, які приводять до рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типів (поздовжні коливання струни і стрижня, поперечні коливання струни та мембрани, рівняння гідродинаміки і акустики, лінійні задачі про розповсюдження тепла, рівняння дифузії, стаціонарне теплове поле потенціальний рух рідини, потенціал стаціонарного струму і електричного поля), розглянуто способи постанови крайових та початкових умов для задач кожного типу.

Показано на практиці застосування відповідних знань, шляхом викладення в роботі конкретних прикладів із застосуванням методів функціонального відокремлення змінних та зведення до рівнянь з квадратичною нелінійністю.

Матеріали роботи можуть бути використані при вивченні диференціальні рівнянь, математичного моделювання, методи нелінійного аналізу та інших студентами закладів вищої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гой Т. П. Диференціальні рівняння: навчальний посібник для студентів / Т. Гой, О. Махней. – Івано-Франківськ, 2010
2. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики: підручник / М. Перестюк, В. Маринець. – К. : Либідь, 2006.
3. Александров А. Д. Об одном обобщении функціонального уравнения $f(x) + f(y) = f(x + y)$ / Александров А. Д.- Сиб. матем. ж., 1971
4. Ацел Я. Функциональные уравнения с несколькими переменными / Я. Ацел, Ж. Домбр. - [пер. с англ.]. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Бродский Я. С. Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. - К.: Вища школа. Головное издательство, 1983.
6. Бухштабер В. М. Операторы Данкла, функцыональные уравнения і преобразования эллиптических родов / В. М. Бухштабер, А. П. Веселов. - УМН, 1994
7. Бухштабер В. М. Функцыональные уравнения, асоциированные с теоремами сложения для еллиптических функцій, и двузначные алгебраические групы / Бухштабер В. М. – УМН, 1990
8. Власова Е.А. Приближенные методы математической физики: учеб. для вузов / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
9. Вся высшая математика: Учебник. Т. 3. Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / [Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., и др.]. - М.: Эдиториал УРСС, 2001.
10. Зайцев В.Ф. Метод разделения переменных в математической физике: учебное пособие / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. - Санкт-Петербург: Книжный дом, 2009.
11. Зайцев В.Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

12.Ильин В.А. Методы решения функциональных уравнений / Ильин В.А. - Соросовский образовательный журнал, 2001.

13.Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких прeременных в виде суперпозиций непрерывных функцій одного переменново и сложения / Колмогоров А. Н. – ДАН СССР. 1957

14.Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких прeременных суперпозициями непрерывных функцій меньшева числа переменних / Колмогоров А. Н. – ДАН СССР, 1957

15.Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г.И. Макаренко. – [Изд. 4-е., испр.]. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.

16.Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Лихтарников Л.М.- Санкт-Петербург: Лань, 1997.

17.Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / Малкин И. Г. – Москва : Гостехиздат, 1952.

18.Малкин И. Г. Теория устоичивости движения / Малкин И. Г. – Москва: Наука, 1966.

19.Мартинсон Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики: учеб. для вузов / Л.К Мартинсон, Ю.И. Малов; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – [2-е изд .]. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

20.Пелюх Г. П. Введение в теорію функиональных уравнений / Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковский. – Киев: Наукова думка, 1974

21.Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференционных уравнений / Петровский И. Г. – Москва : Физматлит, 2009.

22.Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Пушкарь Е.А. – М.: МГИУ, 2007.

23.Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления / Романов В. К. — [2-е изд.]. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001

24. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк . - М.: Высшая школа, 1989.
25. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению [Романко В.К., Агаханов Н.Х., Власов В.В., Коваленко Л.И.]. - М., ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002.
26. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / Степанов В. В. - [8-е изд.]. -СССР : Физматлит,1959
27. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников .— [4-е изд.]. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
28. Тихонов А. Н. Уравнения математичиской физики: учебное пособие для вузов / А. Тихонов, А. Самарский. – [6-е изд.]. – Москва: Наука, 1977.
29. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Федорюк М. В. —[2-е изд.].— Москва: Наука, 1985.— (Главная редакция физико-математической литературы).
30. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник / Филиппов А. Ф. – [Изд. 2-е, испр]. - М.: КомКнига, 2007.
31. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / Филиппов А. Ф. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000
32. Функциональные уравнения / [Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н., Савин А.Н., Саушкин И.Н.]. - Самара: В мире науки, 1999.