Міністерство науки і освіти України
Рівненський державний гуманітарний університет

А.О. Сяський, Н.В.Шевцова

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчально - методичний посібник

Рівне – 2023

С 99
УДК 514.7(075.8)

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 2 від 15.03.2023 р.)

Рецензенти:

П. О. Тадеєв, доктор педагогічних наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування;

І. М. Присяжнюк, кандидат технічних наук, доцент, Рівненський державний гуманітарний університет.

Сяський А.О., Шевцова Н.В. Диференціальна геометрія: навч. - метод. посібник. Рівне: РДГУ, 2023. 66 с.

У навчально-методичному посібнику викладено основи диференціальної геометрії ліній і поверхонь в просторі, властивості яких вивчаються методами математичного аналізу. У додатках наведено варіанти індивідуальних завдань для контролю за самостійною роботою здобувачів вищої освіти, а також приклади розв′язання та оформлення цих завдань. Посібник розраховано на здобувачів вищої освіти за спеціальністю «прикладна математика» і молодих науковців.

С 99
УДК 514.7(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальна геометрія – це частина математики, яка вивчає геометричні образи, у першу чергу криві та поверхні, використовуючи методи математичного аналізу. Характерною особливістю класичної диференціальної геометрії є те, що вона вивчає властивості геометричних образів "у малому", тобто властивості, які проявляються в досить малому околі деякої точки. Тому від аналітичної геометрії вона відрізняється своїм предметом і методами. Аналітична геометрія обмежується образами першого та другого порядку і використовує алгебраїчний, векторний і координатний методи. Диференціальна геометрія вивчає криві та поверхні значно ширшого класу і використовує числення нескінченно малих, поняття функції, похідної тощо. Диференціальна геометрія виникла і розвивалась у тісному зв'язку з математичним аналізом, який сам у значній мірі виріс із розв'язування таких геометричних задач, як знаходження дотичної до кривої, площі та об'єму фігури. Багато геометричних понять передували відповідним поняттям математичного аналізу. Так, наприклад, поняття дотичної передувало поняттю похідної, а поняття площі та об'єму – поняттю інтеграла.

Диференціальна геометрія належить до фундаментальних дисциплін математичної освіти, знання якої складають основу для вивчення інших дисциплін, зокрема, теоретичної механіки, механіки суцільного середовища.

Мета викладання навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія» – формування у майбутніх бакалаврів компетентностей, необхідних для побудови математичних моделей задач теоретичної механіки і механіки суцільного середовища та їх реалізації точними аналітичними або чисельними методами. Цей курс відіграє важливу роль при дослідженні законів руху і рівноваги абсолютно твердих тіл, а також деформування пружних тіл.

Основними завданнями вивчення дисципліни є:

- закріплення та поглиблення знань, набутих здобувачами вищої освіти при вивченні основних курсів математики (математичний аналіз, лінійна алгебра і аналітична геометрія) стосовно дослідження кривих і поверхонь методами математичного аналізу;
- набути практичних умінь складання рівнянь елементів супровідного триганника для різних способів параметризації кривої;
- набути практичних умінь обчислення довжини дуги кривої, кривини і скруту, складання натуральних рівнянь кривої;
- набути практичних умінь застосовування першої і другої квадратичних форм поверхні до обчислення довжини кривої на поверхні, кута між двома лініями на поверхні, площі куска поверхні, відшукання визначних ліній на поверхні.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

1.1. Векторні функції одного скалярного аргументу

Розглянемо у тривимірному просторі, віднесеному до прямокутної декартової системи координат ($Oxyz$), систему скалярних рівнянь

$$\begin{aligned} &x = x(t); \\ &y = y(t); \quad t \in [a; b], \\ &z = z(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ – неперервні та тричі неперервно диференційовані функції аргументу t. Ця система еквівалентна одному векторному рівнянню

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \text{ або } \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b], \tag{1.2}$$

яке визначає векторну функцію скалярного аргументу. Кожна векторна функція одного скалярного аргументу визначає в просторі деяку лінію, що називається її *годографом* (рис.1.1).

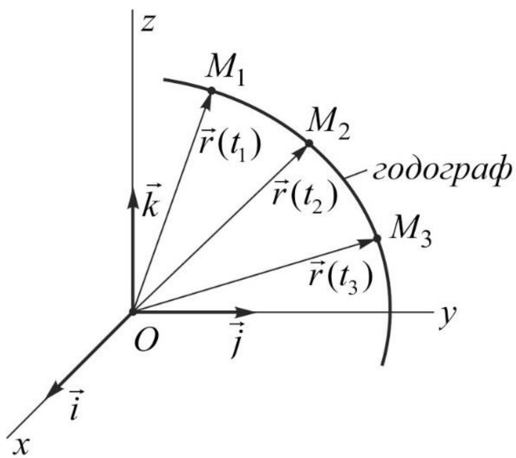

Рис. 1.1.

Із загального класу векторних функцій можна виділити такі окремі типи:

- $|\vec{r}(t)| = const$ – векторні функції сталої довжини;
- $\vec{r}(t) = \mu(t)\vec{a}$ – векторні функції сталого напрямку;
- $\vec{a}$ – сталий вектор (векторні функції сталої довжини і сталого напрямку).

1.2. Операції над векторними функціями

Розглянемо три векторні функції скалярного аргументу t

$$\vec{r}_1 = \left(x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t)\right);$$

$$\vec{r}_2 = \left(x_2(t),\ y_2(t),\ z_2(t)\right);$$

$$\vec{r}_3 = \left(x_3(t),\ y_3(t),\ z_3(t)\right), \quad t \in [a; b] \tag{1.3}$$

і введемо над ними такі математичні операції:

- *сума (різниця) двох векторних функцій*

$$\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2 = \left(x_1(t) \pm x_2(t),\ y_1(t) \pm y_2(t),\ z_1(t) \pm z_2(t)\right); \tag{1.4}$$

- *добуток скалярної функції на векторну*

$$\alpha(t)\vec{r} = \left(\alpha(t)x(t),\ \alpha(t)y(t),\ \alpha(t)z(t)\right); \tag{1.5}$$

- *скалярний добуток двох векторних функцій*

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t), \tag{1.6}$$

для якого $(\vec{r}_1\vec{r}_2) = 0$ – умова ортогональності двох векторних функцій;

- *векторний добуток двох векторних функцій*

$$\left[\vec{r}_1\vec{r}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix}, \tag{1.7}$$

для якого $\left[\vec{r}_1\vec{r}_2\right] = \vec{0}$ – умова колінеарності двох векторних функцій;

- *мішаний добуток трьох векторних функцій*

$$(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,\vec{r}_3)=\begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{vmatrix}, \qquad (1.8)$$

для якого $(\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,\vec{r}_3)=0$ – умова компланарності трьох векторних функцій.

1.3. Границя векторної функції

Розглянемо векторну функцію $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ і точку $t=t_0$. *Границею* векторної функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=t_0$ називається сталий вектор $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$, для якого виконується умова $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=0$.

За виконання співвідношень

$$A=\lim_{t\to t_0}x(t)\,;\quad B=\lim_{t\to t_0}y(t)\,;\quad C=\lim_{t\to t_0}z(t)$$

маємо

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\lim_{t\to t_0}\big(x(t),y(t),z(t)\big)=\big(A,B,C\big). \qquad (1.9)$$

1.4. Неперервність векторної функції в точці (на відрізку)

Векторна функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ називається *неперервною в точці* $t=t_0$, якщо в цій точці має місце рівність

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)=\big(x(t_0),y(t_0),z(t_0)\big). \qquad (1.10)$$

Якщо векторна функція неперервна в кожній точці відрізка $[a;b]$, то говорять, що вона *неперервна на цьому відрізку*.

1.5. Диференціювання векторних функцій

Похідною від векторної функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=t_0$ називається сталий вектор $\vec{r}'(t_0)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, який визначається залежністю

$$\vec{r}'(t_0)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right) \qquad (1.11)$$

і слугує напрямним вектором дотичної до годографа функції в цій точці (рис.1.2).

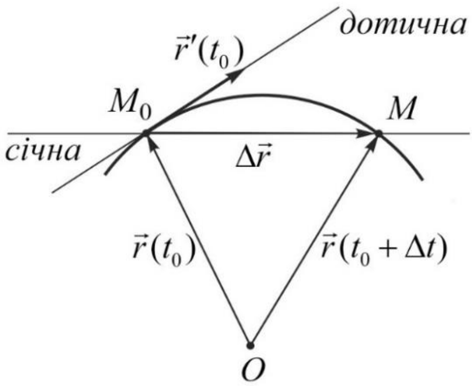

Рис. 1.2.

Зауважимо, що похідна в довільній точці t визначає векторну функцію.

Для обчислення похідних від векторних функцій в довільній точці використовуємо такі *правила*:

$$\vec{r}'(t)=\left(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\right);$$

$$\left(\vec{r}_1\pm\vec{r}_2\right)'=\vec{r}_1'\pm\vec{r}_2';$$

$$\left(\alpha(t)\vec{r}(t)\right)'=\alpha'(t)\vec{r}(t)+\alpha(t)\vec{r}'(t);$$

$$\left(\vec{r}_1\vec{r}_2\right)'=(\vec{r}_1'\vec{r}_2)+(\vec{r}_1\vec{r}_2');$$

$$\left[\vec{r}_1\vec{r}_2\right]'=[\vec{r}_1'\vec{r}_2]+[\vec{r}_1\vec{r}_2'];$$

$$\left(\vec{r}_1\vec{r}_2\vec{r}_3\right)'=(\vec{r}_1'\vec{r}_2\vec{r}_3)+(\vec{r}_1\vec{r}_2'\vec{r}_3)+(\vec{r}_1\vec{r}_2\vec{r}_3'). \qquad (1.12)$$

Встановимо геометричний зміст похідних від векторних функцій сталої довжини, сталого напрямку і сталої векторної функції.

Якщо векторна функція має сталу довжину

$\left(\vec{r}(t)\vec{r}(t)\right)=\left(\vec{r}(t)\right)^2=const$, то в результаті диференціювання, знаходимо $\left(\vec{r}'(t)\vec{r}(t)\right)=0$. Остання рівність показує, що похідна від векторної функції сталої довжини перпендикулярна до цієї функції. Для векторної функції сталого напрямку $\vec{r}(t)=\mu(t)\vec{a}$ знаходимо внаслідок диференціювання по t умову $\vec{r}'(t)=\mu'(t)\vec{a}$, яка забезпечує колінеарність функцій $\vec{r}(t)$ і $\vec{r}'(t)$. Похідна від сталої векторної функції завжди дорівнює нульовому вектору.

1.6. Формула Тейлора для векторних функцій

Запишемо формули Тейлора для координат векторної функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в околі точки $t=t_0$

$$x(t_0+\Delta t)=x(t_0)+\frac{x'(t_0)}{1!}\Delta t+\frac{x''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\ldots;$$
$$y(t_0+\Delta t)=y(t_0)+\frac{y'(t_0)}{1!}\Delta t+\frac{y''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\ldots; \qquad (1.13)$$
$$z(t_0+\Delta t)=z(t_0)+\frac{z'(t_0)}{1!}\Delta t+\frac{z''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\ldots.$$

У векторному вигляді співвідношення (1.13) можна подати так

$$\vec{r}(t_0+\Delta t)=r(t_0)+\frac{\vec{r}'(t_0)}{1!}\Delta t+\frac{\vec{r}''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\ldots \qquad (1.14)$$

1.7. Інтегрування векторних функцій

Розглянемо векторну функцію $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Інша векторна функція $\vec{R}(t)$ називається *первісною* для $\vec{r}(t)$ якщо для неї виконується умова $\vec{R}'(t)=\vec{r}(t)$.

Вираз $\int\vec{r}(t)dt=\vec{R}(t)+\overrightarrow{const}$ називається *неозначеним інтегралом* від векторної функції. Для його обчислення використовуємо формулу

$$\int \vec{r}(t)dt = \vec{i}\int x(t)dt + \vec{j}\int y(t)dt + \vec{k}\int z(t)dt . \qquad (1.15)$$

Нехай векторна функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$ визначена і неперервна на проміжку $[a;b]$. Співвідношення $\int\limits_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$ називається *означеним інтегралом* від векторної функції (формула Ньютона-Лейбніца), яке в координатній формі набуває вигляду

$$\int\limits_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{i}\int\limits_a^b x(t)dt + \vec{j}\int\limits_a^b y(t)dt + \vec{k}\int\limits_a^b z(t)dt . \qquad (1.16)$$

Формули (1.15), (1.16) показують, що обчислення інтегралів від векторних функцій зводиться до обчислення відповідних інтегралів від координат цих функцій.

Аналогічно вводиться поняття векторних функцій двох скалярних аргументів в координатній

$$x = x(u,v);$$

$$y = y(u,v);$$

$$z = z(u,v), \quad (u,v) \in G \qquad (1.17)$$

і векторній $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\right)$ формах.

РОЗДІЛ 2
ЛІНІЇ В ПРОСТОРІ

2.1. Способи задання ліній в просторі та їх параметризація

Лінію в тривимірному просторі, який віднесений до прямокутної декартової системи координат ($Oxyz$), можна задати такими способами:

- *координатним (параметричним)* (рис.1.1)

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \quad t \in [a; b]; \\ z &= z(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

- *векторним* (рис.1.1)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a; b]; \tag{2.2}$$

- *як перетин двох поверхонь* (рис.2.1)

$$\begin{aligned} \Phi_1 \left(x, y, z\right) &= 0; \\ \Phi_2 \left(x, y, z\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

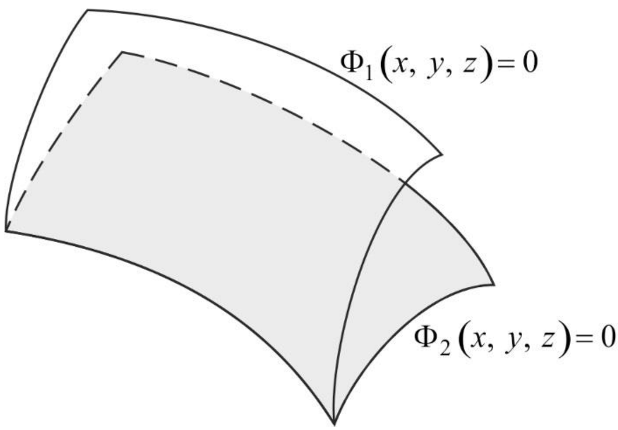

Рис. 2.1.

Плоску криву можна задати явним рівнянням $y = f(x)$ (рис.2.2).

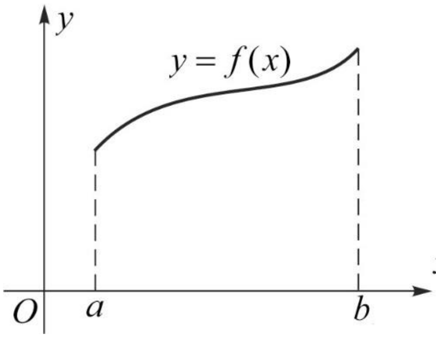

Рис. 2.2.

2.2. Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація ліній

Розглянемо лінію, яка задана векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a; b]$. На цій лінії виберемо дві точки M_0 і M та визначимо довжину дуги між ними. Оскільки $ds = |d\vec{r}|$ (рис.2.3), то внаслідок інтегрування знаходимо

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |d\vec{r}| = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt. \qquad (2.4)$$

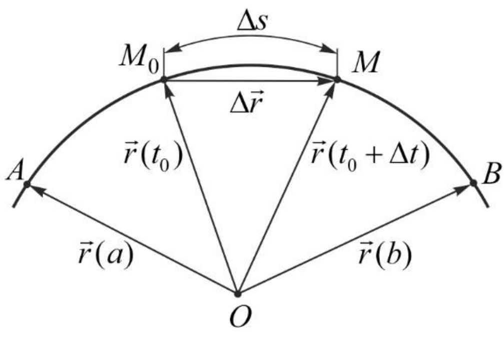

Рис. 2.3.

Остання формула визначає довжину дуги, як функцію параметра t

$$s = s(t). \qquad (2.5)$$

За умови $\dfrac{ds}{dt} > 0$ функція $s(t)$ зростаюча і її можна прийняти за новий параметр, який будемо називати *натуральним*. Якщо (2.5) розв'язати відносно t, то одержимо обернений зв'язок

$$t = t(s). \tag{2.6}$$

Підстановка (2.6) в (2.1) визначає рівняння кривої в натуральній параметризації

$$\begin{aligned} x &= x(t(s)) = x(s); \\ y &= y(t(s)) = y(s); \qquad \text{або} \qquad \vec{r} = \vec{r}(s). \\ z &= z(t(s)) = z(s), \end{aligned} \tag{2.7}$$

Простим куском лінії будемо називати множину точок простору, яка топологічно еквівалентна відрізку. Його можна одержати з відрізка розтягом, стиском, згином та скручуванням без розривів і склеювань. Якщо в деякій точці $t = t_0$ кривої виконується умова $\left(\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}\right)$, то така точка називається *регулярною*. У регулярній точці кривої завжди можна побудувати дотичну.

2.3. Супровідний тригранник кривої

Нехай крива $\vec{r} = \vec{r}(s)$ має натуральну параметризацію. Вважаємо, що параметр $t = t_0$ визначає регулярну точку кривої $\left(\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}\right)$. В цій точці

$$\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0), \quad x_0 = x(t_0); \quad y_0 = y(t_0); \quad z_0 = z(t_0).$$

Обчислимо похідні від функції $\vec{r} = \vec{r}(s)$ по натуральному параметру, які будемо відзначати точкою (наприклад, $\dfrac{dt}{ds} = \dot{t}, \dfrac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}$).

Для першої похідної від $\vec{r} = \vec{r}(s)$ маємо співвідношення $\dot{\vec{r}} = \vec{r}'\dot{t}$, яке визначає умову колінеарності векторів $\dot{\vec{r}}$ і $\vec{r}'$. Отже, вектор $\dot{\vec{r}}$ напрямний вектор дотичної в точці t_0. Покажемо, що цей вектор одиничний

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1.$$

Для нього введемо позначення $\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}$.

Нормаллю до кривої $\vec{r} = \vec{r}(s)$ в точці (x_0, y_0, z_0) називається пряма, яка проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної. Таких прямих існує безліч. Всі вони розміщені в одній площині, яка називається *нормальною площиною*.

Для другої похідної $\ddot{\vec{r}}$ знаходимо $\ddot{\vec{r}} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$, причому $\ddot{\vec{r}} \perp \vec{\tau}$ (бо $\vec{\tau}$ – вектор сталої довжини). Отже, вектор $\ddot{\vec{r}}$ визначає одну з нормалей, яку будемо називати *головною нормаллю*.

Одиничний напрямний вектор головної нормалі $\vec{\nu}$ визначимо як

$$\vec{\nu} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|}. \tag{2.8}$$

Пряму, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0), перпендикулярно до дотичної та головної нормалі, будемо називати *бінормаллю*. Її одиничний напрямний вектор знаходимо за формулою

$$\vec{\beta} = [\vec{\tau}\vec{\nu}]. \tag{2.9}$$

Таким чином, у кожній регулярній точці кривої визначено трійку взаємно перпендикулярних одиничних векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$, які разом з точкою M_0 визначають прямокутну декартову систему координат, що змінюється при переході від точки до точки. Осі цієї системи визначають три взаємно перпендикулярні площини:

$(M_0, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ – нормальну;

$(M_0, \vec{\tau}, \vec{\nu})$ – стичну;

$(M_0, \vec{\tau}, \vec{\beta})$ – спрямну.

Одержаний тригранник (рис.2.4) називається супровідним тригранником кривої в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

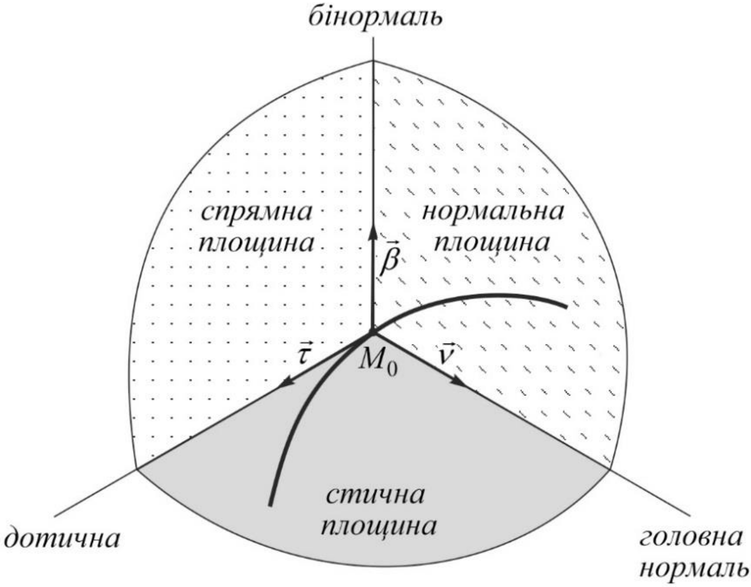

Рис. 2.4.

Для векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ в цій точці маємо

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) ;$$

$$\vec{\nu} \parallel \ddot{\vec{r}}(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0) ; \qquad (2.10)$$

$$\vec{\beta} \parallel [\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} .$$

Знаючи координати точки M_0 і векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$, записуємо рівняння елементів супровідного тригранника у вибраній системі координат $(Oxyz)$:

- *дотична* (рис.2.5) *і нормальна площина*

$$\frac{\xi - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{\eta - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{\zeta - z_0}{\dot{z}_0};$$

$$(\xi - x_0)\dot{x}_0 + (\eta - y_0)\dot{y}_0 + (\zeta - z_0)\dot{z}_0 = 0; \qquad (2.11)$$

- *головна нормаль і спрямна площина*

$$\frac{\xi - x_0}{\ddot{x}_0} = \frac{\eta - y_0}{\ddot{y}_0} = \frac{\zeta - z_0}{\ddot{z}_0};$$

$$(\xi - x_0)\ddot{x}_0 + (\eta - y_0)\ddot{y}_0 + (\zeta - z_0)\ddot{z}_0 = 0; \qquad (2.12)$$

- *бінормаль і стична площина*

$$\frac{\xi - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{z}_0 & \dot{x}_0 \\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0 \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix}};$$

$$(\xi - x_0)\begin{vmatrix} \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} + (\eta - y_0)\begin{vmatrix} \dot{z}_0 & \dot{x}_0 \\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0 \end{vmatrix} + (\zeta - z_0)\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.13)$$

Тут (ξ, η, ζ) – координати довільної точки елемента супровідного тригранника кривої в точці t_0.

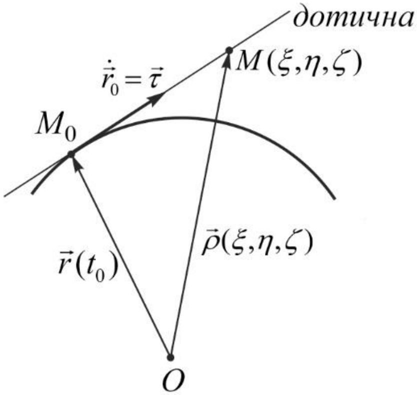

Рис. 2.5.

Для встановлення рівнянь елементів супровідного тригранника кривої довільної параметризації $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці t_0 розглянемо залежності

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\tau} = \vec{r}'\dot{t};$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{ds}\left(\vec{r}'\dot{t}\right) = \vec{r}''\dot{t}^2 + \vec{r}'\ddot{t} = \vec{r}''\dot{t}^2 + \dot{\vec{r}}\,\ddot{t}\,s', \qquad (2.14)$$

які показують, що вектори $\vec{r}'$ і $\vec{r}''$ розміщені в стичній площині.

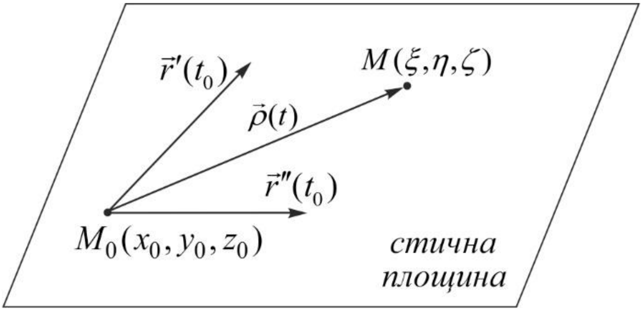

Рис. 2.6.

Тоді, обираючи за напрямні вектори дотичної, бінормалі та головної нормалі відповідно вектори $\vec{T}=\vec{r}'$, $\vec{B}=\left[\vec{r}'\vec{r}''\right]$, $\vec{N}=\left[\vec{r}'[\vec{r}'\vec{r}'']\right]$, рівняння елементів супровідного тригранника кривої в точці t_0 можна записати у вигляді:

- *дотична пряма і нормальна площина*

$$\frac{\xi-x_0}{x_0'}=\frac{\eta-y_0}{y_0'}=\frac{\zeta-z_0}{z_0'};$$

$$(\xi-x_0)x_0'+(\eta-y_0)y_0'+(\zeta-z_0)z_0'=0; \qquad (2.15)$$

- *бінормаль і стична площина* (рис.2.6)

$$\frac{\xi-x_0}{\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}}=\frac{\eta-y_0}{\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix}}=\frac{\zeta-z_0}{\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix}};$$

$$(\xi-x_0)\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}+(\eta-y_0)\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix}+(\zeta-z_0)\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix}=0; \qquad (2.16)$$

- *головна нормаль і спрямна площина*

$$\frac{\xi - x_0}{\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ \begin{Vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{Vmatrix} \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y_0}{\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ \begin{Vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{Vmatrix} \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z_0}{\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ \begin{Vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{Vmatrix} \end{vmatrix}};$$

$$(\xi - x_0)\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ \begin{Vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{Vmatrix} \end{vmatrix} + (\eta - y_0)\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ \begin{Vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{Vmatrix} \end{vmatrix} +$$

$$+(\zeta - z_0)\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ \begin{Vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{Vmatrix} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.17)$$

2.4. Формули Френе

У попередніх підрозділах встановлено, що в кожній регулярній точці t_0 кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $\left(\vec{r} = \vec{r}(s)\right)$ можна побудувати три одиничних взаємно перпендикулярних вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$, які разом з точкою кривої визначають 6 елементів супровідного тригранника. Оскільки ці вектори змінюють свої напрямки при переході від точки до точки, то для характеристики цієї зміни необхідно знати розклади похідних від векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ по натуральному параметру за векторами $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$.

Розглянемо в натуральній параметризації криву $\vec{r} = \vec{r}(s)$, для якої

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}\,; \qquad \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\,. \qquad (2.18)$$

Умову колінеарності векторів $\ddot{\vec{r}}$ і $\vec{\nu}$ подаємо у вигляді

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}\,, \qquad (2.19)$$

де k – скалярна функція натурального параметра s. Залежність (2.19) визначає *першу* формулу Френе.

Розглянемо одиничний вектор бінормалі $\vec{\beta} = \left[\vec{\tau}\,\vec{\nu}\right]$. Внаслідок його диференціювання по s, отримаємо співвідношення

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau}\,\frac{d\vec{\nu}}{ds}\right] = \left[\vec{\tau}\,\frac{d\vec{\nu}}{ds}\right],$$

з якого випливає умова $\frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\tau}$. З іншого боку $\frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\beta}$ (бо $\vec{\beta}$ – вектор сталої довжини). Тому вектор $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ колінеарний вектору $\vec{\nu}$. Умова їх колінеарності визначає *другу* формулу Френе

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}. \tag{2.20}$$

Тут κ – скалярна функція натурального параметра s.

Диференціюючи по s функцію $\vec{\nu} = [\vec{\beta}\vec{\tau}]$ з урахуванням (2.19), (2.20), отримаємо після певних перетворень *третю* формулу Френе

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}. \tag{2.21}$$

Формули Френе дозволяють визначати похідні вищих порядків від функції $\vec{r} = \vec{r}(s)$ як лінійні комбінації векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\tau}; \quad \ddot{\vec{r}} = k\vec{\nu}; \quad \dddot{\vec{r}} = \frac{d}{ds}\left(k\vec{\nu}\right) = -k^2\vec{\tau} + \dot{k}\vec{\nu} + k\kappa\vec{\beta}. \tag{2.22}$$

2.5. Кривина і скрут кривої

Розглянемо на кривій $\vec{r} = \vec{r}(t)$ регулярну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, для якої $\vec{r}'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

Кривиною кривої в заданій точці називається границя відношення кута повороту дотичної на дузі, яка стягується в точку, до довжини цієї дуги (рис.2.7)

$$\tilde{k} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \tag{2.23}$$

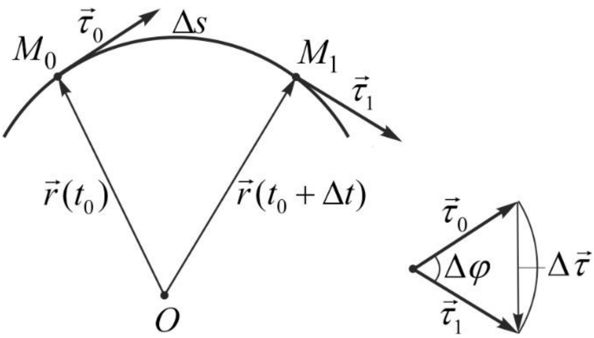

Рис. 2.7.

Покажемо, що величина $\tilde{k}$ співпадає з коефіцієнтом k у першій формулі Френе

$$\tilde{k} = \lim_{ds\to 0} \frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = |k\vec{\nu}| = k\,.$$

Точка кривої, у якій $k = 0$, називається точкою спрямлення. Припустимо, що в кожній точці кривої $k = 0$. Тоді

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{0} \qquad \text{і} \qquad \vec{\tau} = \vec{\tau}_0 = \overrightarrow{const}\,.$$

У цьому випадку одержуємо пряму лінію. Таким чином, кривина кривої характеризує в кожній точці її відхилення від прямої.

Величина, обернена до кривини, називається *радіусом кривини* кривої в заданій точці.

Скрутом кривої в заданій точці називається границя відношення кута повороту бінормалі на дузі, яка стягується в точку, до довжини цієї дуги (рис.2.8)

$$|\tilde{\kappa}| = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta s}\,. \qquad (2.24)$$

Покажемо, що величина $\tilde{\kappa}$ співпадає з коефіцієнтом κ у другій формулі Френе

$$|\tilde{\kappa}| = \lim_{ds\to 0} \frac{|d\vec{\beta}|}{ds} = |\kappa\vec{\nu}| = |\kappa|\,.$$

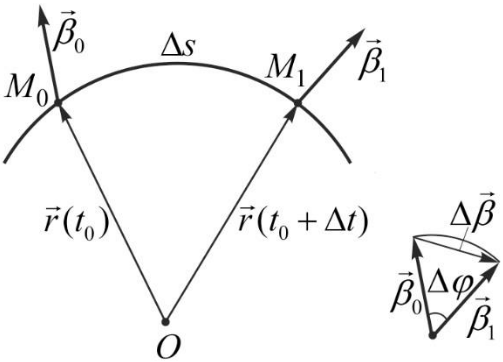

Рис. 2.8.

Якщо в кожній точці кривої $\kappa(s)=0$, то

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=\vec{0} \qquad \text{і} \qquad \vec{\beta}=\vec{\beta}_0=\overrightarrow{const}\,.$$

Це означає, що скрут кривої характеризує її відхилення від плоскої лінії.

Встановимо розрахункові формули для визначення кривини та скруту кривої в заданій точці:

а) *натуральна параметризація кривої* $\vec{r}=\vec{r}(s)=\big(x(s),y(s),z(s)\big)$. В точці $s=s_0$ маємо $M_0(x_0,y_0,z_0)$; $\dot{\vec{r}}=(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$; $\ddot{\vec{r}}=(\ddot{x}_0,\ddot{y}_0,\ddot{z}_0)$; $\dddot{\vec{r}}=(\dddot{x}_0,\dddot{y}_0,\dddot{z}_0)$.

Розглянемо співвідношення (2.22)

$$\dot{\vec{r}}=\vec{\tau}\,; \qquad \ddot{\vec{r}}=k\vec{\nu}\,; \qquad \dddot{\vec{r}}=-k^2\vec{\tau}+\dot{k}\vec{\nu}+k\kappa\vec{\beta}\,. \tag{2.25}$$

У результаті векторного множення першого з них на друге, отримаємо залежність

$$[\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}]=k[\vec{\tau}\,\vec{\nu}]=k\vec{\beta}\,,$$

з якої знаходимо векторну формулу для визначення кривини кривої

$$k=|[\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}]|. \tag{2.26}$$

Встановимо відповідну формулу для скруту кривої. З цією метою співвідношення (2.25) помножимо мішаним способом. У результаті певних перетворень отримаємо наступні залежності

$$(\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,\dddot{\vec{r}}) = k^2\varkappa\,; \qquad \varkappa = \frac{(\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,\dddot{\vec{r}})}{k^2}\,. \tag{2.27}$$

Остання з них показує, що скрут невизначений в тих точках кривої, де кривина дорівнює нулю.

У координатній формі формули (2.26), (2.27) для визначення кривини і скруту набувають вигляду

$$k = \sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z}_0 & \dot{x}_0 \\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix}^2}\,;$$

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \\ \dddot{x}_0 & \dddot{y}_0 & \dddot{z}_0 \end{vmatrix}}{k^2}\,. \tag{2.28}$$

б) *довільна параметризація кривої* $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В точці $t = t_0$ маємо

$M_0(x_0, y_0, z_0)$; $\vec{r}\,' = (x_0', y_0', z_0')$; $\vec{r}\,'' = (x_0'', y_0'', z_0'')$; $\vec{r}\,''' = (x_0''', y_0''', z_0''')$.

Виразимо похідні від $\vec{r} = \vec{r}(t)$ по натуральному параметру через похідні по довільному параметру

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}\,'\dot{t}\,; \qquad \ddot{\vec{r}} = \vec{r}\,''\dot{t}^2 + \vec{r}\,'\ddot{t}\,; \qquad \dddot{\vec{r}} = \vec{r}\,'''\dot{t}^3 + 3\vec{r}\,''\dot{t}\ddot{t} + \vec{r}\,'\dddot{t}\,. \tag{2.29}$$

Підстановка (2.29) у формули (2.25) призводить до співвідношень

$$[\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}] = [\vec{r}\,'\vec{r}\,'']\dot{t}^3; \qquad (\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,\dddot{\vec{r}}) = (\vec{r}\,'\,\vec{r}\,''\,\vec{r}\,''')\dot{t}^6\,; \qquad \dot{t} = \frac{1}{|\,\vec{r}\,'\,|}, \tag{2.30}$$

з яких визначаємо векторні формули для кривини і скруту

$$k = \frac{|\,[\vec{r}\,'\,\vec{r}\,'']\,|}{|\,\vec{r}\,'\,|^3}\,; \qquad \varkappa = \frac{(\vec{r}\,'\,\vec{r}\,''\,\vec{r}\,''')}{|\,[\vec{r}\,'\,\vec{r}\,'']\,|^2}\,. \tag{2.31}$$

У координатній формі вони набувають вигляду

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0' \end{vmatrix}^2}}{\left(\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2 + (z_0')^2}\right)^3};$$

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \\ x_0''' & y_0''' & z_0''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0' \end{vmatrix}^2}. \tag{2.32}$$

Натуральними рівняннями кривої називаються співвідношення, що зв’язують в кожній точці кривину і скрут кривої з натуральним параметром s

$$k = k(s);$$

$$\kappa = \kappa(s). \tag{2.33}$$

Якщо крива параметризована натуральним параметром, то для встановлення натуральних рівнянь достатньо використати формули (2.28). У випадку довільної параметризації кривої необхідно спочатку перейти до натуральної параметризації, а потім використати формули (2.28).

Легко встановити, що натуральні рівняння кривої визначають її положення у просторі з точністю до переміщення як жорсткого цілого.

РОЗДІЛ 3
ПОВЕРХНІ В ПРОСТОРІ

3.1. Способи задання поверхонь в просторі. Координатна сітка на поверхні

Розглянемо систему трьох рівнянь, що залежать від двох параметрів (u,v), які визначають деяку плоску область G

$$\begin{aligned} x &= x(u,v); \\ y &= y(u,v); \\ z &= z(u,v). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Як відомо з курсу математичного аналізу, система (3.1) визначає в просторі деяку поверхню. Такий спосіб задання поверхні називається *параметричним (координатним)*.

Якщо співвідношення (3.1) помножити відповідно на базисні вектори системи координат і додати, то одержимо *векторний* спосіб задання поверхні (рис.3.1)

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \,. \tag{3.2}$$

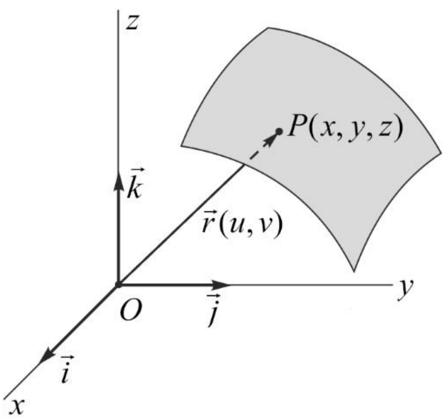

Рис. 3.1.

На практиці широко використовують способи задання поверхні *явним* $z = f(x,y)$ і *неявним* $\Phi(x,y,z) = 0$ рівняннями.

Розглянемо векторне рівняння поверхні $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Зафіксуємо один з параметрів, наприклад, $u = u_0$. Тоді $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v) = \vec{r}(v)$ – однопараметричне векторне рівняння, яке визначає деяку лінію на поверхні. Цю лінію будемо називати v-лінією. Змінюючи значення u ми одержимо сімейство ліній $u = const$, $v = v$.

Аналогічно вводяться u-лінії на поверхні ($u = u$, $v = const$). Два сімейства ($u = u$, $v = const$), ($u = const$, $v = v$) ліній визначають на поверхні координатну сітку (аналог прямокутної сітки на площині). Ця сітка називається *правильною* якщо: через кожну точку поверхні проходить дві лінії, що належать різним сімействам; дві будь-які лінії одного сімейства не мають спільних точок (рис.3.2).

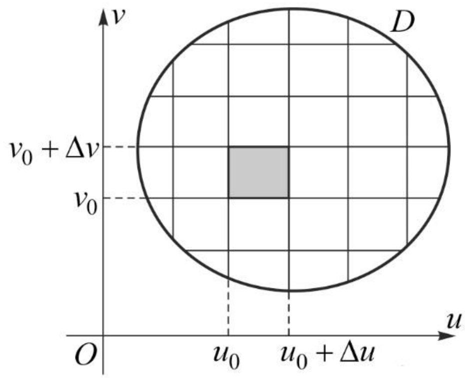

Рис. 3.2.

Простим куском поверхні будемо називати множину точок простору (рис.3.3), яка топологічно еквівалентна плоскій області (рис.3.2). На цих рисунках (u,v) – внутрішні координати точок на поверхні.

Розглянемо поверхню $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ і точку $P(x_0, y_0, z_0)$ з внутрішніми координатами (u_0, v_0). Через цю точку проведемо лінію, яка повністю розміщена на поверхні (таких ліній можна провести безліч).

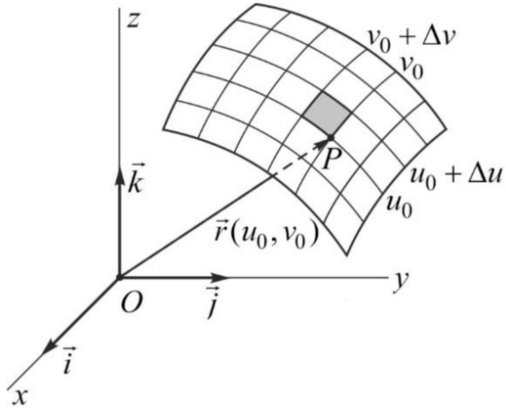

Рис. 3.3.

Нехай її рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} u = u(t); \\ v = v(t); \end{cases} \text{ – внутрішнє рівняння;}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{r}(t) \text{ – зовнішнє рівняння.}$$

Побудуємо в точці P дотичну до кривої. Її напрямок визначає вектор

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\,, \tag{3.3}$$

для якого введено позначення $\vec{r}_u = \dfrac{d\vec{r}}{du}$; $\vec{r}_v = \dfrac{d\vec{r}}{dv}$.

Встановимо геометричний зміст векторів $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$. З цією метою обчислимо напрямні вектори дотичних до координатних ліній

Для лінії ($u = u_0$, $v = v$) вектор $d\vec{r} = \vec{r}_v dv$ –дотичний до v-лінії, а для лінії $(u = u\,,\ \ v = v_0)$ вектор $d\vec{r} = \vec{r}_u du$ – дотичний до u-лінії. Рівність $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ показує, що дотична до заданої лінії в точці P розміщена в площині, яка визначається векторами $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$. Ця площина називається *дотичною площиною* до поверхні в точці P. Пряма, яка проходить через точку P перпендикулярно до дотичної площини, називається *нормаллю* до поверхні в цій точці (рис.3.4).

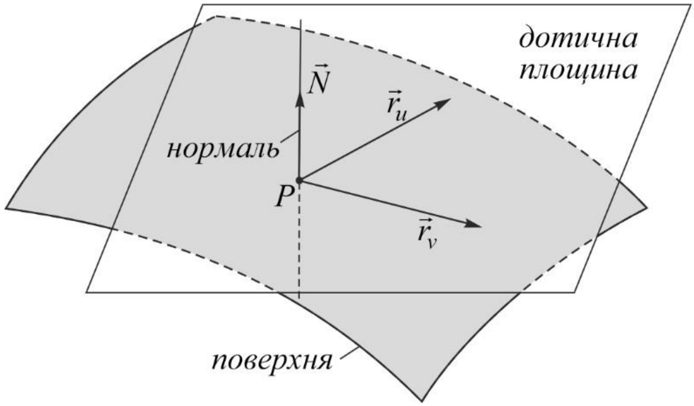

Рис. 3.4.

Точка P називається *регулярною точкою поверхні*, якщо в цій точці $\vec{r}_u \nparallel \vec{r}_v$. Будемо вважати, що ця умова завжди виконується.

Запишемо рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ в точці $P(u_0, v_0)$. Нормальний вектор дотичної площини $\vec{N}$ визначимо як

$$\vec{N} = [\vec{r}_u \vec{r}_v]. \tag{3.4}$$

Цей вектор буде напрямним вектором нормалі до поверхні. Тоді рівняння дотичної площини набуде вигляду

$$(\xi - x_0)\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + (\eta - y_0)\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + (\zeta - z_0)\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 0, \tag{3.5}$$

а рівняння нормалі до поверхні в точці P запишеться так

$$\frac{\xi - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_{v0} & y_v \end{vmatrix}}. \tag{3.6}$$

Тут $x_0 = x(u_0, v_0)$; $y_0 = y(u_0, v_0)$; $z_0 = z(u_0, v_0)$.

Розглянемо часткові випадки задання поверхні. Якщо поверхня задана явним рівнянням $z = f(x, y)$, то рівняння дотичної площини і нормалі мають вигляд

$$(\xi - x_0)\, f'_x\big(P\big) + (\eta - y_0)\, f'_y\big(P\big) - (\zeta - z_0) = 0\,; \tag{3.7}$$

$$\frac{\xi - x_0}{f'_x\big(P\big)} = \frac{\eta - y_0}{f'_y\big(P\big)} = \frac{\zeta - z_0}{-1}\,. \tag{3.8}$$

У випадку задання поверхні неявним рівнянням $\Phi(x, y, z) = 0$ відповідні рівняння запишуться так

$$(\xi - x_0)\Phi'_x\big(P\big) + (\eta - y_0)\Phi'_y\big(P\big) + (\zeta - z_0)\Phi'_z\big(P\big) = 0\,; \tag{3.9}$$

$$\frac{\xi - x_0}{\Phi'_x\big(P\big)} = \frac{\eta - y_0}{\Phi'_y\big(P\big)} = \frac{\zeta - z_0}{\Phi'_z\big(P\big)}\,. \tag{3.10}$$

3.2. Довжина дуги кривої на поверхні. Перша квадратична форма поверхні

На поверхні, яка задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ розглянемо лінію

$$\begin{cases} u = u(t); \\ v = v(t). \end{cases}$$

На цій лінії виберемо дві точки M_0 і M, що визначаються параметрами $t = t_0$ і $t = t$. Необхідно визначити довжину дуги s між цими точками (рис.3.5).

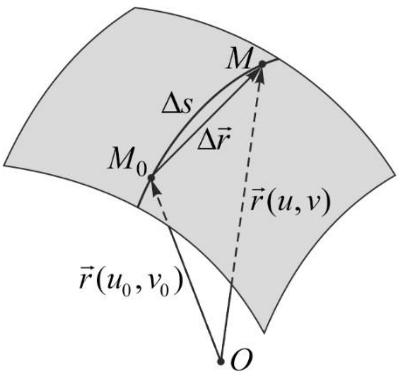

Рис. 3.5.

Оскільки $ds = |d\vec{r}|$, то $ds^2 = (d\vec{r}\, d\vec{r})$. З використанням (3.3) знаходимо

$$ds^2 = \left(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right)^2 = \vec{r}_u^{\,2} du^2 + 2(\vec{r}_u \vec{r}_v) du dv + \vec{r}_v^{\,2} dv^2 =$$

$$= \left[\vec{r}_u^{\,2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2(\vec{r}_u \vec{r}_v)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \vec{r}_v^{\,2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right] dt^2 . \qquad (3.11)$$

У результаті інтегрування (3.11) отримаємо формулу

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt , \qquad (3.12)$$

де введено позначення: $\vec{r}_u^{\,2} = E$; $(\vec{r}_u \vec{r}_v) = F$; $\vec{r}_v^{\,2} = G$; E, F, G – функції точок поверхні (для конкретної точки це сталі величини).

Вираз $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ називається *першою квадратичною формою* поверхні, а функції E, F, G – її коефіцієнтами ($E > 0$, $G > 0$).

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 ;$$

$$G = \vec{r}_v^{\,2} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 ;$$

$$F = (\vec{r}_u \vec{r}_v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v . \qquad (3.13)$$

Враховуючи тотожність Ейлера $\left[\vec{r}_u \vec{r}_v\right]^2 = \vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} - \left(\vec{r}_u \vec{r}_v\right)^2 > 0$, одержимо $EG - F^2 > 0$. Це означає, що перша квадратична форма поверхні додатно визначена.

Кут між двома лініями на поверхні. *Кутом між двома лініями* на поверхні будемо називати кут між дотичними до цих ліній в точці їх перетину (рис.3.6).

Розглянемо на поверхні $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ дві лінії, які перетинаються в одній точці

$$\begin{cases} u = u(t); \\ v = v(t); \end{cases} \qquad \begin{cases} u = u_1(t); \\ v = v_1(t). \end{cases}$$

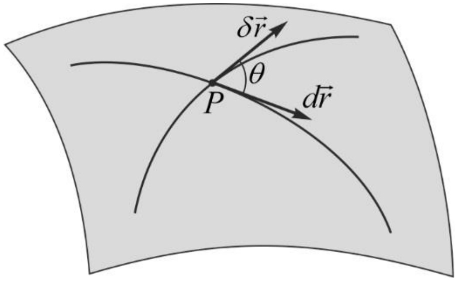

Рис. 3.6.

Напрямними векторами дотичних до цих ліній в точці їх перетину будуть

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\,; \qquad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v\,. \tag{3.14}$$

Використовуючи формулу для визначення кута між двома векторами, знаходимо

$$\cos\theta = \frac{\left(d\vec{r}\,\delta\vec{r}\right)}{\left|d\vec{r}\right|\left|\delta\vec{r}\right|} = \frac{\left(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right)\left(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v\right)}{ds\delta s} =$$

$$= \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}\,. \tag{3.15}$$

Обчислимо кут між координатними лініями ($u = u_0$, $v = v$) і ($u = u$, $v = v_0$), для яких

$$\begin{cases} u = u_0; \\ v = v; \end{cases} \qquad \begin{cases} u = u; \\ v = v_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} du = 0; \\ dv = dv; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta u = \delta u; \\ \delta v = 0; \end{cases}$$

Тоді
$$\cos\theta = \frac{Fdv\delta u}{\sqrt{G}dv\sqrt{E}\delta u} = \frac{F}{\sqrt{G}\sqrt{E}}\,.$$

Остання рівність показує, що координатна сітка на поверхні буде ортогональною при $F = 0$ і в цьому випадку перша квадратична форма поверхні набуває вигляду

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2. \tag{3.16}$$

Площа куска поверхні. Розглянемо задачу про визначення площі куска поверхні $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ в області D зміни параметрів (u,v) (рис.3.6).

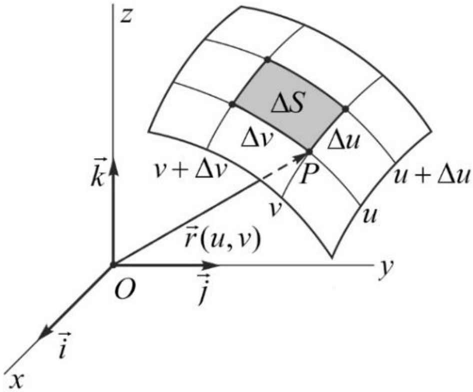

Рис. 3.6.

Замінимо площу заштрихованого криволінійного чотирикутника, площею елементарного паралелограма, побудованого в дотичній площині на векторах $\vec{r}_u du$ і $\vec{r}_v dv$ (рис.3.7)

$$dS = \left|[\vec{r}_u \vec{r}_v]\right| dudv. \tag{3.17}$$

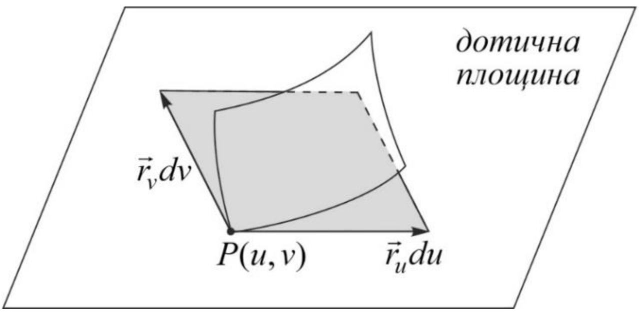

Рис. 3.7.

Інтегруючи останню рівність в області D, знаходимо формулу для обчислення площі куска поверхні

$$S = \iint\limits_{(D)} \left|[\vec{r}_u \vec{r}_v]\right| dudv = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\, dudv. \tag{3.18}$$

3.3. Нормальна і геодезична кривина ліній на поверхні. Друга квадратична форма поверхні

Нехай $P(u,v)$ точка на поверхні $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$. Проведемо через цю точку лінію $u=u(t);\ v=v(t)$, що належить поверхні. Побудуємо в точці P вектор кривини $k\vec{\nu}=\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ і вектор нормалі до поверхні $\vec{N}=[\vec{r}_u\vec{r}_v]$ (рис.3.8).

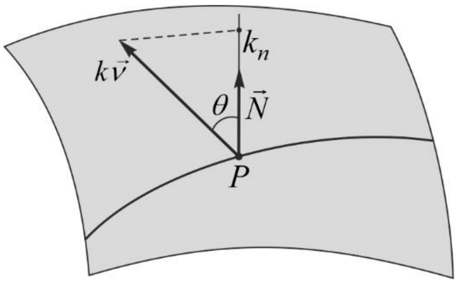

Рис. 3.8.

Нормальною кривиною лінії на поверхні називається довжина проекції вектора кривини на нормаль до поверхні в точці P. З одного боку $k_n=k\cos\theta$ (θ – кут між векторами $k\vec{\nu}$ і $\vec{N}$. З іншого боку

$$k_n=k\vec{\nu}\,\frac{\vec{N}}{|\,\vec{N}\,|}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\|[\vec{r}_u\vec{r}_v]\|}=\frac{\left(\ddot{\vec{r}}[\vec{r}_u\vec{r}_v]\right)}{\|[\vec{r}_u\vec{r}_v]\|}. \qquad (3.19)$$

Враховуючи, що $d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$, знаходимо вираз для другого диференціала

$$d^2\vec{r}=\vec{r}_{uu}du^2+2\vec{r}_{uv}dudv+\vec{r}_{vv}dv^2+\vec{r}_u d^2u+\vec{r}_v d^2v. \qquad (3.20)$$

Підставляючи (3.20) в праву частину (3.19), отримаємо після певних перетворень

$$\frac{(d^2\vec{r}\,\vec{r}_u\vec{r}_v)}{\|[\vec{r}_u\vec{r}_v]\|}=\frac{(\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}du^2+2\frac{(\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}dudv+\frac{(\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}dv^2. \qquad (3.21)$$

З урахуванням (3.21) формула (3.19) для визначення нормальної кривини набуває вигляду

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}. \tag{3.22}$$

Тут введено позначення

$$L = \frac{(\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}; \qquad M = \frac{(\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}; \qquad N = \frac{(\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{3.23}$$

Вираз $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ називається *другою квадратичною формою поверхні* в точці P, а функції L, M, N – її коефіцієнтами. В координатній формі ці коефіцієнти визначаються за формулами

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{3.24}$$

Геодезичною кривиною лінії на поверхні в заданій точці називається довжина проекції вектора кривини $k\vec{\nu}$ на дотичну площину до поверхні в цій точці (рис. 3.9).

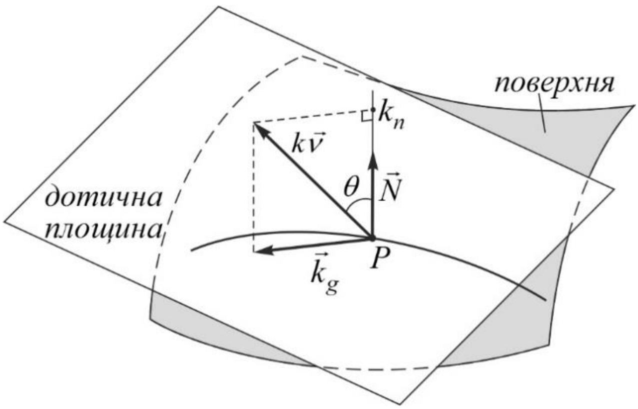

Рис.3.9.

На підставі означення маємо такі формули для обчислення геодезичної кривини

$$k_g = k\sin\theta, \qquad k_g = \sqrt{k^2 - k_n^2}. \tag{3.25}$$

Головні напрямки в точці поверхні. Головні кривини. Розглянемо на поверхні $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ точку P і побудуємо в ній вектор нормалі до поверхні $\vec{N}_0$. Через цю точку і нормаль проведемо площину, яка перетне поверхню по плоскій кривій (рис.3.10). Зауважимо, що таких площин можна провести безліч. Цю криву будемо називати *нормальним перерізом поверхні* в точці P. Для нормального перерізу має місце рівність $k_n = k$.

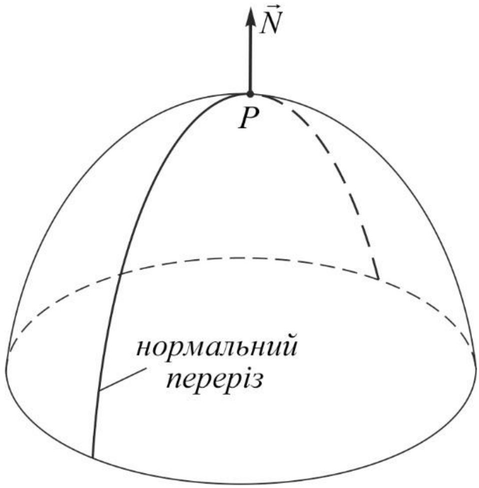

Рис. 3.10.

Точку P поверхні будемо називати *омбілічною*, якщо в ній нормальна кривина всіх нормальних перерізів однакова. Якщо ця умова не виконується, то точка P називається *неомбілічною*. В околі омбілічної точки поверхня має сферичну форму.

Теорема. У будь-якій неомбілічній точці поверхні існує два взаємно-перпендикулярні нормальні перерізи кривина одного з них найбільша, а іншого – найменша.

Доведення. Встановимо спочатку умову омбілічності точки P. З цією метою формулу (3.22) подаємо у вигляді

$$k_n = k = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = const\,. \qquad (3.26)$$

Остання рівність можлива лише у випадку $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$.

Висновок. Для омбілічної точки коефіцієнти першої і другої квадратичних форм поверхні у цій точці пропорційні між собою. За умовою теореми ця умова не виконується.

Введенням позначення $\xi = \frac{du}{dv}$, із формули (3.26) отримаємо

$$k_n = \frac{L\xi^2 + 2M\xi + N}{E\xi^2 + 2F\xi + G}\,. \qquad (3.27)$$

Розглянемо умову екстремуму $\frac{dk_n}{d\xi} = 0$, яку з урахуванням (3.27) можна перетворити до вигляду

$$\frac{(2L\xi^2 + 2M)(E\xi^2 + 2F\xi + G) - (L\xi^2 + 2M\xi + N)(2E\xi + 2F)}{\left(E\xi^2 + 2F\xi + G\right)^2} = 0\,. \quad (3.28)$$

Оскільки знаменник у лівій частині (3.28) відмінний від нуля, тому

$$(LF - EM)\xi^2 + (GL - EN)\xi + (GM - FN) = 0\,. \qquad (2.29)$$

Одержали квадратне рівняння для визначення головних напрямків $\frac{du}{dv}$ $\left(\frac{dv}{du}\right)$. Кількість його коренів залежить від знаку дискримінанта

$$D = (GL - EN)^2 - 4(LF - EM)(GM - FN)\,. \qquad (3.30)$$

Для спрощення доведення теореми вважаємо, що координатна сітка на поверхні ортогональна $(F = 0)$.

Тоді $D = (GL - EN)^2 + 4EGM^2 \geq 0$. Покажемо, що $D > 0$.

Припустимо від супротивного, що $D=0$. Тоді

$$GL-EN=0;\quad M=0 \quad \text{або} \quad \frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}.$$

Останні співвідношення визначають умови омбілічності точки P, що суперечить умові теореми. Отже, $D>0$ і рівняння (3.29) має два дійсні різні корені ξ_1, ξ_2 $\left(\xi_1=\dfrac{du}{dv};\ \xi_2=\dfrac{\delta u}{\delta v}\right)$.

Покажемо, що ці корені визначають в точці P два взаємно перпендикулярні (головні) напрямки. З цією метою рівняння (3.29) подаємо у вигляді

$$EM\xi^2+(EN-GL)\xi-GM=0.$$

За формулою Вієта $\dfrac{du}{dv}\dfrac{\delta u}{\delta v}=-\dfrac{G}{E}$ одержимо умову ортогональності головних напрямків $Edu\delta u+Gdv\delta v=0$.

Теорема доведена.

Для визначення головних кривин k_1, k_2 співвідношення

$$k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

перетворимо до вигляду

$$(L-k_nE)du^2+2(M-k_nF)dudv+(N-k_nG)dv^2=0. \tag{3.31}$$

Диференціюємо (3.31) по du і dv з урахуванням умов екстремуму функції k_n $\left(\dfrac{dk_n}{du}=\dfrac{dk_n}{dv}=0\right)$. У результаті певних перетворень отримаємо систему рівнянь відносно du, dv

$$(L-k_nE)du+(M-k_nF)dv=0;$$

$$(M-k_nF)du+(N-k_nG)dv=0,$$

яка має ненульовий розв'язок (бо $dudv\neq 0$). Тому визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю

$$\begin{vmatrix} (L-k_nE) & (M-k_nF) \\ (M-k_nF) & (N-k_nG) \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.32)$$

Внаслідок певних перетворень із (3.32) отримаємо квадратне рівняння для визначення головних кривин k_1 і k_2

$$(EG-F^2)k_n^2 + (2MF-EN-LG)k_n + (LN-M^2) = 0,$$

з якого за формулами Вієта визначаємо

$$k_1k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}; \quad k_1+k_2 = \frac{EN+LG-2MF}{EG-F^2}. \qquad (3.33)$$

Для визначення головних напрямків замість рівняння (3.31) на практиці використовують еквівалентне йому інше рівняння

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.34)$$

Повною кривиною поверхні в заданій неомбілічній точці називається величина $K = k_1k_2$, а *середньою кривиною* – величина $H = \frac{k_1+k_2}{2}$. На підставі формул (3.33) маємо

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}; \quad H = \frac{EN+LG-2MF}{2(EG-F^2)}. \qquad (3.35)$$

3.4. Форма поверхні в околі неомбілічної точки

Розглянемо формулу $K = k_1k_2$. Знак повної кривини поверхні в точці P залежить від знаків головних кривин k_1 і k_2 в цій точці. Можливі такі випадки:

1. $k_1 > 0,\ k_2 > 0$ або $k_1 < 0,\ k_2 < 0$;
2. $k_1 > 0,\ k_2 < 0$ або $k_1 < 0,\ k_2 > 0$;
3. $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$ або $k_1 \neq 0,\ k_2 = 0$.

Випадок $k_1 = k_2 = 0$ неможливий, бо точка P неомбілічна.

При $K > 0$ точка P називається *еліптичною*, при $K < 0$ – *гіперболічною*, а при $K = 0$ – *параболічною*.

В еліптичній точці всі нормальні перерізи повернуті опуклістю вгору ($k_1 > 0,\ k_2 > 0$) або вниз ($k_1 < 0,\ k_2 < 0$). В околі цієї точки поверхня має форму еліпсоїда з різними півосями (рис.3.11).

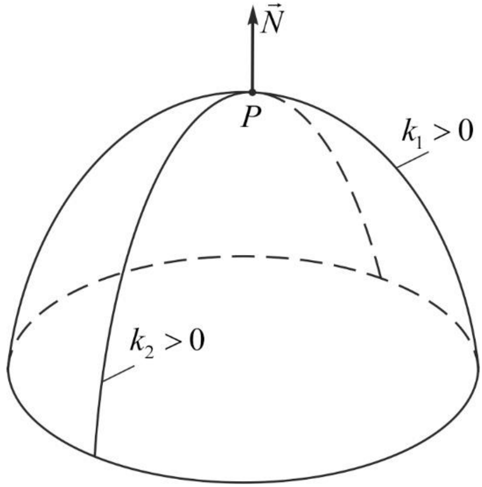

Рис. 3.11.

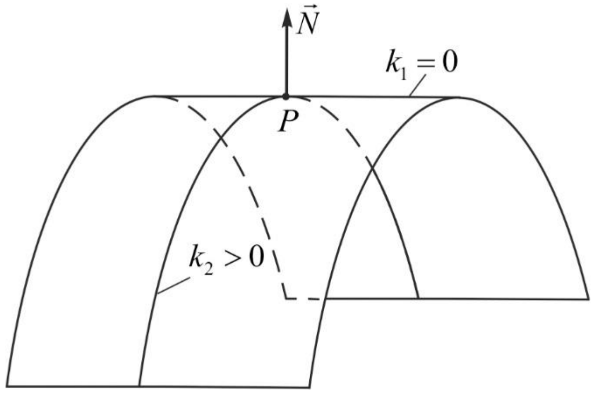

Рис. 3.12.

Для параболічної точки один з перерізів вироджується в пряму, а інші перерізи повернуті опуклістю в один бік. В околі цієї точки поверхня має циліндричну форму (рис.3.12).

Оскільки нормальна кривина k_n в точці P змінюється неперервно, то для гіперболічної точки поверхні частина перерізів повернуті опуклістю вгору, а частина – вниз. Ці перерізи розділяються двома прямолінійними перерізами. В околі гіперболічної точки поверхні має сідлоподібну форму (рис.3.13).

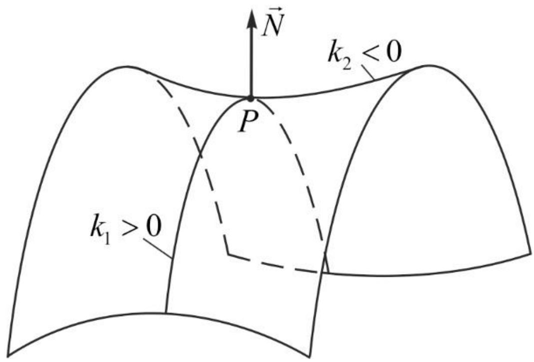

Рис. 3.13.

3.5. Визначні лінії на поверхні

1. Лінія на поверхні називається *асимптотичною лінією*, якщо в кожній її точці нормальна кривина дорівнює нулю.

За означенням

$$k\cos\theta = 0.$$

Це означає, що $k = 0$ (пряма лінія) або $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (головна нормаль асимптотичної лінії розміщена в дотичній площині до поверхні).

Розглянемо рівняння для визначення асимптотичних ліній

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0, \tag{3.36}$$

яке розпадається на пару диференціальних рівнянь,

$$\frac{du}{dv} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L},$$

що визначають два сімейства асимптотичних ліній.

При $K > 0$ рівняння (3.36) не має дійсних розв'язків; при $K = 0$ має два розв'язки, які співпадають; при $K < 0$ має два дійсні розв'язки.

Висновок. Через кожну гіперболічну точку поверхні проходять дві асимптотичні лінії різних сімейств; через параболічну точку – одна асимптотична лінія, а через еліптичну – жодної (див. попередні малюнки).

2. Лінія на поверхні називається *лінією кривини*, якщо в кожній точці вона має головний напрямок. Для визначення ліній кривини на поверхні використаємо рівняння головних напрямків

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{3.37}$$

Воно еквівалентне системі двох диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{dv} = f_1(u,v); \qquad \frac{\delta u}{\delta v} = f_2(u,v),$$

які визначають два сімейства ліній кривини.

Оскільки лінії кривини визначають на поверхні ортогональну сітку, їх можна обрати за координатні лінії ($u = u_0$, $v = v$), ($u = u$, $v = v_0$).

Записуємо рівняння координатної сітки на поверхні

$$dudv = 0$$

і рівняння ліній кривини при $F = 0$

$$-(EN - LG)dudv + EMdu^2 - GMdv^2 = 0.$$

Для неомбілічної точки ці рівняння будуть співпадати за умови $M = 0$.

Висновок. Якщо координатні лінії на поверхні є лініями кривини, то

$$F = 0\,; \qquad M = 0\,. \tag{3.38}$$

У цьому випадку значно спрощуються формули для визначення головних кривин, повної та середньої кривин

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN}{EG}\,; \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{G} + \frac{L}{E}\right);$$

$$k_1 = \frac{L}{E}\,; \qquad k_2 = \frac{N}{G}\,. \tag{3.39}$$

3. Лінія на поверхні називається *геодезичною лінією*, якщо в кожній її точці геодезична кривина дорівнює нулю. За означенням геодезичної кривини $k_g = k \sin\theta$, тому для геодезичної лінії $k \sin\theta = 0$. Остання рівність можлива при $k = 0$; $\sin\theta \neq 0$ (геодезичною лінією є пряма), або коли $k \neq 0$; $\sin\theta = 0$ (головна нормаль геодезичної лінії співпадає з нормаллю до поверхні).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боровик В.Н. Яковець В.П. Курс вищої геометрії. Суми: Університетська книга, 2010. 360 с.

2. Жильцов О.Б., Торбін Г.М. Практикум з вищої математики. К.: МАУП, 2002. 286 с.

3. Юртін І.І. Практикум з вищої математики. К.: МАУП, 2003. 310 с.

4. Збірник завдань до практичних занять з диференціальної геометрії. Теорія поверхонь. / уклад Білун С. В., Циганівська І. М. К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2016. 32 с.

5. Городецький В. В., Мартинюк О. В. Диференціальна геометрія в теоремах і задачах: навч. посіб. Чернівці : Рута, 2006. 400 с.

5. Присяжнюк М.М. Диференціальна геометрія і топологія. Конспекти лекцій. Рівне: 2010. 120 с.

7. Присяжнюк М.М. Методичні вказівки до практичних занять з диференціальної геометрії. Рівне: РДГУ,1997. 36 с.

ДОДАТОК А

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ МОДУЛЬНИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Завдання 1 за темою «Лінії в просторі»

Варіант 1 1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=1$. $\vec{r}(t)=(2t^2,\ t^3,\ 3t-t^2)$ 2. Обчислити кривину кривої в довільній точці. $r(t)=(2\sin 2t,\ 2\cos 2t,\ \sin^2 t)$	*Варіант 2* 1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=2$. $\vec{r}(t)=(1+4t,\ 3t^2,\ t^3+2t)$ 2. Обчислити скрут кривої в довільній точці. $\begin{cases} y=2x^2, \\ z=y^2. \end{cases}$
Варіант 3 1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=\pi$. $\vec{r}(t)=(2\cos\frac{t}{2},\ \sin\frac{t}{2},\ 2t)$ 2. Обчислити кривину кривої в довільній точці. $\begin{cases} x=2t^3-5, \\ z=t^3+2t. \end{cases}$	*Варіант 4* 1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=0$. $\vec{r}(t)=(2\sin t,\ 3\cos t,\ 5t)$ 2. Обчислити скрут кривої в довільній точці. $\vec{r}(t)=(t^3+3t,\ t^2,\ t^3-3t)$

Варіант 5 1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=0$. $\vec{r}(t)=(2+t,\ 3t^2-t,\ t^3+2t^2)$ 2. Обчислити кривину кривої в довільній точці. $\vec{r}(t)=(e^t,\ e^{-t},\ 2t)$	*Варіант 6* 1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=1$. $\vec{r}(t)=(2t^3,\ 1+t,\ 2t+t^3)$ 2. Обчислити скрут кривої в довільній точці. $\vec{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ \cos 2t)$
Варіант 7 1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=0$. $\vec{r}(t)=(\cos t,\ 2t^2,\ \sin 2t)$ 2. Обчислити кривину кривої в довільній точці. $\vec{r}(t)=(2t,\ 3t^2-t,\ t^3+4)$	*Варіант 8* 1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точці $t=0$. $\vec{r}(t)=(3\cos 2t,\ 3\sin 2t,\ t^2+2)$ 2. Обчислити скрут кривої в довільній точці. $\begin{cases} y=2t^3+1, \\ z=1-t^4. \end{cases}$

Варіант 9

1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 1$.

$$\vec{r}(t) = \left(t^2,\ 2\ln t,\ \frac{3}{t} \right)$$

2. Обчислити кривину кривої в довільній точці.

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

Варіант 10

1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 0$.

$$\vec{r}(t) = (e^{2t} + 1,\ e^{-2t} - 1,\ t^2 + 3)$$

2. Обчислити скрут кривої в довільній точці.

$$\vec{r}(t) = 2t^2 + 3t + 1,\ 5t^2 - 2t,\ 1 - t^2)$$

Варіант 11

1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 1$.

$$\vec{r}(t) = (2t^2,\ t^3,\ 3t - t^2)$$

2. Обчислити кривину кривої в довільній точці.

$$r(t) = (2\sin 2t,\ 2\cos 2t,\ \sin^2 t)$$

Варіант 12

1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 2$.

$$\vec{r}(t) = (1 + 4t,\ 3t^2,\ t^3 + 2t)$$

2. Обчислити скрут кривої в довільній точці.

$$\begin{cases} y = 2x^2, \\ z = y^2. \end{cases}$$

Варіант 13

1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = \pi$.

$$\vec{r}(t) = (2\cos\frac{t}{2},\ \sin\frac{t}{2},\ 2t)$$

2. Обчислити кривину кривої в довільній точці.

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 5, \\ z = t^3 + 2t. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 0$.

$$\vec{r}(t) = (2\sin t,\ 3\cos t,\ 5t)$$

2. Обчислити скрут кривої в довільній точці.

$$\vec{r}(t) = (t^3 + 3t,\ t^2,\ t^3 - 3t)$$

Варіант 15

1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 0$.

$$\vec{r}(t) = (2 + t,\ 3t^2 - t,\ t^3 + 2t^2)$$

2. Обчислити кривину кривої в довільній точці.

$$\vec{r}(t) = (e^t,\ e^{-t},\ 2t)$$

Варіант 16.

1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 1$.

$$\vec{r}(t) = (2t^3,\ 1 + t,\ 2t + t^3)$$

2. Обчислити скрут кривої в довільній точці.

$$\vec{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ \cos 2t)$$

Варіант 17 1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 0$. $$\vec{r}(t) = (\cos t,\ 2t^2,\ \sin 2t)$$ 2. Обчислити кривину кривої в довільній точці. $$\vec{r}(t) = (2t,\ 3t^2 - t,\ t^3 + 4)$$	*Варіант 18* 1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 0$. $$\vec{r}(t) = (3\cos 2t,\ 3\sin 2t,\ t^2 + 2)$$ 2. Обчислити скрут кривої в довільній точці. $$\begin{cases} y = 2t^3 + 1, \\ z = 1 - t^4. \end{cases}$$
Варіант 19 1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 1$. $$\vec{r}(t) = \left(t^2,\ 2\ln t,\ \frac{3}{t}\right)$$ 2. Обчислити кривину кривої в довільній точці. $$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$	*Варіант 20* 1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 0$. $$\vec{r}(t) = (e^{2t} + 1,\ e^{-2t} - 1,\ t^2 + 3)$$ 2. Обчислити скрут кривої в довільній точці. $$\vec{r}(t) = 2t^2 + 3t + 1,\ 5t^2 - 2t,\ 1 - t^2)$$

Варіант 21

1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 1$.

$$\vec{r}(t) = (2t^2,\ t^3,\ 3t - t^2)$$

2. Обчислити кривину кривої в довільній точці.

$$r(t) = (2\sin 2t,\ 2\cos 2t,\ \sin^2 t)$$

Варіант 22

1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 2$.

$$\vec{r}(t) = (1 + 4t,\ 3t^2,\ t^3 + 2t)$$

2. Обчислити скрут кривої в довільній точці.

$$\begin{cases} y = 2x^2, \\ z = y^2. \end{cases}$$

Варіант 23

1. Написати рівняння дотичної, бінормалі, головної нормалі для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = \pi$.

$$\vec{r}(t) = (2\cos\frac{t}{2},\ \sin\frac{t}{2},\ 2t)$$

2. Обчислити кривину кривої в довільній точці.

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 5, \\ z = t^3 + 2t. \end{cases}$$

Варіант 24

1. Написати рівняння нормальної, стичної та спрямної площин для кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці $t = 0$.

$$\vec{r}(t) = (2\sin t,\ 3\cos t,\ 5t)$$

2. Обчислити скрут кривої в довільній точці.

$$\vec{r}(t) = (t^3 + 3t,\ t^2,\ t^3 - 3t)$$

Завдання 2 за темою «Поверхні в просторі»

Варіант 1 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(u^2+v,\ u+v^2,\ 3uv)$ в точці $P(1,\ 0)$. 2. На поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(u^2v,\ uv^2,\ 2u+v)$ задано точку $P(1,\ 1)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 2* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2+2y^2+3z^2=1$ в точці $P(1,\ 0,\ 0)$. 2. На поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(u-2v,\ uv^2,\ 2u+v)$ задано точку $P(1,\ 0)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $u=2-v$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.
Варіант 3 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=\dfrac{x+y}{2x^2}$ в точці $P(1,\ 3,\ 2)$. 2. На поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(u^2,\ v^2,\ uv)$ задано точку $P(1,\ 0)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 4* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(u^2v,\ uv^2,\ u-5v)$ в точці $P(1,\ 1)$. 2. На поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ uv)$ задано точку $P(1,\ 0)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $2u-v=5$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

Варіант 5 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\vec{r}(u,v)=(\cos uv,\ \sin uv,\ u+v)$ в точці $P(2, \pi)$. 2. На поверхні $\vec{r}(u,v)=(3-2u,\ u^2v^2,\ 3v-1)$ задано точку $P(0, 1)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 6* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$ в точці $P(1, 1, 1)$. 2. На поверхні $\vec{r}(u,v)=(u^2,\ 2uv+1,\ v^2)$ задано точку $P(1, 1)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $u+v=3$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.
Варіант 7 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точці $P(3, 4, 5)$. 2. На поверхні $\vec{r}(u,v)=(2u-v,\ u^3+v,\ v^3-u)$ задано точку $P(0, 1)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 8* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\vec{r}(u,v)=(2v,\ u^2v^2,\ 4u)$ в точці $P(1, 2)$. 2. На поверхні $\vec{r}(u,v)=(u^3-v,\ u^2+v^2, v^3-u)$ задано точку $P(2, 1)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $v=7-2u$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

Варіант 9 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $$x^2 y^2 - 4z^2 = 0$$ в точці $P(1, 2, 1)$. 2. На поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (2v + u^2,\ 7 - uv,\ v^2 + 2u)$$ задано точку $P(0, 0)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 10* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $$z = x^2 - xy - y^2$$ в точці $P(1, –1, 1)$. 2. На поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (uv^3,\ 2u^2 - v^2,\ vu^3)$$ задано точку $P(1, 1)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $u = 2v - 1$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.
Варіант 11 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (u^2 + v,\ u + v^2,\ 3uv)$$ в точці $P(1, 0)$. 2. На поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (u^2 v,\ uv^2,\ 2u + v)$$ задано точку $P(1, 1)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 12* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$ в точці $P(1, 0, 0)$. 2. На поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (u - 2v,\ uv^2,\ 2u + v)$$ задано точку $P(1, 0)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $u = 2 - v$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

Варіант 13 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $$z = \frac{x+y}{2x^2}$$ в точці $P(1, 3, 2)$. 2. На поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (u^2,\ v^2,\ uv)$$ задано точку $P(1, 0)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 14* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (u^2 v,\ uv^2,\ u-5v)$$ в точці $P(1, 1)$. 2. На поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ uv)$$ задано точку $P(1, 0)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $2u - v = 5$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.
Варіант 15 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (\cos uv,\ \sin uv,\ u+v)$$ в точці $P(2, \pi)$. 2. На поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (3-2u,\ u^2 v^2,\ 3v-1)$$ задано точку $P(0, 1)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 16* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = -1$$ в точці $P(-1, 1, 1)$. 2. На поверхні $$\vec{r}\,(u,v) = (u^2,\ 2uv+1,\ v^2)$$ задано точку $P(1, 1)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $u + v = 3$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

Варіант 17 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точці $P(3, 4, 5)$. 3. На поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(2u-v,\ u^3+v,\ v^3-u)$ задано точку $P(0, 1)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 18* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(2v,\ u^2v^2,\ 4u)$ в точці $P(1, 2)$. 2. На поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(u^3-v,\ u^2+v^2, v^3-u)$ задано точку $P(2, 1)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $v=7-2u$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.
Варіант 19 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2y^2-4z^2=0$ в точці $P(2, 2, 2)$. 2. На поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(2v+u^2,\ 7-uv,\ v^2+2u)$ задано точку $P(0, 0)$. а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P. в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.	*Варіант 20* 1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=x^2-xy-y^2$ в точці $P(1, -1, 1)$. 2. На поверхні $\vec{r}\,(u,v)=(uv^3,\ 2u^2-v^2,\ vu^3)$ задано точку $P(1, 1)$. а) Обчислити нормальну кривину кривої $u=2v-1$ в точці P. б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P. в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

Варіант 21

1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$\vec{r}\,(u,v)=(u^2+v,\ u+v^2,\ 3uv)$$

в точці $P(1,\ 0)$.

2. На поверхні

$$\vec{r}\,(u,v)=(u^2v,\ uv^2,\ 2u+v)$$

задано точку $P(1,\ 1)$.

а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P.

б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P.

в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.

Варіант 22

1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$x^2+2y^2+3z^2=1$$

в точці $P(1,\ 0,\ 0)$.

2. На поверхні

$$\vec{r}\,(u,v)=(u-2v,\ uv^2,\ 2u+v)$$

задано точку $P(1,\ 0)$.

а) Обчислити нормальну кривину кривої $u=2-v$ в точці P.

б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P.

в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

Варіант 23

1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$z=\frac{x+y}{2x^2}$$

в точці $P(1,\ 3,\ 2)$.

2. На поверхні

$$\vec{r}\,(u,v)=(u^2,\ v^2,\ uv)$$

задано точку $P(1,\ 0)$.

а) Обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P.

б) Знайти асимптотичні напрямки поверхні в точці P.

в) Знайти асимптотичні ліній на поверхні, які проходять через точку P.

Варіант 24

1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$\vec{r}\,(u,v)=(u^2v,\ uv^2,\ u-5v)$$

в точці $P(1,\ 1)$.

2. На поверхні

$$\vec{r}\,(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ uv)$$

задано точку $P(1,\ 0)$.

а) Обчислити нормальну кривину кривої $2u-v=5$ в точці P.

б) Знайти головні напрямки на поверхні в точці P.

в) Знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

ДОДАТОК Б

ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ МОДУЛЬНИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Контрольна робота за темою «Лінії в просторі»

Задача 1. Для кривої, яка задана векторним (параметричним) рівнянням

$$\vec{r}(t) = (1+4t,\ 3t^2,\ t^3+2t)$$

необхідно:

а) записати рівняння всіх елементів супровідного тригранника в точці $t_0 = 1$;

б) обчислити кривину та скрут кривої в точці $t_0 = 1$.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі маємо

$$x(t) = 1+4t; \qquad x_0 = x(t_0) = 5;$$
$$y(t) = 3t^2; \qquad y_0 = y(t_0) = 3;$$
$$z(t) = t^3 + 2t, \qquad z_0 = z(t_0) = 3.$$

Обчислюємо похідні від рівнянь кривої в довільній точці t і точці $t_0 = 1$

$$x'(t) = 4; \qquad x''(t) = 0; \qquad x'''(t) = 0;$$
$$y'(t) = 6t; \qquad y''(t) = 6; \qquad y'''(t) = 0;$$
$$z'(t) = 3t^2 + 2, \qquad z''(t) = 6t, \qquad z'''(t) = 6.$$

$$x_0' = x'(t_0) = 4; \qquad x_0'' = x''(t_0) = 0; \qquad x_0''' = x'''(t_0) = 0;$$
$$y_0' = y'(t_0) = 6; \qquad y_0'' = y''(t_0) = 6; \qquad y_0''' = y'''(t_0) = 0;$$
$$z_0' = z'(t_0) = 5, \qquad z_0'' = z''(t_0) = 6, \qquad z_0''' = z'''(t_0) = 6.$$

а) Елементи супровідного тригранника кривої в точці $t_0 = 1$ визначаються такими рівняннями:

$$\frac{\xi - x_0}{x_0'} = \frac{\eta - y_0}{y_0'} = \frac{\zeta - z_0}{z_0'}$$ – дотична;

$$(\xi - x_0)x_0' + (\eta - y_0)y_0' + (\zeta - z_0)z_0' = 0$$ – нормальна площина;

$$\frac{\xi - x_0}{\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y_0}{\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z_0}{\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix}}$$ – бінормаль;

$$(\xi - x_0)\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} + (\eta - y_0)\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} + (\zeta - z_0)\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} = 0$$ – стична площина;

$$\frac{\xi - x_0}{\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y_0}{\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z_0}{\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}}$$ – головна нормаль;

$$(\xi - x_0)\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} + (\eta - y_0)\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} +$$

$$+(\zeta - z_0)\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$ – спрямна площина.

Тут (ξ, η, ζ) – координати довільної точки елемента супровідного тригранника кривої в точці $t_0 = 1$.

Обчислюємо проміжні результати

$$\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24; \quad \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24;$$

$$\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -24 & 24 \end{vmatrix} = 264;$$

$$\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 24 & 6 \end{vmatrix} = -66;$$

$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -24 \end{vmatrix} = -132 .$$

Підставляючи ці результати в рівняння елементів супровідного тригранника, знаходимо

$$\frac{\xi-5}{4}=\frac{\eta-3}{6}=\frac{\zeta-3}{5} \text{ – дотична;}$$

$$\frac{\xi-5}{1}=\frac{\eta-3}{-4}=\frac{\zeta-3}{4} \text{ – бінормаль;}$$

$$\frac{\xi-5}{4}=\frac{\eta-3}{-1}=\frac{\zeta-3}{-2} \text{ – головна нормаль;}$$

$$4(\xi-5)+6(\eta-3)+5(\zeta-3)=0 \text{ – нормальна площина;}$$

$$(\xi-5)-4(\eta-3)+4(\zeta-3)=0 \text{ – стична площина;}$$

$$4(\xi-5)-(\eta-3)-2(\zeta-3)=0 \text{ – спрямна площина.}$$

б) Кривина k і скрут κ у довільній точці $t=t$ визначаються за формулами

$$k(t)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y' \end{vmatrix}^2}}{\left(\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\right)^3};$$

$$\kappa(t)=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y' \end{vmatrix}^2}.$$

Підставляємо значення похідних

$$k(t)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}6t & 3t^2+2\\ 6 & 6t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3t^2+2 & 4\\ 6t & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}4 & 6t\\ 0 & 6\end{vmatrix}^2}}{\left(\sqrt{4^2+(6t)^2+(3t^2+2)^2}\right)^3};$$

$$\kappa(t)=\frac{\begin{vmatrix}4 & 6t & 3t^2+2\\ 0 & 6 & 6t\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6t & 3t^2+2\\ 6 & 6t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3t^2+2 & 4\\ 6t & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}4 & 6t\\ 0 & 6\end{vmatrix}^2}.$$

У результаті проведених перетворень знаходимо

$$k(t)=\frac{6\sqrt{9t^4+4t^2+20}}{\left(\sqrt{9t^4+48t^2+20}\right)^3};$$

$$\kappa(t)=\frac{4}{9t^4+4t^2+20}.$$

При $t_0=1$ маємо

$$k(t_0)=\frac{6\sqrt{33}}{\sqrt{77}^3}; \qquad \kappa(t_0)=\frac{4}{33}.$$

Контрольна робота за темою «Поверхні в просторі»

Задача 1. Для поверхні, яка задана двопараметричним векторним рівнянням $\vec{r}\,(u,v)=(u-2v,\ uv^2,\ 2u+v)$, необхідно записати рівняння дотичної площини і нормалі в точці $P(1;0)$.

Розв'язання. За умовою задачі

$$x(u,v)=u-2v;\qquad x_0=1;$$
$$y(u,v)=uv^2;\qquad y_0=0;$$
$$z(u,v)=2u+v,\qquad z_0=2.$$

Дотична площина і нормаль до поверхні в точці (x_0,y_0,z_0) визначається рівняннями

$$(\xi-x_0)\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix}+(\eta-y_0)\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix}+(\zeta-z_0)\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}=0 \text{ – дотична площина;}$$

$$\frac{\xi-x_0}{\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix}}=\frac{\eta-y_0}{\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix}}=\frac{\zeta-z_0}{\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_{v0} & y_v\end{vmatrix}} \text{ – нормаль.}$$

Обчислюємо похідні від координат векторної функції $\vec{r}\,(u,v)$ у точці (u,v) і точці $P(1;0)$

$$x_u=1;\qquad x_v=-2;\qquad x_u^0=1;\qquad x_v^0=-2;$$
$$y_u=v^2;\qquad y_v=2uv;\qquad y_u^0=0;\qquad y_v^0=0;$$
$$z_u=2,\qquad z_v=1,\qquad z_u^0=2,\qquad z_v^0=1.$$

Підставляючи одержані результати в рівняння дотичної площини і нормалі, одержимо

$$(\xi-1)\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\eta\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}+(\zeta-2)\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow$$

$$\eta=0 \text{ – дотична площина;}$$

$$\frac{\xi-1}{0}=\frac{\eta}{-5}=\frac{\zeta-2}{0} \text{ – нормаль.}$$

Примітка. Якщо поверхня задана явним $z = f(x, y)$ або неявним $\Phi(x, y, z) = 0$ рівняннями, то для розв'язання такої задачі слід використати відповідні співвідношення, які наведені в навчальному посібнику.

У випадку задання поверхні явним рівнянням $z = f(x, y)$ заміною змінних

$$x = u;$$
$$y = v;$$
$$z = f(u, v),$$

одержимо координатний (векторний) спосіб задання поверхні.

Нехай $z = \dfrac{x+y}{2x^2}$ і $P(1;3;2)$.

Тоді

$$\begin{aligned} x &= u; \\ y &= v; \\ z &= \frac{u+v}{2u^2} \end{aligned} \qquad \text{або} \qquad \vec{r}(u,v) = \left(u;\ v;\ \frac{u+v}{2u^2} \right).$$

Задача 2. На поверхні $\vec{r}(u,v) = (u - 2v,\ uv^2,\ 2u + v)$ задано точку $P(1;0)$. Необхідно:

а) обчислити нормальну кривину лінії $u = 1 - v$ на поверхні в точці P;

б) визначити головні напрямки і головні кривини поверхні в точці P;

в) обчислити повну та середню кривини поверхні в точці P. Встановити тип точки P (еліптична, гіперболічна, параболічна);

г) знайти асимптотичні лінії на поверхні, які проходять через точку P;

д) знайти лінії кривини на поверхні, які проходять через точку P.

Розв'язання. Для визначення коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм поверхні обчислимо частинні похідні від функцій x, y, z по u і v до другого порядку включно.

За умовою задачі

$$x = u - 2v;$$
$$y = uv^2;$$
$$z = 2u + v.$$

Тоді

$$x_u = 1; \quad x_v = -2; \quad x_{uu} = 0; \quad x_{uv} = 0; \quad x_{vv} = 0;$$
$$y_u = v^2; \quad y_v = 2uv; \quad y_{uu} = 0; \quad y_{uv} = 2v; \quad y_{vv} = 2u;$$
$$z_u = 2, \quad z_v = 1, \quad z_{uu} = 0, \quad z_{uv} = 0, \quad z_{vv} = 0.$$

Визначаємо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 5 + v^2;$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 2uv^3;$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 5 + 4u^2v^2;$$

$$EG - F^2 = (5 + v^2)(5 + 4u^2v^2) - 4u^2v^6.$$

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & v^2 & 2 \\ -2 & 2uv & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = 0;$$

$$M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 1 & v^2 & 2 \\ -2 & 2uv & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-10v}{\sqrt{EG - F^2}};$$

$$N=\frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2u & 0 \\ 1 & v^2 & 2 \\ -2 & 2uv & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{-10u}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

В точці P ці коефіцієнти набувають значень

$$E=5;\quad F=0;\quad G=5;\quad EG-F^2=25;\quad L=0;\quad M=0;\quad N=-2.$$

а) нормальна кривина лінії на поверхні в довільній точці визначається за формулою

$$k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}.$$

За умовою задачі $du=dv$. Тоді в точці $P(1;0)$ маємо

$$k_n=\frac{-2dv^2}{5dv^2+5dv^2}=-\frac{1}{5}.$$

б) головні напрямки та головні кривини поверхні в довільній точці (u,v) визначаються зі співвідношень

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0;$$

$$k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2};\qquad k_1+k_2=\frac{EN+LG-2MF}{EG-F^2}.$$

В точці $P(1;0)$ рівняння головних напрямків

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0$$

перетвориться до вигляду $dudv=0$.

Обчислюємо головні кривини поверхні в точці P

$$k_1k_2 = \frac{0}{25} = 0; \qquad k_1 + k_2 = \frac{-2\cdot 5 + 0\cdot 5 - 0}{25} = -\frac{2}{5}.$$

З останніх співвідношень знаходимо

$$k_1 = 0; \quad k_2 = -\frac{2}{5} \qquad \text{або} \qquad k_1 = -\frac{2}{5}; \quad k_2 = 0.$$

в) повну та середню кривини поверхні в довільній точці визначаємо за формулами

$$K = k_1k_2; \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

В точці $P(1;0)$ маємо

$$K = 0\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = 0; \qquad H = \frac{0 - \frac{2}{5}}{2} = -\frac{1}{5}.$$

Оскільки $K = 0$, то точка $P(1;0)$ параболічного типу.

г) диференціальне рівняння сімейства асимптотичних ліній на поверхні має вигляд

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

В точці $P(1;0)$ це рівняння запишеться так

$$dv^2 = 0.$$

Воно має два розв’язки, які співпадають $dv = 0$; $du \neq 0$. Тому $v = v_0$. Отже, в точці $P(1;0)$ асимптотична лінія визначається рівнянням $v = 0$.

д) для визначення ліній кривини на поверхні використаємо рівняння головних напрямків. Відповідно до пункту б) це рівняння можна подати у вигляді $dudv = 0$. Воно визначає на поверхні два сімейства координатних ліній ($u = u$; $v = v_0$) і ($u = u_0$; $v = v$). В точці $P(1;0)$ ліній кривини будуть визначатися такими рівняннями ($u = 1$; $v = v$) і ($u = u$; $v = 0$).

Навчальне видання

Сяський Андрій Олексійович

Шевцова Наталія Вікторівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Відповідальний за випуск: к.т.н. Сяський В.А.

Підписано до друку 15.03.2023 р.

Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman Cyr.

Умовн. друк. арк. 3.8.

Тираж 100 прим. Зам № 650/2.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
33028, м. Рівне, вул. С. Бандери, 12.