Львівське математичне товариство

Волинський математичний вісник

Рівне 1994

ВИТЯГ

із протоколу засідання правління

Львівського математичного товариства

від 21 квітня 1994 р.

СЛУХАЛИ: Заяву Рівненського відділення Львівського математичного товариства про публікацію "Волинського математичного вісника" (№1).

УХВАЛИЛИ: Рекомендувати до друку "Волинський математичний вісник".

Віце-

Голова ЛМТ проф. М.Шеремета

ЛЬВІВСЬКЕ МАТЕМАТИЧНЕ ТОВАРИСТВО

ЗМІСТ

УДК 517.5

В.В.Ковтунець, канд. фіз.-мат. наук (Рівне, педінститут)

КВАЗІНЬЮТОНОВСЬКИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ АЛГОРИТМІВ НАЙКРАЩОЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ.

1^0. **Вступ.** В роботах [1-2] запропоновано алгоритм побудови многочленів найкращого рівномірного наближення комплекснозначних функцій, який по суті є узагальненням відомого алгоритму Є.Я.Ремеза (див.[3]). Задум алгоритму грунтується на можливості диференціювати оператор найкращого наближення. Нехай потрібно, наприклад, побудувати многочлен найкращого наближення функції f, а ми на певному кроці маємо многочлен P, який можна розглядати як многочлен найкращого наближення функції $f + g$. Тоді, знайшовши похідну $D = D(f,g)$ оператора найкращого наближення в точці $f + g$ за напрямком $-g$, наступний многочлен шукаємо у вигляді $P + tD$, де $0 < t \leq 1$. Описана схема в загальних рисах співпадає з так званими квазіньютоновськими методами чисельної оптимізації (при $t = 1$ маємо алгоритм Ньютона, див. [4-5]). На метод можна дивитись і як на варіант чисельної реалізації методу параметричного продовження (або методу гомотопій , див. [6]). Слід зауважити, що інший підхід з точки зору методів Ньютона до отримання алгоритму Є.Я.Ремеза розглянуто в монографії [7].

В даній роботі буде показано, що стосовно рівномірної апроксимації многочленами функцій дійсної змінної запропонований метод дозволяє отримати як алгоритм Є.Я.Ремеза, та і його узагальнення з вищими порядками збіжності.

2 . **Квазіньютоновський підхід до побудови та дослідження алгоритму Є.Я.Ремеза**. Розглянемо банахів простір $C[a,b]$ дійсних неперервних на $[a,b]$ функцій з рівномірною нормою. Через P_n позначимо множину узагальнених поліномів вигляду

$$P(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

по чебишовській системі $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$. Оператор

$$P: C[a,b] \to P_n$$

у відповідність кожній функції f ставить многочлен $P(f) \in P_n$, який її наближає в розумінні рівномірної норми найкращим чином. Оператор P при цьому називатимемо оператором найкращого наближення.

Диференційовність оператора P доведено в роботі [8], а узагальнення та деякі уточнення можна знайти в роботах [9-10].

Опишемо алгоритм побудови многочлена $P(f) \in P_n$ відповідно до загальної схеми, запропонованої у вступі.

Нехай побудовано деякий многочлен $Q^{(\nu)}(x)$ такий, що різниця $f(x) - Q^{(\nu)}(x)$ принаймні $n + 1$ раз змінює знак на відрізку $[a,b]$, $\nu = 0,1,2, \dots$. Зокрема, в ролі початкового наближення $Q^{(0)}$ можна взяти многочлен, який здійснює найкраще рівномірне наближення на множині із $n + 2$ точок. Розглянемо побудову наступного полінома $Q^{(\nu+1)}$. Побудуємо функцію $g_\nu(x)$ таку, щоб многочлен $Q^{(\nu)}(x)$ став многочленом найкращого наближення функції $f + g_\nu$, тобто, щоб $P(f+g_\nu) = Q^{(\nu)}$, і при цьому

$$\|f - Q^{(\nu)}\| = \|f + g_\nu - Q^{(\nu)}\|. \tag{1}$$

Для цього достатньо розглянути точки

$$x_0^{(\nu)} < x_1^{(\nu)} < \dots < x_n^{(\nu)} < x_{n+1}^{(\nu)},$$

в яких різниця $f - Q^{(\nu)}$ має локальні екстремуми і при цьому

$$\|f - Q^{(\nu)}\| = max(|f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})|, j = 0,\ldots,n-1), \quad (2)$$

$$sign(f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})) = -sign(f(x_{j+1}^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_{j+1}^{(\nu)})), \quad (3)$$

$$j = 0, 1, \ldots, n.$$

Далі слід покласти

$$g_\nu(x_j^{(\nu)}) = sign(f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)}))[\|f - Q^{(\nu)}\| - |f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})|] \quad (4)$$

і при потребі продовжити функцію g_ν на весь відрізок із збереженням неперервності чи інших властивостей і без збільшення норми відповідно до вимоги (1).

Розглянемо похідну D_ν оператора $\mathbf{P}$ у точці $f + g_\nu$ за напрямком $-g_\nu$ справа:

$$D_\nu = \frac{\partial \mathbf{P}(f + (1-t)g_\nu)}{\partial t}\Big|_{t=+0} \quad (5)$$

Многочлен D_ν є многочленом найкращого рівномірного наближення функції g_ν на множині $\{x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \ldots, x_{n+1}^{(\nu)}\}$, або, як ще кажуть, здійснює чебишовську інтерполяцію функції g_ν на вказаній множині (див. [8]). Після цього у відповідності з методом Ньютона покладемо $Q^{(\nu+1)} = Q^{(\nu)} + D_\nu$. Із лінійності оператора чебишовської інтерполяції випливає, що многочлен $Q_{\nu+1}$ співпадає із многочленом, який слід було б побудувати на $(\nu+1)$-й ітерації за алгоритмом Ремеза.

Теорема про лінійну збіжність алгоритму доводиться звичним чином і тому ми її опускаємо. Інтерес становить квадратична швидкість збіжності.

Т е о р е м а 1. Нехай функція f у $C[a,b]\backslash \mathbf{P}_n$ така, що різниця $f - \mathbf{P}(f)$ має рівно $n+2$ екстремальні точки

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}$$

які утворюють чебишовський альтернанс і в околі кожної з них виконується умова:

$$|\Delta_h(f - P(f))(x_j)| \geqslant \gamma|h|^2 , \quad \gamma = const > 0, \qquad (6)$$

де Δ_h - різниця відповідної функції, взята із кроком h. Тоді, починаючи з деякої ітерації ν, алгоритм Ремеза збігається з квадратичною швидкістю, тобто

$$\|Q^{(\nu)} - P(f)\| \leqslant Cq^{2^\nu} , \quad 0 < q < 1.$$

Д о в е д е н н я. Будемо виходити з того, що запропонований ітеративний процес збігається. Для довільно взятої функції $u \in C[a,b]$ через $E(u)$ позначимо величину її найкращого рівномірного наближення многочленами із P_n :

$$E(u) = \|u - P(u)\|_{C[a,b]}.$$

Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що функцію g_ν задано на всьому відрізку $[a,b]$ і що вона, задовольняючи умови (1)-(4), є двічі диференційовною, а також що виконується нерівність

$$|g_\nu'(x)| \leqslant M\, |g_\nu(x)|, \qquad (7)$$

де M - абсолютна константа, залежна, можливо, від функції f. З умови Ліпшиця для оператора P найкращого рівномірного наближення маємо

$$\| P(f) - Q^{(\nu)}\| = \|P(f) - P(f+g_\nu)\| \leqslant K(f)\|g_\nu\|.$$

Враховуючи, що згідно з вибором функції g_ν похідна оператора P у точці $f+g_\nu$ за напрямом $-g_\nu$ відмінна від нуля, маємо обернену нерівність

$$\|g_\nu\| \leqslant K_1(f)\|P(f) - Q^{(\nu)}\|,$$

і таким чином маємо еквівалентність величин

$$\|g_\nu\| \asymp \|P(f) - Q^{(\nu)}\|. \qquad (8)$$

За нерівністю скінченних приростів

$$|P(f) - Q^{(\nu+1)}| = |P(f) - P(f+g_\nu) - D_\nu| \leq \tag{9}$$

$$|g_\nu| \sup_{0<\theta<1} |P'(f+(1-t)g_\nu) - P'(f+g_\nu)|,$$

де $$P'(f+(1-t)g_\nu) = \frac{\partial P(f+(1-t)g_\nu)}{\partial t}$$

$$P'(f+g_\nu) = \left.\frac{\partial P(f+(1-t)g_\nu)}{\partial t}\right|_{t=+0}.$$

Згідно з умовами теореми і неперервністю оператора P, починаючи з деякого номера ν, кожна різниця

$$f + (1-\theta)g_\nu - P(f+(1-\theta)g_\nu)$$

матиме рівно $n+2$ екстремальні точки $x_0(\theta) < x_1(\theta) < \ldots < x_n(\theta) < x_{n+1}(\theta)$ і для них виконується нерівність (6) з деякою константою $\tilde{\gamma} > 0$.

Доведемо тепер, що зміщення Δx_j j-ї точки альтернансу при збуренні на величину Δf функції, що апроксимується, задовольняє умову $|\Delta x_j| \leq K_1 \|\Delta f\|_{C[a,b]}$, якщо тільки збурення Δf задовольняє умову (7). Для доведення цього факту задані функції f, Φ_0, Φ_1, ... , Φ_n апроксимуємо двічі неперервно диференційовними відповідно функціями $\tilde{f}$, $\tilde{\Phi}_0$, $\tilde{\Phi}_1$, ... , $\tilde{\Phi}_n$ з рівномірною похибкою не більше δ, $\delta > 0$, таким чином, щоб екстремальні точки (точки альтернансу) різниць $\tilde{f} - P(\tilde{f})$ та $\tilde{f} - P(\tilde{f}+\Delta f)$ співпадали з екстремальними точками x_j та $x_j+\Delta x_j$ відповідних функцій $\tilde{f} - P(\tilde{f})$ та $\tilde{f} - P(\tilde{f}+\Delta f)$, де через $P(\tilde{f})$ та $P(\tilde{f}+\Delta f)$ позначено поліноми по функціях $\tilde{\Phi}_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, з коефіцієнтами, рівними відповідно коефіцієнтам поліномів $P(\tilde{f})$ та $P(\tilde{f}+\Delta f)$. Після цього розглянемо однопараметричну множину функцій

$u(t,x) = \tilde{f}(x) - P(\tilde{f}) + t(\Delta f(x) + P(f) - P(f+\Delta f)),\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

Розглянемо також функції $x_j(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $j = 0, 1, \ldots, n$, такі, що $u'_x(t,x_j(t)) = 0$, $x_j(0) = x_j$, $x_j(1) = x_j + \Delta x_j$,

$$j = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Звідси $x'_j(t) = -\dfrac{u''_{xt}}{u''_{xx}}$.

За рахунок достатньої точності апроксимації функцій f, Φ_j домагаємося, щоб виконувалась нерівність

$$|u''_{xx}(t,x_j(t))| \geqslant \frac{\tilde{\gamma}}{2},$$ де сталу $\tilde{\gamma}$ взято з умови (7).

Враховуючи властивості оператора найкращого наближення (див. [10]) та умову (7), звідси маємо нерівність

$$\|u''_{xt}\| \leqslant K_2\|\Delta f''_x\| \leqslant K_3\|\Delta f\|,$$

і тоді $|\Delta x_j| = |\int_0^1 x'_j(t)dt| \leqslant \dfrac{2}{\tilde{\gamma}} K_3\|\Delta f\| = \tilde{K}_1\|\Delta f\|.$

Спрямовуючи величину похибки δ апроксимації функцій f, Φ_j до нуля, отримуємо необхідну нерівність.

Тепер, враховуючи взаємну відокремленість точок альтернансу $x_j(\theta)$ функцій $f + (1-t)g_\nu - P(f+(1-\theta)g_\nu)$:

$$|x_j(\theta) - x_{j+1}(\theta)| \geqslant æ > 0$$

і спосіб визначення похідної P', маємо

$$\|P'(f+(1-t)g_\nu) - P'(f+g_\nu)\| \leqslant K_2 \max_j |\Delta x_j^{(\nu)}|,$$

де під $\Delta x_j^{(\nu)}$ маємо на увазі максимальне відхилення j-ї точки альтернансу різниці $f + (1-\theta)g_\nu - P(f+(1-\theta)g_\nu)$ від j-ї точки альтернансу різниці $f+g_\nu-P(f+g_\nu)$, коли θ пробігає відрізок $[0,1]$. Таким чином, маємо

$$\|P'(f+(1-\theta)g_\nu) - P'(f+g_\nu)\| \leqslant K_3\|g_\nu\|.$$

Враховуючи (8) та (9), отримуємо

$$|Q^{(\nu+1)} - P(f)| \leqslant K_4 |Q^{(\nu)} - P(f)|^2,$$

звідки й випливає твердження теореми. —

3°. **ПРИСКОРЕНА ВЕРСІЯ АЛГОРИТМУ РЕМЕЗА.** В програмних реалізаціях алгоритму Ремеза чи не найбільш громіздкою частиною програми з точку зору затрат машинного часу є обчислення норми відхилення $\|f - Q^{(\nu)}\|$ і екстремальних точок різниці $f - Q^{(\nu)}$.

Л е м а 1. Нехай $\{x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}, x_{n+1}^{(\nu)}\}$ – точки, в яких має бути побудований черговий многочлен $Q^{(\nu)}$ в алгоритмі Ремеза, і нехай $\{\tilde{x}_0^{(\nu)}, \tilde{x}_1^{(\nu)}, \ldots, \tilde{x}_n^{(\nu)}, \tilde{x}_{n+1}^{(\nu)}\}$ – їх наближені значення, такі, що

$$|x_j^{(\nu)} - \tilde{x}_j^{(\nu)}| < \delta, \ \delta > 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n+1,$$

$\tilde{Q}^{(\nu)}$ – многочлен чебишовської інтерполяції по точках $\tilde{x}_j^{(\nu)}$, і нехай $\Omega(t)$ – мажоранта перших модулів неперервності функцій $f, \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$, тобто

$$|\omega(f,t)| \leqslant \Omega(t)$$

$$|\omega(\phi_j,t)| \leqslant \Omega(t), \quad j = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Тоді при всіх достатньо малих δ виконується нерівність

$$|Q^{(\nu)} - \tilde{Q}^{(\nu)}| \leqslant M\,\Omega(\delta), \quad M = const. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $a_j^{(\nu)}$ полінома $Q^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(\nu)} \phi_j$, який здійснює чебишовську інтерполяцію функції $f(x)$ в точках $x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}, x_{n+1}^{(\nu)}$:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^{(\nu)} \phi_j(x_j^{(\nu)}) = f(x_j^{(\nu)}) + (-1)^j \rho_\nu, \quad j = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{11}$$

з невідомими $a_j^{(\nu)}$ та ρ_ν. Запишемо її у матричному вигляді

$$\Phi(x^{(\nu)})(a,\rho_\nu)^T = F(x^{(\nu)}), \tag{11'}$$

де $x^{(\nu)} = (x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \dots, x_n^{(\nu)}, x_{n+1}^{(\nu)})$,

$a^{(\nu)} = (a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)})$.

Замінивши точки $x_j^{(\nu)}$ точками $\tilde{x}_j^{(\nu)}$ відповідно до умов леми, отримаємо систему

$$\Phi(\tilde{x}^{(\nu)})(a,\rho_\nu)^T = F(\tilde{x}^{(\nu)}), \tag{12}$$

в якій відхилення матриці і вектора правої частини задовольняє умови $\|\Phi(x^{(\nu)}) - \Phi(\tilde{x}^{(\nu)})\| \leqslant A_1\Omega(\delta)$

$\|F(x^{(\nu)}) - F(\tilde{x}^{(\nu)})\| \leqslant A_2\Omega(\delta)$.

Вимагаючи, аби $\delta > 0$ було настільки малим, що

$|x_j^{(\nu)} - x_{j+1}^{(\nu)}| \geqslant æ > 0$, $\forall j = 0, 1, \dots, n+1$,

можемо гарантувати відокремленість від нуля визначника матриці системи (12): $\quad det(\Phi(\tilde{x}^{(\nu)})) \geqslant c > 0$,

звичайно, разом із $\quad det(\Phi(x^{(\nu)})) \geqslant c > 0$,

що в свою чергу веде до потрібної нерівності (10). Лему доведено.

Опишемо варіант алгоритму Ремеза, який послідовно уточнює і точки альтернансу, не потребуючи на кожному кроці відшукання точок екстремуму різниці $f - Q^{(\nu)}$. Будемо вважати, що функції $f, \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ в сукупності утворюють чебишовську систему на відрізку $[a, b]$ і є двічі неперервно диференційовними на цьому відрізку. Продиференціювавши по t кожну тотожність

$$f'_x(x_j(t)) + (1-t)g'_x(x_j(t)) - P'_x(f+(1-t)g_\nu)(x_j(t)) = 0, \tag{13}$$

де $x_j(t)$ - точки альтернансу різниці

$$f + (1-t)g_\nu - P(f+(1-t)g_\nu),$$

відмінні від кінців відрізка a, b, знайдемо

$$\left.\frac{dx_j(t)}{dt}\right|_{t=+0} = \frac{g'_x(x_j) + D'_x(x_j)}{f''_{xx}(x_j) + g''_{xx}(x_j) - P''_{xx}(f+g_\nu, x_j)}, \qquad (14)$$

де $x_j = x_j(0)$.

Рівність (13) дозволяє нам надалі наближено знаходити точки альтернансу при переході від ітерації до ітерації.

Отже, стартувавши, як завжди, від деякого полінома $Q^{(0)}$, який здійснює чебишовську інтерполяцію в початково вибраних точках $x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \ldots < x_n^{(0)} < x_{n+1}^{(0)}$,

на ν-й ітерації матимемо точки

$$x_0^{(\nu)} < x_1^{(\nu)} \ldots < x_n^{(\nu)} \; x_{n+1}^{(\nu)},$$

і поліном $Q^{(\nu)}$ такі, що

$$sign(f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})) = -sign(f(x_{j+1}^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_{j+1}^{(\nu)}))$$

$j = 0, 1, \ldots, n.$

Розглянемо функцію $g_\nu(x) \in C^2[a,b]$ із властивостями:

$$1)\ \max_{0\le j\le n+1}\left|(f+g_\nu-Q^{(\nu)})(x_j^{(\nu)})\right| = \max_{0\le j\le n+1}\left|(f-Q^{(\nu)})(x_j^{(\nu)})\right|; \qquad (15)$$

$$2)\ (f' + g'_\nu - Q^{(\nu)\prime})(x_j^{(\nu)}) = 0; \qquad (16)$$

$$3)\ g''_\nu(x_j^{(\nu)}) = 0, \qquad (17)$$

При цьому умови (16) та (17) мають виконуватися в усіх точках $x_j^{(\nu)}$, окрім випадків, коли $x_j^{(\nu)} = a$ або b і при цьому $f'(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)\prime}(x_j^{(\nu)}) \neq 0$.

Далі знаходимо поліном-похідну D_ν оператора P в точці $f+g_\nu$ за напрямком $-g_\nu$ як поліном, що здійснює чебишовську інтерполяцію функції g_ν в точках

$$x_0^{(\nu)} < x_1^{(\nu)} < \ldots < x_n^{(\nu)} < x_{n+1}^{(\nu)}.$$

Знаходимо похідні

$$x_j^{(\nu)\prime} = \left.\frac{dx_j^{(\nu)}(t)}{dt}\right|_{t=+0} = \frac{g_{\nu,x}'(x_j^{(\nu)}) + D_{\nu,x}'(x_j^{(\nu)})}{f_{xx}''(x_j^{(\nu)}) + g_{\nu,xx}''(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)\prime\prime}_{xx}(x_j^{(\nu)})} =$$

$$= \frac{f'(x_j^{(\nu)}) + D_\nu'(x_j^{(\nu)}) + Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})}{f_{xx}''(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)\prime\prime}_{xx}(x_j^{(\nu)})} . \qquad (18)$$

Після цього вибираємо максимально можливий крок t_ν, $0 < t_\nu \leqslant 1$, з умов:

а)

$$\left| t_\nu \frac{(f' - Q^{(\nu)\prime})(x_j^{(\nu)})}{(f'' - Q^{(\nu)\prime\prime})(x_j^{(\nu)})} + t_\nu^2 \frac{x_j^{(\nu)\prime\,2}}{2} M_2(n+2) \right| < \frac{c_1}{2} , \qquad (19)$$

де

$$c_1 = \max |f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})| - \min |f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})|,$$

якщо

$$\operatorname{sign}(f'' - Q^{(\nu)\prime\prime})(x_j^{(\nu)}) \neq - \operatorname{sign}(f' - Q^{(\nu)\prime})(x_j^{(\nu)}),$$

і

а')

$$\left| t_\nu^2 \frac{x_j^{(\nu)\prime\,2}}{2} M_2(n+2) \right| < \frac{c_1}{2} \qquad (19')$$

в протилежному випадку;

б) $x_j^{(\nu)} + t_\nu x_j^{(\nu)\prime} \in y\ [a,b]$.

Тут M_2 - максимум модуля других похідних функції f, Φ_0, Φ_1, ... , Φ_n.

Нарешті покладаємо

$$x_j^{(\nu+1)} = x_j^{(\nu)} + t_\nu x_j^{(\nu)\prime}$$

для всіх j, для яких має виконуватись умова (16),

$$x_j^{(\nu+1)} = x_j^{(\nu)} \quad \text{для всіх інших значень } j.$$

На знайденій множині точок

$$\{x_0^{(\nu+1)},\ x_1^{(\nu+1)}, \dots ,\ x_n^{(\nu+1)},\ x_{n+1}^{(\nu+1)}\}$$

будуємо поліном чебишовської інтерполяції $Q^{(\nu+1)}$.

Ітераційний процес закінчується при виконанні двох умов

і) $D_\nu \equiv 0$;

іі) $x_j^{(\nu)'} = 0$ для всіх j, для яких має виконуватись умова (16).

(Практично процес завершується при виконанні цих умов з певною точністю).

Т е о р е м а 2. Якщо функції $f, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ двічі неперервно диференційовні на $[a,b]$ і їх перші похідні утворюють чебишовську систему на $[a,b]$, то послідовність поліномів $Q^{(\nu)}$ збігається до полінома $P(f)$ найкращого наближення функції f. Швидкість збіжності лінійна, а, починаючи з деякої ітерації ν_0, стане можливим брати максимальне значення кроку t_ν: $t_\nu = 1$, і швидкість збіжності стане квадратичною.

Д о в е д е н н я. Позначимо через $e_j^{(\nu)}$ величину похибки в точці $x_j^{(\nu)}$ на ν-й ітерації:

$$e_j^{(\nu)} = |f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})|,\ j = 0, 1, \dots , n+1;$$

$$E^{(\nu)} = \max_j e_j^{(\nu)}\ , \qquad e^{(\nu)} = \min_j e_j^{(\nu)},\ \nu = 0, 1, \dots .$$

Для доведення збіжності зі швидкістю геометричної прогресії достатньо показати, що

$$e^{(\nu+1)} > e^{(\nu)} + c(E^{(\nu)} - e^{(\nu)}),\ c = const. \qquad (20)$$

Позначимо

$$v_j^{(\nu)} = f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)}).$$

Тоді $\quad v_0^{(\nu)} = - v_1^{(\nu)} = \dots = (-1)^{n+1} v_{n+1}^{(\nu)}$.

В точці $x_j^{(\nu+1)}$, враховуючи (18), матимемо

$$e_j^{(\nu+1)} = |f(x_j^{(\nu+1)}) - Q^{(\nu+1)}(x_j^{(\nu+1)})| = |f(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu+1)}(x_j^{(\nu)})$$

$$+ t_\nu x_j^{(\nu)'}(f'(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu)'}(x_j^{(\nu)})) +$$

$$\frac{t_\nu^2 x_j^{(\nu)2}}{2}(f'' - Q^{(\nu+1)''})(x_j^{(\nu)} + \theta t_\nu x_j^{(\nu)'})\Big|$$

$$\Big|v_j^{(\nu)} - t_\nu \frac{(f'(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu+1)}(x_j^{(\nu)}))^2}{f''(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu+1)''}(x_j^{(\nu)})} + \frac{t_\nu^2 x_j^{(\nu)2}}{2}$$

$$(f'' - Q'')(x_j^{(\nu)} + \theta t_\nu x_j^{(\nu)'})\Big|, \quad 0 < \theta < 1. \tag{21}$$

Вибираючи t_ν так, як вказано в алгоритмі,

матимемо $e_j^{(\nu+1)} > e_j^{(\nu)} + \dfrac{c_1}{2}$,

а, враховуючи, що $c_1 \geqslant c \max\limits_j |g_\nu(x_j^{(\nu)})| = c(E^{(\nu)} - e^{(\nu)})$,

отримаємо потрібну нерівність (20).

Таким чином, послідовність $Q^{(\nu)}$ збігається до деякого полінома Q такого, що в точках $\xi_j = \lim\limits_{\nu\to\infty} x_j^{(\nu)}$, $j = 0, 1, \ldots, n+1$,

будемо мати $(f - Q)(\xi_j) = -(f - Q)(\xi_{j-1})$,

і при цьому у внутрішніх точках ξ_j відрізка $[a,b]$ буде

$$(f' - Q')(\xi_j) = 0.$$

За умов теореми різниця $f' - Q'$ не може мати більш як n коренів, тому $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$ і відмінних від ξ_j точок екстремуму ця різниця не має. Отже, $Q \equiv P(f)$.

Щоб довести другу частину теореми, тобто, квадратичну швидкість збіжності, зауважимо перш за все, що при всіх достатньо великих значеннях ν точки $x_j^{(\nu)}$ близькі до точок ξ_j, і тому знак виразу

$$\frac{(f'(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu+1)'}(x_j^{(\nu)}))^2}{f''(x_j^{(\nu)}) - Q^{(\nu+1)''}(x_j^{(\nu)})}$$

співпадає із знаком величини $v_j^{(\nu)}$. Отже, для вибору кроку t_ν нам доведеться користуватись обмеженнями (19'). Враховуючи, що $x_j^{(\nu)'} \to 0$, $\nu \to \infty$, і що $|x_j^{(\nu)'}|^2 \leq K_1 |g_\nu|^2$, а $c_1 \geq K_2 |g_\nu|$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, бачимо, що, починаючи із деякого кроку ν_0, будемо мати $t_\nu = 1$. Решта міркувань з урахуванням леми 1 проводиться як і при доведенні теореми 1.

З а у в а ж е н н я. Модифікований алгоритм може застосовуватись і при значно слабших обмеженнях, а саме, коли вимагати лишень, аби функції f та ϕ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, були двічі неперервно диференційованими (без вимоги виконання умови Чебишова). Таке спрощення допустиме лише на кінцевому етапі роботи алгоритму Ремеза, коли зміна точок альтернансу відбувається практично неперервно.

3°. МОДИФІКАЦІЇ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. Для побудови та дослідження алгоритмів вищих порядків збіжності потрібна така теорема.

Т е о р е м а 3. Якщо функції f, g, ϕ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, $(l+1)$ раз неперервно диференційовані на $[a,b]$, умова

$$f''(x_j) - P''(f)(x_j) \neq 0 \tag{22}$$

виконується в усіх точках альтернансу різниці $f - P(f)$, за якими шукається похідна D оператора P за напрямком g, то оператор P має в точці f за напрямком g похідні (односторонні) до порядку l включно, якщо $l>2$, а при $l=2$ має похідні другого порядку.

З а у в а ж е н н я. Сформульована теорема суттєво посилює результати роботи [9] і дозволяє будувати алгоритми вищих порядків збіжності. Слід зауважити також, що умова (22) є суттєвою і її взагалі кажучи не можна ослабити (див. також роботу [9]).

Д о в е д е н н я. При виконанні умов теореми першу похідну $D = D(f,g)$ оператора P в точці f за напрямком g можна знайти як розв'язок системи лінійних рівнянь

$$D(x_j) = g(x_j) + (-1)^j\alpha, \tag{23}$$

де $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ – альтернанс різниці $f - \mathrm{P}(f)$, за яким маємо шукати похідну D, а $|\alpha|$ – величина похибки найкращої рівномірної апроксимації функції g на множині $\{x_0,\ldots,x_{n+1}\}$.

Нехай $x_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n+1$, – задані на деякому проміжку $[0,\delta)$ функції такі, що $x_0(t), x_1(t), \ldots, x_{n+1}(t)$ утворюють чебишовський альтернанс для функцій $f+tg-\mathrm{P}(f+tg)$. З умови

$$\frac{d}{dx}(f + tg - \mathrm{P}(f + tg))(x_j(t)) = 0,\ t \geqslant 0,$$

знайдемо за теоремою про неявну функцію

$$\frac{dx_j}{dt} = -\frac{\dfrac{d^2}{dxdt}\Big[f + tg - \mathrm{P}(f + tg)\Big]\ (x_j(t))}{\dfrac{d^2}{dx^2}\Big[f + tg - \mathrm{P}(f + tg)\Big]\ (x_j(t))} =$$

$$= -\frac{g'(x_j(t)) - D(t,x_j(t))}{\dfrac{d^2}{dx^2}\Big[f + tg - \mathrm{P}(f + tg)\Big]\ (x_j(t))},$$

де $D(t,\chi) = \dfrac{d}{d\tau}\mathrm{P}(f+\tau g,x)\Big|_{\tau=t}$.

Таким чином, при $l>2$ коефіцієнти системи (23) є диференційованими по t не менше як l-1 раз. Враховуючи невиродженість цієї системи, з формул Крамера робимо висновок, що її розв'язок, тобто коефіцієнти полінома D і величина α є диференційованими по t не менше як l-1 раз, що й вимагалось довести.

При l=2 , як бачимо, подібні міркування недостатні, оскільки для існування похідних $\frac{dr_j}{dt}$ недостатньо існування перших похідних функцій f, g, Φ_0, ... , Φ_n.

1. Ковтунец В.В. Алгоритм построения полинома наилучшего приближения комплекснозначных функций // В сб.: Исследования по теории аппроксимации функций. - Киев: Изд. Ин-та матем., 1987. - С. 35-42.
2. Ковтунец В.В. Алгоритм построения полинома наилучшего приближения комплекснозначной функции на компактном множестве // В сб.:Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения. - Киев: Изд-во Инт-та матем., 1988. - С. 81-87.
3. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения - Киев: Наукова думка, 1969. - 623 с.
4. Васильев Ф.Р. Численные методы решения экстремальных задач. - Москва: Наука, 1988. - 549 с.
5. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные метсды безусловной оптимизации. - Москва: Мир. - 1988. - 440 с.
6. Watson L.T., Haftka R.T. Modern homotopy methods in optimization. //Computer methods in applied mechanics and enginearing. - 1986. - v. 74, pp. 288 - 305.

7. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. - Москва: Мир.- 1969. - 447 с.

8. Kroo A. Differential properties of best approximation// Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. - 1977. - v. 30. - pp. 319-332.

9. Колушов А.В. О дифференцируемости оператора наилучшего приближения.// Матем. заметки. - 1981. - т. 25, N 6.- С. 577-596.

10. Ковтунец В.В. Обобщение параметрического метода С.Н.Бернштейна.//Укр.матем. журнал.-1983.-т.35,С. 689-695.

АНОТАЦІЇ.

1. УДК 517.9
В.Е.Слюсарчук
ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ.
Получены необходимые и достаточные условия осцилляции решений нелинейных разностных уравнений.

UDK 517.9
V.Y.Slyusarchuk
OSCILLATION OF SOLUTIONS OF A NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS.
Necessary and sufficient conditions of oscillationare obtained for solutions of a nonlinear difference equations.

УДК 517.5 +
В.В.Ковтунец.
КВАЗИНЬЮТОНОВСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АЛГОРИТМОВ НАИЛУЧШЕЙ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ.
С точки зрения метода параметрического продолжения выводится алгоритм Ремеза и строятся его модификации. Доказана квадратичная скорость сходимости алгоритма Ремеза при условиях , не требующих дифференцируемости приближаемой функции и функций чебышевской системы , по которой строятся приближающие полиномы. Модифицированные варианты, имеющие также квадратичную сходимость, отличаются меньшим количеством вычислений приближаемой функции.

UDK 517.5+
V.V.Kovtunets,cand.
QUAZINETWTOIAN APPROACH TO DEVELOPMENT OF ALGORITHMES FOR THE BEST UNIFORM APPROXIMATION.
The Remez algorithm and its modifications deduced from the homotopy continuation method. The second rate of Remez algorithm convergency is proved without assumption about differentiabillity of involved functions. The modifications of Remez algorithm are distinguished by lesser number of computing of function to be approximated.

УДК 519.41
А.В.Крайчук
БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ БЕСКОНЕЧНОГО ИНДЕКСА.
В работе описаны произвольные бесконечные группы, в которых дополняемы все подгруппы бесконечного индекса.

UDK 519.41
O.V.Krajuk
INFINITE GROUPS WITH COMPLEMENTED SUBGROUPS OF INFINITE INDEX.
The infinite groups with complemented subgroups of infinite index are described.

4. УДК 518:517.944/947
А.П.Кузьменко, А.Я.Бомба
О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ.
На основании синтеза методов А.А.Дородницына/декомпозиция задачи/и Г.Н.Положого/Р-трансформаций/ предлагается новая методика числено-аналитического решения краевых задач для уравнений дивергенного типа с разрывными коэффициентами в бесконечных областях.

UDK 518:517.944/947
A.P.Kuzmenko, A.YA.Bomba
ON THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE STRATUM ENVIRONMENTS.
A new method of construction for assimptotic number-analytic solutions of boundary value problems for equations ofdivergent type with separable coeficients in the infinite domain is proposed on the basis of syntesys methods of A.A.Dorodnitsin(decomposition problem) and G.N.Polozhiy(P-transformations).

5. УДК 519.41/47
В.С.Марач
ДВА КЛАССА НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП, БЛИЗКИХ К ГРУППАМ, КОНЕЧНЫМ НАД ЦЕНТРОМ.
Получены различные характеризации двух классов непериодических групп, по своему строению близких к группам, конечным над центром.

UDK 519.41/47
V.S.Marach
TWO CLASSES OF NON-PERIODIC GROUPS WHICH ARE CLOSE TO GROUPS WITH CENTRE OF FINITE INDEX.
Are received the different characterizations of two classes of non-periodic groups which by their structure are close to groups with centre finite index.

6. УДК 517.946
А.В.Рыбачок
К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОБОБЩЕННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ.
В работе изложено и проиллюстрировано новую схему обобщенного разделения переменных на примере нахождения собственных чисел и собственных функций квадрата оператора Лапласса.

A.V.Rybachok
UDK 517.946
ABOUT INTEGRATING OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY VARIABLE PARTITION.
The simple scheme of generalized variable partition is shown by providing a sample of own values and own functions for square of Laplas operator.

7. УДК 517.5
В.Б.Семенюк.
О ПРИБЛИЖЕНИИ СЛЕДОВ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА СЛЕДАМИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ.

В статье рассматривается вопрос приближения следов функций, что принадлежат изотропным классам Соболева следами некоторых специально построенных сплайн-функций. Функции приближаюеся в интегральной метрике на областях с знешними пиками степенного характера.

UDK 517.5
V.B.Semenuk
ABOUT APPROACH OF MULTIVARIATE FUNCTIONS OF TRACES OF SOBOLYEV'S CLASSES APPROACH BY SPLINE-FUNCTIONS TRACES.

The article deals with the problem of approach traces of Sobolyev's classes fanctions by the traces of some specially built spline-functions. The functions approach in integral metrics on the domains with external peaks of degree character.

8. УДК 517.5
В.К.Столярчук
ПРИМЕЧЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АССИМПТОТИКИ ДИАГОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ F(1,γ+1,z) и F(a,1,γ,z).

Установлена возможность применения аппроксимационного метода для исследования аксиоматики диагональных аппроксимаций Паде некоторых специальных функций.

UDK 517.5
V.K.Stolyarchuk
APPLICATION OF APPROXIMATIVE METHOD FOR STUDY OF PADE'S DIAGONAL APPROXIMATIONS ASYMPOTICS OF HYPERGEOMETRICAL FUNCTIONS F(1,γ+1,z) AND F(a,1,γ,z).

The possibility of using of approximative method for investigation of Page's diagonal approximations asymptotics of some special functions has been determined.

9. УДК 517.5
Ю.И.Харкевич
ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРАМИ АБЕЛЯ-ПУАССОНА КЛАССОВ (Ф,В)-ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ В РАВНОМЕРНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКАХ.

Получены ассимптотические равенства для верхних граней уклонений функций классов C,L операторами Абеля-Пуассона в равномерной и интегральной метриках соответственно.

UDK 517.5
Yu.I.Harkevich
DIFFERENTIAR FUNCTIONS CLASSES APPROXIMATION BY ABEL-POISSON OPERATORS IN UNIFORM AND INTEGRRAL METRICS.

The obtained assimptotic equalities for top borders of deflection of functions of classes C and L by means of Ablel-Puasson operators in unuform and integral metrics accordingly.

10. УДК 517.5
В.Н.Цимбал
ГРАНИЧНЫЙ СКАЧОК ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ.

Методом погранслоя построено ассимптотическое разложение решения смешанной задачи для сингулярно возмущенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в граничных условиях.

UDK 517.5
V.N.Tsymbal
BOUNDARY JUMP FOR THE SINGULAR PERTURBED EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS.

Asymptotic exansion of the solution of the boundary value problem for the singular perturbed equation of the third order with multiple characteristics with a small parameter in boundary conditions is constructed. The boundary layer methpd is applied.

11. УДК 517.5+
Р.П.Стецюк.
МНОГОЧЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.
Разработано алгоритм построения аппроксимационных многочленов В.К.Дзядыка для гипергеометрической функции. Сделано анализ влияния на метод погрешностей машинных округлений. Найдены условия, при которых алгоритм будет численно устойчивым.

UDK 517.5+
P.P.Stetsiuk
POLINOMIAL APPROXIMATION OF HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

A new algorithm for computing Dzyadyk's approximating polynomials of hypergeometric function is developed. An error of computing was investigated. Conditions of algorithm computing Stabylity are found.

12. УДК 51:53
П.М.Николаев, О.В.Олейник
РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СТЕПЕНЯМ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ СФЕР.

До сих пор известны значения первых четырех функций, зависящих от расстояния r, в разложении радиальной функции распределения p(r) в ряд по степеням плотности системы твердых сфер. В работе найдено значение пятой функции на основе исследования метода ускоренной сходимости рядов теории возмущений. Также дано выражение для бинарной функции распределения, хорошо описывающей данные машинного эксперимента для системы твердых сфер.

UDK 51:53

P.M.Nikolayev, O.V.Oliynyk

BY DENSITY DEGREES RADIAL DISTRIBUTION FUNCTIONS OF THE SOLID SPHERE SYSTEM.

It's still known values only first fourth functions as the functions VS. distins r for radial distribution functions (r) expension in terms of dencity powers for the system of hard sphheres. The fifth function value based on faster series convergence method of perturbation theory was found in this work. The discrete distribution function expression which describes well computer experiment data for the system of hard sphres has been presented also.