Львівське математичне товариство

Волинський математичний вісник

Рівне 1994

ВИТЯГ

із протоколу засідання правління

Львівського математичного товариства

від 21 квітня 1994 р.

СЛУХАЛИ: Заяву Рівненського відділення Львівського математичного товариства про публікацію "Волинського математичного вісника" (N1).

УХВАЛИЛИ: Рекомендувати до друку "Волинський математичний вісник".

Віце-

Голова ЛМТ проф. М.Шеремета

ЛЬВІВСЬКЕ МАТЕМАТИЧНЕ ТОВАРИСТВО

ЗМІСТ

УДК 517.5

Стецюк Р.П., молод. спец. / Рівне, РДПІ /.

МНОГОЧЛЕННА АПРОКСИМАЦІЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ.

Вступ. В.К.Дзядиком [1] розроблено метод побудови близьких до рівномірно найкращих многочленних апроксимацій спеціальних функцій, які є розв'язками диференціальних рівнянь Фукса. Однак практична реалізація методу на ЕОМ стримується тим фактом, що система лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої зводиться метод, є погано обумовленою, і вже для многочленів 8-10-го степеня не вдається досягти теоретично передбачуваної точності.

В роботі, що пропонується, розроблено алгоритм побудови апроксимаційних многочленів В.К.Дзядика для гіпергеометричної функції і виконано аналіз впливу на метод похибки машинних округлень. В результаті знайдено умови, при яких алгоритм буде чисельно стійким.

1.Апроксимація гіпергеометричної функції методом В.К.Дзядика. Розглянемо диференціальне рівняння гіпергеометричного типу

$$x(1-x)y'' + (c-(a+b+1)x)y' - aby = 0, \qquad (1.1)$$

де a, b, c - дійсні або комплексні параметри. Його особливими точками є 0, 1, ∞.

Побудуємо многочлен, який апроксимує розв'язок рівняння (1.1) методом В.К.Дзядика. Виходячи з теореми Фукса (див. [1]) запишемо систему фундаментальних розв'язків рівняння (1.1):

$$y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = x^{1-c}\varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ - деякі невідомі аналітичні функції.

Розглянемо головний розв'язок гіпергеометричного рівняння в околі нуля на відрізку $[0;h]$ $(h<1)$.

$$x(1-x)\varphi''(x) + (c-(a+b+1)x)\varphi'(x) - ab\varphi(x) = 0. \qquad (1.2)$$

Зведемо диференціальне рівняння (1.2) до інтегрального, враховуючи, що $\varphi(0) = 1$.

$$x\varphi(x) - x^2\varphi(x) + (c-2)\int_0^x \varphi(x)dx + (3-a-b)\int_0^x x\varphi(x)dx +$$

$$+(a+b-1-ab)\int_0^x\int_0^x \varphi(x)dxdx + (1-c)x = 0. \qquad (1.3)$$

Замінимо рівняння (1.3) операторним, обмежившись n-тим членом розкладу (див.[1]).

$$\varphi_n(x) = \sum_{l=0}^{n} c_l x_l ,$$

$$x\sum_{l=0}^{n} c_l x^l - x^2\sum_{l=0}^{n} c_l x^l + (c-2)\int_0^x \sum_{l=0}^{n} c_l x^l dx + (3-a-b)\int_0^x x\sum_{l=0}^{n} c_l x^l dx +$$

$$(a+b-1-ab)\int_0^x\int_0^x \sum_{l=0}^{n} c_l x^l dxdx + (1-c)x + x\varepsilon = 0,$$

$$\text{де} \quad \varepsilon = \tau\, T^*_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in [0;h],$$

а $T^*_{n+1}(x)$ - зміщений на відрізок [0;1] многочлен Чебишова.

Проінтегрувавши останнє рівняння і звівши коефіцієнти при однакових степенях x, матимемо

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{c-1+l}{l+1}c_l x^{l+1} + \sum_{l=0}^{n}\frac{-l^2-l(a+b)-ab}{(l+1)(l+2)}c_l x^{l+2} + (1-c)x + \tau\sum_{l=0}^{n+1} t_l \cdot$$

$$\cdot\, x^{l+1} = 0 . \qquad (1.4)$$

Прирівнявши суми членів при однакових степенях x, отримаємо n+2 рівняння з n+2 невідомими c_0, c_1, c_2, ..., c_n, τ. Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь, ми знайдемо апроксимаційний многочлен $\varphi_n(x)$ на відрізку [0;h].

Оскільки гіпергеометрична функція в околі 1 і ∞ виражається через головний розв'язок в околі 0 (див.[4]), то розглядати її розклад в даних точках не будемо.

2. Розв'язування системи лінійних рівнянь. Система лінійних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} a_0c_0+ & & & & \tau t_0 = p, \\ b_0c_0+ a_1c_1+ & & & & \tau t_1 = 0, \\ & b_1c_1+ a_2c_2+ & & & \tau t_2 = 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad (2.1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b_{n-1}c_{n-1}+a_nc_n+ & \tau t_n = 0, \\ & & & & b_nc_n+\tau t_{n+1} = 0, \end{cases}$$

де p, a_1, a_2, ... a_n, b_1, b_2 , ... ,b_n деякі коефіцієнти, які визначаються з операторного рівняння (1.4), t_0, t_1 , ... , t_{n+1} - коефіцієнти зміщеного на $[0,h]$ многочлена Чебишова. Особливість даної системи полягає в тому, що a_i, b_i набувають невеликих значень, а t_i змінюються в досить широких межах.

Розв'яжемо дану систему (2.1). Знайдемо спочатку невідоме τ. Домножимо останнє $(n+2)$-ге рівняння на $\left(-\frac{a_n}{b_n}\right)$ і додамо до $(n+1)$-го рівняння. Домножимо тепер $(n+1)$-ше рівняння на $\left(-\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)$ і додамо до n-го. Продовжуючи так далі отримаємо:

$$\tau = \frac{p}{\left(t_0 - \frac{a_0}{b_0}\left(t_1 - \frac{a_1}{b_1}\left(t_2 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\left(t_n - \frac{a_n}{b_n}t_{n+1}\right)\ldots\right)\right.\right.} . \quad (2.2)$$

Підставивши значення τ в систему рівнянь (2.1), матимемо

$$c_0 = \frac{1}{a_0}(p - \tau t_0),$$

$$c_i = -\frac{1}{a_i}(b_{i-1}c_{i-1} + \tau t_i), \quad i=\overline{1,n} . \qquad (2.3)$$

Для головного розв'зку гіпергеометричного рівняння в околі 0:

$$a_i = \frac{c-1+i}{i+1}, \quad b_i = -\frac{(a+i)(b+i)}{(i+1)(i+2)}, \quad p = c-1.$$

Підставимо дані значення в формулу (2.2). Отримаємо

$$\tau = \cfrac{c-1}{t_0 + \cfrac{2(c-1)}{ab}\left(t_1 + \cfrac{3c}{1+a+b+ab}\left(\ldots + \cfrac{(c-1+n)(n+2)}{n^2+n(a+b)+ab}\, t_{n+1}\right)\ldots\right)}. \qquad (2.4)$$

Знаючи τ з (2.1) знаходимо коефіцієнти апроксимаційного многочлена:

$$c_0 = 1 - \frac{\tau\, t_0}{c-1}, \quad c_i = \frac{(a+i-1)(b+i-1)}{(c+i-1)i}\, c_{i-1} - \frac{\tau\, t_i (i+1)}{c+i-1}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Розглянемо відхилення даного апроксимаційного многочлена в точці 0. Точне значення гіпергеометричної функції в даній точці рівне 1, а апроксимаційне дорівнює $1 - \dfrac{\tau\, t_0}{c-1}$, тобто відхилення залежатиме від значення τ. Чим менше τ, тим менше відхилення. Значення τ, як видно з формули (2.4), залежить від коефіцієнтів a, b, c, степеня многочлена n та довжини відрізка h.

3. Похибка алгоритму обчислень. Розглянемо комп'ютерну реалізацію методу на відрізку [0;h]. Як відомо, для кожної ЕОМ, в якій прийняте двійкове представлення чисел і яка працює в режимі плаваючої коми, можна вказати характеризуюче дану машину число ε таке, що найменше машинне число, більше одиниці, рівне $1+\varepsilon$. Позначимо через a_M машинне значення числа a і через $\delta(a)$ машинну похибку. Тоді

$$\delta(a) = \varepsilon|a| = |a_M - a|. \qquad (3.1)$$

В загальному випадку з точністю до першого порядку малості

$$\delta(a*b) \leqslant \varepsilon|a*b|, \qquad (3.2)$$

де "*" - одна з операцій "$\cdot$", "$\div$", "+", "-" (див.[3]).

Надалі обчислення всіх похибок буде проводитись з точністю до першого порядку малості.

Запишемо загальні формули для обчислення похибок:

$\delta(a+b) \leqslant \delta(a) + \delta(b)$, (3.3) $\quad \delta(ab) \leqslant |a|\delta(b) + |b|\delta(a)$, (3.4)

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{|a|\delta(b) + |b|\delta(a)}{b^2} . \qquad (3.5)$$

Значення τ обчислюється за формулою (2.4) :

Зробимо заміну: $t_i = \dfrac{t_i'}{h^i}$, де $i = \overline{0, n}$, t_i' – коефіцієнти многочлена Чебишова зміщеного на відрізку [0, 1] степеня n+1. Підставимо це значення в рівняння (2.4). Матимемо:

$$\tau = \frac{c-1}{t_0' + \dfrac{2(c-1)}{abh}\left(t_1' + \dfrac{3c}{(1+a+b+ab)h}\left(\ldots + \dfrac{(c-1+n)(n+2)}{(n^2+n(a+b)+ab)h}\, t_{n+1}' \right)\ldots\right)} . \qquad (3.6)$$

Нехай $a_i' = (c-1+i)(i+2)$, $b_i' = (i^2+i(a+b)+ab)h$, $p = c-1$. Підставивши ці значення у (3.6) отримаємо

$$\tau = \frac{p}{t_0' + \dfrac{a_0'}{b_0'}\left(t_1' + \dfrac{a_1'}{b_1'}\left(t_2 + \ldots + \dfrac{a_{n-1}'}{b_{n-1}'}\left(t_n' + \dfrac{a_n'}{b_n'}\, t_{n+1}\right)\ldots\right)\right)} . \qquad (3.7)$$

Оскільки a, b, c, h конкретно задані числа, i – ціле число, то a_i', b_i', і p можна вважати обчисленими точно.

Оцінимо похибку обчислень формули (3.7). З формули (3.2) маємо:

$$\delta\left(\frac{a_i'}{b_i'}\right) \leqslant \varepsilon \left|\frac{a_i'}{b_i'}\right| , \qquad (3.8)$$

$$\delta\left(\frac{a_n'}{b_n'}\, t_{n+1}'\right) \leqslant \left|\frac{a_n'}{b_n'}\right| \delta(t_{n+1}') + |t_{n+1}'|\, \delta\left(\frac{a_n'}{b_n'}\right) = \left|\frac{a_n'}{b_n'}\right| \varepsilon \,\times$$

$$\times\, |t_{n+1}'| + |t_{n+1}'|\, \varepsilon \left|\frac{a_n'}{b_n'}\right| = 2\,\varepsilon \left|\frac{a_n'}{b_n'}\, t_{n+1}'\right| ,$$

$$\delta\left(t_n' + \frac{a_n'}{b_n'}\, t_{n+1}'\right) \leqslant \delta(t_n') + \delta\left(\frac{a_n'}{b_n'}\, t_{n+1}'\right) = \varepsilon\, |t_n'| + 2\,\varepsilon \left|\frac{a_n'}{b_n'}\right. \times$$

$$\cdot\ t'_{n+1}| = \varepsilon\ (\ |t'_n| + 2\ |\frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1}|\ ),$$

$$\delta\ (\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\ (t'_n + \frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1})) \leqslant |\ \frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\ |\ \delta\ (t'_n + \frac{a'_n}{b'_n}\ t_{n+1}) + |t'_n +$$

$$+ \frac{a'_n}{b'_n}\ t_{n+1}|\ \delta\ (\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}) \leqslant |\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}|\ \varepsilon\ (\ |t'_n| + 2\ |\frac{a'_n}{b'_n}\ t_{n+1}|\ ) +$$

$$+ |t'_n + \frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1}|\ \varepsilon\ |\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}| \leqslant \varepsilon\ |\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}|\ (\ 2\ |t'_n| + 3\ |\frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1}|).$$

Продовжуючи так далі отримаємо

$$\delta\ (t'_0 + \frac{a'_0}{b'_0}\ (t'_1 + \ldots + \frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\ (t'_n + \frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1})\ldots)) \leqslant \varepsilon\ (\ |t'_0| +$$

$$+ |\frac{a'_0}{b'_0}|\ (\ 2\ |t'_1| + \ldots + |\frac{a'_i}{b'_i}|\ ((i+2)\ |t_{i+1}| + \ldots + |\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}|\ (n+1)\ \cdot$$

$$\cdot\ |t'_n| + (n+2)|\frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1}|\ )\ldots)),$$

$$\delta\ (\tau) = \delta\ (\frac{p}{t'_0 + \frac{a'_0}{b'_0}\ (t'_1 + \ldots + \frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\ (t'_n + \frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1})\ldots))}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|p|\delta(t'_0 + \frac{a'_0}{b'_0}\ (t'_1 + \ldots + \frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1})\ldots)) + |t_0 + \frac{a'_0}{b'_0}\ (t_1 + \ldots + \frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1})\ldots|}{(t'_0 + \frac{a'_0}{b'_0}\ (t'_1 + \ldots + \frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\ (t'_n + \frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1})\ldots))^2} \cdot$$

$$\cdot\ \delta(p) \leqslant \frac{p^2\varepsilon(\ |t'_0| + |\frac{a'_0}{b'_0}|\ (2|t'_1| + \ldots + (n+2)|\frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1}|))\ldots)}{(t'_0 + \frac{a'_0}{b'_0}\ (t'_1 + \ldots + \frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\ (t'_n + \frac{a'_n}{b'_n}\ t'_{n+1})\ldots))^2\ |p|} +$$

$$+ \frac{\varepsilon\ |p|}{(t'_0 + \frac{a'_0}{b'_0}\ (t'_0 + \ldots + \frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\ (t'_n + \frac{a'_n}{b'}\ t'_{n+1})\ldots)} = \varepsilon\ \frac{\tau^2}{p}\ (\ |t'_0| +$$

$$+ \left|\frac{a'_0}{b'_0}\right| \left(2\, |t'_1| + \ldots + (n+2) \left|\frac{a'_n}{b'_n}\, t'_{n+1}\right| \right) \ldots) + \varepsilon\, |\tau| =$$

$$= \varepsilon\, |\tau| \left(1 + \left|\frac{\tau}{p}\right| \left(|t'_0| + \left|\frac{a'_0}{b'_0}\right| \left(2\, |t'_1| + \ldots + (n+2) \left|\frac{a'_n}{b'_n}\, t'_{n+1}\right|\right)\right) \ldots \right)$$

$$\delta(\tau) \leqslant \varepsilon\, |\tau| \left(1 + \left|\frac{\tau}{p}\right| \left(|t'_0| + \left|\frac{a'_0}{b'_0}\right| \left(2\, |t'_1| + \ldots + \left|\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\right| (n+1)\, \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left|\frac{a'_n}{b'_n}\, t'_{n+1}\right|\right) \ldots \right)\right). \tag{3.9}$$

Спростимо формулу (3.9). Для цього розглянемо вираз:

$$|t'_0| + \left|\frac{a'_0}{b'_0}\right| \left(2\, |t'_1| + \ldots + \left|\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}}\right| (n+1)\, |t'_n| + (n+2) \left|\frac{a'_n}{b'_n}\, t'_{n+1}\right|\right) \ldots) =$$

$$= |t'_0| + 2\left|\frac{a'_0}{b'_0}\, t'_1\right| + 3\, \left|\frac{a'_0 a'_1}{b'_0 b'_1}\, t'_2\right| + \ldots + (n+1)\, \left|\frac{a'_0 a'_1 \ldots a'_{n-1}}{b'_0 b'_1 \ldots b'_{n-1}}\, t'_n\right| +$$

$$+ (n+2)\, \left|\frac{a'_0 a'_1 \ldots a'_n}{b'_0 b'_1 \ldots b'_n}\, t'_{n+1}\right|. \tag{3.10}$$

Підставимо в (3.10) конкретні значення: $a'_l = (c-1+l)(l+2)$, $b'_l = (l^2 + l(a+b) + ab)h = (l+a)(l+b)h$. Отримаємо

$$|t'_0| + 2\, \left|\frac{(c-1)2}{abh}\, t'_1\right| + \ldots + (n+1) \left| t'_n \prod_{l=0}^{n-1} \frac{(c-1+l)(l+2)}{(l+a)(l+b)h} \right| + (n+2)\, \cdot$$

$$\cdot\, \left|t'_{n+1} \prod_{l=0}^{n} \frac{(c-1+l)(l+2)}{(l+a)(l+b)h}\right| = |t'_0| + 2\, \left|\frac{t'_1}{h}\, \frac{(c-1)2}{ab}\right| + \ldots + (n+1)\, \cdot$$

$$\cdot \left|\frac{t'_n}{h^n} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{(c-1+l)(l+2)}{(l+2)(l+b)}\right| + (n+2) \left|\frac{t'_{n+1}}{h^{n+1}} \prod_{l=0}^{n} \frac{(c-1+l)(l+2)}{(l+2)(l+b)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \left(|t'_0| + 2\, \left|\frac{t'_1}{h}\right| + \ldots + (n+1)\, \left|\frac{t'_n}{h^n}\right| + (n+2)\, \left|\frac{t_{n+1}}{h^{n+1}}\right| \right). \tag{3.11}$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(x) = |t'_0| + 2\, |t'_1| x + \ldots + (n+1)\, |t'_n| x^n + (n+2)\, |t'_{n+1}| x^{n+1}. \tag{3.12}$$

Перепишемо $\varphi(x)$ у іншому вигляді

$$\psi(x) = \left(\int_0^x \psi(x)dx\right)' = \left(|t_0'|x + |t_1'|x^2 + |t_2'|x^3 + \ldots + |t_n'| \cdot\right.$$

$$\left.\cdot x^{n+1} + |t_{n+1}'|x^{n+2}\right)' = \left(x\sum_{i=0}^{n+1}|t_i'|x^i\right)'. \qquad (3.13)$$

Оскільки знаки коефіцієнтів многочлена Чебишова чергуються і $T_n^*(x) = T_{2n}(\sqrt{x})$ (див. [1]), то

$$\sum_{i=0}^{n+1}|t_i'|x^i = \left|\sum_{i=0}^{n+1}t_i'(-x)^i\right| = |T_{n+1}^*(-x)|. \qquad (3.14)$$

$$\psi(x) = |(x\,T_{n+1}^*(-x))'| = |(x\,T_{2(n+1)}(\sqrt{-x}))'|. \qquad (3.15)$$

Але з іншого боку $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Тобто:

$$\psi(x) = |(x\cos(2(n+1)\arccos\sqrt{-x}))'| = |\cos(2(n+1)\cdot$$

$$\cdot\arccos\sqrt{-x}) + (-x)\sin(2(n+1)\arccos\sqrt{-x})\frac{2(n+1)}{-\sqrt{1+x}}\frac{-1}{2\sqrt{-x}}| =$$

$$= |\cos(2(n+1)\arccos(i\sqrt{x}) + (n+1)\sqrt{\frac{-x}{x+1}}\sin(2(n+1)\cdot$$

$$\cdot\arccos(i\sqrt{x})| = |\cos(2(n+1)i\ln(i\sqrt{x} + \sqrt{-x-1})) + i(n+1)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{x}{x+1}}\sin(2(n+1)i\ln(i\sqrt{x} + \sqrt{-x-1}))| = |(\operatorname{ch}(2(n+1)\ln(i\cdot$$

$$\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}))) + (n+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}}\operatorname{sh}(-2(n+1)\ln(i(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})))| =$$

$$= |\frac{1}{2}((i(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}))^{2(n+1)} + (i(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}))^{-2(n+1)}) -$$

$$- (n+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}}\frac{1}{2}((i(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}))^{-2(n+1)} - (i(\sqrt{x} +$$

$$+ \sqrt{x+1}))^{2(n+1)})| = \frac{1}{2}|(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^{2(n+1)} + (\sqrt{x} +$$

$$\sqrt{x+1})^{-2(n+1)})| = \frac{1}{2}|(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^{2(n+1)} + (\sqrt{x} +$$

$$+ \sqrt{x+1})^{-2(n+1)} + (n+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}}\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^{2(n+1)} - (n+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}}\cdot$$

$$\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^{-2n+1}| = \frac{1}{2}|(1 + (n+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}})(\sqrt{x} +$$

$$+ \sqrt{x+1})^{2(n+1)} + (1 - (n+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^{-2(n+1)}|.$$

Отже,

$$\psi(x) = \frac{1}{2} | (1 + (n+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^{2(n+1)} + (1 - (n+$$

$$+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^{-2(n+1)} |. \tag{3.16}$$

Звідси випливає, що

$$|t'_0| + 2\left|\frac{t'_1}{h}\right| + \ldots + (n+1)\left|\frac{t'_n}{h^n}\right| + (n+2)\left|\frac{t_{n+1}}{h^{n+1}}\right| = \psi\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \left((1 + (n+1)\sqrt{\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{h}+1}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{h}} + \sqrt{\frac{1}{h}+1}\right)^{2(n+1)} + (1 - (n+1)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{h}+1}})\left(\sqrt{\frac{1}{h}} + \sqrt{\frac{1}{h}+1}\right)^{-2(n+1)}) = \frac{1}{2}((1 + (n+1)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{1+h}})\left(\sqrt{\frac{1}{h}} + \sqrt{\frac{1+h}{h}}\right)^{2(n+1)} + (1 - (n+1)\sqrt{\frac{1}{1+h}})\left(\sqrt{\frac{1}{h}} +\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{1+h}{h}}\right)^{-2(n+1)}). \tag{3.17}$$

Тому

$$\delta(\tau) \leqslant \varepsilon|\tau|\left(1 + \frac{\alpha}{2}\left|\frac{\tau}{p}\right|\left((1 + (n+1)\sqrt{\frac{1}{1+h}})\left(\sqrt{\frac{1}{h}} +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{\frac{1+h}{h}}\right)^{2(n+1)} + (1 - (n+1)\sqrt{\frac{1}{1+h}})\left(\sqrt{\frac{1}{h}} + \sqrt{\frac{1+h}{h}}\right)^{-2(n+1)}\right)\right),$$

$$\text{де } \alpha = \max_{0 \leqslant k \leqslant n}\left(1, \left|\prod_{l=0}^{k}\frac{(c-1+l)(l+2)}{(l+a)(l+b)}\right|\right). \tag{3.18}$$

Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема. Машинна похибка обчислень нев'язки τ апроксимаційного методу В.К.Дзядика для гіпергеометричної функції з коефіцієнтами a, b, c на відрізку $[0;h]$ задовільняє нерівності (3.18).

4. Результати числових експерементів.

a	b	c	n	h	Максимальна похибка многочлена	
					В.К.Дзядика	Тейлора
3.2	4.3	5.6	5	0.5	2.6E-03	4.3E-01
3.2	4.3	5.6	10	0.5	5.8E-07	2.3E-02
3.2	4.3	5.6	15	0.5	1.3E-10	1.0E-03
3.2	4.3	5.6	20	0.5	2.9E-11	4.1E-05
4	6	3	10	0.6	2.2E-01	4.7E+02
4	6	3	15	0.6	8.9E-04	1.7E+02
4	6	3	20	0.6	6.8E-03	4.6E+01
2	3	4	15	0.3	3.6E-12	1.7E-08
2	3	4	15	0.5	7.2E-11	8.2E-05
2	3	4	15	0.7	6.3E-08	3.0E-02
5	8	6	15	0.5	1.8E-06	2.6E+00
5	8	6	24	0.5	6.3E-07	2.9E-01
5	8	6	28	0.5	3.0E-06	5.6E-03

Як видно із результатів експерементів апроксимаційний многочлен дає набагато кращу точність ніж многочлен Тейлора.

1. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. - Киев, Наукова думка. - 1988. - 303 с.
2. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.- М.: Наука. - 1978. - 376 с.
3. Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей. Л.: ЛГУ. -1988. - 333 с.
4. Справочник по специальным функциям. Под редакцией М.Абрамовица и И.Стиган. - М.: Наука. - 1979. - 832 с.

АНОТАЦІІ.

1. УДК 517.9
В.Е.Слюсарчук
ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ.
Получены необходимые и достаточные условия осцилляции решений нелинейных разностных уравнений.

UDK 517.9
V.Y.Slyusarchuk
OSCILLATION OF SOLUTIONS OF A NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS.
Necessary and sufficient conditions of oscillationare obtained for solutions of a nonlinear difference equations.

УДК 517.5 +
В.В.Ковтунец.
КВАЗИНЬЮТОНОВСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АЛГОРИТМОВ НАИЛУЧШЕЙ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ.
С точки зрения метода параметрического продолжения выводится алгоритм Ремеза и строятся его модификации. Доказана квадратичная скорость сходимости алгоритма Ремеза при условиях , не требующих дифференцируемости приближаемой функции и функций чебышевской системы , по которой строятся приближающие полиномы. Модифицированные варианты, имеющие также квадратичную сходимость, отличаются меньшим количеством вычислений приближаемой функции.

UDK 517.5+
V.V.Kovtunets,cand.
QUAZINETWTOIAN APPROACH TO DEVELOPMENT OF ALGORITHMES FOR THE BEST UNIFORM APPROXIMATION.
The Remez algorithm and its modifications deduced from the homotopy continuation method. The second rate of Remez algorithm convergency is proved without assumption about differentiabillity of involved functions. The modifications of Remez algorithm are distinguished by lesser number of computing of function to be approximated.

УДК 519.41
А.В.Крайчук
БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ БЕСКОНЕЧНОГО ИНДЕКСА.
В работе описаны произвольные бесконечные группы, в которых дополняемы все подгруппы бесконечного индекса.

UDK 519.41
O.V.Krajuk
INFINITE GROUPS WITH COMPLEMENTED SUBGROUPS OF INFINITE INDEX.
The infinite groups with complemented subgroups of infinite index are described.

4. УДК 518:517.944/947
А.П.Кузьменко, А.Я.Бомба
О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ.
На основании синтеза методов А.А.Дородницына/декомпозиция задачи/и Г.Н.Положого/Р-трансформаций/ предлагается новая методика численно-аналитического решения краевых задач для уравнений дивергенного типа с разрывными коэффициентами в бесконечных областях.

UDK 518:517.944/947
A.P.Kuzmenko,A.YA.Bomba
ON THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE STRATUM ENVIRONMENTS.
A new method of construction for assimptotic number-analytic solutions of boundary value problems for equations ofdivergent type with separable coeficients in the infinite domain is proposed on the basis of syntesys methods of A.A.Dorodnitsin(decomposition problem) and G.N.Polozhiy(P-transformations).

5. УДК 519.41/47
В.С.Марач
ДВА КЛАССА НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП, БЛИЗКИХ К ГРУППАМ, КОНЕЧНЫМ НАД ЦЕНТРОМ.
Получены различные характеризации двух классов непериодических групп, по своему строению близких к группам, конечным над центром.

UDK 519.41/47
V.S.Marach
TWO CLASSES OF NON-PERIODIC GROUPS WHICH ARE CLOSE TO GROUPS WITH CENTRE OF FINITE INDEX.
Are received the different characterizations of two classes of non-periodic groups which by their structure are close to groups with centre finite index.

6. УДК 517.946
А.В.Рыбачок
К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОБОБЩЕННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ.
В работе изложено и проиллюстрировано новую схему обобщенного разделения переменных на примере нахождения собственных чисел и собственных функций квадрата оператора Лапласса.

A.V.Rybachok
UDK 517.946
ABOUT INTEGRATING OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY VARIABLE PARTITION.
The simple scheme of generalized variable partition is shown by providing a sample of own values and own functions for square of Laplas operator.

7. УДК 517.5
В.Б.Семенюк.
О ПРИБЛИЖЕНИИ СЛЕДОВ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА СЛЕДАМИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ.
В статье рассматривается вопрос приближения следов функций, что принадлежат изотропным классам Соболева следами некоторых специально построенных сплайн-функций. Функции приближаюеся в интегральной метрике на областях с знешними пиками степенного характера.

UDK 517.5
V.B.Semenuk
ABOUT APPROACH OF MULTIVARIATE FUNCTIONS OF TRACES OF SOBOLYEV'S CLASSES APPROACH BY SPLINE-FUNCTIONS TRACES.
The article deals with the problem of approach traces of Sobolyev's classes fanctions by the traces of some specially built spline-functions. The functions approach in integral metrics on the domains with external peaks of degree character.

8. УДК 517.5
В.К.Столярчук
ПРИМЕЧЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АССИМПТОТИКИ ДИАГОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ F(1,y+1,z) и F(a,1,y,z).
Установлена возможность применения аппроксимационного метода для исследования аксиоматики диагональных аппроксимаций Паде некоторых специальных функций.

UDK 517.5
V.K.Stolyarchuk
APPLICATION OF APPROXIMATIVE METHOD FOR STUDY OF PADE'S DIAGONAL APPROXIMATIONS ASYMPOTICS OF HYPERGEOMETRICAL FUNCTIONS F(1,y+1,z) AND F(a,1,y,z).
The possibility of using of approximative method for investigation of Page's diagonal approximations asymptotics of some special functions has been determined.

9. УДК 517.5
Ю.И.Харкевич
ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРАМИ АБЕЛЯ-ПУАССОНА КЛАССОВ (Ф,В)-ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ В РАВНОМЕРНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКАХ.
Получены ассимптотические равенства для верхних граней уклонений функций классов C,L операторами Абеля-Пуассона в равномерной и интегральной метриках соответственно.

UDK 517.5
Yu.I.Harkevich
DIFFERENTIAR FUNCTIONS CLASSES APPROXIMATION BY ABEL-POISSON OPERATORS IN UNIFORM AND INTEGRRAL METRICS.

The obtained assimptotic equalities for top borders of deflection of functions of classes C and L by means of Ablel-Puasson operators in unuform and integral metrics accordingly.

10. УДК 517.5
В.Н.Цимбал
ГРАНИЧНЫЙ СКАЧОК ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ.
Методом погранслоя построено ассимптотическое разложение решения смешанной задачи для сингулярно возмущенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в граничных условиях.

UDK 517.5
V.N.Tsymbal
BOUNDARY JUMP FOR THE SINGULAR PERTURBED EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS.
Asymptotic exansion of the solution of the boundary value problem for the singular perturbed equation of the third order with multiple characteristics with a small parameter in boundary conditions is constructed. The boundary layer methpd is applied.

11. УДК 517.5+
Р.П.Стецюк.
МНОГОЧЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.
Разработано алгоритм построения аппроксимационных многочленов В.К.Дзядыка для гипергеометрической функции. Сделано анализ влияния на метод погрешностей машинных округлений. Найдены условия, при которых алгоритм будет численно устойчивым.

UDK 517.5+
P.P.Stetsiuk
POLINOMIAL APPROXIMATION OF HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS
A new algorithm for computing Dzyadyk's approximating polynomials of hypergeometric function is developed. An error of computing was investigated. Conditions of algorithm computing Stabylity are found.

12. УДК 51:53
П.М.Николаев, О.В.Олейник
РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СТЕПЕНЯМ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ СФЕР.
До сих пор известны значения первых четырех функций, зависящих от расстояния r, в разложении радиальной функции распределения р(r) в ряд по степеням плотности системы твердых сфер. В работе найдено значение пятой функции на основе исследования метода ускоренной сходимости рядов теории возмущений. Также дано выражение для бинарной функции распределения, хорошо описывающей данные машинного эксперимента для системы твердых

сфер.

UDK 51:53

P.M.Nikolayev, O.V.Oliynyk

BY DENSITY DEGREES RADIAL DISTRIBUTION FUNCTIONS OF THE SOLID SPHERE SYSTEM.

It's still known values only first fourth functions as the functions VS. distins r for radial distribution functions (r) expension in terms of dencity powers for the system of hard sphheres. The fifth function value based on faster series convergence method of perturbation theory was found in this work. The discrete distribution function expression which describes well computer experiment data for the system of hard sphres has been presented also.