Українське математичне товариство
Інститут кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова
Рівненський державний педагогічний інститут

Волинський математичний вісник

Випуск 5

Volyn Mathematical Bulletin

Issue 5

Рівне 1998

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної та прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the rezults of investigation of the theoretical and applied mathematics in the form of the short report, original articles, surveys, works of conferences and seminars. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

У цьому випуску публікуються матеріали Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми теорії фільтрації" присвяченої пам'яті П.Ф.Фільчакова, що відбулася 1–3 червня 1998р. у м.Рівне.

Видається один раз у рік з 1994 року.
Свідоцтво про державну реєстрацію : серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

It publishes one time a year beginning from 1994.
The paper of State registration : series PB, №148, 11.04.1995.

Адреса редакції : 266000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний педагогічний інститут,
кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 26-04-44. E-mail: bomba@rspi.rovno.ua

Зміст

УДК 519.5

Янчук П.С., Шпортько О.В.

ПРО МНОГОЧЛЕННЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАСОНА В КРИВОЛІНІЙНИХ ОБЛАСТЯХ

Пропонується формула для представлення наближеного розв'язку задачі Діріхле в квадраті у вигляді многочлена. Коефіцієнти наближеного розв'язку виражаються через значення правої частини рівняння Пуасона у вибраних точках, а також відомі значення розв'язку у вибраних точках на межі області. Запропоновані схеми можна використовувати для швидкого і якісного розв'язування задачі Діріхле в квадраті. В статті показано, як використати отримані результати для наближеного розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуасона в довільних областях з криволінійною межею.

1.Вступ. В даній роботі розглядається многочленний спосіб наближеного розв'язування стаціонарних задач математичної фізики. Спочатку будуть наведені необхідні формули для спектральних многочленів, а потім на їх основі будуть запропоновані явні формули для наближеного розв'язування задачі Діріхле в квадраті, а потім для будь-якої області на площині, обмеженої гладкою кривою. Під гладкою ми розуміємо криву, для кожної точки якої існує дотична. Многочленно-сітковий спосіб одержаний шляхом синтезу ідей сіткових методів та апроксимаційного методу В.Дзядика у випадку задач математичної фізики (див. [2-6]). В статті будуть виведені конкретні формули для числових розрахунків, які містять лише операції арифметичних дій. Особлива увага приділяється економічності запропонованих обчислювальних схем.

2.Спектральні многочлени інтегральних операторів. Для зручності викладу наведемо властивості многочленів Лежандра, які використовуються в статті і на основі яких вводяться так звані спектральні многочлени [2].

Для многочленів Лежандра $P_i(x)$ виконуються рекурентні співвідношення вигляду

$$P_{i+1}(x)-\frac{2i+1}{i+1}x\,P_i(x)+\frac{i}{i+1}P_{i-1}(x)=0,\; i=1,2,..., \tag{1}$$

де $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$. Многочлени Лежандра, для яких виконується умова вигляду $P_i(1)=1$, називаються стандартизованими многочленами Лежандра і за такими многочленами збережемо введене позначення.

Многочлени Лежандра є ортогональними з вагою, рівною тотожно 1 на проміжку [–1;1], тобто

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P_i}(x)\mathrm{P_j}(x)dx = 0,\ (i \neq j). \tag{2}$$

Крім цього, $\int_{-1}^{1} P_i^2(x)dx = \frac{2}{2i+1}$, $i=0,1,...$

Інтегрувати стандартизовані многочлени Лежандра можна за формулами $\int_{-1}^{1} P_i(x)dx = 0\ (i>0)$, $\int_{-1}^{x} \mathrm{P_i}(x)dx = \frac{P_{i+1}(x) - P_{i-1}(x)}{2i+1}\ (i>0)$, а також

$$\int_{-1}^{1} P_0(x)dx = 2,\ \int_{-1}^{x} P_0(x)dx = x+1. \tag{3}$$

Довільна функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є-Лежандра

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x), \tag{4}$$

де

$$a_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, P_i(x)dx. \tag{5}$$

Означення 1 [2]. Для заданого фіксованого n спектральними многочленами називатимемо ортонормовані многочлени $K_1 = K_1(x)$, $K_2 = K_2(x)$,..., $K_n = K_n(x)$, які задовольняють співвідношення

$$-\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \mathrm{K_i}(x_2)dx_2 = -\lambda_i \mathrm{K_i}(x) + \tau_i^1 \mathrm{P_{n+1}}(x) + \tau_i^2 \mathrm{P_{n+2}}(x) + \tau_i^0,\ \ i=1,2,...n, \tag{6}$$

де λ_i, τ_i^0, τ_i^1, τ_i^2 – дійсні числа.

Із властивостей спектральних многочленів [2] слідує, що мають місце формули

$$K_1 = \beta_1^1 x + \beta_3^1 x^3 + ... + \beta_{2n-1}^1 x^{2n-1},$$
$$K_3 = \beta_1^3 x + \beta_3^3 x^3 + ... + \beta_{2n-1}^3 x^{2n-1},$$
$$...,$$
$$K_{2n-1} = \beta_1^{2n-1} x + \beta_3^{2n-1} x^3 + ... + \beta_{2n-1}^{2n-1} x^{2n-1},$$
$$K_2 = \beta_2^2\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) + \beta_4^2\left(x^4 - \tfrac{1}{5}\right) + ... + \beta_{2n}^2\left(x^{2n} - \frac{1}{2n+1}\right),$$
$$K_4 = \beta_2^4\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) + \beta_4^4\left(x^4 - \tfrac{1}{5}\right) + ... + \beta_{2n}^4\left(x^{2n} - \frac{1}{2n+1}\right),$$
$$...,$$
$$K_{2n} = \beta_2^{2n}\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) + \beta_4^{2n}\left(x^4 - \tfrac{1}{5}\right) + ... + \beta_{2n}^{2n}\left(x^{2n} - \frac{1}{2n+1}\right), \tag{7}$$

де β_r^s – дійсні числа.

Зауважемо, що многочлени K_j з непарними індексами j можна розкласти по непарних степенях x, а з парними індексами j - по парних степенях x. Точніше , парні многочлени K_{2j} розкладаються по двочленах вигляду $(x^{2i}-1/(2i+1))$. Наближені значення чисел β_j^i та λ_i при різних значення n наведені в роботі [5].

3.Постановка задачі. Розв'яжемо задачу Діріхле вигляду

$$-\Delta U(x,y)=f(x,y),(x,y)\in G,$$

$$U(x,y)/_{\partial G}=\phi(x,y), \tag{8}$$

де $G=\{(x,y):\ -1\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$.

Розв'язок даної задачі запишемо у вигляді $U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)$, де $U_1(x,y)$ - розв'язок задачі Діріхле при однорідних умовах:

$$-\Delta U_1(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in G,\ U_1(x,y)/_{\partial G}=0, \tag{9}$$

а $U_2(x,y)$ - розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$-\Delta U_2(x,y)=0,\ (x,y)\in G,\ U_2(x,y)/_{\partial G}=\phi(x,y). \tag{10}$$

4.Наближення розв'язку задачі (9). Функцію $U_1(x,y)$ наблизимо многочленом $U_1^n(x,y)$, який запишемо у вигляді:

$$U_1^n(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} K_i^0(x) K_j^0(y), \tag{11}$$

де $K_i^0(x)=\int\limits_{-1}^{x} K_i(x)dx$.

Легко показати , що многочлен $K_i^0(x)$ дорівнює нулю при x=-1 та x=1. Справді, $K_i^0(-1)=\int\limits_{-1}^{-1} K_i(x)dx=0$, $K_i^0(1)=\int\limits_{-1}^{1} K_i(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}\sum\limits_{q=1}^{n} b_q P_q(x)dx=$ $=\sum\limits_{q=1}^{n} b_q \int\limits_{-1}^{1} P_q(x)dx=0$, оскільки $K_i(x)$ розкладаються за многочленами Лежандра без нульового доданку і мають місце формули (3).

На основі цих рівностей $U_1^n(x,y)/_{\partial G}=0$, тобто крайову умову задачі (9) виконано.Для спектральних многочленів має місце рівність вигляду [2] $\int\limits_{-1}^{1}[K_i^0(x)]^2 dx=\lambda_i$. Розглянемо на відрізку [-1;1] вузли $\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{n+1}$, де

$\alpha_0=-1$, $\alpha_{n+1}=1$, квадратурної формули Лобато. Через D_j позначимо відповідні коефіцієнти квадратурної формули Лобато, яка має вигляд.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{(n+1)(n+2)}[f(-1)+f(1)]+\sum_{i=1}^{n} D_i f(\alpha_i), \tag{12}$$

де $D_i = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)[P_{n+1}(\alpha_i)]^2}$, а α_i – нулі многочлена $P^1_{n+1}(x)$, який є похідною від многочлена Лежандра $P_{n+1}(x)$. Нанесемо на розглядувану область сітку з внутрішніх вузлів (α_r,α_s); $r,s=\overline{1,n}$.Тоді числа C_{ij} з формули (11) можна обчислити за формулою

$$C_{ij}=\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\sum_{r,s=1}^{n} D_r D_s K^0_{ir} K^0_{js} f(\alpha_r,\alpha_s), \tag{13}$$

де $K^0{}_{mn}=K^0_m(\alpha_n)$.

Через $K^1_i(x)$ позначимо першу похідну по x від многочлена $K_i(x)$.

Покажемо, як можна отримати формулу (13). Спочатку скориставшись методом Гальоркіна, підставивимо (11) в (9) і отримаємо:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}\left(K^1_i(x)K^0_j(y)+K^0_i(x)K^1_j(y)\right)=f(x,y).$$

Домножимо ліву і праву частину цієї рівності на $K^0_m(x)K^0_N(y)$ і проінтегруємо по області $[-1,1]\times[-1,1]$. В результаті отримаємо рівність

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)K^0_i(x)K^0_j(y)dxdy=C_{ij}\left(\lambda_i+\lambda_j\right). \tag{14}$$

Застосувавши до лівої частини співвідношення (14) двовимірну квадратурну формулу Лобато та визначивши C_{ij}, отримаємо формулу (13).

Для обчислення значення наближеного розв'язку (9) в певній точці (x,y) при різних функціях $f(x,y)$ наближений розв'язок (5) доцільно переписати у вигляді:

$$U_1{}^n(x,y)=\sum_{r,s=1}^{n} f_{rs}\psi^n_{rs}(x,y), \tag{15}$$

де $\psi^n_{rs}(x,y)=D_r D_s\sum_{i,j=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_j}K^0_{ir}K^0_{js}\right)K^0_i(x)K^0_j(y)$, а $f_{rs}=f(\alpha_r,\alpha_s)$.

Для прискорення обчислень значення розв'язку $U_1(x,y)$ доцільно модернізувати останню формулу, врахувавши загальний вигляд многочленів K_i^0: $K_i^0 = \sum_{p=2}^{n+1} k_{ip} Q_p(x)$, де

$$Q_p(x) = \begin{cases} -1 + x^p, p = 2j, j = 1,2,... \\ -x + x^p, p = 2j+1, j = 1,2,... \end{cases} \qquad (16)$$

Тоді $\psi_{rs}^n(x,y) = D_r D_s \sum_{l=..2.}^{n+1} \sum_{m=2}^{n+1} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} K_{ir}^0 K_{js}^0 \right) k_{il} k_{jm} \right) Q_l(x) Q_m(y)$,

звідки

$$\psi_{rs}^n(x,y) = \sum_{l=2}^{n+1} \sum_{m=2}^{n+1} \overline{G}_{rs}^{lm} Q_l(x) Q_m(y), \qquad (17)$$

де

$$\overline{G}_{rs}^{lm} = D_r D_s \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} K_{ir}^0 K_{js}^0 \right) k_{il} k_{jm} \right). \qquad (18)$$

Легко переконатися, що функції $\psi_{rs}^n(x,y)$ мають наступні властивості

(i) $\psi_{rs}^n(x,y) = \psi_{sr}^n(y,x)$,

(ii) $\psi_{rs}^n(x,y) = \psi_{n-r+1,s}^n(-x,y)$, якщо $\alpha_r > 0, \alpha_s < 0$,

(iii) $\psi_{rs}^n(x,y) = \psi_{r,n-s+1}^n(x,-y)$, якщо $\alpha_r < 0, \alpha_s > 0$,

(iv) $\psi_{rs}^n(x,y) = \psi_{n-r+1,n-s+1}^n(-x,-y)$, якщо $\alpha_r \ge 0, \alpha_s \ge 0$.

Часто доводиться обчислювати значення наближеного розв'язку в тих самих вузлах, в яких беруться значення правої частини $f(x,y)$, тоді

$$U_1^n(\alpha_w, \alpha_q) = \sum_{r,s=1}^{n} f_{rs} \psi_{rs}^{wq}, \text{ де } \psi_{rs}^{wq} = \psi_{rs}^n(\alpha_w, \alpha_q).$$

5. Розв'язування задачі (10). Покладемо

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \xi_1(x), \text{ якщо, } y = -1; \\ \xi_2(x), \text{ якщо, } y = 1; \\ \eta_1(y), \text{ якщо, } x = -1; \\ \eta_2(y), \text{ якщо, } x = 1, \end{cases} \qquad (18)$$

$$a_1 = \xi_1(-1) = \eta_1(-1), a_2 = \xi_1(1) = \eta_2(-1), a_4 = \xi_2(-1) = \eta_1(1), a_3 = \xi_2(1) = \eta_2(1). \qquad (19)$$

Наближений розв'язок задачі (10) можна записати у вигляді:

$$U_2^n(x,y)=\frac{\eta_2(y)}{2}(1+x)+\frac{\eta_1(y)}{2}(1-x)+\frac{\xi_2(x)}{2}(1+y)+\frac{\xi_1(x)}{2}(1-y)+\frac{a_1}{2}(x+y)-$$
$$-\frac{a_2}{2}(x+1)-\frac{a_4}{2}(y+1)-\frac{a_1-a_2+a_3-a_4}{4}(x+1)(y+1)+\sum_{i,j=1}^{n}\Re_{ij}K_i^0(x)K_j^0(y). \qquad (20)$$

Ввівши в розгляд межові точки , що відповідають вузлам квадратури $\xi_{1r}=\xi_1(\alpha_r)$, $\xi_{2r}=\xi_2(\alpha_r)$, $\eta_{1r}=\eta_1(\alpha_r)$, $\eta_{2r}=\eta_2(\alpha_r)$, і позначивши $K_{ir}^1=K_i^1(\alpha_r)$, запишемо коефіцієнти останнього доданку (20) наступним чином:

$$\Re_{ij}=\left(\begin{array}{l}\sum_{r=1}^{n}\left(\xi_{1r}\frac{\sigma_j D_r K_{ir}^1}{\lambda_i+\lambda_j}+\eta_{2r}\frac{\delta_i D_r K_{jr}^1}{\lambda_i+\lambda_j}+\xi_{2r}\frac{\delta_j D_r K_{ir}^1}{\lambda_i+\lambda_j}+\eta_{1r}\frac{\sigma_i D_r K_{jr}^1}{\lambda_i+\lambda_j}\right)+\\ +a_1\frac{(-1)^i\gamma_i\sigma_j+(-1)^j\gamma_j\sigma_i}{\lambda_i+\lambda_j}+a_2\frac{-\gamma_i\sigma_j+(-1)^j\gamma_j\delta_i}{\lambda_i+\lambda_j}+\\ +a_3\frac{-\gamma_i\delta_j-\gamma_j\delta_i}{\lambda_i+\lambda_j}+a_4\frac{(-1)^i\gamma_i\delta_j-\gamma_j\sigma_i}{\lambda_i+\lambda_j},\end{array}\right) \qquad (21)$$

де $\gamma_i=K_i(1)-\frac{2K_i^1(1)}{(n+1)(n+2)}, \sigma_j=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-y}{2}\right)K_j^0(y)dy, \delta_j=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+y}{2}\right)K_j^0(y)dy.$

Читач може легко пересвідчитись шляхом безпосередньої перевірки, що записаний у такому вигляді розв'язок задачі (10) повністю задовольняє крайовим умовам. Тепер подамо формулу для знаходження інтерполяційного многочлена, який у вибраних вузлах сітки, що співпадають з вузлами квадратурної формули Лобато, набуває задані значення g_i:

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i+1}\left(K_i(1)-\frac{2K_i^1(1)}{(n+1)(n+2)}\right)g_0-\sum_{s=1}^{n}D_sK_{is}^1g_s+\left(K_i(1)-\frac{2K_i^1(1)}{(n+1)(n+2)}\right)g_{n+1}\right]\times \qquad (22)$$
$$\times K_i^0(x)+\frac{g_{n+1}}{2}(x+1)+\frac{g_0}{2}(1-x),$$

де $g_i=g(\alpha_i)$.

Для доведення цієї формули спочатку обчислимо похідну від лівої та правої частин (6) і отримаємо

$$K_i^0(x) = -\lambda_i K_i^1(x) + \tau_i P_{n+1}^1(x), \text{ якщо } n-i \text{ непарне},$$
$$K_i^0(x) = -\lambda_i K_i^1(x) + \tau_i P_{n+2}^1(x), \text{ якщо } n-i \text{ парне}. \tag{23}$$

Легко бачити, що функцію $g=g(x)$ можна записати у вигляді
$$g(x)=g(x)-g_0\frac{(1-x)}{2}-g_{n+1}\frac{(1+x)}{2}+g_0\frac{(1-x)}{2}+g_{n+1}\frac{(1+x)}{2}=\sum_{i=1}^{n}b_i K_i^0(x)+g_0\frac{(1-x)}{2}+g_{n+1}\frac{(1+x)}{2}.$$

Врахувавши ортогональність систем многочленів $\{K_i(x)\}$ та $\{K_i^0(x)\}$, отримаємо
$$b_i=\frac{1}{\lambda_i}\int_{-1}^{1}\left(g(x)-g_0\frac{(1-x)}{2}-g_{n+1}\left(\frac{1+x}{2}\right)\right)K_i^0(x)dx=$$
$$=-\int_{-1}^{1}\left(g(x)-g_0\frac{(1-x)}{2}-g_{n+1}\left(\frac{1+x}{2}\right)\right)K_i^1(x)dx.$$

Використавши згадану вище квадратуру Лобато та врахувавши непарність непарних та парність парних многочленів K_i, отримаємо формулу (22).

Застосуємо формулу (22) до правої частини (20) та перегрупувавши доданки відносно значень $\varphi(x,y)$ на межі області, одержимо

$$U_2^{\,n}(x,y)=a_1\varphi_{10}(x,y)+a_2\varphi_{20}(x,y)+a_3\varphi_{30}(x,y)+a_4\varphi_{40}(x,y)+$$
$$\sum_{r=1}^{n}\left(\xi_{1r}\varphi_{1r}(x,y)+\eta_{2r}\varphi_{2r}(x,y)+\xi_{2r}\varphi_{3r}(x,y)+\eta_{1r}\varphi_{4r}(x,y)\right), \tag{24}$$

де
$$\varphi_{10}(x,y)=\left(\begin{array}{l}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i+1}\left(K_{in+1}-\frac{2K_{in+1}^1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]K_i^0(y)+\frac{(1-y)}{2}\right)\frac{(1-x)}{2}+\\ +\left(\sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i+1}\left(K_{in+1}-\frac{2K_{in+1}^1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]K_i^0(x)+\frac{(1-x)}{2}\right)\frac{(1-y)}{2}+\\ +\frac{x+y}{2}-\frac{(x+1)(y+1)}{4}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{(-1)^i\gamma_i\sigma_j+(-1)^j\gamma_j\sigma_i}{\lambda_i+\lambda_j}K_i^0(x)K_j^0(y)\end{array}\right),$$

$$\varphi_{1r}(x,y)=-\sum_{j=1}^{n}D_r K_{jr}^1 K_j^0(x)*\left(\frac{1-y}{2}\right)+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\sigma_j D_r K_{ir}^1}{\lambda_i+\lambda_j}K_i^0(x)K_j^0(y),$$

$$\varphi_{20}(x,y)=\varphi_{10}(-x,y),\varphi_{30}(x,y)=\varphi_{10}(-x,-y),\varphi_{40}(x,y)=\varphi_{10}(x,-y),$$
$$\varphi_{1r}(x,y)=\varphi_{1,n-r+1}(-x,y),\varphi_{2r}(x,y)=\varphi_{1,n-r+1}(-y,-x)=\varphi_{1,r}(y,-x),$$
$$\varphi_{3r}(x,y)=\varphi_{1,n-r+1}(-x,-y)=\varphi_{1,r}(x,-y),\varphi_{4r}(x,y)=\varphi_{1,r}(y,x). \tag{25}$$

Попередньо розклавши лінійні функції за многочленами K_i^0 та використовуючи (23), можна пересвідчитись у тому, що многочлен $-U_2^n(x,y)$ ортогональний кожному з многочленів вигляду $K_i^0(x)K_j^0(y)$, $i=1,..,n;\ j=1,..,n$ і кожна з функцій (25) наближено задовольняє рівнянню (10).

Наприклад, $\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{2}\right)K_i^0(x)dx=\delta_i=\int\limits_{-1}^{1}\sum\limits_{j=1}^{n}a_jK_j^0(x)K_i^0(x)=a_i\lambda_i$;

$\left(\frac{1+x}{2}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_jK_j^0(x)+\varepsilon$, звідки $\left(\frac{1+x}{2}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\delta_j}{\lambda_j}K_j^0(x)$,

$$\Delta\varphi_{2r}(x,y)=-\partial_{yy}\left(\sum_{j=1}^{n}D_rK_{jr}^1K_j^0(y)\right)\left(\frac{1+x}{2}\right)+\Delta\left(\sum_{ij=1}^{n}\frac{\delta_iD_rK_{jr}^1}{\lambda_i+\lambda_j}K_i^0(x)K_j^0(y)\right)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}D_rK_{jr}^1K_j^1(y)*\left(\frac{1+x}{2}\right)+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\delta_iD_rK_{jr}^1}{\lambda_i+\lambda_j}\Delta\left(K_i^0(x)K_j^0(y)\right)=-\sum_{j=1}^{n}D_rK_{jr}^1K_j^1(y)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}K_i^0(x)+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\delta_iD_rK_{jr}^1}{\lambda_i+\lambda_j}\left(K_i^0(x)K_j^1(y)+K_i^1(x)K_j^0(y)\right)+\varepsilon=-\sum_{j=1}^{n}D_rK_{jr}^1\left(\frac{-K_j^0(y)}{\lambda_j}\right)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}K_i^0(x)+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\delta_iD_rK_{jr}^1}{\lambda_i+\lambda_j}\left(K_i^0(x)\left(\frac{-K_j^0(y)}{\lambda_j}\right)+\left(\frac{-K_i^0(x)}{\lambda_j}\right)K_j^0(y)\right)+\varepsilon=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}D_rK_{jr}^1\left(\frac{K_j^0(y)}{\lambda_j}\right)*\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}K_i^0(x)-\sum_{ij=1}^{n}\frac{\delta_iD_rK_{jr}^1}{\lambda_i+\lambda_j}\left(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_j}\right)K_i^0(x)K_j^0(y)+\varepsilon=\varepsilon.$$

Тут всюди під ε розуміємо суму тих доданків, кожний з яких ортогональний многочленам $K_i^0(x)K_j^0(y)$, $1\le i\le n$, $1\le j\le n$.

Обчисливши коефіцієнти функцій (25) та знаючи значення розв'язку на межі області за формулою (24), можна знайти многочленне представлення функції $U_2(x,y)$.

Якщо кожну з базових функцій розкласти за степенями $Q_i(x)$, тобто

$$\varphi_{sr}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n+1}\overline{\varphi_{sr}^{ij}}Q_i(x)Q_j(y), \tag{26}$$

де $Q_1(x)=1-x$, а також обчислити $\varphi_{sr}^{wq}=\varphi_{sr}\left(\alpha_w,\alpha_q\right)$, $w=1,2,..,n$; $q=1,2,..,n$, то отримаємо представлення наближеного розв'язку через степені x.

6.Перенесення отриманих результатів на випадок довільних квадратів на площині. Розв'яжемо наступну задучу

$$-\Delta U(x,y)=f(x,y) \text{ при } (x,y) \quad G \tag{27}$$

$$U(x,y)/_{\partial G}=\phi(x,y), \tag{28}$$

де $G=\{(x,y)$: $x_0-h\le x\le x_0+h,\ y_0-h\le y\le y_0+h\}$.

Розв'язок даної задачі, як і попередньої, запишемо у вигляді $U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)$, де $U_1(x,y)$ – розв'язок задачі Діріхле

$$-\Delta U_1(x,y)=f(x,y),(x,y)\in G,U_1(x,y)/_{\partial G}=0, \tag{29}$$

а $U_2(x,y)$ - розв'язок задачі Діріхле

$$-\Delta U_2(x,y)=0,(x,y)\in G,U_2(x,y)/_{\partial G}=\phi(x,y). \tag{30}$$

Задачу (29) розв'яжемо , поширивши формули (11) та (13) на випадок області G наступним чином

$$U_1^n(x,y)=h^2\sum_{r,s=1}^{n}f_{rs}\psi_{rs}^n\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right), \tag{31}$$

де

$$f_{rs}=f\left(x_0+h\alpha_r;y_0+h\alpha_s\right). \tag{32}$$

Для розв'язування задачі (31) покладемо

$$\phi(x,y)=\begin{cases}\xi_1(x),y=y_0-h,\\ \xi_2(x),y=y_0+h,\\ \eta_1(y),x=x_0-h,\\ \eta_2(y),x=x_0+h,\end{cases}$$

і $a_1=\xi_1\left(x_0-h\right)=\eta_1\left(y_0-h\right),a_2=\xi_1\left(x_0+h\right)=\eta_2\left(y_0-h\right)$,

$a_4=\xi_2\left(x_0+h\right)=\eta_1\left(y_0+h\right),a_3=\xi_2\left(x_0-h\right)=\eta_2\left(y_0+h\right)$,

$$\xi_{1r}=\xi_1\left(x_0+\alpha_r h\right),\xi_{2r}=\xi_2\left(x_0+\alpha_r h\right),\eta_{1r}=\eta_1\left(y_0+\alpha_r h\right),\eta_{2r}=\eta_2\left(y_0+\alpha_r h\right).$$

Перенесемо формулу (24) на область G , врахуємо (31) і отримаємо

$$U^n(x,y)=U_1^n(x,y)+U_2^n(x,y)=h^2\sum_{r,s=1}^{n} f_{rs}\psi_{rs}^n\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)+$$

$$+a_1\varphi_{10}\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)+a_2\varphi_{20}\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)+a_3\varphi_{30}\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)+a_4\varphi_{40}\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)+ \quad (33)$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\left(\xi_{1r}\varphi_{1r}\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)+\eta_{2r}\varphi_{2r}\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)+\xi_{2r}\varphi_{3r}\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)+\eta_{1r}\varphi_{4r}\left(\frac{x-x_0}{h},\frac{y-y_0}{h}\right)\right).$$

Підведемо підсумки. Вище наведено розклади (15) та (27) базисних функцій ψ_{rs}^n та φ_{sr} за многочленами $Q_i(x)$ та $Q_j(y)$, а коефіцієнти цих розкладів при різних фіксованих n наведено в таблицях [5]. Тому наближений розв'язок $U^n(x,y)$ можна обчислити за формулою

$$U^n(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n+1}\Omega_{ij}Q_i\left(\frac{x-x_0}{h}\right)Q_j\left(\frac{y-y_0}{h}\right), \quad (34)$$

де

$$\Omega_{ij}=h^2\sum_{r,s=1}^{n} f_{rs}\overline{G_{rs}^{ij}}+a_1\overline{\varphi_{10}^{ij}}+a_2\overline{\varphi_{20}^{ij}}+a_3\overline{\varphi_{30}^{ij}}+a_4\overline{\varphi_{40}^{ij}}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\left(\xi_{1r}\overline{\varphi_{1r}^{ij}}+\eta_{2r}\overline{\varphi_{2r}^{ij}}+\xi_{2r}\overline{\varphi_{3r}^{ij}}+\eta_{1r}\overline{\varphi_{4r}^{ij}}\right).$$

Якщо необхідно знайти розв'язок задачі $U^n(x,y)$ лише у вузлах вибраної квадратури Лобато, то доцільно скористатися формулою

$$U^n(\alpha_w,\alpha_q)=h^2\sum_{r,s=1}^{n} f_{rs}\psi_{rs}^{wq}+a_1\varphi_{10}^{wq}+a_2\varphi_{20}^{wq}+a_3\varphi_{30}^{wq}+$$

$$+a_4\varphi_{40}^{wq}+\sum_{r=1}^{n}\left(\xi_{1r}\varphi_{1r}^{wq}+\eta_{2r}\varphi_{2r}^{wq}+\xi_{2r}\varphi_{3r}^{wq}+\eta_{1r}\varphi_{4r}^{wq}\right).$$

В цих формулах $\overline{G_{rs}^{ij}}=0$ при $i=1$ або $j=1$, f_{rs} - значення правої частини в точках (α_r,α_s), a_i-відомі значення $U(x,y)$ в кутових точках, $\xi_{sr}=\xi_s(\alpha_r),\eta_{sr}=\eta_s(\alpha_r)$ - відомі значення $U(x,y)$ у внутрішніх точках сторін квадрата, ψ_{rs}^{wq}, $\overline{\varphi_{sr}^{wq}}$-відомі коефіцієнти [5].

7.Розв'язування задачі Діріхле в довільних опуклих гладких криволінійних областях. Нехай межу опуклої області G можна описати параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in (-1;1], \tag{35}$$

де $x(t), y(t)$ неперерно диференційовані на $[-1,1]$ функції, причому $x(-1) = x(1),\ y(-1) = y(1)$.

Припустимо, що ця область повністю міститься у квадраті П: $[x_0-h;x_0+h]*[y_0-h;y_0+h]$.

Розв'яжемо задачу

$$-\Delta U = f(x,y) \text{ при } (x,y) \quad \Pi \tag{36}$$

$$U = \phi(x,y) \text{ при } (x,y) \in \partial G, \tag{37}$$

Розв'язок даної задачі запишемо у вигляді

$$U(x,y) = U_1(x,y) + U_2(x,y),$$

де $U_1(x,y)$ - розв'язок задачі Діріхле

$$-\Delta U_1(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \Pi;\ U_1/_{\partial\Pi} = 0, \tag{38}$$

а $U_2(x,y)$ - розв'язок задачі Діріхле

$$-\Delta U_2(x,y) = 0,\ (x,y) \in \Pi;\ U_2/_{\partial G} = \phi(x,y) - U_1(x,y). \tag{39}$$

Задачу (39) розв'яжемо, поширивши формули (11) та (13) на квадрат П наступним чином:

$$U_1^n(x,y) = h^2 \sum_{r,s=1}^{n} f_{rs} \psi_{rs}^n\left(\frac{x-x_0}{h}, \frac{y-y_0}{h}\right), \tag{40}$$

де

$$f_{rs} = f\left(x_0 + h\alpha_r; y_0 + h\alpha_s\right). \tag{41}$$

Для розв'язування задачі (40) спочатку кожній з $(4n+4)$ граничних точок квадратури квадрата П поставимо у відповідність точку перетину межі області G та прямої, що сполучає цю точку з центром квадрата. (виходячи з опуклості області кожна така точка єдина). Позначимо ці точки (x_w,y_w), $w=1,2,..,4n+4$. Тоді

$$U_2^n(x,y) = \sum_{t=1}^{4n+4} L_t \varphi_t\left(\frac{x-x_0}{h}, \frac{y-y_0}{h}\right), \tag{42}$$

де $\varphi_t(X,Y)$ - послідовно пронумеровані функції з (25), а числа L_t визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\sum_{t=1}^{4n+4} L_t\varphi_t\left(\frac{x_w-x_0}{h},\frac{y_w-y_0}{h}\right)=\phi\left(x_w,y_w\right)-U_1^n\left(x_w,y_w\right),\ w=1,2,..,4n+4. \quad (43)$$

8.Представлення про реальну величину відносної похибки. В табл.1 наведені числові значення відносної похибки при наближенні розв'язку задачі Діріхле, коли розв'язком є відома функція $y=e^{x+y}$, а межа області G описується параметричним рівнянням $\begin{cases} x=m\times\cos(\pi\times t)/2 \\ y=m\times\sin(\pi\times t)\end{cases}$, $t\in(-1;1]$, де m – дійсне число.

Табл.1.

$n \backslash h$	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
1	2^{0}	2^{0}	2^{-2}	2^{-4}	2^{-6}	2^{-9}	2^{-12}	2^{-15}	2^{-18}	2^{-20}	2^{-23}
3	2^{-1}	2^{-4}	2^{-8}	2^{-11}	2^{-15}	2^{-19}	2^{-24}	2^{-29}	2^{-34}	2^{-39}	2^{-44}
5	2^{-4}	2^{-8}	2^{-13}	2^{-18}	2^{-24}	2^{-31}	2^{-38}	2^{-44}	2^{-51}	2^{-57}	—
7	2^{-7}	2^{-13}	2^{-20}	2^{-26}	2^{-35}	2^{-43}	2^{-50}	—	—	—	—

Тут $n+1$ степінь многочленів при описаному многочленному наближенні. При цьому використані більш точні вісімнадцятицифрові значення коефіцієнтів з формули (35) . Проте, якщо використати табличні значення, то вказана точність має місце при похибках , які не перевищують 10^{-7} (2^{-22}), тобто знаходяться в межах представлення семи-, або восьмицифрових чисел. Ця точність є достатньою для практичних потреб. Табличні значення наведені з метою ілюстрації теоретичних оцінок.

Взагалі кажучи, має місце твердження про те, що відхилення точного розв'язку $U(x,y)$ від наближеного $U^n(x,y)$ в метриці Соболевського простору W_2^1 має порядок $O(h^k)$, якщо для цього розв'язку всі похідні $D^\alpha U$, $|\alpha|\le k$ належать W_2^1.

1. Дзядик В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.- К.: Наук. думка, 1988.- 304с.
2. Янчук П.С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений // В кн. : Ин-т матем. АН УССР, 1989.- С.112-121.
3. Янчук П.С. Апроксимаційно-ітеративні схеми кусково-многочленного наближення // Волинський математичний вісник.- №2.- 1995.- С.180-184.
4. Янчук П.С., Шпортько О.В. Кусково-многочленне наближення розв'язків задачі Діріхле в L-подібних областях // Волинський математичний вісник.- №2.- 1995.- С.181-183.
5. Янчук П.С. Многочленно-сітковий спосіб наближеного розв'язування крайових задач // Волинський математичний вісник.- №3.- 1996.- С.139-145.
6. Янчук П.С., Шпортько О.В. Про многочленне наближення розв'зків задачі Діріхле для рівняння Пуасона // Волинський математичний вісник.- №4.- 1997.- С.183-187.

Рівненський державний педагогічний інститут, Рівне

Анотації

Барановский С.В., Бомба А.Я. О АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ В ОБЛАСТЯХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ И ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗМЫВОВ. // Разработан метод приближения решений одного класса нелинейных сингулярно возмущенных задач для уравнений конвективной диффузии в областях со свободными границами, где коэффициент диффузии зависит не только от искомой функции, но и от переменной во времени свободной границы области. На этой основе предлагается подход к моделированию и исследованию процессов деформации дна, которые возникают при обтекании цилиндрических препятствий водным потоком.
Baranovsky S.V., Bomba A.Ya. ON ASYMPTOTIC APPROACH OF THE DECISIONS FOR ONE CLASS NONLINEAR SINGULAR-PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMS IN DOMAINS WITH FREE BORDERS AND PROBLEMS OF BOTTOM-DEFORMATION MODELING. // Method of approximate solution for one class of non-linear singular perturbed problems for equations of convective diffusion for case when diffusion coefficient depends on the domain boundary position variable in time, is developed. Modeling and research technique of bottom-deformation processes near cylinder obstacles is proposed on the basis of this method.

Барняк М.Я., Барняк О.М. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ СИМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ. // Задача расматривается для полости, которая имеет форму тела вращения. Эта задача сводится к системе интегро-диференциальных уравнений, приблеженные решения которой строятся с помошью проекционных методов.
Barnyak M.Ya., Barnyak O.M. CONSTRACTION OF SOLUTION OF THE PROBLEM ON PROPER SYMMETRIC OSCILLATIONS OF VISCOUS IN A VESSEL. // The problem is considered for a vessel having the form of a rotetion solid. This problem is reduced to the system of integro-differential equations, approximate solutions of which are constructed with the help of projection methods.

Бомба А.Я., Каштан С.С., Кузьменко А.П. О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. // Метод Р-трансформаций Г.Положия эффективно использован при решении нелинейных обратных краевых задач на конформные отображения.
Bomba A.Ya., Kashtan S.S., Kuzmenko A.P. ABOUT USAGE OF SUMMARY REPRESENTATION METHOD FOR SOLVING NONLINEAR INVERTED BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL REFLECTIONS. // H.Poloji`s P-transformation method is used for solving nonlinear inverted boundary value problems on conformal reflections.

Бомба А.Я., Хлапук Н.Н. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГРАДИЕНТОВ НАПОРА НА ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕДАХ. // Построена локально нелинейная модель процесса фильтрации в зернистых средах, где при больших градиентах напора имеют место суффозионные деформации, на основе модификации закона Дарси. На примерах осесимметричной фильтрации предлагается подход к решению соответствующих нелинейных краевых задач с последействием, а также задач о стабилизации среды.
Bomba A.Ya., Kchlapyk M.M. MODELLING OF HEAD GRADIENTS INFLUENCE ON FILTRATION PROUSS IN MEDIANY THAT AU UNDER DEFORMATION. // Local noulinear model of filtration process based ou Darcy's lan is bnilt for grain porous mediums, urhere somme suffosion deformation may occur under the great head gradients. Some

aproach is suggested to solve correspondent bondary problem of filtration with attereffect and also for medium stabilization problems using some axysymmetrical examples.

Дейнека В.С., Благовещенская Т.Ю. АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ВЛАГОПЕРЕНОСА-ФИЛЬТРАЦИИ В ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ. // Приведена обобщенная математическая модель влагопереноса-фильтрации в многокомпанентных средах с тонкими включениями. Разработаны высокоточные алгоритмы ее дискретизации. Описаны основные функции автоматизированного програмно-алгоритмического комплекса.

Deineka V.S., Blagoveshchenskaja T.J. AUTOMATION OF LIQUID-TRANSFER AND FILTRATION IN SOIL ENVIRONMENTS WITH INCLUSIONS CALCULATION. // The generalized mathematical model of liquid-transfer and filtration in multicomponent environment with thin inclusions have been considered. High-precise calculus algorithms have been suggested. The computer-aided programm and algorithmic complex main operations have been described.

Дейнека В.С., Марченко О.А. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА С ЗАДАННЫМ ДАВЛЕНИЕМ НА РАЗРЕЗЕ. // Рассмотрена смешанная краевая задача теории упругости с заданным давлением на разрезе. Построены обобщенные задачи. Доказаны существование и единственность разрывного решения. Построены вычислительные схемы повышенного порядка точности ее дискретизации. Приведены результаты решения модельного примера.

Deineka V.S., Marchenko O.O. ELEVATED ORDER ACCURACY COMPUTATIONAL SCHEMES FOR THE ELASTIC EQUILIBRIUM PROBLEM FOR THE BODY WITH GIVEN PRESSURE ON THE SECTION. // Elasticity theory mixed boundary problem with given pressure on the section is described. Generalized problems have been built. Rupture solution existence and uniquence have been proved. Elevated accuracy order computational schemes for given problem discretization have been built. Illustrative example solution results are given.

Доценко С.М., Турбал Ю.В. О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СКАЧКА ТРАЕКТОРИИ МОДЕЛИ РАДИОАКТИВОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ. // Рассматриваются некоторые достаточные условия скачка траектории случайного процесса, который может служить моделью радиоактивного загрязнения.

Dotsenko S.M., Turbal Y.V. ABOUT THE SUFFICIENT CONDITIONS OF TRAJECTORY JUMPING FOR THE MODEL OF RADIOACTIVE POLLUTION. // In this paper is investigated some sufficient conditions of the trajectory jumping for the probability process, which can be considered as a model of radioactive pollution.

Дубовик А.В., Копытко М.Ф. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНОЙ МКЭ. // Предложен подход к исследованию задач однокомпонентной фильтрации в трехмерной постановке. Как пример, решена задача в цилидрической области с цилиндрическим исключением, ось которого направлена вдоль радиуса внешней области.

Dubovick A.V., Kopytko M.F. SOLVING THE FILTRATION PROBLEM IN CYLINDRICAL DOMAIN WITH A HORIZONTICAL WELL BY FEM. // An approach to the investigation of single-component filtration problems in 3D formulation is proposed. As an example, a problem in cylindrical domain with cylindrical exclusion, the axis of which is directed along the radius of the outer domain, was solved.

Жигалло К.М. ТЕОРЕМА ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА. // Получено аналог теоремы типа Харди-Литтлвуда для L_p-нормы произвольного четного порядка функции, что является решением задачи Дирихле для полосы $A=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,\ 0<y<\eta\}$ с симметричными

граничными значениями, по касательному направлению.
Zhigallo K.M. THE THEOREM OF HARDY-LITTLWOOD'S TYPE FOR DERIVATIVES OF ANY EVEN ORDER. // We have obtained an analog of Hardy-Littlwood's type theorem for L_p-norm of any even order of function, that is the solution at the strip $A=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,\ 0<y<\eta\}$ of Dirichlet's problem with symmetrical boundary values in the direction of the tangent.

Козаревская Ю.С., Шинкаренко Г.А. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МИГРАЦИИ ПРИМЕСЕЙ: СТАБИЛИЗИРУЮЩАЯ СХЕМА ДУГЛАСА-ВАНГА. // Для решения задачи миграции субстанции с преобладающей конвекцией в несжимаемой среде использовались кусочно-кубические аппроксимации Эрмита на треугольниках. Применение стабилизирующей схемы Дугласа-Ванга существенно улучшает свойства численного решения. Приведены результаты численных исследований.
Kozarevska Y.S., Shinkarenko G.A. REGULARIZATION OF THE NUMERICAL SOLUTIONS OF THE VARIATIONAL POLUTE TRANSPORT PROBLEM: A DOUGLAS-WANG FINITE ELEMENT APPROACH. // Pice-wise cubic Hermite approximations on triangles are used for solving convection dominated transport problem in the incompressible field. The application of Douglas-Wang finite element approach to the problem noticably improves numerical solution properties. Numerical results are presented.

Кузнєцов Г.В., Яшин О.А. ПРО КОНФОРМНУ ВІДПОВІДНІСТЬ МІЖ РІЗНИМИ ПРОСТОРАМИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ГЕМОДИНАМІЦІ. // Розглядається конформна відповідність між евклідовими просторами, а також між евклідовими і рімановими просторами. Показано, що ця відповідність в парному випадку породжує збіжне, а в другому – циркулярне векторні поля. Наведені деякі застосування отриманих результатів в гемодинаміці із застосуванням методу зовнішніх диференціальних форм.
Kuznetsov G.V., Yashin A.A. ABOUT CONFORMAL CONFORMITY BETWEEN VARIOUS SPACES AND HIS APPENDIX IN HEMODYNAMICS. // In the given work are considered conformal of conformity between euclidean, and also between euclidean and riemannian by spaces. The example of the appendices in hemodynamics is resulted.

Лопатин А.К., Хомченко Л.В. КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ В СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. // В данной работе, используя метод тригонометрической интерполяции П.Ф.Фильчакова, предложен алгоритм приведения существенно нелинейных систем второго порядка с аналитическими коэффициентами к квазилинейным системам.
Lopatin A.K., Khomchenko L.V. THE METHODS OF CONSTRUCTION OF VIBRATION REGIMES AND STUDYING OF THEIR STABILITY IN ESSENTIAL NONLINEAR SYSTEMS OF SECOND ORDER WITH ANALYTICAL COEFFICIENTS. // Using the method of trigonometric interpolation the algorithm of reducibility of essential nonlinear systems of second order with analytical coefficients is suggested to quasilinear systems.

Лотюк Ю.Г., Янчук П.С. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЕФИЦИЕНТАМИ. // Метод продолжения по параметру применен к задаче Дирихле для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами. При построении вычислительных схем использовано экономные схемы для многочленного приближения решений задачи Пуассона.
Lotyuk Yu.H., Yanchuk P.S. APPROXIMATE SOLUTION THE DIRICHLET'S PROBLEM FOR AN ELLIPTICAL EQUATION WITH VARIABLE FACTORS. //

Homotopy method is applied to the Dirichlet's problem for an elliptical equation with variable factors. With a construction of the computing schemes is used the economical schemes for a polynomial approximation solutions of the Poisson equation.

Лукомський В.П., Ганджа І.С., Лукомський Д.В. К ТЕОРИИ РАВНОМЕРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. // Представлен новый метод анализа нелинейных осциляторных явлений для систем с одной степенью свободы, описываемых уравнениями движения без малого параметра. Эффективность метода продемонстрирована на примере исследования свободных и вынужденных колебаний осцилятора со степенной нелинейностью.
Lukomsky V.P., Gandzha I.S., Lukomsky D.V. ON THE THEORY OF THE UNIFORM EXPANSIONS OF THE PERIODIC SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS. // We present a new method of the analisys of single degree of freedom nonlinear oscillation fenomena governed by an equation of motion without small parameter The usefullness and effectiveness of the method are demonstrated on the example of the study of free and excited oscillations of oscillator with the power nonlinearity.

Ляшко И.И., Ляшко С.И., Демченко В.Ф., Демченко Л.И., Клюшин Д.А. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ. // Для трехмерной задачи фильтрации двухфазной жидкости построена консервативная разностная схема и высокоэффективный алгоритм решения системы нелинейных алгебраических уравнений.
Lyashko I.I., Lyashko S.I., Demchenko V.F., Demchenko L.I., Klyushin D.A. NUMERICAL SIMULATION OF MULTIPHASE FLOW IN POROUS MEDIA. // Conservative difference scheme and effective algorithm for solving system of nonlinear algebraical equations are developed for simulation of 3D multiphase flow in porous media.

Ляшко С.И., Потапенко Л.И., Пришляк Е.А., Стеля О.Б. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧАХ МАССОПЕРЕНОСА. // Рассмотрены задачи оптимального управления для уравнения конвективной диффузии: идентификации функции источника загрязнения и задача построения решения, управляемого граничным условием.
Lyashko S.I., Potapenko L.I., Pryshlyak K.O., Stelya O.B. OPTIMAL CONTROL IN MASS TRANSFER PROBLEMS. // Some optimal control problems for a transport equation are considered: identifying of a source of contamination and finding of solution, controlled by a boundary condition.

Палиенко Л.И., Номировский Д.Ю., Песцов Р.В., Спивак О.Ю. ОПТИМАЛЬНОЕ ИМПУЛЬСНО-ТОЧЕЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. // В данной статье доказывается существование оптимального управления системами, которые описываются псевдогиперболическими уравнениями с правыми частями, принадлежащими некоторому негативному гильбертову пространству.
Palienko L.I., Nomirovsky D.Y., Peschov R.V., Spivak O.Y. OPTIMAL POINT-IMPULSE CONTROL OF THE PSEVDOHYPERBOLIC SYSTEM WITH DISTRIBUTED PARAMETERS. // It is proved the existence of optimal control of the systems which are described by the psevdohyperbolic equations with the right hands which belong to the negative Hilbert space.

Прикарпатський А.К., Блекмур Д.Л. ПРО РОЗВ'ЯЗОК ЛАКСА РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА-ЯКОБІ. // Доповідь присвячена доведенню розв'язку Лакса рівняння Гамільтона-Якобі, яке засноване на теорії Гамільтонових систем і теорії напівнеперервних випуклих функцій. Загальний підхід до таких розв'язків приводить до точних inf-функціональних виразів, досить зручних для розрахунків на ПК.
Прикарпатский А.К., Блекмур Д.Л. О РЕШЕНИИ ЛАКСА УРАВНЕНИЯ

ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ. // Сообщение посвящается доказательству решения Лакса уравнения Гамильтона-Якоби, базировавшигося на теории Гамильтоновых систем и теории полунепрерывных опуклых функций. Общий подход к таким решениям приводит к точным inf-функциональным выражениям, достаточно удобен для расчета на ПК.

Савыч В.А. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ДВУЗНАЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. // Определяется, для скольких точек A задание мультимножеств A-точек однозначно определяет двузначную алгебраическую функцию.
Saveach V.A. SOME UNIQUENESS THEOREMS FOR TWO-DIGIT ALGEBRAIC FUNCTIONS. // The number of points A for which the multisets of A-points uniquely determine two-digit algebraic function, is found.

Сидорчук Б.П. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕДАХ. // Методика моделирования нелинейных возмущений, которые возникают на участках действия больших градиентов перенесена на случаи слоистых сред.
Sedorchuk B.P. ABOUT THE MATHEMATICS MODELLING OF FILTRATION NOULINEAR PROCESS INTO THE DEFORMATING SPHERE. // The way of modelling perturbation of noulinear the great head gradients correspondent to the sphere.

Скопецкий В.В., Дейнека В.С. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ. // Получены новые задачи фильтрации жидкости в средах с тонкими сильно- и слабопроницаемыми включениями. Построены высокоточные вычислительные схемы их дискретизации.
Skopetsky V.V., Deineka V.S. THE FILTRATION PROBLEMS IN THE MEDIA WITH THE THIN INCLUSIONS. // The new formulations of the problems concerned the filtration of liquid on the media with thin highly and low percolative inclusions were obtained. The high precitions numerical schemes of discratization are designed.

Стеля Л.П. АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД НА БАЗЕ ГИС MAPINFO. // Предложена автоматизированная система обработки исходных данных и визуализации результатов моделирования загрязнения грунтовых вод на основе ГИС MapInfo. Приведены примеры использования.
Stelya L.P. AN AUTOMATIC SYSTEM FOR VISUALISATION OF COMPUTATION RESULTS OF GROUNDWATER CONTAMINATION ON THE BASIS OF A GIS MAPINFO. // An automatic system for input data processing and for visualisation of results of groundwater contamination modelling on the basis of a GIS MapInfo is proposed. Some examples of its use are given.

Стеля О.Б., Ходоровский М.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СИСТЕМЕ МОНИТОРИНГА ПЛОЩАДКИ ОБЪЕКТА “ВЕКТОР” (30-КМ ЗОНА ЧАЭС). // Рассмотрены некоторые математические модели потока и транспорта загрязнений в насыщенно-ненасыщенных пористых средах. Приведены примеры их использования для решения экологических проблем 30-км зоны ЧАЭС.
Stelya O.B., Khodorovsky M.S. MATHEMATICAL MODELLING IN A MONITORING SYSTEM OF THE OBJECT “VECTOR” SITE (30-KM ZONE OF CHORNOBYL NPP). // Some mathematical models of flow and contaminant transport in saturated-unsaturated porous media are considered. Some examples of their using for environmental problems solving in 30-km zone of Chornobyl NPP are given.

Сяський В.А., Сяський А.А. СМЕШАННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ И

ЖЕСТКОГО ДИСКА. // Предложено решение задачи о контактном взаимодействии жесткого диска с криволинейным отверстием бесконечной пластинки при наличии на линии розделения материалов зон спая, гладкого контакта и отставания.
Syasky V.A., Syasky A.A. THE BLEND CONTACT PROBLEM FOR ENDLESS PLATE WITH CURVELINEAR HOLE AND HARD DISK. // The solution of problem about contact interaction of hard disk and curvelinear hole of endless plate is proposed.

Харкевич Ю.И. О ПРИБЛИЖЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА КЛАССОВ (ψ,β)-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМИХ ФУНКЦИЙ. // Получены асимптотические равенства для верхних граней отклонения функций класса $C_{\psi}^{\beta}H^{\alpha}$ от их гармонических интегралов Пуассона.
Harkevich U.I. ABOUT APPROXIMATION OF CLASSES (ψ,β)-DIFFERENTIAL FUNCTIONS BY HARMONIC INTEGRALS OF POISSON. // The asymptotic equalities for upper sides of deflection of functions of class $C_{\psi}^{\beta}H^{\alpha}$ from their harmonic integrals of Poisson are obtained.

Янчук П.С., Шпортько О.В. О МНОГОЧЛЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБЛАСТЯХ. // Предлагается формула для представления приближенного решения задачи Дирихле в квадрате в виде многочлена. Коэффициенты приближенного решения выражаются из значения правой части уравнения Пуассона в избранных точках, а также известные значения решения в избранных точках на границе области. Предложенные схемы можно использовать для быстрого и качественного решения задачи Дирихле в квадрате. В статье показано, как использовать полученные результаты для приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в произвольных областях с криволинейной границей.
Yanchuk P.S., Sportko A.V. ABOUT POLINOMIAL APPROXIMATION OF THE DECISION OF A PROBLEM DIRICHLE FOR THE EQUATION OF POISSON IN CURVILINEAR AREA. // Is offerred formula for the presentation deciding a problem Dirichle in the square in the manner of multinomial. The Factors approximation deciding are expressed through values a right of part of equations of Poisson in elected spots, as well as known values of deciding in elected spots on the border of area. Offered schemes possible to use for quick and qualitative deciding a problem Dirichle in the square. In close-down shown, how to use tin results for approximation deciding a problem Dirichle for equation of Poisson in free areas with curvilinear border.