Волинський математичний вісник

Випуск 6

1999

"**Волинський математичний вісник**" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики та інформатики. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

The "**Volyn Mathematical Bulletin**" publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics and informatics. Recommended for research workers, teachers of higher schools, post graduates and senior year students.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті
при сприянні Українського математичного товариства,
Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова,
Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
Кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 260-444.

ISBN 966 - 7281 - 02 - 8

Зміст

Застосування математичних методів

Короткі повідомлення

УДК 517.5

Столярчук В.К., Мартинюк П.М.

АСИМПТОТИЧНО НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ І СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Для важливіших цілих елементарних та спеціальних функцій досліджені області і швидкості збіжності раціональних поліномів вигляду $P_n(x)/Q_m(x)$ *при* $\forall n \in N$ *і m=1,2.*

В [3] і [4] і автори, використовуючи методику , запропоновану в [1], побудували для $\forall n \in N$ і *m=1,2* раціональні поліноми вигляду $P_n(x)/Q_m(x)$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - алгебраїчні многочлени степенів відповідно *n* і *m*, які здійснюють на сегменті $[-h,h]$ асимптотично найкраще рівномірне наближення важливіших елементарних і спеціальних функцій $f(x)$ в тому розумінні, що виконуються співвідношення

$$\left\| f(x) - R_{n,m}(x) \right\|_{C_{[-h,h]}} \le (1+\alpha_{n,m})\, E_{n,m}(f)_{C_{[-h,h]}}, \tag{1}$$

де $\alpha_{n,m} = \alpha_{n,m}(x,h) \to 0, n \to \infty, E_{n,m}(f)$ - величина найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ за допомогою раціональних поліномів порядку *(n,m)*.

Обмежимося розглядом функції ймовірностей $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ і більш детально викладемо результати, які анонсовані в [4]. Для функцій $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha, \ln(1+x)$, функцій Бесселя $J_0(x), J_1(x)$, гіпергеометричних функцій $F(1,\gamma+1,x)$ і ін. міркування проводяться аналогічно.

В [5] першим із авторів ефективно побудовані непарні алгебраїчні многочлени $y_{2n+3}(x)$, які на сегменті $[-h,h]$ здійснюють близьке до найкращого рівномірне наближення функції ймовірностей $y(x)$ таким чином, що справедлива рівність

$$y(x) - y_{2n+3}(x) = \tau\left(T_{2n+5}\left(\frac{x}{h}\right) + \int_0^x \frac{\partial^2\left(\int_t^x e^{-t^2-u^2} du\right)}{\partial t^2} T_{2n+5}\left(\frac{t}{h}\right) dt \right) = \tau\left(T_{2n+5}\left(\frac{x}{h}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \tag{2}$$

де $\tau = \tau(h,n)$ - числа, які обчислюються за допомогою формул, що містять скінченне число арифметичних операцій і з швидкістю величини найкращого наближення $E_{2n+5}(y;x)$ прямують до нуля, коли $n \to \infty, T_{2n+5}(t) = \cos((2n+5)\arccos t)$ - многочлени Чебишева порядку *(2n+5)*.

Покажемо тепер, як, відштовхуючись від многочленів $y_{2n+3}(x)$, можна одержати раціональну апроксимацію функції ймовірностей.

Теорема 1. Нехай $y_{2n+3}(x)=\sum_{k=1}^{n+2}c_{2k-1}x^{2k-1}$ - многочлени, побудовані за А-методом для наближення функції ймовірностей $\Phi(x), x\in[-h,h], h>0$, а $P_{2n-1}(x)$ і x^2+a - многочлени, які задовольняють рівняння

$$y_{2n+3}(x)(x^2+a)=P_{2n-1}(x)+\tau_{2n+3}T_{2n+3}(\frac{x}{h})+\tau_{2n+5}T_{2n+5}(\frac{x}{h}), \qquad (3)$$

в якому $a,\tau_{2n+3},\tau_{2n+5}$ - деякі невідомі параметри. Тоді для раціональної функції $R_{2n-1,2}=\frac{P_{2n-1}(x)}{(x^2+a)}$ справедлива асимптотична нерівність

$$\left\|\Phi(x)-R_{2n-1,2}(x)\right\|_{C_{[-h,h]}}\le(1+O(\frac{1}{n}))\,E_{2n-1,2}(\Phi)_{C_{[-h,h]}}, \qquad (4)$$

де $E_{2n-1,2}(\Phi)_{C_{[-h,h]}}$ - величина найкращого рівномірного наближення функції $\Phi(x), x\in[-h,h], h>0$, раціональними функціями порядку *(2n-1,2)*.

Доведення. Перш за все відмітимо, що згідно з А-методом многочлен $y_{2n+3}(x)$ є розв'язком операторного рівняння

$$y_{2n+3}(x)+2\int_0^x\int_o^t uy'_{2n+3}(u)dudt-x=-\tau T_{2n+5}(\frac{x}{h}), \qquad (5)$$

побудованого, виходячи з інтегрального рівняння Вольтерри $y(x)+2\int_0^x\int_o^t uy'(u)dudt-x=0$, $x\in[-h,h]$, розв'язком якого є функція ймовірностей $\Phi(x)$.

Прирівнюючи коефіцієнти при трьох найвищих степенях x в рівняннях (3) і (5), одержимо систему з шести рівнянь з невідомими $a,\tau_{2n+3},\tau_{2n+5},c_{2n-1},c_{2n+1},c_{2n+3}$. Розв'язуючи її, знаходимо

$$\begin{aligned}
&a=n+(1-\frac{h^2}{2})+O(\frac{1}{n}),\\
&\tau_{2n+3}=\tau(\frac{4n}{h^2}+O(1)), \qquad (6)\\
&\tau_{2n+5}=-\tau(n+3+O(\frac{1}{n})),
\end{aligned}$$

де τ - параметр, який фігурує в рівності (2).

Оцінимо величину $\left\|\Phi(x)-R_{2n-1,2}(x)\right\|_{C_{[-h,h]}}$. Виходячи з рівнянь (3) і (2) і враховуючи співвідношення (6), отримаємо

$$\Phi(x)-R_{2n-1,2}(x)=\Phi(x)-y_{2n+3}(x)+y_{2n+3}(x)-y(x)=$$

$$=\tau\left(T_{2n+5}(\frac{x}{h})+\int_0^x\frac{\partial^2\left(\int_t^x e^{-t^2-u^2}du\right)}{\partial t^2}T_{2n+5}(\frac{t}{h})dt+\frac{4n/h^2+O(1)}{x^2+n+1-h^2/2+O(1/n)}T_{2n+3}(\frac{x}{h})-\right. \qquad (7)$$

$$\left.-\frac{n+3+O(\frac{1}{n})}{x^2+n+1-h^2/2+O(1/n)}T_{2n+5}(\frac{x}{h})\right)=\frac{4\tau}{h^2}(1+\alpha_n)\left(T_{2n+3}(\frac{x}{h})+O(\frac{1}{n})\right)$$

де $\alpha_n = \alpha_n(x,h) = O(\frac{1}{n}), n \to \infty$.

Оскільки при достатньо великому натуральному n в усіх точках сегмента $[-h,h]$ $|\alpha_n| < 1$ і $O(\frac{1}{n}) < 1$, то згідно з (7) різниця $\Phi(x) - R_{2n-1,2}(x)$ в *(2n+4)* екстремальних точках многочлена Чебишева $T_{2n+3}(\frac{x}{h})$ приймає значення із знакопочережними знаками. Тоді на основі теореми Валле-Пуссена при таких n виконуються нерівності

$$E_{2n+3,2}(\Phi(x))_{C_{[-h,h]}} \geq \frac{4|\tau|}{h^2}(1-|\alpha_n|)(1-O(\frac{1}{n})) \Rightarrow$$
$$|\tau| \leq \frac{h^2}{4} \cdot \frac{E_{2n+3,2}(\Phi(x))_{C_{[-h,h]}}}{(1-|\alpha_n|)(1-O(\frac{1}{n}))} \tag{8}$$

З іншого боку, на основі співвідношення (7) при тих самих натуральних n справедлива нерівність

$$\|\Phi(x) - R_{2n+3,2}(x)\|_{C_{[-h,h]}} \leq \frac{4|\tau|}{h^2}(1+|\alpha_n|)(1+O(\frac{1}{n})). \tag{9}$$

З нерівностей (8) і (9) нерівність (4) випливає як наслідок.
Теорема 1 доведена.

Нехай $W = \frac{z}{h} + \sqrt{\frac{z^2}{h^2} - 1}$ - функція, яка конформно і однолистно відображає область $D = C \setminus [-h,h]$ на область $|W| > 1$. Позначимо при довільному $R>1$ через B_R область, яка обмежена лінією рівня $\Gamma_R = \{z : |W(z)| = R\}$.

Зрозуміло, що рівність (7) залишається справедливою і при комплексних $z \in [-h,h]$, якщо за многочлени Чебишева в комплексній області прийняти многочлени вигляду

$$T_{2n+3}\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{1}{2}\left(W^{2n+3}\left(\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{W^{2n+3}\left(\frac{z}{h}\right)}\right). \tag{10}$$

Теорема 2. При будь-якому $R>1$ апроксимаційні поліноми $R_{2n-1,2}(z)$, які побудовані для відрізка $[-h, h]$, здійснюють близьке до найкращого рівномірне наближення функції $\Phi(z)$ в замкненій області $\overline{B_R}$ в тому розумінні, що виконується співвідношення

$$\|\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)\|_{C_{(\overline{B_R})}} \leq \left(1 + \varepsilon_n(R)\right) \cdot E_{2n-1,2}(\Phi)_{C_{(\overline{B_R})}}, \tag{11}$$

де $\varepsilon_n(R) \to 0$ при $n \to \infty$ і $E_{2n-1,2}(\Phi)$ - величина найкращого рівномірного наближення функції $\Phi(z)$ в замкненій області $\overline{B_R}$ за допомогою раціональних поліномів порядку (2n-1, 2).

Доведення. Покладемо $t_n(z) = \int\limits_{[0,z]} T_{2n+5}\left(\frac{\xi}{h}\right) d\xi$. Внаслідок того, що $\|t_n\|_{C_{[-h,h]}} \leq \frac{2}{2n+5}$, отримаємо

$$|t_n(z)| \leq \frac{2}{2n+5}|W(Z)|^{2n+6}, \; z \in B_{\overline{R}}, \tag{12}$$

і, значить,

$$|t_n(z)| \le \frac{2R^{2n+6}}{2n+5}. \qquad (13)$$

Інтегруючи тепер за частинами на відрізку [0, z] другий доданок в правій частині рівності (7), одержимо для різниці $\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)$ таке зображення

$$\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z) = \frac{2\tau}{h^2}\left(1+\tilde{\alpha}_n\right)\cdot W^{2n+3}\left(\frac{z}{h}\right)\cdot\left(1+\beta_n(z)\right), \qquad (14)$$

де $\tilde{\alpha}_n$ і $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Оскільки різниця $\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)$ при достатньо великих n має на відрізку [-h, h] рівно $2n$+3 нулі, то згідно леми 3.1 з роботи [2] маємо

$$E_{2n-1,2}(\Phi)_{C_{(\overline{B_R})}} \ge \min_{z\in\partial B_R}\left|\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)\right| = \frac{2|\tau|}{h^2}\left(1-|\tilde{\alpha}_n|\right)\cdot R^{2n+3}\cdot\min_{z\in\partial B_{\overline{R}}}\left|1+\beta_n(z)\right| \qquad (15)$$

З іншого боку, з рівності (14) одержуємо оцінку зверху

$$\left\|\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)\right\|_{C_{(\overline{B_R})}} \le \frac{2|\tau|}{h^2}\left(1+|\tilde{\alpha}_n|\right)\cdot R^{2n+3}\max_{z\in\partial B_{\overline{R}}}\left|1+\beta_n(z)\right|. \qquad (16)$$

З нерівності (15) і (16) і випливає твердження теореми 2, яке виражається співвідношенням (11).

Теорема 2 доведена.

1. *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.- Киев: Наукова думка, 1988.- 303 с.
2. *Дзядык В.К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций sinz, cosz, shz, chz // Математический сборник.- 1979.- Т.108 (150), №2.- С.247-267.
3. *Кравчук В.Р.* Про один простий спосіб раціональної апроксимації функцій // Український математичний журнал.- 1992.- 44, №7.- с.998-1000.
4. *Столярчук В.К., Мартинюк П.М.* Побудова дробово-раціональних функцій, які здійснюють близьке до найкращого рівномірне наближення деяких спеціальних та елементарних функцій. В кн.:Теорія апроксимацій та чисельні методи. Тези доповідей Міжнародної конференції, присвяченої 100-річчю з дня народження Є.Ремеза. Рівне - 1996.- С.78.
5. *Столярчук В.К.* О построении для функций Six и $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ многочленов, которые осуществляют их приближение, близкое к наилучшему // Український математичний журнал.- 1974.- 26, №2.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
Рівненський державний технічний університет, Рівне

Столярчук В.К., Мартынюк П.М. АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШЕЕ РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ // *Для важнейших целых элементарных и специальных функций исследованы области и скорости сходимости рациональных полиномов вида* $P_n(x)/Q_m(x)$ *для* $\forall n \in N$ *и m=1,2.*

Stolyarchuk V.K., Martinyuk P.M. THE BEST APPROXIMATION OF THE ELEMENTARY AND SPECIAL FUNCTIONS BY FRACTIONAL POLYNOMIALS IN THE COMPLEX PLANE // *Domains and rates of convergence of rational polynomials* $P_n(x)/Q_m(x)$ *for* $\forall n \in N$ *and m=1,2 are investigated for essential integer elementary and special functions.*