

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

Випуск 6

1999

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики та інформатики. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics and informatics. Recommended for research workers, teachers of higher schools, post graduates and senior year students.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Редакційна колегія :

Бейко І. В.
Боднар Д. І.
Бомба А. Я. (відповідальний редактор)
Бурак Я. Й.
Войтович М. М.
Гарашенко Ф. Г.
Грищик В. В.
Каштан С. С. (технічний секретар)
Ковтунець В. В.
Кратко М. І.
Мельник В. М.
Попов Б. О.
Прикарпатський А. К.
Пташник Б. Й.
Савула Я. Г.
Скопечкий В. В. (головний редактор)
Сулим Г. Т.
Сяський А. О.
Сяський В. А. (секретар)
Хома Г. П.
Шинкаренко Г. А.
Янчук П. С.
Ясній П. В.

Editorial board :

Byeko I. V.
Bodnar D. I.
Bomba A. Ya. (editor)
Burak Ya. Y.
Voytovych M. M.
Garashchenko F. G.
Grytskyk V. V.
Kashtan S. S. (secretary)
Kovtunets V. V.
Kratko M. I.
Melnyk V. M.
Popov B. O.
Prykarpatsky A. K.
Ptashnyk B. Y.
Savula Ya. G.
Skopetsky V. V. (Editor-in-Chief)
Sulym G. T.
Syasky A. O.
Syasky V. A. (secretary)
Khoma G. P.
Shynkarenko G. A.
Yanchuk P. S.
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
Кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 260-444.

ISBN 966 - 7281 - 02 - 8

© Українське математичне товариство, 1999
© РДГУ, 1999

Зміст

Антонова Т.М. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ 3

Бабак П.П. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ НАВАНТАЖЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ З МАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДИФУЗІЇ ТА ПОРИСТОСТІ 9

Баран О.С., Боднар Д.І. РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ 15

Боднар Д.І. АЛГОРИТМ РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У ВІДПОВІДНИЙ БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ 21

Бомба А.Я., Каштан С.С. ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ 25

Ворошик Н.І. ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ ГРАНИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІХ ГАРМОНІЙНИМ ЗОВНІ ЕЛІПСА ПРОДОВЖЕННЯМ 37

Гембарська С.Б. ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ З ОБМЕЖЕНОЮ ВАРІАЦІЄЮ 41

Григорків В.С. ОПТИМІЗАЦІЙНА МОДЕЛЬ З НЕЛІНІЙНИМ ДИНАМІЧНИМ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИМ МІЖГАЛУЗЕВИМ БАЛАНСОМ 47

Грищенко О.Ю. ДС-РІЗНИЦЕВІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСУ З ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ, ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ ВІД РОЗВ'ЯЗКУ 53

Дейнека В.С. СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФУЗІЇ ІЗ ЗБУРЕНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ 57

Жигалло К.М., Харкевич Ю.І. ТОЧНІ ОЦІНКИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСУ КВАЗІГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ІХ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА В РІВНОМІРНИЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТРИКАХ 64

Івашук Я.Г., Ковтунець В.В. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА НАЙКРАЩОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЕЛЕМЕНТАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КЛАСУ 69

Ільїна В.В. ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ 76

Карабин О.О. ДО ПОНЯТТЯ БАЗИ З ПІДПРОСТОРІВ В ГЛЬБЕРТОВИМУ ПРОСТОРІ 81

Клюшин Д.А. ОПТИМІЗАЦІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ВПЛИВОМ 85

Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У НЕСКІНЧЕНИХ СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ОБЛАСТЯХ 89

Кундрат М.М. ВТОМНЕ ВІДШАРУВАННЯ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ 93

Ляшко С.И., Войцеховский С.А., Номировский Д.А., Семенов В.В. ЧИСЛЕННАЯ

| | |
|---|-----|
| ОПТИМИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ..... | 97 |
| Нгуен Суан Тхао БАЗИСНЫЙ АНАЛОГ L-ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ..... | 102 |
| Попов Б.О., Лаушник О.І. ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОБЕРНЕНОЇ ДО ІНТЕГРАЛУ ЙМОВІРНОСТІ..... | 107 |
| Скасків О.Б., Півкач М.Г. ОЦІНКА ЗНИЗУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРХЛЕ З ПОКАЗНИКАМИ, ЩО МАЮТЬ ДОДАТНІЙ КРОК, ЗОВНІ СИСТЕМИ МАЛИХ КРУГІВ..... | 113 |
| Столярчук В.К., Мартинюк П.М. АСИМПТОТИЧНО НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ..... | 118 |
| Сяський А.О. ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ЖОРСТКОГО ДИСКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ..... | 122 |
| Сяський В.А. ВПЛИВ ТЕРТЯ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ ПРИ КОНТАКТІ ГЛАДКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ І ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ..... | 127 |
| Турбал Ю.В. ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СУМІСНОСТІ ДЕЯКИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ..... | 135 |
| Цимбал В.М. ВИРОДЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ У ГІПЕРБОЛІЧНЕ..... | 139 |
| Янчук П.С. КВАЗИСПЕКТРАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ ТА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ..... | 143 |
| Застосування математичних методів | |
| Науменко Ю.В. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОБЕРТОВОМУ ЦИЛІНДРІ..... | 160 |
| Черняга П.Г., Сяський В.О., Грицюк П.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ РУХІВ ФУНДАМЕНТІВ СПОРУД В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ЗМІНИ ЇХ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК..... | 164 |
| Короткі повідомлення | |
| Вірченко Н.О. ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ (ЗА РАЙТОМ) ГАМА-ФУНКЦІЮ..... | 168 |
| Петрівський Б.П., Петрівський Я.Б., Хома Н.Г. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ..... | 171 |
| Рубльов Б.В. ВИКОРИСТАННЯ ГЛАДКОЇ МЕТРИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТИЗОВАНИХ ЗОБРАЖЕНЬ..... | 174 |
| Савич В.О. ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ ДВОЗНАЧНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ФУНКЦІЙ З ВРАХУВАННЯМ МНОЖИН А-ТОЧОК..... | 177 |

УДК 517.5

Столярчук В.К., Мартинюк П.М.

АСИМПТОТИЧНО НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ І СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Для важливіших цілих елементарних та спеціальних функцій досліджені області і швидкості збіжності раціональних поліномів вигляду $P_n(x)/Q_m(x)$ при $\forall n \in N$ і $m=1,2$.

В [3] і [4] і автори, використовуючи методику, запропоновану в [1], побудували для $\forall n \in N$ і $m=1,2$ раціональні поліноми вигляду $P_n(x)/Q_m(x)$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - алгебраїчні многочлени степенів відповідно n і m , які здійснюють на сегменті $[-h, h]$ асимптотично найкраще рівномірне наближення важливіших елементарних і спеціальних функцій $f(x)$ в тому розумінні, що виконуються співвідношення

$$\|f(x) - R_{n,m}(x)\|_{C_{[-h,h]}} \leq (1 + \alpha_{n,m}) E_{n,m}(f)_{C_{[-h,h]}} \tag{1}$$

де $\alpha_{n,m} = \alpha_{n,m}(x, h) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, E_{n,m}(f)$ - величина найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ за допомогою раціональних поліномів порядку (n, m) .

Обмежимося розглядом функції ймовірностей $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ і більш детально викладемо результати, які аносовані в [4]. Для функцій $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha, \ln(1+x)$, функцій Бесселя $J_0(x), J_1(x)$, гіпергеометричних функцій $F(1, \gamma+1, x)$ ін міркування проводяться аналогічно.

В [5] першим із авторів ефективно побудовані непарні алгебраїчні многочлени $Y_{2n+3}(x)$, які на сегменті $[-h, h]$ здійснюють близьке до найкращого рівномірне наближення функції ймовірностей $y(x)$ таким чином, що справедлива рівність

$$y(x) - Y_{2n+3}(x) = \tau \cdot T_{2n+5}\left(\frac{x}{h}\right) + \int_0^x \frac{\partial^2 \left(\int_0^t e^{-t^2-u^2} du \right)}{\partial x^2} T_{2n+5}\left(\frac{t}{h}\right) dt = \tau T_{2n+5}\left(\frac{x}{h}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

де $\tau = \tau(h, n)$ - числа, які обчислюються за допомогою формул, що містять скінченне число арифметичних операцій і з швидкістю величини найкращого наближення $E_{2n+5}(y, x)$ прямують до нуля, коли $n \rightarrow \infty, T_{2n+5}(t) = \cos((2n+5) \arccost t)$ - многочлени Чебишева порядку $(2n+5)$.

Покажемо тепер, як, відштовхуючись від многочленів $Y_{2n+3}(x)$, можна одержати раціональну апроксимацію функції ймовірностей.

Теорема 1. Нехай $y_{2n+3}(x) = \sum_{k=1}^{n+2} C_{2k-1} x^{2k-1}$ - многочлени, побудовані за А-методом

для наближення функції ймовірностей $\Phi(x), x \in [-h, h], h > 0$, а $P_{2n-1}(x) = x^{2n-1} + a$ - многочлени, які задовольняють рівняння

$$y_{2n+3}(x)(x^2 + a) = P_{2n-1}(x) + \tau_{2n+3} T_{2n+3}\left(\frac{x}{h}\right) + \tau_{2n+5} T_{2n+5}\left(\frac{x}{h}\right), \quad (3)$$

в якому $a, \tau_{2n+3}, \tau_{2n+5}$ - деякі невідомі параметри. Тоді для раціональної функції

$$R_{2n-1,2} = \frac{P_{2n-1}(x)}{x^2 + a} \text{ справедлива асимптотична нерівність}$$

$$\|\Phi(x) - R_{2n-1,2}(x)\|_{C[-h,h]} \leq (1 + O(\frac{1}{n})) E_{2n-1,2}(\Phi) C_{[-h,h]}, \quad (4)$$

де $E_{2n-1,2}(\Phi) C_{[-h,h]}$ - величина найкращого рівномірного наближення функції $\Phi(x), x \in [-h, h], h > 0$; раціональними функціями порядку $(2n-1, 2)$.

Доведення. Перш за все відмітимо, що згідно з А-методом многочлен $y_{2n+3}(x)$ є розв'язком операторного рівняння

$$y_{2n+3}(x) + 2 \int_0^x u y'_{2n+3}(u) du - x = -\tau T_{2n+5}\left(\frac{x}{h}\right), \quad (5)$$

побудованого, виходячи з інтегрального рівняння Вольтерри $y(x) + 2 \int_0^x u y'(u) du - x = 0$, $x \in [-h, h]$, розв'язком якого є функція ймовірностей $\Phi(x)$.

Прирівнюючи коефіцієнти при трьох найвищих степенях x в рівняннях (3) і (5), одержимо систему з шести рівнянь з невідомими $a, \tau_{2n+3}, \tau_{2n+5}, C_{2n-1}, C_{2n+1}, C_{2n+3}$. Розв'язуючи її, знаходимо

$$\begin{aligned} a &= n + (1 - \frac{h^2}{2}) + O(\frac{1}{n}), \\ \tau_{2n+3} &= \tau (\frac{4n}{h^2} + O(1)), \\ \tau_{2n+5} &= -\tau (n + 3 + O(\frac{1}{n})), \end{aligned} \quad (6)$$

де τ - параметр, який фігурує в рівності (2).

Оцінимо величину $\|\Phi(x) - R_{2n-1,2}(x)\|_{C[-h,h]}$. Виходячи з рівнянь (3) і (2) і враховуючи співвідношення (6), отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi(x) - R_{2n-1,2}(x) &= \Phi(x) - y_{2n+3}(x) + y_{2n+3}(x) - y(x) = \\ &= \tau \left(\frac{T_{2n+5}(\frac{x}{h})}{h^2} + \int_0^x \frac{\partial^2 \left(\int_0^u e^{-t^2 - u^2} du \right)}{\partial t^2} T_{2n+5}\left(\frac{t}{h}\right) dt - \frac{4n/h^2 + O(1)}{x^2 + n + 1 - h^2/2 + O(1/n)} T_{2n+3}\left(\frac{x}{h}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n + 3 + O(1/n)}{x^2 + n + 1 - h^2/2 + O(1/n)} T_{2n+5}\left(\frac{x}{h}\right) \right) = \frac{4\tau}{h^2} (1 + \alpha_n) \left(T_{2n+3}\left(\frac{x}{h}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

де $\alpha_n = \alpha_n(x, h) = O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$.

Оскільки при достатньо великому натуральному n в усіх точках сегмента $[-h, h]$ $|\alpha_n| < 1$ і $O\left(\frac{1}{n}\right) < 1$, то згідно з (7) різниця $\Phi(x) - R_{2n-1,2}(x)$ в $(2n+4)$ екстремальних точках многочлена Чебишева $T_{2n+3}\left(\frac{x}{h}\right)$ приймає значення із знакопоземними знаками. Тоді на основі теореми Валле-Пуссена при таких n виконуються нерівності

$$E_{2n+3,2}(\Phi(x))_{C_{[-h,h]}} \geq \frac{4|\tau|}{h^2} (1 - |\alpha_n|) \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow$$

$$|\tau| \leq \frac{h^2}{4} \frac{E_{2n+3,2}(\Phi(x))_{C_{[-h,h]}}}{(1 - |\alpha_n|) \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \quad (8)$$

З іншого боку, на основі співвідношення (7) при тих самих натуральних n справедлива нерівність

$$\|\Phi(x) - R_{2n+3,2}(x)\|_{C_{[-h,h]}} \leq \frac{4|\tau|}{h^2} (1 + |\alpha_n|) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (9)$$

З нерівностей (8) і (9) нерівність (4) випливає як наслідок. Теорема 1 доведена.

Нехай $W = \frac{z}{h} + \sqrt{\frac{z^2}{h^2} - 1}$ - функція, яка конформно і однолистно відображає область

$D = C \setminus [-h, h]$ на область $|W| > 1$. Позначимо при довільному $R > 1$ через B_R область, яка обмежена лінією рівня $\Gamma_R = \{z \mid |W(z)| = R\}$.

Зрозуміло, що рівність (7) залишається справедливою і при комплексних $z \in [-h, h]$, якщо за многочлени Чебишева в комплексній області прийняти многочлени вигляду

$$T_{2n+3}\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{1}{2} \left[W^{2n+3}\left(\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{W^{2n+3}\left(\frac{z}{h}\right)} \right]. \quad (10)$$

Теорема 2. При будь-якому $R > 1$ апроксимаційні поліноми $R_{2n-1,2}(z)$, які побудовані для відрізка $[-h, h]$, здійснюють близьке до найкращого рівномірне наближення функції $\Phi(z)$ в замкненій області $\overline{B_R}$ в тому розумінні, що виконується співвідношення

$$\|\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)\|_{C(\overline{B_R})} \leq (1 + \varepsilon_n(R)) \cdot E_{2n+1,2}(\Phi)_{C(\overline{B_R})} \quad (11)$$

де $\varepsilon_n(R) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і $E_{2n-1,2}(\Phi)$ - величина найкращого рівномірного наближення функції $\Phi(z)$ в замкненій області $\overline{B_R}$ за допомогою раціональних поліномів порядку $(2n-1, 2)$.

Доведення. Покладемо $t_n(z) = \int_{[0,z]} T_{2n+5}\left(\frac{\xi}{h}\right) d\xi$. Внаслідок того, що $\|t_n\|_{C_{[-h,h]}} \leq \frac{2}{2n+5}$,

отримаємо

$$|t_n(z)| \leq \frac{2}{2n+5} |W(z)|^{2n+6}, \quad z \in B_R. \quad (12)$$

значить,

$$|f_n(z)| \leq \frac{2R^{2n+6}}{2n+5} \quad (13)$$

Інтегруючи тепер за частинами на відрізку $[0, z]$ другий доданок в правій частині рівності (7), одержимо для різниці $\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)$ таке зображення

$$\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z) = \frac{2\tau}{h^2} (1 + \tilde{\alpha}_n) \cdot W^{2n+3} \left(\frac{z}{h} \right) \cdot (1 + \beta_n(z)), \quad (14)$$

де $\tilde{\alpha}_n, \beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Оскільки різниця $\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)$ при достатньо великих n має на відрізку $[-h, h]$ рівно $2n+3$ нулі, то згідно леми 3.1 з роботи [2] маємо

$$E_{2n-1,2}(\Phi)_{C_{(BR)}} \geq \min_{z \in \partial B_R} |\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)| = \frac{2|\tau|}{h^2} (1 - |\tilde{\alpha}_n|) \cdot R^{2n+3} \cdot \min_{z \in \partial B_R} |1 + \beta_n(z)| \quad (15)$$

З іншого боку, з рівності (14) одержуємо оцінку зверху

$$\|\Phi(z) - R_{2n-1,2}(z)\|_{C_{(BR)}} \leq \frac{2|\tau|}{h^2} (1 + |\tilde{\alpha}_n|) \cdot R^{2n+3} \max_{z \in \partial B_R} |1 + \beta_n(z)|. \quad (16)$$

З нерівності (15) і (16) випливає твердження теореми 2, яке виражається співвідношенням (11).

Теорема 2 доведена.

1. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1988. - 303 с.
2. Дзядык В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ // Математический сборник. - 1979. - Т.108 (150), №2. - С.247-267.
3. Кравчук В.Р. Про один простий спосіб раціональної апроксимації функцій // Український математичний журнал. - 1992. - 44, №7. - с.998-1000.
4. Столярчук В.К., Мартинюк П.М. Побудова дробово-раціональних функцій, які здійснюють близьке до найкращого рівномірне наближення деяких спеціальних та елементарних функцій. В кн. Теорія апроксимацій та чисельні методи. Тези доповідей Міжнародної конференції, присвяченої 100-річчю з дня народження Є.Ремеза. Рівне - 1996. - С.78.
5. Столярчук В.К. О построении для функций $\operatorname{Si} x$ и $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ многочленов, которые осуществляют их приближение, близкое к наилучшему // Украинский математичний журнал. - 1974. - 26, №2.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
Рівненський державний технічний університет, Рівне

Столярчук В.К., Мартинюк П.М. АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШЕЕ РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ // Для важнейших целых элементарных и специальных функций исследованы области и скорости сходимости рациональных полиномов вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ для $\forall n \in N$ и $m=1,2$.

Stolyarchuk V.K., Martinyuk P.M. THE BEST APPROXIMATION OF THE ELEMENTARY AND SPECIAL FUNCTIONS BY FRACTIONAL POLYNOMIALS IN THE COMPLEX PLANE // Domains and rates of convergence of rational polynomials $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ for $\forall n \in N$ and $m=1,2$ are investigated for essential integer elementary and special functions.