

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

Випуск 6

1999

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики та інформатики. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics and informatics. Recommended for research workers, teachers of higher schools, post graduates and senior year students.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Редакційна колегія :

Бейко І. В.
Боднар Д. І.
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)
Бурак Я. Й.
Войтович М. М.
Гарашенко Ф. Г.
Грищик В. В.
Каштан С. С. (*технічний секретар*)
Ковтунець В. В.
Кратко М. І.
Мельник В. М.
Попов Б. О.
Прикарпатський А. К.
Пташник Б. Й.
Савула Я. Г.
Скопечкий В. В. (*головний редактор*)
Сулим Г. Т.
Сяський А. О.
Сяський В. А. (*секретар*)
Хома Г. П.
Шинкаренко Г. А.
Янчук П. С.
Ясній П. В.

Editorial board :

Byeko I. V.
Bodnar D. I.
Bomba A. Ya. (*editor*)
Burak Ya. Y.
Voytovych M. M.
Garashchenko F. G.
Grytskyk V. V.
Kashtan S. S. (*secretary*)
Kovtunets V. V.
Kratko M. I.
Melnyk V. M.
Popov B. O.
Prykarpatsky A. K.
Ptashnyk B. Y.
Savula Ya. G.
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)
Sulym G. T.
Syasky A. O.
Syasky V. A. (*secretary*)
Khoma G. P.
Shynkarenko G. A.
Yanchuk P. S.
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
Кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 260-444.

ISBN 966 - 7281 - 02 - 8

© Українське математичне товариство, 1999
© РДГУ, 1999

Зміст

Антонова Т.М. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ 3

Бабак П.П. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ НАВАНТАЖЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ З МАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДИФУЗІЇ ТА ПОРИСТОСТІ 9

Баран О.С., Боднар Д.І. РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ 15

Боднар Д.І. АЛГОРИТМ РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У ВІДПОВІДНИЙ БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ 21

Бомба А.Я., Каштан С.С. ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ 25

Ворошик Н.І. ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ ГРАНИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІХ ГАРМОНІЙНИМ ЗОВНІ ЕЛІПСА ПРОДОВЖЕННЯМ 37

Гембарська С.Б. ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ З ОБМЕЖЕНОЮ ВАРІАЦІЄЮ 41

Григорків В.С. ОПТИМІЗАЦІЙНА МОДЕЛЬ З НЕЛІНІЙНИМ ДИНАМІЧНИМ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИМ МІЖГАЛУЗЕВИМ БАЛАНСОМ 47

Грищенко О.Ю. ДС-РІЗНИЦЕВІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСУ З ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ, ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ ВІД РОЗВ'ЯЗКУ 53

Дейнека В.С. СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФУЗІЇ ІЗ ЗБУРЕНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ 57

Жигалло К.М., Харкевич Ю.І. ТОЧНІ ОЦІНКИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСУ КВАЗІГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ІХ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА В РІВНОМІРНИЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТРИКАХ 64

Івашук Я.Г., Ковтунець В.В. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА НАЙКРАЩОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЕЛЕМЕНТАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КЛАСУ 69

Ільїна В.В. ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ 76

Карабин О.О. ДО ПОНЯТТЯ БАЗИ З ПІДПРОСТОРІВ В ГЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ 81

Клюшин Д.А. ОПТИМІЗАЦІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ВПЛИВОМ 85

Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У НЕСКІНЧЕНИХ СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ОБЛАСТЯХ 89

Кундрат М.М. ВТОМНЕ ВІДШАРУВАННЯ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ 93

Ляшко С.И., Войцеховский С.А., Номировский Д.А., Семенов В.В. ЧИСЛЕННАЯ

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ.....	97
Нгуен Суан Тхао БАЗИСНЫЙ АНАЛОГ L-ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	102
Попов Б.О., Лаушник О.І. ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОБЕРНЕНОЇ ДО ІНТЕГРАЛУ ЙМОВІРНОСТІ.....	107
Скасків О.Б., Півкач М.Г. ОЦІНКА ЗНИЗУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРХЛЕ З ПОКАЗНИКАМИ, ЩО МАЮТЬ ДОДАТНІЙ КРОК, ЗОВНІ СИСТЕМИ МАЛИХ КРУГІВ.....	113
Столярчук В.К., Мартинюк П.М. АСИМПТОТИЧНО НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ.....	118
Сяський А.О. ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ЖОРСТКОГО ДИСКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ.....	122
Сяський В.А. ВПЛИВ ТЕРТЯ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ ПРИ КОНТАКТІ ГЛАДКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ І ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ.....	127
Турбал Ю.В. ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СУМІСНОСТІ ДЕЯКИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	135
Цимбал В.М. ВИРОДЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ У ГІПЕРБОЛІЧНЕ.....	139
Янчук П.С. КВАЗИСПЕКТРАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНІ ТА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ.....	143
Застосування математичних методів	
Науменко Ю.В. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОБЕРТОВОМУ ЦИЛІНДРІ.....	160
Черняга П.Г., Сяський В.О., Грицюк П.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ РУХІВ ФУНДАМЕНТІВ СПОРУД В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ЗМІНИ ЇХ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	164
Короткі повідомлення	
Вірченко Н.О. ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ (ЗА РАЙТОМ) ГАМА-ФУНКЦІЮ.....	168
Петрівський Б.П., Петрівський Я.Б., Хома Н.Г. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ.....	171
Рубльов Б.В. ВИКОРИСТАННЯ ГЛАДКОЇ МЕТРИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТИЗОВАНИХ ЗОБРАЖЕНЬ.....	174
Савич В.О. ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ ДВОЗНАЧНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ФУНКЦІЙ З ВРАХУВАННЯМ МНОЖИН А-ТОЧОК.....	177

УДК 539.3

(11)
Сяський А.О.

ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ЖОРСТКОГО ДИСКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ

Методом граничної колокації знайдено наближений розв'язок задачі про двосторонній контакт жорсткого диска з криволінійним отвором нескінченної ізотропної пластинки. Досліджено вплив на напружений стан пластинки форми отвору та величини початкового зазору між контактними тілами.

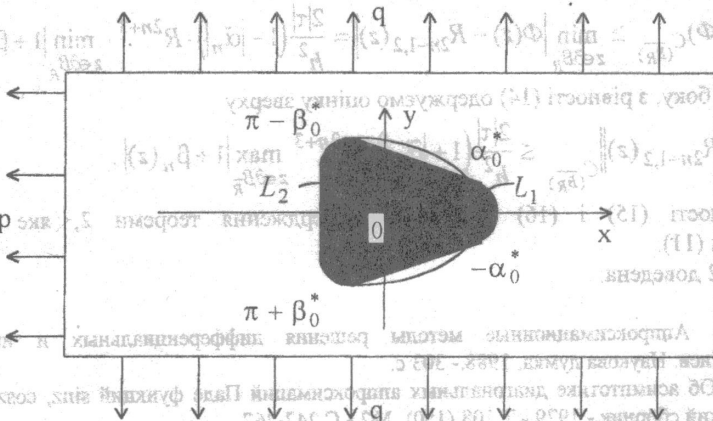


Рис. 1.

Нехай в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки, який обмежений гладким контуром L у вигляді правильного N-кутника із закругленими кутами, вставлений з зазором або натягом жорсткий диск такої ж форми. При дії на пластинку зовнішнього навантаження, яке показано на рис.1, на ділянках $L_1 = [-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$, $L_2 = [\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ виникає двосторонній контакт між пластинкою і диском. На інших ділянках контура L напруження відсутні. Якщо посадку диска в отвір пластинки здійснено з гарантованим натягом, то зони L_1 і L_2 будуть змикатися. При відсутності тертя між пластинкою і диском розв'язок задачі полягає у визначенні контактних зусиль T_p вздовж L_1 і L_2 та величини зон контакту.

Позначимо через $\gamma_1 = [-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$, $\gamma_2 = [\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ образи зон контакту L_1 і L_2 при відображенні

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\epsilon}{\xi^{N-1}} \right), \quad (1)$$

де $\omega(\xi)$ - функція, яка здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола γ в площину $\xi = re^{i\theta}$ на область, яку займає пластинка в площині $z = x + iy$. Тут R_0 - характерний розмір отвору; ϵ - параметр, який визначає відхилення форми многокутника від кола; $i = \sqrt{-1}$. Не порушуючи загальності вважаємо, що $R_0 = 1$.

Систему прямокутних координат вибираємо так, як показано на рис.1. Центр полярної системи (r, δ) співпадає з центром отвору.

Встановимо умови, які накладаються на зусилля p і q, щоб мав місце двосторонній

контакт диска з контуром отвору пластинки при їх спряженні з нульовим зазором. Це можливо тоді, коли зміщення від зовнішнього навантаження в контурних точках, які належать осі симетрії отвору, при відсутності диска будуть мати різні знаки, причому $u_0(0) < 0, u_0(\pi) > 0$.

Якщо пластинка ізотропна, то на підставі [1,2] одержимо

$$q > \frac{3+(-1)^{N+1}\varepsilon}{1+(-1)^N\varepsilon} p, \quad (N=2,3) \quad (2)$$

Деформації контура пластинки при заданому навантаженні визначаються за формулами [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^* &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - I_1(\lambda) - J_1(\lambda) + a(\lambda) \right]; \\ V^* &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - I_2(\lambda) - J_2(\lambda) - b(\lambda) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[T_\rho^0(t) - S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt; \quad I_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[S_{\rho\lambda}^0(t) + T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt; \\ J_1(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left[\tilde{T}_\rho(t) + \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) \operatorname{tg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt; \quad J_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left[\tilde{S}_{\rho\lambda}(t) - \tilde{T}_\rho(t) \operatorname{tg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= (p+q)[1+(N-1)\varepsilon \cos N\lambda] - 2(p-q) \cos 2\lambda; \\ b(\lambda) &= (N-1)\varepsilon(p+q) \sin N\lambda - 2(p-q) \sin 2\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varepsilon_\lambda^* + iV^* = (\varepsilon_\lambda + iV) \omega'(\sigma); \quad T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma);$$

$$T_\rho^0(t) = T_\rho^*(t); \quad S_{\rho\lambda}^0(t) = S_{\rho\lambda}^*(t), \quad t \in [-\alpha_0; \alpha_0];$$

$$\tilde{T}_\rho(t) = T_\rho^*(\pi+t); \quad \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) = S_{\rho\lambda}^*(\pi+t), \quad t \in [-\beta_0; \beta_0];$$

$\sigma = e^{i\lambda}$; $2h$ - товщина пластинки; E, ν - модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки. Решта позначень такі ж самі, як і в [3].

Граничні умови задачі приймаємо у вигляді рівності кривизн контурів пластинки і диска в зоні контакту внаслідок деформації. При відсутності тертя ці умови мають вигляд [3]

$$-\frac{\alpha\varepsilon_\lambda^* + \beta V^*}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\alpha V^* - \beta\varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2} \right) + \frac{d\tilde{\rho}}{d\lambda} \frac{\alpha V^* - \beta\varepsilon_\lambda^*}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{d\theta}{d\lambda}; \quad (5)$$

$$\alpha S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \beta T_\rho^*(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0],$$

де

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = (1-N) + \frac{\alpha N}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \frac{d\tilde{\rho}}{d\lambda} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left[(\alpha^2 + \beta^2)(1-2N) + 3\alpha N \right] \beta N (1-\varepsilon)}{\left[(\alpha^2 + \beta^2)(1-N) + \alpha N \right]^2}; \quad (6)$$

$$\alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \Delta = \tilde{\rho}(\lambda) - \rho_0(\lambda) = \text{const};$$

$\frac{1}{\tilde{\rho}(\lambda)}$ - кривизна недеформованого контура пластинки; $\frac{1}{\rho_0(\lambda)}$ - кривизна диска. Початковий зазор Δ між пластинкою і диском має порядок пружних зміщень.

Підставляючи (3), (4), (6) в граничні умови (5), одержимо систему чотирьох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення

величин $T_p^0, S_{p\lambda}^0, \tilde{T}_p, \tilde{S}_{p\lambda}$ в зоні контакту

$$F_1[(1-\nu)T_p^0(\lambda) - I_1(\lambda) - J_1(\lambda) + a(\lambda)] + F_2[(1-\nu)S_{p\lambda}^0(\lambda) - I_2(\lambda) - J_2(\lambda) - b(\lambda)] = 2Eh\Delta \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^3 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2; \quad \alpha S_{p\lambda}^0(\lambda) - \beta T_p^0(\lambda) = 0, \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad (7)$$

$$F_1[(1-\nu)\tilde{T}_p(\tilde{\lambda}) - I_1(\pi + \tilde{\lambda}) - J_1(\pi + \tilde{\lambda}) + a(\pi + \tilde{\lambda})] + F_2[(1-\nu)\tilde{S}_{p\lambda}(\tilde{\lambda}) - I_2(\pi + \tilde{\lambda}) - J_2(\pi + \tilde{\lambda}) - b(\pi + \tilde{\lambda})] = 2Eh\Delta \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^3 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2; \quad \alpha \tilde{S}_{p\lambda}(\tilde{\lambda}) - \beta \tilde{T}_p(\tilde{\lambda}) = 0, \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0], \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0]. \quad (8)$$

Тут

$$F_1 = \left[\alpha(\alpha^2 + \beta^2)(2N-1) - 2\alpha^2 N - \frac{N^2\beta^2(2\alpha - \alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)(1-N) + \alpha N} - \beta(\alpha^2 + \beta^2) \frac{d}{d\lambda} \right],$$

$$F_2 = \left[\beta(\alpha^2 + \beta^2)(2N-1) - 2\alpha\beta N + \frac{\alpha\beta N^2(2\alpha - \alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)(1-N) + \alpha N} + \alpha(\alpha^2 + \beta^2) \frac{d}{d\lambda} \right].$$

диференціальні оператори першого порядку.

Оскільки зовнішнє навантаження на пластинку симетричне, то умови рівноваги диска виконуються тотожно.

Зони контакту (величини α_0, β_0) наперед невідомі, тому для їх визначення необхідно записати додаткові умови сумісного деформування пластинки і диска. Якщо посадку диска в отвір пластинки здійснено із зазором $\Delta = k\Delta^*$, де $\Delta^* = \frac{1}{2}[u_0(\pi) - u_0(0)]$, $0 \leq k < 1$, то ці умови можна записати так

$$u(0) = ku_0(0); \quad u(\pi) = ku_0(\pi). \quad (9)$$

Випадок $k=0$ відповідає посадці диска з нульовим зазором. Якщо $k \geq 1$, то контакт між пластинкою і диском відсутній.

На підставі [2,3] співвідношення (9) можна перетворити до вигляду

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1(t) \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1(t) \ln \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt + (1-\nu) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_0} f_2(t) (\pi-t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_0} \tilde{f}_2(t) t dt \right] - Q =$$

$$= (k-1) \left[(3-\varepsilon)p - (1+\varepsilon)q \right] \frac{(1+\nu)\varepsilon(N-2)}{2} (p-q); \quad (10)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1(t) \ln \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1(t) \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt + (1-\nu) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_0} f_2(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_0} \tilde{f}_2(t) (t-\pi) dt \right] - Q =$$

$$= (k-1) \left[(-3+(-1)^N \varepsilon)p + (1+(-1)^N \varepsilon)q \right] \frac{(1+\nu)\varepsilon(N-2)}{2} (p-q),$$

де

$$f_1 + if_2 = (T_p^0 + iS_{p\lambda}^0) e^{it}; \quad \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2 = (\tilde{T}_p + i\tilde{S}_{p\lambda}) e^{it};$$

$$Q = \frac{(1+\nu)\varepsilon(N-2)}{\pi} \left[\int_0^{\alpha_0} (T_p^0 \cos 2t - S_{p\lambda}^0 \sin 2t) dt + \int_0^{\beta_0} (\tilde{T}_p \cos 2t - \tilde{S}_{p\lambda} \sin 2t) dt \right]$$

Система (7), (8) і умови (10) визначають розв'язок задачі про двосторонній контакт жорсткого диска з криволінійним отвором в нескінченній ізотропній пластинці. Якщо розв'язок цієї задачі буде відомий, то контактні зусилля T_p визначаються за формулою

$$T_p = \frac{\alpha T_p^* + \beta S_{p\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (11)$$

Величини $T_p^*, S_{p\lambda}^*$ обмежені на кінцях зони контакту $(T_p^0(\pm\alpha_0) = 0, S_{p\lambda}^0(\pm\alpha_0) = 0, \tilde{T}_p(\pm\beta_0) = 0, \tilde{S}_{p\lambda}(\pm\beta_0) = 0)$, тому для наближеного розв'язку задачі застосуємо модифікований метод колокації, запропонований в [4]. На підставі цього методу величини $T_p^0, S_{p\lambda}^0, \tilde{T}_p, \tilde{S}_{p\lambda}$ вибираємо у вигляді

$$\{T_p^0(\lambda), S_{p\lambda}^0(\lambda)\} = \sum_{n=1}^{N_0} \{A_n^0, B_n^0\} F(\varphi, \varphi_n); \quad (12)$$

$$\lambda = 2 \operatorname{arctg}(a_0 \cos \varphi); \quad a_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}; \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0];$$

$$\{\tilde{T}_p(\lambda), \tilde{S}_{p\lambda}(\lambda)\} = \sum_{n=1}^{N_0} \{\tilde{A}_n, \tilde{B}_n\} F(\varphi, \varphi_n); \quad (13)$$

$$\lambda = 2 \operatorname{arctg}(b_0 \cos \varphi); \quad b_0 = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2}; \quad \lambda \in [-\beta_0; \beta_0].$$

Тут введене позначення

$$F(\varphi, \varphi_n) = \frac{(-1)^{n+1} \cos N_0 \varphi \sin \varphi_n \sin \varphi}{N_0 (\cos \varphi - \cos \varphi_n)}, \quad \varphi_n = \frac{2n-1}{2N_0} \pi. \quad (14)$$

Для спрощення чисельного розрахунку кількість точок колокації на ділянках γ_1 і γ_2 вибирається однакова.

Квадратурні формули для обчислення сингулярних інтегралів із (7) при $\lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]$ в точках колокації наведені в [3]. Для обчислення інтегралів $\int_{-\beta_0}^{\beta_0} \{\tilde{T}_p(t), \tilde{S}_{p\lambda}(t)\} g \frac{\lambda-t}{2} dt$ при

$\lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ використаємо заміну $\lambda = \pi + \lambda$. Тоді

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} \{\tilde{T}_p(t), \tilde{S}_{p\lambda}(t)\} g \frac{\lambda-t}{2} dt = - \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \{\tilde{T}_p(t), \tilde{S}_{p\lambda}(t)\} g \operatorname{tg} \frac{\lambda-t}{2} dt, \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0]. \quad (15)$$

Для обчислення регулярних інтегралів використовуються квадратурні формули Гаусса [4].

Підстановка (12)-(14) з врахуванням (15) і відповідних формул [3,4] в (7), (8) приводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно $A_n^0, B_n^0, \tilde{A}_n, \tilde{B}_n$. Коефіцієнти цієї системи нелінійно залежать від a_0, b_0 . Як і в роботі [5], величини a_0, b_0 будемо задавати довільно і уточнювати за допомогою умов (10).

Значення граничних полярних кутів зон контакту при цьому визначаються за формулами $\alpha_0^* = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha_0 - \varepsilon \sin(N-1)\alpha_0}{\cos \alpha_0 + \varepsilon \cos(N-1)\alpha_0}; \quad \beta_0^* = \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta_0 - \varepsilon \sin(N-1)\beta_0}{\cos \beta_0 + \varepsilon \cos(N-1)\beta_0} \quad (16)$

Для ілюстрації методу колокації проведено чисельні розрахунки максимальних контактних зусиль T_{\max}^p при $\lambda=0$ і граничних полярних кутів $\alpha_0^*, \pi - \beta_0^*$ для криволінійного отвору у вигляді трикутника ($N=3, \varepsilon=0.2$), еліпса ($N=2, \varepsilon=\pm 0.2$), кола ($N=2, \varepsilon=0$). Значення розрахункових величин при $p=-1, q=0, \nu=0.3$ подані в табл. 1.

В наведених прикладах збільшення зазору між пластинкою і диском приводить до зменшення контактних зусиль і зони контакту. При цьому максимум зусиль зміщується до

точок контура з найбільшою кривизною.

(11) Всі розрахунки проведені для різних значень N_0 до $N_0 = 32$ включно і практично не змінюються починаючи з $N_0 = 24$. Це свідчить про добру збіжність методу колокації.

Таблиця 1.

N, ε	$N=3, \varepsilon=0.2$			$N=2, \varepsilon=0$		
Δ	0	$\frac{1}{3}\Delta^*$	$\frac{2}{3}\Delta^*$	0	$\frac{1}{3}\Delta^*$	$\frac{2}{3}\Delta^*$
T_p^{\max}	-5.20	-3.98	-2.89	-2.16	-1.61	-1.08
$\alpha_0^*(град)$	51.32	13.76	4.89	54.05	33.14	18.72
$\pi - \beta_0^*(град)$	120.94	131.42	143.59	125.95	146.86	161.28
N, ε	$N=2, \varepsilon=0.2$			$N=2, \varepsilon=-0.2$		
Δ	0	$\frac{1}{3}\Delta^*$	$\frac{2}{3}\Delta^*$	0	$\frac{1}{3}\Delta^*$	$\frac{2}{3}\Delta^*$
T_p^{\max}	-2.88	-2.16	-1.47	-1.73	-1.30	-0.86
$\alpha_0^*(град)$	40.06	20.35	10.39	66.62	48.50	30.84
$\pi - \beta_0^*(град)$	139.94	159.65	169.61	113.38	131.50	149.16

1. Теплый М.И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. - Львов: Высшая школа, Изд-во при Львовском ун-те, 1983. - 176с.
2. Мухомелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 708с.
3. Сяський В.А., Сяський А.О. Мішана контактна задача для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска // Волинський математичний вісник. - 1998. - в. 5. - С. 139-146.
4. Сяський А.А. О контакте жесткого диска с криволинейным отверстием в бесконечной пластинке. - Ровно, 1988. Деп. в УкрНИНТИ 03.01.89. - № 128-Ук89. - 10с.
5. Сяський В.А. Вдавлювання жорсткого диска в криволінійний отвір ізотропної пластинки // Волинський математичний вісник. - 1997. - в. 4. - С. 157-160.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Сяський А. А. ДВУСТОРОННІЙ КОНТАКТ ЖЕСТКОГО ДИСКА С КРИВОЛИНЕЙНИМ ОТВЕРСТИЕМ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ // Методом граничной коллокации найдено приближенное решение задачи о двустороннем контакте жесткого диска с криволинейным отверстием бесконечной изотропной пластинки. Исследовано влияние на напряженное состояние пластинки формы отверстия и величины начального зазора между контактирующими телами.

Syasky A. A. BILATERAL CONTACT OF HARD DISK WITH THE CURVILINEAR HOLE OF ENDLESS PLATE // By method of border collocation the approximate solution is found of the problem on the bilateral contact of hard disk with the curvilinear hole of endless isotropic plate. The influence upon tense condition of plate of the form of holes and values of initial clearance between contact bodies is explored.