

**Волинський
математичний
вісник**

Випуск 6

1999

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики та інформатики. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics and informatics. Recommended for research workers, teachers of higher schools, post graduates and senior year students.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Редакційна колегія :

Бейко І. В.
Боднар Д. І.
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)
Бурак Я. Й.
Войтович М. М.
Гарашенко Ф. Г.
Грищик В. В.
Каштан С. С. (*технічний секретар*)
Ковтунець В. В.
Кратко М. І.
Мельник В. М.
Попов Б. О.
Прикарпатський А. К.
Пташник Б. Й.
Савула Я. Г.
Скопечкий В. В. (*головний редактор*)
Сулим Г. Т.
Сяський А. О.
Сяський В. А. (*секретар*)
Хома Г. П.
Шинкаренко Г. А.
Янчук П. С.
Ясній П. В.

Editorial board :

Byeko I. V.
Bodnar D. I.
Bomba A. Ya. (*editor*)
Burak Ya. Y.
Voytovych M. M.
Garashchenko F. G.
Grytskyk V. V.
Kashtan S. S. (*secretary*)
Kovtunets V. V.
Kratko M. I.
Melnyk V. M.
Popov B. O.
Prykarpatsky A. K.
Ptashnyk B. Y.
Savula Ya. G.
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)
Sulym G. T.
Syasky A. O.
Syasky V. A. (*secretary*)
Khoma G. P.
Shynkarenko G. A.
Yanchuk P. S.
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
Кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 260-444.

ISBN 966 - 7281 - 02 - 8

© Українське математичне товариство, 1999
© РДГУ, 1999

Зміст

Антонова Т.М. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ 3

Бабак П.П. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ НАВАНТАЖЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ З МАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДИФУЗІЇ ТА ПОРИСТОСТІ 9

Баран О.С., Боднар Д.І. РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ 15

Боднар Д.І. АЛГОРИТМ РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У ВІДПОВІДНИЙ БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ 21

Бомба А.Я., Каштан С.С. ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ 25

Ворошик Н.І. ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ ГРАНИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІХ ГАРМОНІЙНИМ ЗОВНІ ЕЛІПСА ПРОДОВЖЕННЯМ 37

Гембарська С.Б. ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ З ОБМЕЖЕНОЮ ВАРІАЦІЄЮ 41

Григорків В.С. ОПТИМІЗАЦІЙНА МОДЕЛЬ З НЕЛІНІЙНИМ ДИНАМІЧНИМ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИМ МІЖГАЛУЗЕВИМ БАЛАНСОМ 47

Грищенко О.Ю. ДС-РІЗНИЦЕВІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСУ З ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ, ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ ВІД РОЗВ'ЯЗКУ 53

Дейнека В.С. СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФУЗІЇ ІЗ ЗБУРЕНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ 57

Жигалло К.М., Харкевич Ю.І. ТОЧНІ ОЦІНКИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСУ КВАЗІГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ІХ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА В РІВНОМІРНИЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТРИКАХ 64

Івашук Я.Г., Ковтунець В.В. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА НАЙКРАЩОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЕЛЕМЕНТАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КЛАСУ 69

Ільїна В.В. ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ 76

Карабин О.О. ДО ПОНЯТТЯ БАЗИ З ПІДПРОСТОРІВ В ГЛЬБЕРТОВИМУ ПРОСТОРІ 81

Клюшин Д.А. ОПТИМІЗАЦІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ВПЛИВОМ 85

Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У НЕСКІНЧЕНИХ СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ОБЛАСТЯХ 89

Кундрат М.М. ВТОМНЕ ВІДШАРУВАННЯ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ 93

Ляшко С.И., Войцеховский С.А., Номировский Д.А., Семенов В.В. ЧИСЛЕННАЯ

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ.....	97
Нгуен Суан Тхао БАЗИСНЫЙ АНАЛОГ L-ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	102
Попов Б.О., Лаушник О.І. ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОБЕРНЕНОЇ ДО ІНТЕГРАЛУ ЙМОВІРНОСТІ.....	107
Скасків О.Б., Півкач М.Г. ОЦІНКА ЗНИЗУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРХЛЕ З ПОКАЗНИКАМИ, ЩО МАЮТЬ ДОДАТНІЙ КРОК, ЗОВНІ СИСТЕМИ МАЛИХ КРУГІВ.....	113
Столярчук В.К., Мартинюк П.М. АСИМПТОТИЧНО НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ.....	118
Сяський А.О. ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ЖОРСТКОГО ДИСКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ.....	122
Сяський В.А. ВПЛИВ ТЕРТЯ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ ПРИ КОНТАКТІ ГЛАДКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ І ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ.....	127
Турбал Ю.В. ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СУМІСНОСТІ ДЕЯКИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	135
Цимбал В.М. ВИРОДЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ У ГІПЕРБОЛІЧНЕ.....	139
Янчук П.С. КВАЗИСПЕКТРАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНІ ТА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ.....	143
Застосування математичних методів	
Науменко Ю.В. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОБЕРТОВОМУ ЦИЛІНДРІ.....	160
Черняга П.Г., Сяський В.О., Грицюк П.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ РУХІВ ФУНДАМЕНТІВ СПОРУД В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ЗМІНИ ЇХ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	164
Короткі повідомлення	
Вірченко Н.О. ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ (ЗА РАЙТОМ) ГАМА-ФУНКЦІЮ.....	168
Петрівський Б.П., Петрівський Я.Б., Хома Н.Г. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ.....	171
Рубльов Б.В. ВИКОРИСТАННЯ ГЛАДКОЇ МЕТРИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТИЗОВАНИХ ЗОБРАЖЕНЬ.....	174
Савич В.О. ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ ДВОЗНАЧНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ФУНКЦІЙ З ВРАХУВАННЯМ МНОЖИН А-ТОЧОК.....	177

УДК 539.3

Сяський В. А.

ВПЛИВ ТЕРТЯ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ ПРИ КОНТАКТІ ГЛАДКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ І ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

Задача про обосторонній контакт жорстких штампів з кутувими точками і циліндричних тіл при врахуванні сил тертя ковзання зведена до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами. Методом колокації досліджено напружений стан на контурі кругового отвору в нескінченній пластинці і круглому диску.

Проблеми внутрішнього стиску циліндричних тіл близьких радіусів з врахуванням на поверхні контакту сил тертя, які складають основу розрахунку підшипникових вузлів, розглянуті в [1]. При проектуванні гальмівних пристроїв виникає необхідність розв'язування задач про контакт з тертям циліндричних тіл і жорстких штампів з кутувими точками.

1. Нескінченна ізотропна пластинка з круговим отвором.

1.1. Постановка задачі. Вивід основних рівнянь.

Нехай в круговий отвір радіусом $\rho_0=1$ нескінченної ізотропної пластинки товщиною $2h$ вставлені без зазору і натягу два симетричні жорсткі штампи з кутувими точками. Контакт між пластинкою і штампамі забезпечують дві зрівноважувальні сили P , які діють вздовж осі симетрії штампів. В точках пластинки, віддалених від контура отвору γ на значну відстань, діють дотичні напруження, які еквівалентні парі сил з моментом M_0 . Схема взаємодії пластинки і штампів наведена на рис.1.

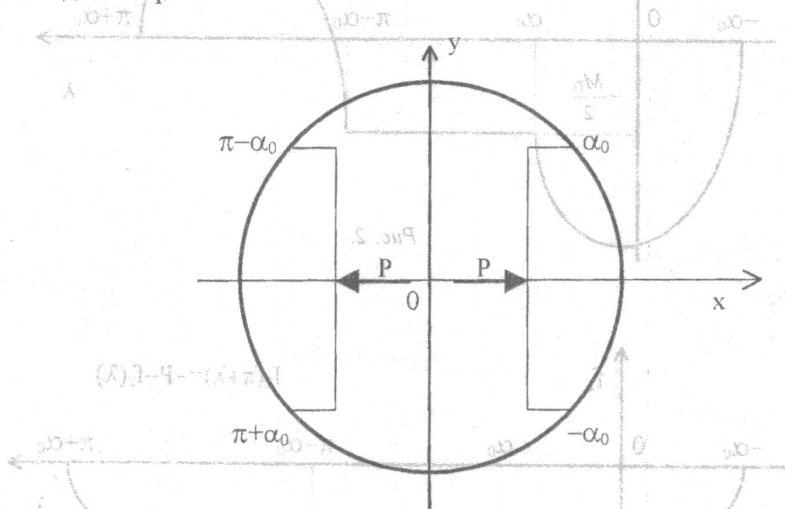


Рис. 1.

Систему прямокутних координат вибираємо так, щоб вісь Ox проходила через центри зон контакту. Центр полярної системи координат (ρ, λ) співпадає з центром отвору. Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ та кільцевих T_λ зусиль на контурі отвору.

Компоненти вектора зміщення контурних точок пластинки визначаються згідно з [1] за формулами

$$U = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)f_1(\lambda) + I_2(\lambda) + C_1]; \quad V = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)f_2(\lambda) - I_1(\lambda) + C_2], \quad (1.1)$$

де E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; C_1, C_2 – сталі;

$$f_1 + if_2 = i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda}) e^{it} dt ; I_j(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} f_j(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt, (j=1,2) ; i = \sqrt{-1}.$$

Граничні умови задачі при наявності в зоні контакту сил тертя, заданих законом Кулона, згідно з [2] мають вигляд

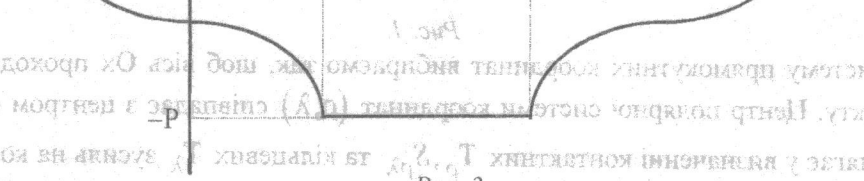
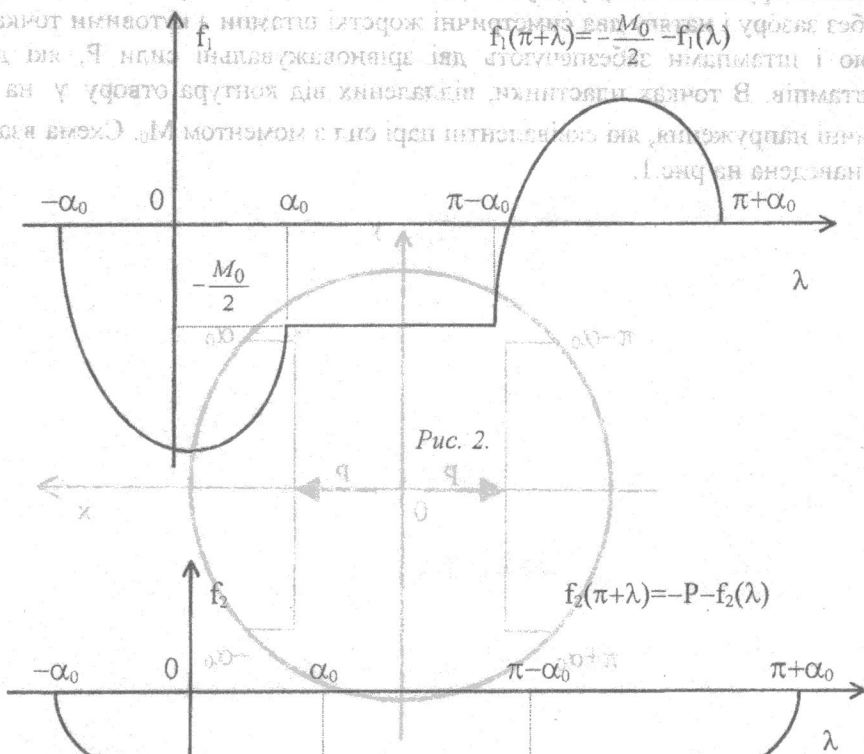
$$U + ig\lambda \cdot V = U_0 ; S_{\rho\lambda} = f \cdot T_{\rho}, \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0] \cup [\pi - \alpha_0, \pi + \alpha_0]. \quad (1.2)$$

Тут U_0 - жорстке зміщення штампa; f - коефіцієнт тертя ковзання; $2\alpha_0$ - центральний кут, який визначає зону контакту під штампом

Враховуючи властивості функцій $f_1(\lambda)$ і $f_2(\lambda)$ (рис.2, рис.3), можна записати після певних перетворень

$$I_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1(t) \frac{dt}{\sin(\lambda-t)} - \frac{M_0}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\lambda - \alpha_0}{2} \quad (1.3)$$

$$I_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2(t) \frac{dt}{\sin(\lambda-t)} - \frac{2P}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\lambda - \alpha_0}{2}$$



$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [C_1 + C_2(\lambda) + C_3(\lambda) + C_4(\lambda)] \frac{d\lambda}{\sin(\lambda-t)} + \dots$$

Інтегруючи (1.3) за частинами, знаходимо

$$I_j(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_j(t) \ln \left| tg \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \quad (j=1,2). \quad (1.4)$$

Заміною змінних

$$tg \frac{\lambda}{2} = a_0 x; \quad tg \frac{t}{2} = a_0 S; \quad a_0 = tg \frac{\alpha_0}{2} \quad (1.5)$$

співвідношення (1.4) перетворимо до вигляду

$$I_j(\lambda) = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 f'_j(S) \ln \left| x-S \sqrt{\frac{1+a_0^2 S^2}{1+a_0^2 x^2}} \right| + \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 f'_j(S) \ln \left| \frac{a_0}{1+a_0^2 xS} \sqrt{\frac{a_0^2 dS}{1+a_0^2 S^2}} \right|, \quad (j=1,2). \quad (1.6)$$

Функції $f_1(\lambda)$ і $f_2(\lambda)$ через $f'_1(\lambda)$ і $f'_2(\lambda)$ виражаються за формулами

$$f_1(\lambda) = -\frac{M_0}{2} + \int_{-1}^x f'_1(S) \frac{2a_0 dS}{1+a_0^2 S^2}; \quad f_2(\lambda) = P + \int_{-1}^x f'_2(S) \frac{2a_0 dS}{1+a_0^2 S^2}. \quad (1.7)$$

Підставляючи (1.1) з врахуванням (1.6), (1.7) в граничні умови (1.2), приходимо до системи двох інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій

$$\Phi_j(x) = \frac{2a_0 f'_j(x)}{1+a_0^2 x^2}, \quad (j=1,2).$$

$$(1-\nu) \int_{-1}^x \Phi_1(S) dS + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^x \Phi_2(S) \left[\ln|x-S| + \ln \left| \frac{a_0}{1+a_0^2 xS} \right| \right] dS +$$

$$+ tg \lambda \left\{ (1-\nu) \int_{-1}^x \Phi_2(S) dS - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^x \Phi_1(S) \left[\ln|x-S| + \ln \left| \frac{a_0}{1+a_0^2 xS} \right| \right] dS \right\} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 tg \lambda, \quad (1.8)$$

$$\Phi_1(x)(1-f tg \lambda) + \Phi_2(x)(tg \lambda + f) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0], \quad x \in [-1; 1].$$

Крім системи (1.8) повинні виконуватися умови граничної рівноваги кожного штамп

$$\int_{-1}^1 \Phi_2(S) dS = -P; \quad \int_{-1}^1 \Phi_1(S) dS = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}(t) dt = -\frac{M_0}{2}. \quad (1.9)$$

При цьому компоненти напруженого стану на контурі отвору в пластинці визначаються за формулами [2]

$$T_p(x) = \left[\Phi_2(x)(1-x^2) - \Phi_1(x)2x \right] \frac{1+a_0^2 x^2}{2a_0(1+x^2)}; \quad S_{\rho\lambda}(x) = f \cdot T_p(x), \quad x \in [-1; 1],$$

$$T_\lambda(\lambda) = T_p - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 T_p(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 S_{\rho\lambda}(t) ctg \left(\frac{\lambda-t}{2} \right) dt, \quad \lambda \in [0; 2\pi]$$

1.2. Дослідження структури розв'язку задачі (1.8), (1.9).

Знаходження точного розв'язку системи (1.8), (1.9) пов'язане із Ф значними математичними труднощами. Для визначення наближеного розв'язку потрібно встановити його структуру в околі кінців зон контакту. Продиференціюємо перше рівняння системи (1.8) по x

$$(1-\nu)\Phi_1(x) + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(S) \frac{dS}{x-S} + tg \lambda \left[(1-\nu)\Phi_2(x) - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(S) \frac{dS}{x-S} \right] = \Phi(x, \lambda);$$

$$(1-f tg \lambda)\Phi_1(x) + (tg \lambda + f)\Phi_2(x) = 0.$$

Тут $\Phi(x, \lambda)$ - регулярна в околі точок $\pm \alpha_0$ функція.

Напруження на кінцях зон контакту можуть мати тільки інтегровану особливість, тому на підставі (1.10) функції $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ можна подати у вигляді [3]

$$\Phi_j^0(x) = \frac{\Phi_j^0(x)}{(1-x)^{\gamma_1}(1+x)^{\gamma_2}}, \quad (j=1,2), \quad (1.12)$$

де $\Phi_j^0(x)$ - функції, які задовольняють умову Гельдера на $[-1; 1]$; $\gamma_1 > 0$; $\gamma_2 > 0$.

Враховуючи співвідношення [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_j(S) \frac{dS}{S-x} \Big|_{x \rightarrow \pm 1} = \pm ctg \gamma \pi \frac{\Phi_j^0(\pm 1)}{(1-x)^{\gamma_1}(1+x)^{\gamma_2}} + \Phi_j^*(x), \quad (1.13)$$

де $\Phi_j^*(x)$ - регулярні при $x = \pm 1$ функції, із системи (1.11) після множення на $(1-x)^{\gamma_1}(1+x)^{\gamma_2}$ одержимо

$$\begin{aligned} -(1-\nu)\Phi_1^0(\pm 1) + 2ctg \gamma \pi \Phi_2^0(\pm 1) - tg(\pm \alpha_0) \left[(1-\nu)\Phi_2^0(\pm 1) + 2ctg \gamma \pi \Phi_1^0(\pm 1) \right] &= 0; \\ [1-f tg(\pm \alpha_0)]\Phi_1^0(\pm 1) + [tg(\pm \alpha_0) + f]\Phi_2^0(\pm 1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\text{Тут } \gamma = \begin{cases} \gamma_1, & x \rightarrow +1 \\ \gamma_2, & x \rightarrow -1 \end{cases}$$

Система (1.14) має ненульовий розв'язок $\Phi_1^0(\pm 1)$, $\Phi_2^0(\pm 1)$, тому її визначник дорівнює нулю

$$\left[1 + tg^2(\pm \alpha_0) \right] \left[(1-\nu)f \pm 2ctg \gamma \pi \right] = 0. \quad (1.15)$$

Із рівняння (1.15) визначаємо

$$\gamma_1 = \text{arccctg} \left(-\frac{1+\nu}{2} f \right), \quad \gamma_2 = \text{arccctg} \left(\frac{1-\nu}{2} f \right). \quad (1.16)$$

Якщо в зоні контакту тертя відсутнє, то $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$.

З врахуванням (1.16) співвідношення (1.12) можна записати у вигляді

$$\Phi_j(x) = \frac{\Phi_j^0(x)}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^\alpha, \quad (j=1,2), \quad \alpha = \text{arccctg} \left(\frac{1-\nu}{2} f \right). \quad (1.17)$$

1.3 Наближений розв'язок задачі.

На підставі (1.17) наближений розв'язок будемо шукати у вигляді

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sin \varphi} \tilde{\Phi}_1^0(\varphi); \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{\sin \varphi} \tilde{\Phi}_2^0(\varphi), \quad \text{де } x = \cos \varphi. \quad (1.18)$$

Для функцій $\tilde{\Phi}_1^0(\varphi)$, $\tilde{\Phi}_2^0(\varphi)$ побудуємо інтерполяційні поліноми Лагранжа, вибравши за вузли інтерполяції корені поліномів Чебишева другого роду порядку N_0 [4]

$$\left\{ \tilde{\Phi}_1^0(\varphi), \tilde{\Phi}_2^0(\varphi) \right\} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0} \{A_n, B_n\} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{N_0-1} \cos m \varphi_n \cos m \varphi \right], \quad \varphi_n = \frac{2n-1}{2N_0} \pi. \quad (1.19)$$

Використовуючи (1.18), (1.19) і відомі рівності [4]

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^\alpha &= \left[\frac{2\alpha}{2-x} \right]_\alpha, \quad \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha = \left[\frac{2\alpha}{2+x} \right]_\alpha, \\ \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^\alpha &= \left[\frac{2\alpha}{2-x} \right]_\alpha, \quad \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha = \left[\frac{2\alpha}{2+x} \right]_\alpha \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos m\varphi \ln |\cos \varphi \cos \theta| d\varphi = \begin{cases} -\ln 2, & n=0 \\ -\cos m\theta, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} F(\cos \varphi_n),$$

запишемо квадратурні формули для особливих і регулярних інтегралів, які входять в (1.8), (1.9)

$$\int_1^x \{\Phi_1(S), \Phi_2(S)\} dS = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \{A_n, B_n\} \left[\theta + 2 \sum_{m=1}^{N_0-1} \frac{\cos m\varphi_n \sin m\theta}{m} \right]; S = \cos \varphi; x = \cos \theta;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \{\Phi_1(S), \Phi_2(S)\} \ln |x-S| dS = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \{A_n, B_n\} \left(\ln 2 + 2 \sum_{m=1}^{N_0-1} \frac{\cos m\varphi_n \cos m\theta}{m} \right);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \{\Phi_1(S), \Phi_2(S)\} \ln \left| \frac{a_0}{1+a_0^2 xS} \right| dS = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \{A_n, B_n\} \ln \left| \frac{a_0}{1+a_0^2 \cos \varphi_n \cos \theta} \right|; \theta \in [0, \pi].$$

Підставляючи (1.21) в систему (1.8), (1.9) і надаючи θ послідовно значення $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}$, а λ - відповідно значення $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих $A_n, B_n, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$. Якщо розв'язок цієї системи буде відомий, то контактні зусилля під штампом і кільцеві зусилля на контурі отвору визначаються за формулами (1.10). Точність методу колокації встановлюється порівнянням результатів розрахунку для різних значень N_0 .

Для прикладу досліджений вплив тертя на розподіл нормальних зусиль по контуру отвору при $\nu=0.3, \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$.

Результати чисельного розрахунку наведені на рис. 4. Суцільні лінії побудовані для $f=0$ (відсутність тертя), пунктирні - для $f=0.4$, штрихові - для $f=0.8$.

Розрахунки проводилися для різних значень N_0 до $N_0=64$ включно. Результати практично не змінюються починаючи з $N_0=32$.

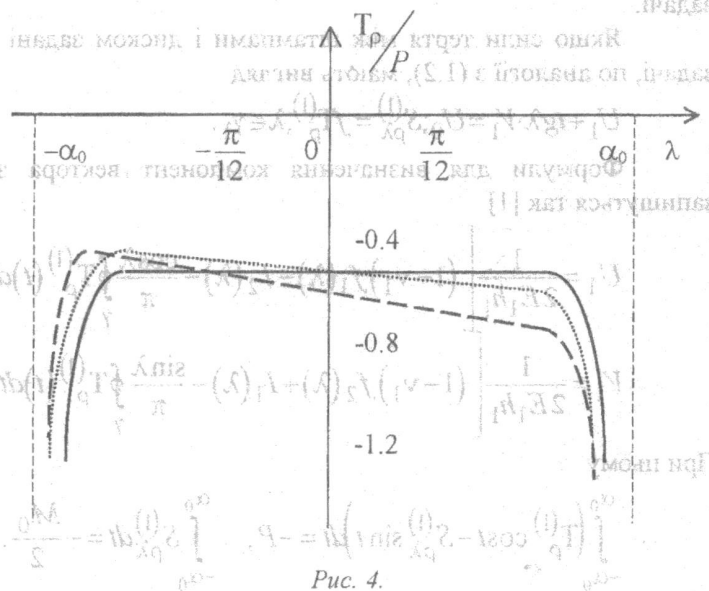


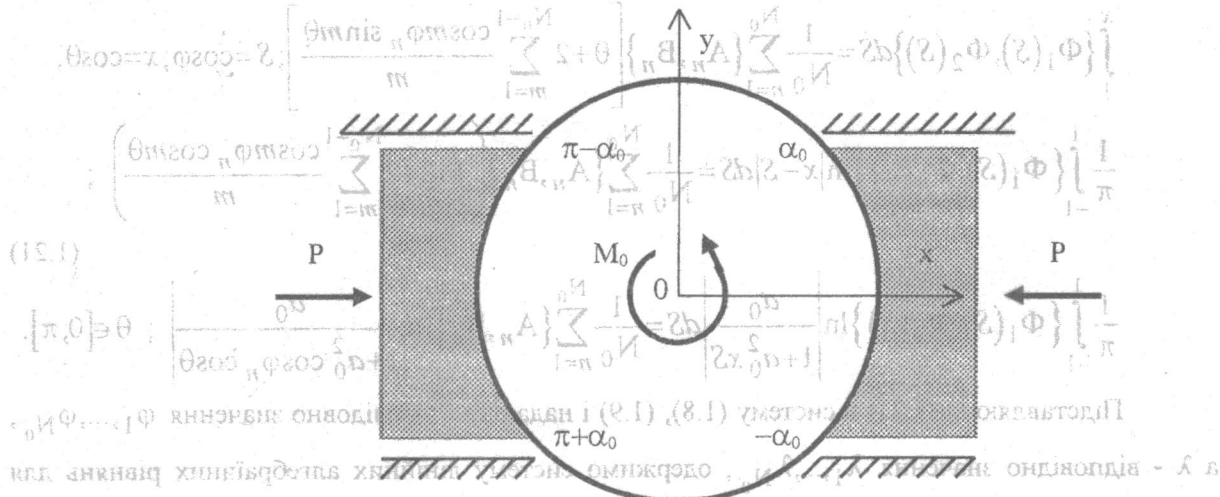
Рис. 4.

Проведені дослідження показують, що наявність в зоні контакту сил тертя приводить до незначної зміни епюри T_p/P і зміщення її в напрямку дії момента M_0 . В околі торців зон контакту контактні зусилля необмежені.

2. Стискування пружного диска двома жорсткими штампами.

Нехай пружний диск радіусом $\rho_1 = 1$ товщиною $2h_1$ стискається двома силами P через абсолютно жорсткі штампи з кутовими точками, як це показано на рис.5. В центрі диска діє пара сил з моментом M_0 . В результаті цього в зоні контакту $\lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0] \cup [\pi - \alpha_0, \pi + \alpha_0] \equiv \gamma_1$

виникають нормальні $T_{\rho}^{(1)}$ і дотичні $S_{\rho\lambda}^{(1)}$ зусилля, які підлягають визначенню.



Системи прямокутних і полярних координат вибираються так само, як і в попередній задачі.

Якщо сили тертя між штампами і диском задані законом Кулона, то граничні умови задачі, по аналогії з (1.2), мають вигляд

$$U_1 + tg\lambda \cdot V_1 = U_{\rho} \cdot S_{\rho\lambda}^{(1)} = T_{\rho}^{(1)}, \lambda \in \gamma_1. \tag{2.1}$$

Формули для визначення компонент вектора зміщення контурних точок диска запишуться так [1]

$$U_1 = \frac{1}{2E_1 h_1} \left[(1 - \nu_1) f_1(\lambda) - I_2(\lambda) - \frac{\cos \lambda}{\pi} \int_{\gamma} T_{\rho}^{(1)}(t) dt - \frac{2M_0}{\pi} \sin \lambda + C_1 \right],$$

$$V_1 = \frac{1}{2E_1 h_1} \left[(1 - \nu_1) f_2(\lambda) + I_1(\lambda) - \frac{\sin \lambda}{\pi} \int_{\gamma} T_{\rho}^{(1)}(t) dt + \frac{2M_0}{\pi} \cos \lambda + C_2 \right]. \tag{2.2}$$

При цьому

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (T_{\rho}^{(1)} \cos t - S_{\rho\lambda}^{(1)} \sin t) dt = -P; \quad \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^{(1)} dt = -\frac{M_0}{2}. \tag{2.3}$$

Позначення для f_1, f_2, I_1, I_2 такі ж самі як в (1.1). Підставляючи (2.2), (1.6), (1.7) в граничні умови (2.1), одержимо

Проведені дослідження показують, що в зоні контакту сила тертя пропорційна нормальній силі стиснення. В зоні контакту діє парний момент M_0 . В зоні контакту діє парний момент M_0 . В зоні контакту діє парний момент M_0 .

$$\begin{aligned}
 & (1-\nu_1) \int_1^x \Phi_1(S) dS - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(S) \left[\ln|x-S| + \ln \left| \frac{a_0}{1+a_0^2 xS} \right| \right] dS - \frac{2}{\pi \cos \lambda} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_p^{(1)}(t) dt + \\
 & + i g \lambda \left\{ (1-\nu_1) \int_1^x \Phi_2(S) dS + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(S) \left[\ln|x-S| + \ln \left| \frac{a_0}{1+a_0^2 xS} \right| \right] dS \right\} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 i g \lambda; \quad (2.4) \\
 & (1+i g \lambda) \Phi_1(x) + \Phi_2(x) (i g \lambda + f) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0], \quad x \in [-1, 1], \\
 & \Phi_j(S) = f_j(S) - \frac{2 a_0}{1+a_0^2 S^2} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_p^{(j)}(t) dt, \quad (j=1,2)
 \end{aligned}$$

Крім системи (2.4) повинні виконуватися умови граничної рівноваги штамп (2.3), які запишуться у вигляді

$$f_2(\alpha_0) = P_0, \quad \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_p^{(1)}(t) dt = M_0 \quad (2.5)$$

Система інтегральних рівнянь (2.4), (2.5) відрізняється від системи (1.8), (1.9) тільки регулярним інтегралом в лівій частині першого рівняння. Тому метод колокації знаходження наближеного розв'язку задачі переноситься без змін.

Контактні зусилля між диском і штампам визначаються із співвідношень (1.10), а кільцеві зусилля - за формулою

$$T_p^{(1)} = T_p^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_p^{(1)}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt \quad (2.6)$$

Методом колокації досліджено вплив тертя на розподіл контактних зусиль T_p/P для граничного кута контакту α_0^* при якому контактні зусилля в точці $\lambda = \alpha_0^*$ дорівнюють нулю.

Методика визначення граничного кута в контактних задачах наведена в [5].

Результати чисельного розрахунку контактних зусиль T_p/P подані на рис. 6. Суцільні лінії побудовані для $f=0$; пунктирні - для $f=0.4$; штрихові - для $f=0.8$.

В наведеному прикладі наявність тертя приводить до значної зміни контактних зусиль. При цьому із збільшенням f зусилля T_p/P зростають. Залежність граничного кута α_0^* (град) від коефіцієнта тертя f наведена в табл. 1. Точність методу колокації така ж як і в попередній задачі.

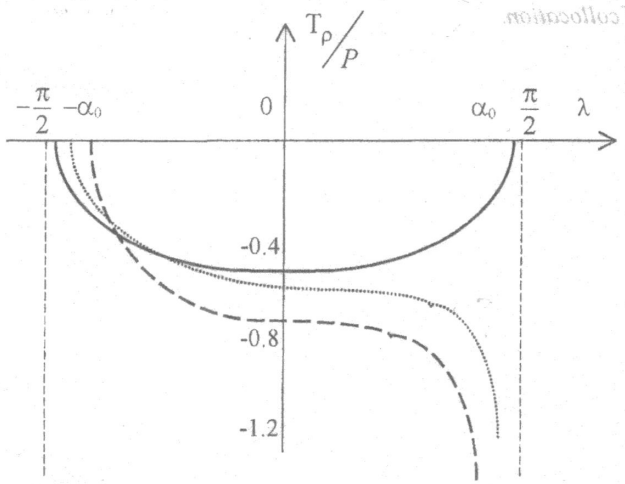


Рис. 6.

Таблиця 1.

f	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
α_0^* (град)	85.6	81.4	76.9	72.0	66.7	61.4

Зауважимо, що в обох задачах для контактних зусиль мають місце співвідношення $T_p(\pi+\lambda)=T_p(\lambda)$, $S_{p\lambda}(\pi+\lambda)=S_{p\lambda}$, тому графіки розподілу зусиль $\frac{T_p}{P}$ побудовані на одній із зон контакту.

1. Теплый М.И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983. - 176с.
2. Сяський А.О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на сліпичний отвір в ортотропній пластинці // Волинський математичний вісник. - 1997. - в. 4. - С.153-156.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 511с.
4. Каладия А.И. Математические методы двумерной упругости. - М.: Наука, 1973. - 304с.
5. Сяський В.А. Вдавлювання жорсткого диска в криволінійний отвір ізотропної пластинки // Волинський математичний вісник. - 1997. - в. 4. - С.157-160.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Сяський В. А. ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОНТАКТЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ И ШТАМПОВ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ // *Задача о двустороннем контакте жестких штампов с угловыми точками и цилиндрических тел при учете сил трения скольжения приведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими ядрами. Методом коллокации исследовано напряженное состояние на контуре кругового отверстия в бесконечной пластинке и круглого диска.*
 Syasky V. A. INFLUENCE OF FRICTION ON SHARING STRESSES AT THE CONTACT OF CYLINDRICAL BODIES AND STAMPS WITH ANGULAR POINTS // *Problem about the bilateral contact of hard stamps with angular points and cylindrical bodies taking into account forces of slide friction is reduced to two singular integral equations system with logarithmic kernels. The tense condition on the sidebar of circular hole in the endless plate and round disk is investigated by method of collocation.*

