Волинський математичний вісник

Випуск 6

1999

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики та інформатики. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

The **"Volyn Mathematical Bulletin"** publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics and informatics. Recommended for research workers, teachers of higher schools, post graduates and senior year students.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті
при сприянні Українського математичного товариства,
Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова,
Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
Кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 260-444.

ISBN 966 - 7281 - 02 - 8

Зміст

Застосування математичних методів

Короткі повідомлення

УДК 517.21

Турбал Ю.В.

ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СУМІСНОСТІ ДЕЯКИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Пропонується один метод перевірки сумісності деяких систем нелінійних рівнянь, що грунтується на знаходженні екстремумів функцій в областях з нелінійними обмеженнями.

1. Вступ. При дослідженні деяких випадкових процесів виникає необхідність розв'язувати системи рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} y_1+y_2+\ldots+y_m=x_1, \\ y_1e^{-\mu_1}+y_2e^{-\mu_2}+\ldots+y_me^{-\mu_m}=x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1e^{-(2m-1)\mu_1}+y_2e^{-(2m-1)\mu_2}+\ldots+y_me^{-(2m-1)\mu_m}=x_{2m}, \end{cases} \tag{1}$$

відносно невідомих значень $y_i>0$ та $\mu_i\ge 0,\ i=\overline{1,m}$.

Такі системи використовуються в роботі [1] для оцінки параметрів функцій зносу та пуассонівських потоків моделі радіоактивного забруднення. Причому дуже важливим є питання перевірки сумісності систем типу (1) для різних наборів чисел $x_1,x_2,\ldots,x_{2m-1}$. Необхідні умови сумісності таких систем досліджувались у роботі [2]. Відзначимо, що система (1) являє собою, по суті, систему моментних співвідношень. Розглянемо функції $e^{-\mu_i x},i=\overline{1,m}$, що утворюють систему Чебишева (див. [3]). Легко побачити, що питання про сумісність системи (1) та її розв'язок зводиться до розв'язку проблеми моментів Маркова для відповідної системи функцій. Тобто, якщо існує головне зображення послідовності $x_1,x_2,\ldots,x_{2m-1}$ (див [3]) стосовно системи функцій $e^{-\mu_i x},i=\overline{1,m}$, у якому точки зосередження мас співпадають з цілими числами 1,2, ..., $2m-1$, то система (1) – сумісна.

Задачу про сумісність системи (1) можемо сформулювати з точки зору степеневої проблеми моментів Маркова. Введемо заміну змінних: $e^{-\mu_i}=\alpha_i$, $i=\overline{1,m}$. Тоді система (1) набере вигляду:

$$\begin{cases} y_1+y_2+\ldots+y_m=x_0, \\ y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\ldots+y_m\alpha_m=x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1\alpha_1^{(2m-1)}+y_2\alpha_2^{(2m-1)}+\ldots+y_m\alpha_m^{(2m-1)}=x_{2m-1}, \end{cases} \tag{2}$$

$$y_i>0,\quad 0<\alpha_i<1,\ i=\overline{1,m}. \tag{3}$$

В цьому випадку питання про сумісність та розв'язок системи (2) еквівалентне розв'язку степеневої проблеми моментів Маркова на інтервалі (0,1) в її класичній постановці. Як відомо (див. [2]), степенева проблема моментів Маркова має розв'язок. Основний результат для нашого випадку можна сформулювати так: якщо послідовність чисел $x_1,x_2,\ldots,x_{2m-1}$ строго позитивна, то існує одне і тільки одне її нижнє головне зображення, причому точки зосередження мас співпадають з коренями многочлена $\det|x_i x_{i+1}\ldots x_{i+m-1}t^i|$. Відзначимо, що перевірка строгої позитивності довільної послідовності чисел $x_1,x_2,\ldots,x_{2m-1}$ є досить складним завданням. Якщо про послідовність немає ніякої додаткової інформації, то автору взагалі невідомі ефективні методи перевірки строгої позитивності. Тому спробуємо дослідити сумісність системи (2) безпосередньо, виходячи з її специфіки.

Розглянемо наступну умову:

$$\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,m}. \qquad (4)$$

Лема 1. Нехай система (2) сумісна та виконуються умови (3) – (4). Тоді відповідна послідовність чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1}$ є строго позитивною відносно системи функцій $1, t, t^2, \ldots, t^{2p-1}$, що розглядаються на інтервалі [0,1].

Справді, розглянемо довільний многочлен $Q_{2m-1}(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_{2m-1}t^{2m-1}$ порядку 2m-1. Визначимо функціонал G наступним чином: $G(Q)=a_0x_0+a_1x_1+\ldots+a_{2m-1}x_{2m-1}$. Нехай $Q_{2m-1}(t)\geq 0$ на інтервалі (0,1). Тоді $G(Q)=a_0x_0+a_1x_1+\ldots+a_{2m-1}x_{2m-1}= y_1Q_{2m-1}(\alpha_1)+$ $+y_2Q_{2m-1}(\alpha_2)+\ldots+y_mQ_{2m-1}(\alpha_m)$. Покажемо, що існує таке α_i, що $Q_{2m-1}(\alpha_i)>0$. Припустимо, що це не так. Тоді $Q_{2m-1}(\alpha_i)=0$, $i=\overline{1,m}$. В цьому випадку многочлен $Q_{2m-1}(t)$ буде мати вигляд: $Q_{2m-1}(t)=(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\ldots(t-\alpha_m)P_{m-1}(t)$, де $P_{m-1}(t)$ -деякий многочлен степені $m-1$. Нехай якесь з чисел α_i, $i=\overline{1,m}$ не є коренем многочлена $P_{m-1}(t)$. Тоді можемо вибрати малий окіл точки α_i так, щоб знак многочлена $Q_{2m-1}(\alpha_i)$ змінювався при "переході через точку". Оскільки $\alpha_i \in (0,1)$, то отримуємо протиріччя з тим, що многочлен $Q_{2m-1}(t)\geq 0$. Отже, будь-яке число α_i, $i=\overline{1,m}$ є коренем многочлена $Q_{2m-1}(t)$. Але ж цей многочлен має не більше $2m-1$ коренів. Отримане протиріччя і доводить лему.

Таким чином, при виконанні умови (4) та сумісності системи (2) скінченна послідовність чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{2m-1}$ є строго позитивною. Звідси випливає, що система (2) має єдиний розв'язок. Причому цей розв'язок може бути знайдений вказаним вище методом. Знайшовши умову сумісності системи (2), ми, фактично, отримаємо ще один шлях розв'язку степеневої проблеми моментів Маркова для випадку, коли в нижньому головному зображенні кількість співвідношень – парна [3].

В роботі [1] була запропонована наступна необхідна умова сумісності системи (1). Нехай $x_n^{\min}$ та $x_n^{\max}$ – відповідно мінімальне та максимальне значення функції $f_n(y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)=y_1\alpha_1^n+y_2\alpha_2^n+\ldots+y_m\alpha_m^n$ за умов:

$$\begin{cases} y_1+y_2+\ldots+y_m=x_0, \\ y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\ldots+y_m\alpha_m=x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1\alpha_1^{n-1}+y_2\alpha_2^{n-1}+\ldots+y_m\alpha_m^{n-1}=x_{n-1}, \end{cases} \qquad (5)$$

$$y_i>0,\ 0<\alpha_i\leq 1,\ i=\overline{1,m}. \qquad (6)$$

Якщо система (2) сумісна, та виконуються умови (3)-(4), то:

$$\begin{cases} x_0>0, \\ x_i^{\min}<x_i<x_i^{\max}, i=\overline{1,2m-1}. \end{cases} \qquad (7)$$

Покажемо, що умова (7) є і достатньою.

2. Критерій сумісності системи (1).

Лема 2. Функція $f_n(y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ є опуклою.

Дійсно, розглянемо гессіан H= $\left\|\dfrac{\partial f^n(y_1,\ldots,y_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{i,j=\overline{1,2m}} = \left\|h_{ij}\right\|_{i,j=\overline{1,2m}}$,

де $(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Легко бачити, що його елементами є:

$$h_{ij}=\begin{cases} n\alpha_i^{n-1}, \ j=m+i, 1\le i\le m,\\ n\alpha_i^{n-1}, \ j=i-m, m\le i\le 2m,\\ n(n-1)\alpha_i^{n-2}y_i, \ m\le i\le 2m, i=j,\\ 0, \ \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Легко бачити, що всі діагональні мінори матриці H, крім останнього, є нульовими. Останній мінор дорівнює $k^{2m}\alpha_1^{2n-2}\alpha_2^{2n-2}...\alpha_m^{2n-2}\ge 0$. Тоді, за критерієм Сельвестра, матриця H є невід'ємно-визначеною. Отже, функція $f_n(y_1,y_2,...,y_m,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ – опукла.

Лема 3. Область, задана співвідношеннями (2)-(3), є опуклою.

Дійсно, множина виду $\{x: f(x)\le 0\}$ є опуклою, якщо опукла функція *f(x)*; перетин опуклих множин є опуклою множиною. Тоді опуклою буде і область (2) – (3) як перетин опуклих множин.

Теорема 1. При виконанні співвідношень (3) – (4) умова (7) є необхідною та достатньою для сумісності системи (2).

Дійсно, нехай виконується система нерівностей (7). Покажемо, що система (2) при виконанні співвідношень (3) є сумісною. Будемо послідовно аналізувати підсистеми , що складаються з перших i рівнянь системи (2), $i=\overline{1,2m-1}$. Очевидно, що рівняння $y_1+y_2+...+y_m=x_0$ має розв'язки при виконанні умов: $x_0>0$,. $y_i>0$, $i=\overline{1,m}$. Припустимо, що сумісною є підсистема перших i рівнянь системи (2) та виконуються співвідношення (3). Нехай x_{i+1} – таке число, що справджує нерівність $x_{i+1}^{\min}<x_{i+1}<x_{i+1}^{\max}$. Якщо в області, яка описується першими i рівняннями системи (2) та умовою (3), існує така точка z, що $f_{i+1}(z)=x_{i+1}$, то, в силу визначення $x_i^{\min},x_i^{\max}$, сумісною є підсистема з перших $i+1$ рівнянь. Для існування вищезгаданої точки z достатньо зв'язності області (2)-(3). Але, в силу леми 3, область (2)-(3) є зв'язною.

Розглянемо ситуацію, коли виконується співвідношення (4). Тоді область, утворена співвідношеннями (3) та першими i рівняннями системи (2) буде незв'язною. Вона "розбивається" на відкриті зв'язні підмножини гіперплощинами $\alpha_i=\alpha_j, i\ne j, i,j=\overline{1,m}$. Надалі будемо позначати відповідні підмножини через Ω_i. В цьому випадку "неприємні моменти" можуть виникнути на згаданих гіперплощинах. Адже можлива ситуація, коли число x_{i+1} є таким, що точки z допустимої області, в яких функція набуває значення x_{i+1}, належать лише множині, що утворюється перетином згаданих гіперплощин (можливість такої ситуації аналізувати не будемо). Тоді з виконання нерівності $x_{i+1}^{\min}<x_{i+1}<x_{i+1}^{\max}$ не випливає сумісність підсистеми перших $i+1$ рівнянь системи (2).

Відмітимо, що будь-яка область Ω_i має таку граничну точку, для якої $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m$. Але, як досліджено в роботі [1], максимальне значення відповідної функції досягається саме на цій множині. Тому у випадку виконання умови (4) можемо вибрати таку випуклу область Ω_i, яка граничить з точкою максимуму та мінімуму функції $f_{i+1}(y_1,y_2,...,y_m,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$. Отже, і в цьому випадку можемо стверджувати, що для будь-якого числа x_{i+1}, $x_{i+1}\in\left(x_{i+1}^{\min},x_{i+1}^{\max}\right)$, існує така точка z в області (2) – (3), що $f_n(z)=x_{i+1}$.

3. Про узагальнення підходу на інші системи. Відзначимо, що підхід, описаний вище, може бути використаний для перевірки сумісності інших типів нелінійних систем. Розглянемо в наступну систему нелінійних рівнянь :

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ .... \\ f_m(x_1,x_2,...,x_n)=0, \end{cases} \tag{8}$$

де $(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega$, Ω – деяка зв'язна, обмежена та замкнена множина, $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$ – такі функції, що множини $\{x=(x_1,x_2,...,x_n) : f_i(x_1,x_2,...,x_n)=0, i=\overline{1,k}\}$ $k=\overline{1,m-1}$ є зв'язними або порожніми. Нехай непорожньою є множина розв'язків, наприклад, першого рівняння системи (8). Тоді необхідною та достатньою умовою сумісності системи (8) є наступна умова:

$$x_i^{\min} \le 0 \le x_i^{\max}, i=\overline{1,m}, \tag{9}$$

де $x_i^{\min}$ та $x_i^{\max}$ є відповідно мінімальне та максимальне значення

функції $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$ на такій допустимій множині:

$$(x_1,x_2,...,x_m)\in\Omega\subset R^m, \tag{10}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ .... \\ f_{i-1}(x_1,x_2,...,x_n)=0, \end{cases} \tag{11}$$

Зокрема, при i=1 матимемо задачу на знаходження бузумовного екстремуму функції.

Звичайно, говорити про можливість практичного застосування описаної вище методики перевірки сумісності систем в загальному випадку не можна, оскільки задача знаходження екстремуму нелінійної функції при нелінійних обмеженнях є досить складною. Для її розв'язку можна використовувати ряд відомих методів (градієнтні та ін.). Лише в деяких випадках екстремуми можна знайти порівняно легко. Наприклад, у випадку лінійних функцій $f_i(x_1,x_2,...,x_m)$ задача знаходження відповідних мінімальних та максимальних значень може бути розв'язана симплекс методом. У випадку функцій виду $y_1e^{-\mu_1 t}+y_2e^{-\mu_2 t}+...+y_me^{-\mu_m t}$ та нелінійних обмежень виду (1) описаний вище підхід можна використовувати на практиці, оскільки розроблена методика знаходження відповідних екстремальних значень (див. [1]).

1. *Доценко С.М., Турбал Ю.В.* Про достатні умови стрибка траєкторії моделі радіоактивного забруднення // Волинський математичний вісник.- 1998.- №5.- С.48-56.
2. *Закусило О.К.,Турбал Ю.В.* Один метод оцінки параметрів функцій зносу моделі радіоактивного забруднення // Вісник Київського університету.- 1996.- №1.- С.98-106.
3. *Крейн М.Г.,Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.- М.: Наука, 1983.- 350 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Турбал Ю.В. О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ // *Предлагается один метод проверки совместности некоторых систем нелинейных уравнений, который основывается на нахождении экстремумов функций в областях с нелинейными ограничениями.*

Turbal Yu.V. ABOUT THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF SOME SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS COMPATIBILITY // *Necessary and sufficient conditions of some systems of nonlinear equations compatibility are proposed which are based on finding the nonlinear function extremums.*