МО України
Рівненський державний педагогічний інститут

Рівненське відділення АН ВШ України

Рівненська та Волинська регіональні організації
Українського математичного товариства

Волинський математичний вісник

(Матеріали школи-семінару **"Прикладні проблеми математики та інформатики"**,
1-4 лютого 1996 р., м. Рівне)

ВИП. 2

Рівне 1995

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної і прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

Видається один раз у рік з 1994р. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N148 від 11.04.95р. Засновники: А. Я. Бомба(голова Рівненського регіонального відділення Українського математичного товариства), В. В. Ковтунець(член правління Українського математичного товариства), В. Ю. Слюсарчук(головний редактор "Волинського математичного вісника").

При виданні матеріалів школи-семінару редакція вирішила не брати на себе право істотнього редагування підготовлених авторами текстів.

Редакція приймає статті лише після оголошення математичним товариством чергового набору вісника. Контактні телефони:
26-04-44, 26-26-97.

Зміст

УДК 532. 546 + 532. 72

А.Я.Бомба, канд. фіз.-мат. наук (Рівне, педінститут)
М.М.Хлапук, канд. техн. наук (Рівне, УІІВГ)
Б.П.Сидорчук, аспірант (Рівне, УІІВГ)

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ І РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЛОКАЛЬНО ЗБУРЕННИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ

Пропонується методика дослідження нелінійних збурень, які виникають на ділянках великих градієнтів.

В області $G=\{(r,t) : r_0<r<R_0,\ t>0\}$ розглянемо осесиметричну задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\chi(h) r \dfrac{\partial h}{\partial r}\right) = \dfrac{\partial h}{\partial t}, \quad h(r,0) = 0, \\ h(r_0,t) = h_0, \quad h(R_0,t) = H_0, \quad 0 < h_0 < H_0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\chi(h) = \chi_* \begin{cases} 1, \text{ при } \displaystyle\int_0^T \frac{\partial h}{\partial r} dt \le \alpha \ (\alpha > 0), \\ 1 + \chi_*^{-1} \varepsilon (r_* - r), \text{ при } \displaystyle\int_0^T \frac{\partial h}{\partial r} dt > \alpha, \end{cases} \tag{2}$$

де α – критичне значення градієнта невідомої функції $h(r,t)$, що спричиняє збурення коефіцієнта провідності χ (сталого при $t = 0$ в усьому кільці $r_0<r<R_0$, $\chi = \chi_*$) в деякому околі $r = r_0$, ε – числова характеристика цього збурення ($\varepsilon>0$). Невідома точка $r_* = r_*(\alpha)$, яка ділить відрізок $[r_0,R_0]$ на "збурену" ($[r_0, r_*]$) та "незбурену" ($[r_*, R_0]$) ділянки, знаходиться у процесі розв'язку даної задачі, $0<T<\infty$.

Напочатку запишемо розв'язок виродженої задачі [1], тобто, коли в (1) - $\chi(h) = \chi_*$ $\forall$ $r \in [r_0,R_0]$:

$$h(r,t) = h_0 + \frac{H_0 - h_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n R_n(r) T_n(t), \tag{3}$$

де $R_n(r) = c_n J_0(\lambda_n r) + Y_0(\lambda_n r)$, J_0, Y_0 - бесселеві функції відповідно 1-го та 2-го роду, c_n, λ_n - знаходяться в результаті розв'язку системи:

$$\begin{cases} c_n J_0(\lambda_n r_0) + Y_0(\lambda_n r_0) = 0, \\ c_n J_0(\lambda_n R_0) + Y_0(\lambda_n R_0) = 0, \end{cases}$$

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 \chi_* t}, \quad \rho_n = \int_{r_0}^{R_0} r R_n(r) \left(h_0 + \frac{H_0 - h_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} \right) dr \left(\int_{r_0}^{R_0} r R_n^2(r) dr \right)^{-1}.$$

Далі з рівняння

$$\int_0^T \frac{\partial h}{\partial r} dt = \alpha$$

знаходимо перше наближення "точки розділу" $r_* = r_{*1}$ і на наступному кроці (при знаходженні розв'язку задачі (1))

$$h = \begin{cases} h_1, & \text{при } r_{*1} < r < R_0, \\ h_2, & \text{при } r_0 < r \le r_{*1}, \end{cases} \quad \text{де } \chi = \chi_* \begin{cases} 1, & r_{*1} < r < R_0, \\ 1 + \chi_*^{-1} \varepsilon (r_* - r), & r_0 < r \le r_{*1} \end{cases}$$

приходимо до таких двох задач:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi_* r \frac{\partial h_1}{\partial r}\right) = \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad h_1(r,0) = 0, \\ h_1(R_0, t) = H_0, \quad r_{*1} < r < R_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi_* \left(1 + \chi_*^{-1}\varepsilon(r_* - r)\right) r \frac{\partial h_2}{\partial r}\right) = \frac{\partial h_2}{\partial t}, \\ h_2(r,0) = 0, \quad h_1(r_0, t) = h_0, \quad r_0 < r \le r_{*1} \end{cases} \qquad (4)$$

при умовах спряження:

$$h_1(r_{*1}, t) = h_2(r_{*1}, t), \quad \frac{\partial h_1(r_{*1}, t)}{\partial r} = \frac{\partial h_2(r_{*1}, t)}{\partial r}.$$

У результаті розв'язку (4) матимемо [1]:

$$\begin{cases} h_1(r,t) = H_0 + \dfrac{H_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \dfrac{r}{R_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\rho}_{*n} \tilde{R}_{*n}(r) \tilde{T}_{*n}(t), \\ h_2(r,t) = h_0 + \dfrac{H_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \dfrac{r}{r_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\rho}_n^* \tilde{R}_n^*(r) \tilde{T}_n^*(t), \end{cases} \qquad (5)$$

де $\tilde{R}_{*n}(r) = c_n J_0(\tilde{\lambda}_n r) + Y_0(\tilde{\lambda}_n r)$, $\tilde{R}_n^*(r) = a_n K_0(\tilde{\lambda}_n, r) + b_n K_*(\tilde{\lambda}_n, r) =$

$= \sum\limits_{m=1}^{\infty} \beta_{m,n}(\tilde{\lambda}_n, a_n, b_n) r^m$, $\beta_{m,n} = -\dfrac{\varepsilon}{\chi_* - \varepsilon r_*} \beta_{m-1,n} + \dfrac{\tilde{\lambda}_n^2 \chi_*}{(m+1)(\chi_* - \varepsilon r_*)} \beta_{m-2,n}$, $m = \overline{2, \infty}$,

$\beta_{0,n} = a_n$, $\beta_{1,n} = b_n$, $\tilde{T}_{*n}(t) = \tilde{T}_n^*(t) = e^{-\tilde{\lambda}_n^2 \chi_* t}$, $\tilde{\rho}_{*n} = \tilde{\rho}_n^* = -\left(\displaystyle\int_{r_0}^{r_*} \left(h_0 + \frac{H_0 - h_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0}\right) \times\right.$

$\left. \times r \tilde{R}_n^*(r) dr + \displaystyle\int_{r_*}^{R_0} \left(H_0 + \frac{H_0 - h_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \frac{r}{R_0}\right) r \tilde{R}_{*n}(r) dr \right) \times \left(\displaystyle\int_{r_0}^{r_*} r \tilde{R}_n^{*2}(r) dr + \int_{r_*}^{R_0} r \tilde{R}_{*n}^2(r) dr\right)^{-1}$,

$c_n = -Y_0(\tilde{\lambda}_n R_0) J_0^{-1}(\tilde{\lambda}_n R_0)$, $b_n = \left(c_n J_0(\tilde{\lambda}_n r_*) + Y_0(\tilde{\lambda}_n r_*)\right) \times \left(-K_*(\tilde{\lambda}_n, R_0) K_0^{-1}(\tilde{\lambda}_n, R_0) K_0(\tilde{\lambda}_n, r_*) + \right.$

$\left. + K_*(\tilde{\lambda}_n, r_*)\right)^{-1}$, $a_n = -b_n K_*(\tilde{\lambda}_n, R_0) K_0^{-1}(\tilde{\lambda}_n, R_0)$, а власні значення $\tilde{\lambda}_n$ отримуються шляхом розв'язання рівняння:

$$-Y_0(\tilde{\lambda}_n R_0) J_0^{-1}(\tilde{\lambda}_n R_0) J_0'(\tilde{\lambda}_n r_*) + Y_0'(\tilde{\lambda}_n r_*) + \left(-Y_0(\tilde{\lambda}_n R_0) J_0^{-1}(\tilde{\lambda}_n R_0) J_0(\tilde{\lambda}_n r_*) + Y_0(\tilde{\lambda}_n r_*)\right) \times$$

$$\times \left(-K_*(\tilde{\lambda}_n, R_0) K_0^{-1}(\tilde{\lambda}_n, R_0) K_0(\tilde{\lambda}_n, r_*) + K_*(\tilde{\lambda}_n, r_*)\right)^{-1} \left(K_*(\tilde{\lambda}_n, R_0) K_0^{-1}(\tilde{\lambda}_n, R_0) K_0'(\tilde{\lambda}_n, r_*) -\right.$$

$$\left. - K_*'(\tilde{\lambda}_n, r_*)\right) = 0.$$

Аналогічно знаходимо друге наближення $r_* = r_{*2}$ і т.д. Виявляється, що даний процес збіжний, а саме:

$$r_{**} = \lim_{n \to \infty} r_{*n}.$$

Зауваження 1. Подібного роду процедура може бути використана для наближеного розв'язання задачі і в такому розумінні: на першому етапі ($0<t<T$) вважаємо, що "грунт не руйнувався". Руйнування ж на ділянці $[r_0, r_{*i}]$ (де r_{*i} отримуються як і раніше) відбувається на другому етапі ($T<t<2T$). При цьому розв'язок тут отримується аналогічно до розв'язку задачі (4), лише з тією різницею, що за початковий момент часу прийматимемо $t = T$, а за початкову умову - значення розв'язку із попереднього етапу при $t = T$ і т.д.

Зауваження 2. Якщо ε- малий параметр, то розв'язок задачі (1), (2) можна наближено отримати у вигляді [2, 3]: $h(r, t) = h^*(r, t) + \varepsilon h_*(r, t)$, де розв'язок $h^*(r, t)$ виродженої задачі побудованої раніше (див. (3)), а поправка $h_*(r, t)$ знаходиться в результаті розв'язку задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\chi_* r \dfrac{\partial h_*}{\partial r}\right) + F_1(r,t) = \dfrac{\partial h_*}{\partial t}, \quad F_1(r,t) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left((r_* - r) r \dfrac{\partial h^*}{\partial r}\right), \\ h_*(r_0, t) = h_*(R_0, t) = h_*(r, 0) = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

$$h_*(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_{*n}(t), \text{ де } T_{*n}(t) = \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} \tilde{T}_{*n}(\tau)\, d\tau, \ \tilde{T}_{*n}(t) = \frac{2}{R_0 - r_0} \int_{r_0}^{R_0} r F_1(r,t) R_n(r) dr.$$

Зауваження 3. З метою зручності викладок і модельної орієнтації ми розглядали простіший (специфічний) випадок серед такого роду параболічних задач. Дана методика побудови моделей і їх дослідження поширюється і на складніші конструкції збурень. Причому на проміжних етапах процес може супроводжуватись заміною методу розділення змінних іншими наближеними методами.

1. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 735 с.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. - М.: Мир, 1972. - 274 с.
3. Бомба А.Я. Об асимптотическом методе решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде. Укр. матем. журн. - 1982.- т.4. №4, - с. 493 - 496.