

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**Випуск 9**

**2002**

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the mathematics, informatics and mechanics. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

**Редакційна колегія :**

Барановський С.В. (*секретар*)  
Бейко І. В.  
Боднар Д. І.  
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)  
Бурак Я. Й.  
Войтович М. М.  
Гаращенко Ф. Г.  
Горбачук М.Л.  
Дейнека В.С.  
Задерей П. В.  
Каштан С. С. (*технічний секретар*)  
Кратко М. І.  
Ляшко І.І.  
Мельник В. С.  
Попов Б. О.  
Прикарпатський А. К.  
Пташник Б. Й.  
Савула Я. Г.  
Скопечкий В. В. (*головний редактор*)  
Сяський А. О.  
Чикрій А.О.  
Шевчук І.О.  
Шинкаренко Г. А.  
Янчук П. С.  
Ясній П. В.

**Editorial board :**

Baranovsky S.V. (*secretary*)  
Beyko I. V.  
Bodnar D. I.  
Bomba A. Ya. (*editor*)  
Burak Ya. Y.  
Voytovych M. M.  
Garashchenko F. G.  
Gorbachuk M.L.  
Deyneka V.S.  
Zaderej P. V.  
Kashtan S. S. (*secretary*)  
Kratko M. I.  
Lyashko I.I.  
Melnyk V. S.  
Popov B. O.  
Prykarpatsky A. K.  
Ptashnyk B. Y.  
Savula Ya. G.  
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)  
Syasky A. O.  
Chikriy A.O.  
Shevchuk I.O.  
Shynkarenko G. A.  
Yanchuk P. S.  
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

**Адреса редакції :** 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

## Зміст

<i>Батишкіна Ю.В., Сяський А.О.</i> ЧАСТКОВЕ ПІДКРІПЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНЦІ ТОНКИМ ПРУЖНИМ СТЕРЖНЕМ .....	4
<i>Бомба А.Я.</i> ЧИСЕЛЬНО-АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТИПУ “ФІЛЬТРАЦІЯ-ДИФУЗІЯ” ЗА УМОВ ВЗАЄМОВПЛИВУ ГРАДІЄНТІВ ПОТЕНЦІАЛУ ТА КОЕФІЦІЄНТА ПРОВІДНОСТІ СЕРЕДОВИЩА .....	12
<i>Возняк О.Г.</i> ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ .....	20
<i>Кацман С.С.</i> ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯ ШВИДКОСТІ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА УМОВ ВЗАЄМОВПЛИВУ ГРАДІЄНТА ПОТЕНЦІАЛУ І ХАРАКТЕРИСТИК АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА .....	32
<i>Комбель С.М., Сяський А.О.</i> КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНЦІ І ЖОРСТКОГО ДИСКА З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ .....	41
<i>Кондрат В.Ф., Боднарчук Г.Я.</i> ОСЕРЕДНЕНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ СИЛОВОМУ ЗБУРЕННІ НЕЛІНІЙНИХ МАГНІТОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ .....	48
<i>Кузьменко А.П., Гладка О.М.</i> ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІСІ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДІВЕРГЕНТНОГО ТИПУ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ПЕРІОДИЧНІСТЮ В КРАЙОВИХ УМОВАХ .....	55
<i>Пригорницький Д.О.</i> ПРО МОДИФІКАЦІЮ АЛГОРИТМУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ДВОЗВ'ЯЗНИХ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ .....	60
<i>Савула Н.Я.</i> ЗБІЖНІСТЬ ЗА ШТРАФОМ РОЗВ'ЯЗКУ ГЕТЕРОГЕННОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ .....	67
<i>Хриптун М. Д.</i> ПРО ДЕЯКІ РЯДИ ЗА ОДНИМ УЗАГАЛЬНЕННЯМ ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ .....	75
<i>Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.</i> КОНТАКТНО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ В ШАРІ З ВЕРТИКАЛЬНО ПЕРІОДИЧНОЮ СТРУКТУРОЮ .....	81
<i>Ядзак М.С.</i> ДЕЯКІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГОРИТМІВ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ .....	90
<b>НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ</b>	
<i>Бомба А.Я.</i> ВСЕВОЛОД МИХАЛЬЧУК (16.03.1931 – 20.05.2002) .....	100
<i>Коренков М.Є.</i> В.Й.ГОРБАЙЧУК – ВЧЕНИЙ І ПЕДАГОГ .....	103
<b>ЛИСТ В РЕДАКЦІЮ</b>	
<i>Дейнека О.Ю.</i> ВИПРАВЛЕННЯ ДО СТАТТІ .....	105

УДК 539.3

Батишкіна Ю.В., Сяський А.О.

## ЧАСТКОВЕ ПІДКРІПЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНЦІ ТОНКИМ ПРУЖНИМ СТЕРЖНЕМ

Пропонується наближений метод визначення напруженого стану на контурі криволінійного отвору, який частково підкріплений тонким пружним стержнем змінного поперечного перерізу, в нескінченній пластинці. Методом функцій комплексної змінної задача зведена до системи двох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь відносно контактних зусиль для розв'язку якої застосовується метод граничної колокації.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною  $2h$  з криволінійним отвором, обмеженим гладким контуром  $L$  у вигляді правильного  $N$ -кутника із закругленими кутами типу гіпотрохіди. Із серединною площиною пластинки сумістимо комплексну площину  $z = x + iy$  з початком координат в центрі отвору. Нехай на проміжку  $L_1 = [\alpha_0^*; \beta_0^*]$  контур отвору підкріплений тонким пружним стержнем змінного поперечного перерізу, де  $\alpha_0^*; \beta_0^*$  – полярні кути торців підкріплення.

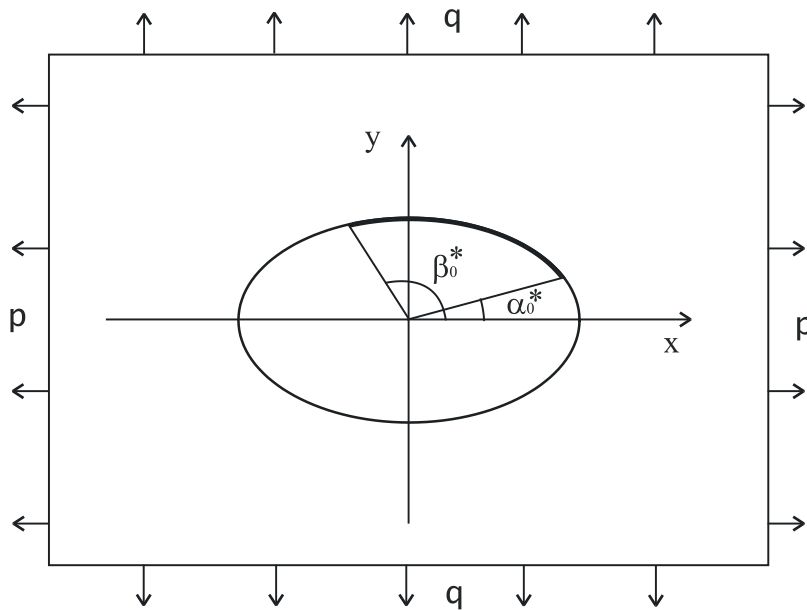


Рис.1.

Стержень вважаємо пружною лінією, що наділена жорсткістю на розтяг в своїй площині. Жорсткістю стержня на згин в площині пластинки нехтуємо. Як показано в роботах [2, 7], для модулів Юнга матеріалів пластинки і стержня одного порядку вплив жорсткості на згин незначний. На “нескінченності” до пластинки прикладені взаємно перпендикулярні зусилля розтягу або стиску  $p$  і  $q$ , що діють в напрямках координатних осей.

Для розв'язування задачі, яке полягає у визначенні контактних  $T_p, S_{p\lambda}$  зусиль в зоні підкріплення та кільцевих зусиль  $T_\lambda$  на контурі отвору, здійснимо конформне відображення

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left( \xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \quad (1)$$

зовнішності одиничного кола в площині  $\xi = \rho e^{i\lambda}$  на область, яку займає пластинка в площині  $z = x + iy$ . Тут  $R_0$  – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності, вважаємо  $R_0 = 1$ );  $N$  – кількість кутів многокутника;  $\varepsilon$  – параметр, який визначає відхилення форми многокутника від кола;  $i = \sqrt{-1}$ .

Деформації контуру отвору пластинки при заданому навантаженні визначатимуться співвідношеннями [5, 7]

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^* &= \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_\rho^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_1 \right]; \\ V^* &= \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}^*(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_\rho^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_2 \right], \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\varepsilon_\lambda^* + iV^* = (\varepsilon + iV)\omega'(\sigma)$ ;  $T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda})\omega'(\sigma)$ ;  $\sigma = e^{i\lambda}$ ;  $2h$  – товщина пластинки;

$$E, \nu \text{ – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона; } T_\rho = \frac{\alpha T_\rho^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad S_{\rho\lambda} = \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^*}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$\gamma_1 = [\alpha_0; \beta_0]$  образ зони контакту  $L_1$  при відображенні (1); для  $N=2, 3$   $P_1$  та  $P_2$  виражатимуться співвідношеннями [4]

$$\begin{aligned} P_1 &= (p+q)(1+(N-1)\varepsilon \cos N\lambda) - 2(p-q) \cos 2\lambda; \\ P_2 &= -(p+q)(N-1)\varepsilon \sin N\lambda + 2(p-q) \sin 2\lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

В зоні підкріплення повинні виконуватися умови рівності деформацій, тому, згідно з теорією тонких пружних стержнів [2], запишемо наступні граничні умови

$$T_\rho = \frac{1}{\tilde{\rho}} E_0 F(s) \varepsilon_\lambda; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho} T_\rho); \quad (4)$$

де  $\tilde{\rho}$  – радіус кривизни отвору;  $E_0 F(s)$  – змінна жорсткість стержня на розтяг (стиск);  $\varepsilon_\lambda$  – відносна осьова пружна деформація стержня.

Враховуючи, що

$$ds = \tilde{\rho} d\theta = |\omega'(\sigma)| d\lambda; \quad \omega'(\sigma) = \alpha + i\beta; \quad \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho} T_\rho) = \frac{d\tilde{\rho}}{|\omega'(\sigma)| d\lambda} + \frac{dT_\rho}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\theta};$$

та використовуючи формули [5]

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = (1-N) + \frac{\alpha N}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\Omega}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \beta N \left[ (\alpha^2 + \beta^2)(1-2N) + 3\alpha N \right]}{\Omega^2}, \quad (5)$$

де  $\Omega = (\alpha^2 + \beta^2)(1-N) + \alpha N$ , граничні умови (4) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} T_\rho &= \frac{\Omega}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} E_0 F(s) \varepsilon_\lambda; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ S_{\rho\lambda} &= -\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\Omega} \right) \frac{\partial T_\rho}{\partial \lambda} - \frac{T_\rho \left[ (\alpha^2 + \beta^2)(1-2N) + 3\alpha N \right] \beta N}{\Omega^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Підстановка (2), (3) в (6), приводить до системи двох інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних зусиль в зоні підкріплення

$$T_{\rho}(\lambda) - \frac{\Omega}{(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))^{\frac{3}{2}}} \frac{E_0 F(s)}{2Eh} \left[ (1-\nu)T_{\rho}(\lambda) + \frac{1}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) T_{\rho}(t) \times \right. \right. \\ \times \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) dt - \\ \left. \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) T_{\rho}(t) dt + \alpha(\lambda)P_1 + \beta(\lambda)P_2 \right) \right] = 0; \quad (7)$$

$$S_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{\partial T_{\rho}(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{\Omega(\lambda)} + \frac{T_{\rho}(\lambda) \left( (\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))(1-2N) + 3\alpha(\lambda)N \right) \beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)} = 0,$$

де  $K_1(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t)$ ;  $K_2(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t)$ ;  $\lambda \in [\alpha_0; \beta_0]$ .

Крім системи (7) повинні виконуватися умови рівноваги стержня

$$\int_{\alpha_0^*}^{\beta_0^*} (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = 0,$$

де  $\theta$  - кут між нормаллю до контуру  $L$  та полярною віссю. Після інтегрування цієї умови, знаходимо

$$T_{\rho}(\beta_0^*) = T_{\rho}(\alpha_0^*) = 0, \quad \sin(\beta_0^* - \alpha_0^*) \neq 0. \quad (8)$$

Кільцеві зусилля на контурі отвору пластинки визначаємо за формулою

$$T_{\lambda}(\lambda) = T_{\rho}(\lambda) + \frac{1}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) T_{\rho}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) T_{\rho}(t) dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \alpha(\lambda)P_1 + \beta(\lambda)P_2 \right). \quad (9)$$

Точне розв'язання системи (7) пов'язане із значними математичними труднощами. Наближений розв'язок задачі знайдемо методом граничної колокації Мультопа-Каландия [1].

Заміною змінних  $\lambda = 2 \operatorname{arctg}(a_0 s + b_0)$ ;  $t = 2 \operatorname{arctg}(a_0 x + b_0)$ ,

де  $a_0 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}}{2}$ ;  $b_0 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}}{2}$ , в системі (7) перейдемо від проміжку інтегрування  $[\alpha_0; \beta_0]$  до стандартного проміжку  $[-1; 1]$ .

На підставі (8) функція  $T_{\rho}(\lambda)$  обмежена на кінцях зони підкріплення, а  $S_{\rho\lambda}(\lambda)$  - необмежена, тому наближений розв'язок системи (7) шукаємо у вигляді

$$[T_{\rho}(\lambda), S_{\rho\lambda}(\lambda)] = \sum_{n=1}^{N_0} \left[ A_n \sin \varphi_n, \frac{B_n}{\sin \varphi_n} \right] \Phi(\varphi, \varphi_n), \quad (10)$$

де  $\Phi(\varphi, \varphi_n) = \frac{(-1)^{n+1} \cos N_0 \varphi \sin \varphi_n}{N_0 (\cos \varphi - \cos \varphi_n)}$ ;  $\lambda = 2 \operatorname{arctg}(a_0 \cos \varphi + b_0)$ ;  $t = 2 \operatorname{arctg}(a_0 \cos \tau + b_0)$ ;

$\varphi_m = \frac{2m-1}{2N_0}\pi$ ,  $(m=1, N_0)$  – вузли Чебишева для інтерполяційного многочлена

Лагранжа,  $N_0$  – число точок колокації.

Квадратурні формули для сингулярних інтегралів в точках колокації на підставі [5, 6] мають вигляд

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_\rho(t) K_2(\lambda_k, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} A_n \sin \varphi_n K_2(\lambda_k, t_n) (q_n (a_0 \cos \varphi_n + b_0) - (\operatorname{ctg} \psi \sin \varphi_k - \cos \varphi_n - \cos \varphi_k) \frac{1}{\sin \varphi_n}); \quad (11)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}(t) K_1(\lambda_k, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{B_n}{\sin \varphi_n} K_1(\lambda_k, t_n) (q_n (a_0 \cos \varphi_n + b_0) - \operatorname{ctg} \psi \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_k}),$$

а регулярні інтеграли обчислюємо за квадратурними формулами Гаусса [5, 6]

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_\rho(t) K_1(\lambda_k, t) dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} A_n \sin \varphi_n K_1(\lambda_k, t_n) q_n; \quad (12)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}(t) K_2(\lambda_k, t) dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{B_n}{\sin \varphi_n} K_2(\lambda_k, t_n) q_n,$$

$$\text{де } q_n = \frac{a_0 \sin \varphi_n}{1 + (a_0 \cos \varphi_n + b_0)}, \quad \psi = \frac{\varphi_k + (-1)^{n+k} \varphi_n}{2}.$$

Вирази для  $T_\rho(\lambda)$ ,  $S_{\rho\lambda}(\lambda)$ ,  $\frac{d}{d\lambda}(T_\rho(\lambda))$  в точках колокації мають вигляд [5, 6]

$$T_\rho(\lambda_k) = A_k \sin \varphi_k; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda_k) = \frac{B_k}{\sin \varphi_k}; \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(T_\rho(\lambda))_{\lambda=k} = -\frac{q_k}{2} \sum_{n=1}^{N_0} A_n a_{kn}, \quad a_{kn} = \begin{cases} \frac{1 \cos \varphi_n}{2 \sin \varphi_n}, & k=n \\ \frac{(-1)^{n+k} \sin \varphi_k}{\cos \varphi_n - \cos \varphi_k}, & k \neq n \end{cases}.$$

Підставивши квадратурні формули (11) – (13) в систему (7), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення  $A_k \sin \varphi_k$ ,  $\frac{B_k}{\sin \varphi_k}$ . Значення полярного кута на контурі отвору обчислюємо за формулою

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \lambda - \varepsilon \sin(N-1)\lambda}{\cos \lambda + \varepsilon \cos(N-1)\lambda}. \quad (14)$$

Оцінка збіжності методу граничної колокації здійснюється порівнянням чисельних розрахунків для різних  $N_0$ . Розрахунки проводилися для різних значень  $N_0$  до  $N_0=100$ . Результати практично не змінюються, починаючи з  $N_0=24$ .

Для ілюстрації розглянемо чисельні розрахунки для отворів різної форми та підкріплюючого стержня постійного прямокутного поперечного перерізу з параметрами

$h_0/h=1$ ;  $b_0/\rho_0=0,05$ ; при  $\alpha_0=0$ ;  $\beta_0=\frac{\pi}{2}$ ;  $p=0$ ;  $q=1$ ;  $\nu=0,3$ . Результати чисельних розрахунків кільцевих зусиль  $\frac{T_\lambda}{q}$  подані на рис.2 для кругового ( $N=2$ ,  $\varepsilon=0$ ), рис.3 – для еліптичного ( $N=2$ ,  $\varepsilon=0,2$ ) та на рис. 4 – для трикутного ( $N=3$ ,  $\varepsilon=0,2$ ) отворів.

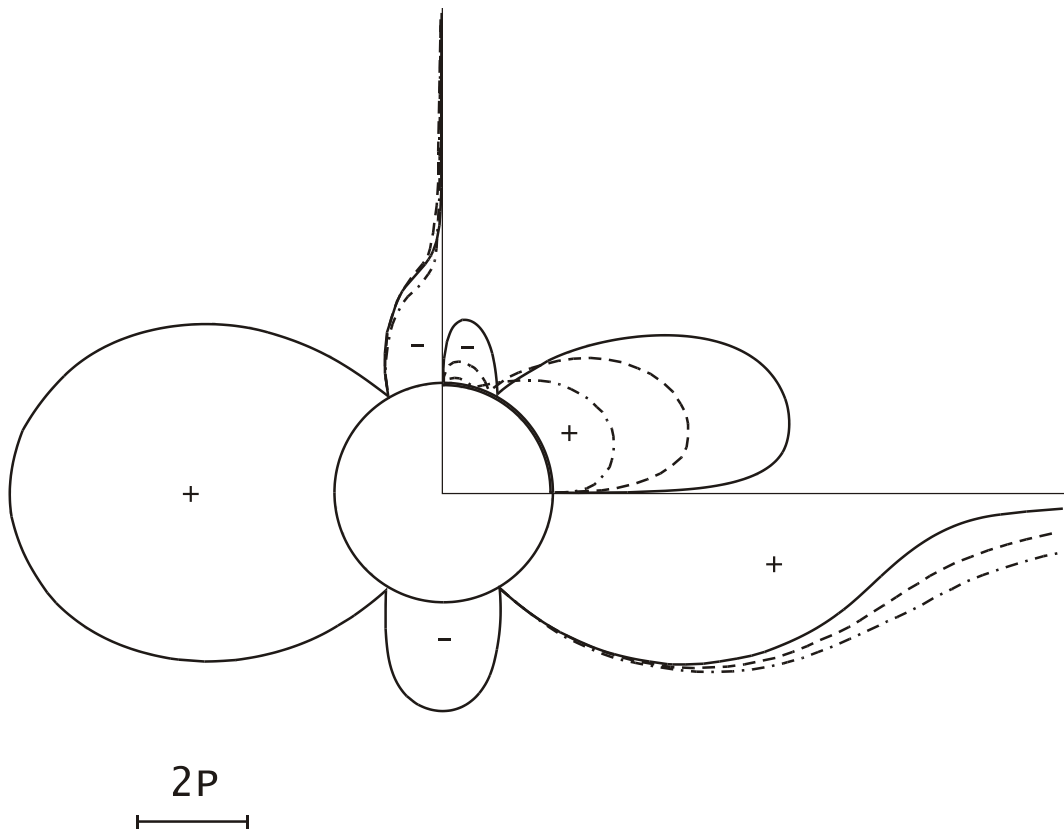


Рис. 2.

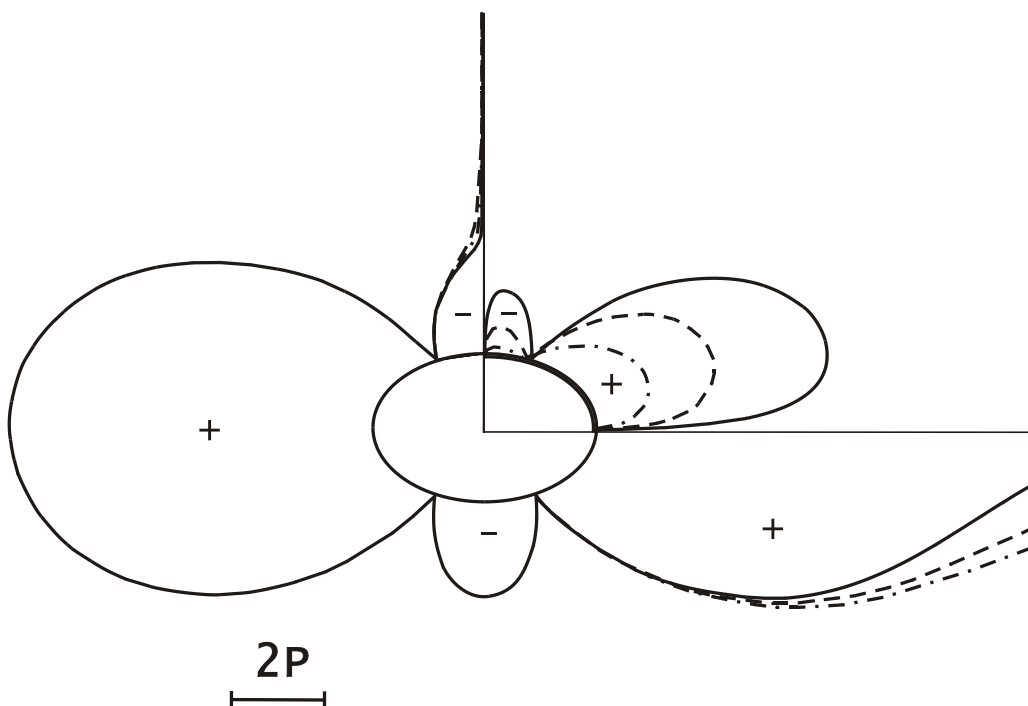


Рис. 3.



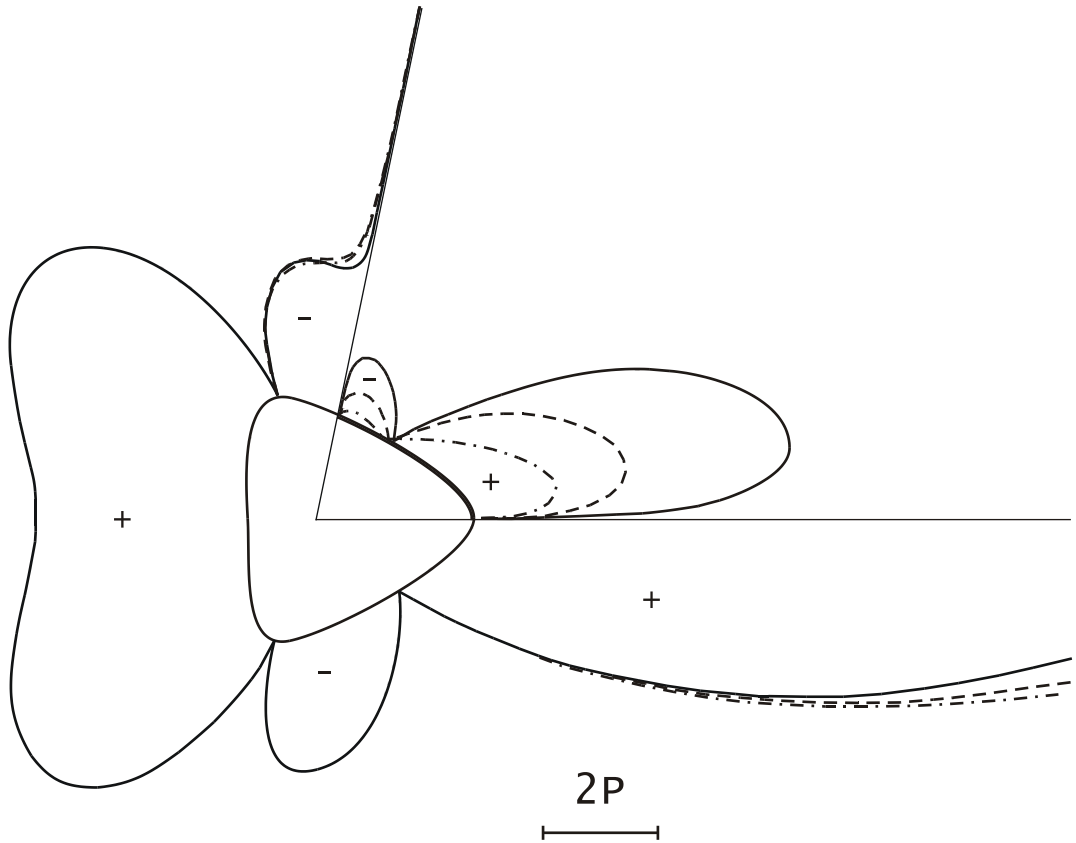


Рис. 4.

Суцільні, пунктирні та штрихпунктирні лінії відповідають значенням  $E_0/E$ , рівним 1; 5; 20, відповідно.

У таблицях 1, 2, 3 ілюструються значення нормальних  $\frac{T_p}{q}$  та дотичних  $\frac{S_{p\lambda}}{q}$  зусиль на підкріпленій ділянці отвору для різних значень  $E_0/E$ .

Табл. 1.

$(N=2, \varepsilon=0)$			$E_0/E=1$		$E_0/E=5$		$E_0/E=20$	
№	$\lambda$	$\varphi$	$T_p$	$S_{p\lambda}$	$T_p$	$S_{p\lambda}$	$T_p$	$S_{p\lambda}$
1	89.985	89.985	-0.002	-4.620	-0.003	-6.294	-0.003	-5.134
2	89.862	89.862	-0.007	-1.441	-0.010	-2.049	-0.008	-1.675
3	89.247	89.247	-0.016	-0.493	-0.023	-0.792	-0.018	-0.641
4	84.380	84.380	-0.029	-0.037	-0.048	-0.083	-0.035	0.013
5	81.715	81.715	-0.030	0.009	-0.049	0.025	-0.031	0.137
6	74.762	74.762	-0.024	0.073	-0.034	0.204	0.000	0.369
7	70.471	70.471	-0.018	0.099	-0.016	0.284	0.032	0.477
8	65.656	65.656	-0.008	0.123	0.011	0.355	0.076	0.574
9	60.352	60.352	0.004	0.142	0.047	0.413	0.133	0.651
10	54.620	54.620	0.019	0.157	0.090	0.453	0.201	0.696
11	51.621	51.621	0.027	0.162	0.114	0.463	0.238	0.703
12	45.424	45.424	0.045	0.165	0.165	0.462	0.313	0.680
13	39.075	39.075	0.063	0.160	0.214	0.427	0.384	0.600
14	35.892	35.892	0.072	0.153	0.237	0.396	0.416	0.538

15	29.610	29.610	0.088	0.132	0.276	0.305	0.466	0.366
16	23.584	23.584	0.100	0.102	0.302	0.176	0.493	0.136
17	17.980	17.980	0.108	0.060	0.311	0.006	0.493	-0.153
18	12.950	12.950	0.111	0.002	0.303	-0.215	0.465	-0.507
19	8.624	8.624	0.108	-0.087	0.276	-0.513	0.411	-0.955
20	5.104	5.104	0.099	-0.249	0.233	-0.955	0.335	-1.576
21	1.497	1.497	0.068	-0.961	0.139	-2.418	0.192	-3.510
22	0.276	0.276	0.033	-3.168	0.062	-6.333	0.084	-8.640
23	0.031	0.031	0.012	-10.624	0.021	-19.589	0.028	-26.205

Табл. 2.

$(N=2, \varepsilon=0,2)$			$E_0/E=1$		$E_0/E=5$		$E_0/E=20$	
№	$\lambda$	$\varphi$	$T_\rho$	$S_{\rho\lambda}$	$T_\rho$	$S_{\rho\lambda}$	$T_\rho$	$S_{\rho\lambda}$
1	89.985	89.990	-0.002	-4.429	-0.003	-6.999	-0.003	-7.378
2	89.862	89.908	-0.005	-1.368	-0.007	-2.278	-0.008	-2.426
3	89.247	89.498	-0.010	-0.458	-0.017	-0.888	-0.018	-0.972
4	84.380	86.247	-0.018	-0.042	-0.037	-0.147	-0.041	-0.158
5	81.715	84.455	-0.019	-0.008	-0.041	-0.050	-0.044	-0.033
6	74.762	79.707	-0.019	0.038	-0.040	0.102	-0.039	0.185
7	70.471	76.696	-0.017	0.057	-0.034	0.172	-0.028	0.291
8	65.656	73.215	-0.013	0.078	-0.023	0.243	-0.008	0.397
9	60.352	69.220	-0.008	0.102	-0.004	0.316	0.024	0.501
10	54.620	64.666	0.001	0.129	0.025	0.389	0.072	0.599
11	51.621	62.166	0.007	0.144	0.044	0.425	0.104	0.643
12	45.424	56.700	0.024	0.175	0.096	0.489	0.186	0.710
13	39.075	50.612	0.049	0.204	0.168	0.531	0.295	0.732
14	35.892	47.347	0.065	0.216	0.212	0.537	0.359	0.718
15	29.610	40.446	0.103	0.228	0.311	0.505	0.498	0.618
16	23.584	33.218	0.147	0.216	0.414	0.392	0.635	0.403
17	17.980	25.957	0.190	0.166	0.499	0.178	0.738	0.056
18	12.950	19.031	0.220	0.068	0.543	-0.148	0.777	-0.428
19	8.624	12.816	0.231	-0.095	0.531	-0.605	0.736	-1.061
20	5.104	7.631	0.218	-0.375	0.463	-1.260	0.624	-1.918
21	1.497	2.244	0.149	-1.466	0.281	-3.279	0.364	-4.435
22	0.276	0.414	0.072	-4.638	0.125	-8.513	0.159	-10.928
23	0.031	0.046	0.025	-15.270	0.042	-26.202	0.053	-33.092

Табл. 3.

$(N=3, \varepsilon=0,2)$			$E_0/E=1$		$E_0/E=5$		$E_0/E=20$	
№	$\lambda$	$\varphi$	$T_\rho$	$S_{\rho\lambda}$	$T_\rho$	$S_{\rho\lambda}$	$T_\rho$	$S_{\rho\lambda}$
1	89.985	78.677	-0.001	-4.404	-0.002	-6.855	-0.002	-7.423
2	89.862	78.568	-0.004	-1.361	-0.006	-2.225	-0.007	-2.434
3	89.247	78.032	-0.008	-0.448	-0.014	-0.853	-0.015	-0.962
4	84.380	74.125	-0.010	-0.021	-0.020	-0.116	-0.023	-0.146
5	81.715	72.212	-0.008	0.009	-0.017	-0.032	-0.020	-0.038
6	74.762	67.797	-0.004	0.033	-0.010	0.070	-0.011	0.110
7	70.471	65.383	-0.003	0.038	-0.007	0.102	-0.007	0.165
8	65.656	62.851	-0.002	0.042	-0.004	0.129	-0.003	0.212
9	60.352	60.176	-0.001	0.047	-0.002	0.154	0.000	0.256
10	54.620	57.290	0.000	0.054	0.001	0.184	0.005	0.302
11	51.621	55.735	0.000	0.060	0.003	0.202	0.008	0.326
12	45.424	52.311	0.002	0.077	0.009	0.247	0.020	0.380
13	39.075	48.329	0.006	0.106	0.024	0.307	0.046	0.440

14	35.892	46.076	0.010	0.126	0.038	0.343	0.069	0.471
15	29.610	40.963	0.028	0.184	0.091	0.422	0.150	0.524
16	23.584	35.012	0.070	0.261	0.201	0.488	0.309	0.533
17	17.980	28.364	0.158	0.333	0.404	0.470	0.585	0.413
18	12.950	21.403	0.308	0.325	0.702	0.241	0.965	0.028
19	8.624	14.698	0.482	0.115	0.992	-0.346	1.305	-0.767
20	5.104	8.848	0.578	-0.403	1.088	-1.383	1.383	-2.048
21	1.497	2.617	0.446	-2.254	0.746	-4.371	0.911	-5.563
22	0.276	0.483	0.214	-6.993	0.335	-11.424	0.403	-13.862
23	0.031	0.054	0.073	-22.605	0.113	-34.973	0.135	-41.868

Із наведених результатів видно, що із збільшенням жорсткості підкріплюючого стержня зменшуються кільцеві зусилля в зоні підкріплення, та незначно зростають нормальні та дотичні зусилля, але поблизу торців стержня спостерігаються значне збільшення дотичних та кільцевих зусиль. На ділянках контуру, які віддалені від зони підкріплення, напружений стан такий же, як і для непідкріпленого отвору.

1. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304с.
2. Пелех Б.Л., Сяський А.А. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. – К.: Наукова думка, 1975. – 199 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708с.
4. Сяський А.О. Двосторонній контакт жорсткого диска з криволінійним отвором нескінченної пластинки // Волинський математичний вісник. – 1999. – Випуск 6. С.122 – 126.
5. Сяський В.А., Сяський А.О. Мішана контактна задача для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска // Волинський математичний вісник. – 1998. – Випуск 5. – С.139 – 146.
6. Сяський А.А., Сяський В.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением. – Прикладная механика, 1983, 19, № 5. – С. 94 – 99.
7. Мартынович Т.Л., Сяський В.А. Определение напряженного состояния пластинки с разомкнутым ребром жесткости. – Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1985, № 8. – С. 32 - 34.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Надійшла 04.11.2002

**Батышкіна Ю.В., Сяський А.А.** ЧАСТИЧНОЕ ПОДКРЕПЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ОТВЕРСТИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ ТОНКИМ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ // *Предлагается приближенный метод определения напряженного состояния на контуре криволинейного отверстия, контур которого частично подкреплён тонким упругим стержнем переменного поперечного сечения, в бесконечной пластинке. Методом функций комплексного переменного задача сведена к системе двух интегрально-дифференциальных уравнений относительно контактных усилий для решения которой применяется метод граничной коллокации.*

**Batishkina J.B., Syasky A. A.** PARTIAL REINFORCEMENT OF A CURVILINEAR ORIFICE IN AN INFINITE PLATE BY A THIN ELASTIC ROD // *The approached method of definition of the intense condition on a contour of a curvilinear orifice, which contour is partially substantiated with a thin elastic rod of variable cross cut, in an infinite plate. By a method of functions the complex variable task is shown to a system of two integral - differential equations concerning contact gains for which solution the method of a boundary collocation is applied.*

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

---

**Редакційна колегія :**

**Зовнішня (м.Львів – м.Київ)**

Бейко І. В.  
Боднар Д. І.  
Бурак Я. Й.  
Войтович М. М.  
Гаращенко Ф. Г.  
Горбачук М.Л.  
Дейнека В.С.  
Задерей П. В.  
Ляшенко І.М.  
Мельник В. С.  
Прикарпатський А. К.  
Пташник Б. Й.  
Савула Я. Г.  
Скопецький В. В. (головний редактор)  
Чикрій А.О.  
Шевчук І.О.  
Шинкаренко Г. А.

**Місцева (м.Рівне – м.Луцьк)**

Барановський С.В. (секретар) – канд.наук  
(01.05.02 – мат.модел. обч.мет.), доц.  
Бомба А. Я. (відповідальний редактор) – к.ф.-м.н.,  
доц., докторант (наук.кер. Скопецький В.В.)  
Власюк А. П. – д.т.н., проф., зав.каф.  
прикл.матем. УДУВГіП  
Гарбарчук В. І. – д.т.н., проф. (техн. кіберн.,  
теор. ін форм.), зав.каф. прикл.матем.  
Джунь В. Й. – д.ф.-м.н., проф., зав.каф.  
матем.моделюв.  
Каштан С. С. (технічний секретар) – аспірант  
(наук.кер. Бомба А.Я.)  
Кратко М. І. – д.ф.-м.н., проф.  
Кузьменко А. П. – к.ф.-м.н., доц., зав.каф.  
прикл.матем.  
Кундрат М. М. – к.ф.-м.н., доц., пошукувач  
Миронюк П. Й. – к.ф.-м.н., доц., пошукувач  
Петрівський Б. П. – к.ф.-м.н., проф., зав.каф.  
вищої матем.  
Свідзинський А. В. – д.ф.-м.н., проф., зав.каф.  
матем. та теор.фіз.  
Сяський А. О. – д.т.н., проф., прор. з  
наук.роб.  
Турбал Ю. В. – к.ф.-м.н., доц., зав.каф.  
інформатики, пошукувач  
Харкевич Ю. І. – к.ф.-м.н., доц., зав.каф.  
Шваб'юк В. М. – д.т.н., проф., прор. з  
наук.роб.  
Янчук П. С. – к.ф.-м.н., доц., докторант

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Міжнародного університету "Рівненський економіко-гуманітарний інститут" ім. С.Дем'янчука, Волинського державного університету ім. Л.Українки Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С. Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

**Адреса редакції :** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

Наукове видання  
"Волинський математичний вісник"  
Випуск 9, 2002

Відповідальний за випуск Бомба А.Я.

Здано до друку . .200 р. Підписано до друку . .200 р.  
Формат 1/8 Папір друк. 30×21 Ум. друк. арк. 4,38  
Наклад 300 прим. Замовлення № –

---

Віддруковано в інформаційно-видавничому відділі  
Рівненського державного гуманітарного університету  
Україна, 33000, м. Рівне, вул. С.Бандери, 15