

**Волинський  
математичний  
вісник**

**Випуск 6**

**1999**

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики та інформатики. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics and informatics. Recommended for research workers, teachers of higher schools, post graduates and senior year students.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

**Редакційна колегія :**

Бейко І. В.  
Боднар Д. І.  
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)  
Бурак Я. Й.  
Войтович М. М.  
Гарашенко Ф. Г.  
Грищик В. В.  
Каштан С. С. (*технічний секретар*)  
Ковтунець В. В.  
Кратко М. І.  
Мельник В. М.  
Попов Б. О.  
Прикарпатський А. К.  
Пташник Б. Й.  
Савула Я. Г.  
Скопечкий В. В. (*головний редактор*)  
Сулим Г. Т.  
Сяський А. О.  
Сяський В. А. (*секретар*)  
Хома Г. П.  
Шинкаренко Г. А.  
Янчук П. С.  
Ясній П. В.

**Editorial board :**

Byeko I. V.  
Bodnar D. I.  
Bomba A. Ya. (*editor*)  
Burak Ya. Y.  
Voytovych M. M.  
Garashchenko F. G.  
Grytskyk V. V.  
Kashtan S. S. (*secretary*)  
Kovtunets V. V.  
Kratko M. I.  
Melnyk V. M.  
Popov B. O.  
Prykarpatsky A. K.  
Ptashnyk B. Y.  
Savula Ya. G.  
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)  
Sulym G. T.  
Syasky A. O.  
Syasky V. A. (*secretary*)  
Khoma G. P.  
Shynkarenko G. A.  
Yanchuk P. S.  
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача

**Адреса редакції :** 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
Кафедра інформатики та прикладної математики.  
Тел.: (8+0362) 260-444.

ISBN 966 - 7281 - 02 - 8

© Українське математичне товариство, 1999  
© РДГУ, 1999

**Зміст**

Антонова Т.М. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ..... 3

Бабак П.П. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ НАВАНТАЖЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ З МАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДИФУЗІЇ ТА ПОРИСТОСТІ ..... 9

Баран О.С., Боднар Д.І. РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ ..... 15

Боднар Д.І. АЛГОРИТМ РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У ВІДПОВІДНИЙ БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ ..... 21

Бомба А.Я., Каштан С.С. ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ..... 25

Ворошик Н.І. ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ ГРАНИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІХ ГАРМОНІЙНИМ ЗОВНІ ЕЛІПСА ПРОДОВЖЕННЯМ ..... 37

Гембарська С.Б. ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ З ОБМЕЖЕНОЮ ВАРІАЦІЄЮ ..... 41

Григорків В.С. ОПТИМІЗАЦІЙНА МОДЕЛЬ З НЕЛІНІЙНИМ ДИНАМІЧНИМ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИМ МІЖГАЛУЗЕВИМ БАЛАНСОМ ..... 47

Грищенко О.Ю. ДС-РІЗНИЦЕВІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСУ З ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ, ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ ВІД РОЗВ'ЯЗКУ ..... 53

Дейнека В.С. СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФУЗІЇ ІЗ ЗБУРЕНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ ..... 57

Жигалло К.М., Харкевич Ю.І. ТОЧНІ ОЦІНКИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСУ КВАЗІГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ІХ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА В РІВНОМІРНИЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТРИКАХ ..... 64

Івашук Я.Г., Ковтунець В.В. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА НАЙКРАЩОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЕЛЕМЕНТАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КЛАСУ ..... 69

Ільїна В.В. ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ ..... 76

Карабин О.О. ДО ПОНЯТТЯ БАЗИ З ПІДПРОСТОРІВ В ГЛЬБЕРТОВИМУ ПРОСТОРІ ..... 81

Клюшин Д.А. ОПТИМІЗАЦІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ВПЛИВОМ ..... 85

Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У НЕСКІНЧЕНИХ СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ОБЛАСТЯХ ..... 89

Кундрат М.М. ВТОМНЕ ВІДШАРУВАННЯ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ..... 93

Ляшко С.И., Войцеховский С.А., Номировский Д.А., Семенов В.В. ЧИСЛЕННАЯ

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ.....	97
Нгуен Суан Тхао БАЗИСНЫЙ АНАЛОГ L-ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	102
Попов Б.О., Лаушник О.І. ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОБЕРНЕНОЇ ДО ІНТЕГРАЛУ ЙМОВІРНОСТІ.....	107
Скасків О.Б., Півкач М.Г. ОЦІНКА ЗНИЗУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРХЛЕ З ПОКАЗНИКАМИ, ЩО МАЮТЬ ДОДАТНІЙ КРОК, ЗОВНІ СИСТЕМИ МАЛИХ КРУГІВ.....	113
Столярчук В.К., Мартинюк П.М. АСИМПТОТИЧНО НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ.....	118
Сяський А.О. ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ЖОРСТКОГО ДИСКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ.....	122
Сяський В.А. ВПЛИВ ТЕРТЯ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ ПРИ КОНТАКТІ ГЛАДКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ І ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ.....	127
Турбал Ю.В. ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СУМІСНОСТІ ДЕЯКИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	135
Цимбал В.М. ВИРОДЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ У ГІПЕРБОЛІЧНЕ.....	139
Янчук П.С. КВАЗИСПЕКТРАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ ТА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ.....	143
Застосування математичних методів	
Науменко Ю.В. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОБЕРТОВОМУ ЦИЛІНДРІ.....	160
Черняга П.Г., Сяський В.О., Грицюк П.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ РУХІВ ФУНДАМЕНТІВ СПОРУД В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ЗМІНИ ЇХ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	164
Короткі повідомлення	
Вірченко Н.О. ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ (ЗА РАЙТОМ) ГАМА-ФУНКЦІЮ.....	168
Петрівський Б.П., Петрівський Я.Б., Хома Н.Г. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ.....	171
Рубльов Б.В. ВИКОРИСТАННЯ ГЛАДКОЇ МЕТРИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТИЗОВАНИХ ЗОБРАЖЕНЬ.....	174
Савич В.О. ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ ДВОЗНАЧНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ФУНКЦІЙ З ВРАХУВАННЯМ МНОЖИН А-ТОЧОК.....	177

## ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ

УДК 518:517.9:532.516

Науменко Ю.В.

## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОБЕРТОВОМУ ЦИЛІНДРІ

*Розглядається чисельне моделювання двовимірної неусталеної течії рідини з вільною поверхнею в горизонтальному естаціонарно-обертovому циліндрі. Використовується метод "маркерів і комірок" в полярній системі координат. Наведені результати чисельних розрахунків двох режимів течії.*

Сталій прикладний інтерес в гідродинаміці викликає клас задач із циркуляційним видом руху. Це перш за все течії усередині та поблизу твердих поверхонь, що обертаються, та інші обертальні течії. Одною з найпоширеніших задач цього класу є задача про рух в'язкої рідини, яка частково заповнює горизонтальний циліндр, що обертається навколо своєї осі. Усталена течія рідини при стаціонарному обертанні циліндра характеризується двома режимами руху, при переході яких виникає режимний гістерезис. Перший режим у вигляді малорухливих пристінного квазірубчастого шару виникає при швидкісному обертанні циліндра. Другий характеризується складним циркуляційним рухом рідини з значними відносними швидкостями та деформаціями вільної поверхні і виникає при тиходійному обертанні. Моделювання другого режиму [1-4] істотно утруднено порівняно із описом першого [5-11].

Характерною особливістю такої задачі є складна геометрія, велика деформація вільної границі та рухомість твердої стінки. Моделювання цих течій за допомогою відомих аналітичних [1, 5-7, 11] та спрощених чисельних [2, 4, 8-10] методів не забезпечує достатньої точності та універсальності результатів.

**1. Постановка задачі.** В [12] для чисельного розв'язання двовимірної нестаціонарної розглядуваної задачі використовується метод "маркерів і комірок", що застосовано в полярних координатах, які найближче відповідають геометрії течії та границь.

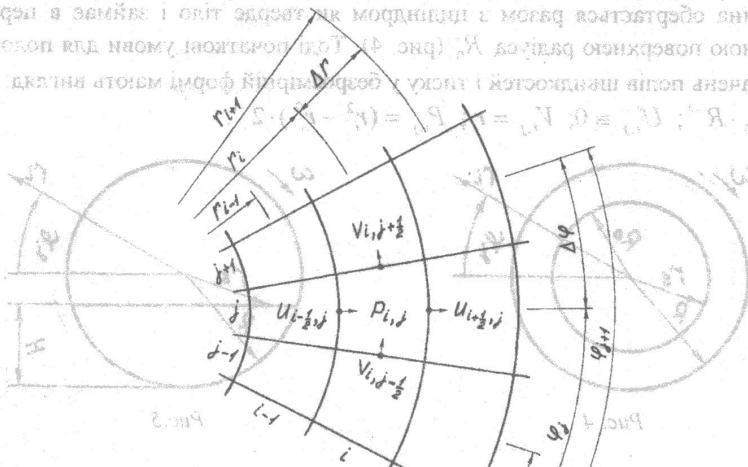
Особливістю методу, який є одним з найефективніших алгоритмів для розв'язання нестаціонарних задач динаміки в'язкої нестисливої рідини зі складною геометрією вільних границь, є використання змішаного ейлерово-лагранжевого підходу. Область, що вивчається, розбивається нерухомою рознесеною ейлеровою сіткою на комірки. Одночасно для визначення положення вільної поверхні та візуалізації течії використовується лагранжева сітка частинок-маркерів, які переносяться полем швидкостей. Застосовується повна система рівнянь Нав'є-Стокса для найпростіших фізичних змінних – складових швидкостей та тиску. Різницєва схема для рівнянь кількості руху базується на різницях вперед за часом та центральних різницях за просторовими змінними. На кожному кроці по часу ітераційними методами розв'язуються різницєві рівняння Пуассона для тиску, яке задовільняє умові нестисливості.

**2. Організація обчислювального процесу.** Круговий переріз циліндра радіуса  $R$ , що має кутову швидкість  $\omega$  і містить рідину з кінематичним коефіцієнтом в'язкості  $\nu$ , покривається рознесеною полярною сіткою комірок у вигляді кільцевого сектору з сторонами  $\Delta r$  і  $\Delta \varphi$  та центром  $(i, j)$ , де  $i, j$  – індекси радіальної та кутової координати (рис. 1). Радіальна  $U$  та тангенціальна  $V$  компоненти швидкості визначались на границях комірки, а тиск  $P$  – в центрі.

Число Рейнольдса приймалось  $Re = \omega R^2 \nu^{-1}$ , число Фруда  $Fr = \omega^2 R g^{-1}$  де  $g$  – гравітаційне прискорення.

Сітка доповнювалась кільцевим шаром фіктивних комірок, що розміщені за твердою границею розрахункової області (рис. 2). З умови прилипання на твердій стінці радіуса  $R$ :

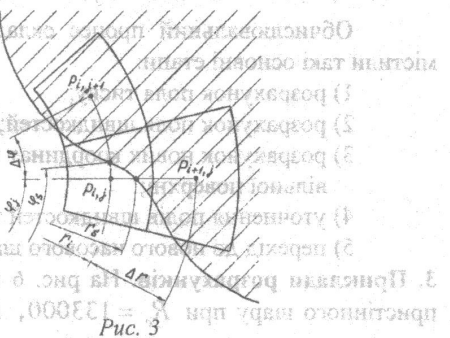
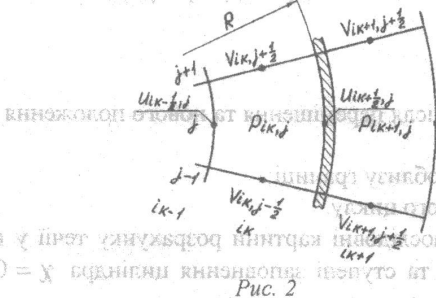
Тоді вирази для складових швидкості та тиску в фіктивній комірці мають вигляд



В порожній комірці момент імпульсу зберігається, тобто  $\frac{dL}{dt} = 0$ , а різниця швидкостей в центрі комірки дорівнює нулю. Тоді вирази для складових швидкості та тиску в фіктивній комірці мають вигляд

$$P_{i,j} = P_{i+1,j} (1 - \Delta r (r_i + \Delta r - r_s)^{-1}) \quad \text{або} \quad P_{i,j} = P_{i,j+1} (1 - \Delta \varphi (\varphi_j + \Delta \varphi - \varphi_s)^{-1})$$

Одержання стійкого чисельного розв'язку задачі прийнятим методом забезпечувалось точним визначенням поля тиску, при досягненні наперед заданого критерію збіжності.



$$P_{ik+1,j} = P_{ik,j} + \Delta r + 2U_{ik-\frac{1}{2},j} (1 - \Delta r) \cdot (R_e \cdot \Delta r (1 - (\Delta r \cdot 2^{-1})^2))^{-1}$$

Компоненти швидкості в поверхневих комірках, що межують з вільною поверхнею, визначались екстраполяцією з використанням значення поля швидкостей на глибину в декілька заповнених комірок. Величина тиску в центрі поверхневої комірки визначалась лінійною інтерполяцією за тиском в одній з сусідніх повних комірок та нульовим значенню тиску на вільній поверхні за формулами

$$P_{i,j} = P_{i+1,j} (1 - \Delta r (r_i + \Delta r - r_s)^{-1}) \quad \text{або} \quad P_{i,j} = P_{i,j+1} (1 - \Delta \varphi (\varphi_j + \Delta \varphi - \varphi_s)^{-1})$$

де  $r_s, \varphi_s$  - координати точок перетину вільної границі з радіальним чи дуговим відрізками, що сполучають центри комірок (рис. 3).

Одержання стійкого чисельного розв'язку задачі прийнятим методом забезпечувалось точним визначенням поля тиску, при досягненні наперед заданого критерію збіжності. При реалізації методу більша частина машинного часу витрачалась на цей розрахунок. Рівняння Пуассона розв'язувалось методом Гаусса-Зейделя з послідовною верхньою релаксацією з параметром релаксації 1,5...1,8.

Стійкість розрахунку забезпечувалась вибором кроку за часом з умови обмеження

переміщення маркерів середнім розміром комірки. Реалізація обертання циліндра разом з полярною сіткою забезпечувалась зміною напрямку  $g$  з переходом на повний часовий шар.

В початковий момент часу при розрахунку режиму пристінного шару вважалось, що  $\omega = \infty$ , а рідина обертається разом з циліндром як тверде тіло і займає в перерізі кільцеву область з вільною поверхнею радіуса  $R_0$  (рис. 4). Тоді початкові умови для положення вільної поверхні та значень полів швидкостей і тиску у безрозмірній формі мають вигляд:

$$r_s = R_0 \cdot R^{-1}; U_{i,j} \equiv 0; V_{i,j} = r_i^2; P_{i,j} = (r_i^2 - r_s^2) \cdot 2^{-1}$$

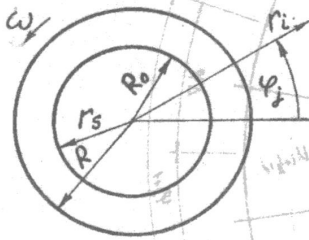


Рис. 4

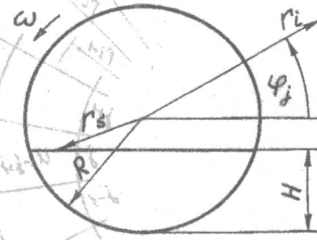


Рис. 5

В початковий момент часу при розрахунку циркуляційного режиму вважалось, що  $\omega = 0$ , а рідина перебуває в спокої і займає сегментну область із стрілкою  $H$  та горизонтальною вільною поверхнею (рис. 5). Тоді аналогічні початкові умови мають вигляд:

$$r_s = (H - R) \cdot (R \sin \phi_j)^{-1}; U_{i,j} \equiv 0; V_{i,j} \equiv 0; P_{i,j} = ((H - R) \cdot R^{-1} - r_i \sin \phi_j) \cdot F_r^{-1}$$

Обчислювальний процес складався з кроків по часу та розрахункових циклів, що містили такі основні етапи:

- 1) розрахунок поля тиску;
- 2) розрахунок поля швидкостей;
- 3) розрахунок нових координат маркерів після переміщення та нового положення вільної поверхні;
- 4) уточнення полів швидкостей та тиску поблизу границі;
- 5) перехід до нового часового шару та нового циклу.

**3. Приклади розрахунків.** На рис. 6 показані послідовні картини розрахунку течії у вигляді пристінного шару при  $R_0 = 133000$ ,  $F_r = 4,24$  та ступені заповнення циліндра  $\chi = 0,5$  для моментів часу 0, 10.1, 20.2 та 30.3, а також епюри відносної тангенціальної  $V_r = V-1$  та абсолютної радіальної  $U$  складових швидкості і тиску  $P$  для останньої картини (при збіганні ординати епюри з напрямком обертання значення додатне, при незбіганні – від’ємне).



Рис. 6

Величина максимальної ординати епюри  $V$ , становить 0,0403, епюри  $U$  – 0,0196 та епюри  $P$  – 0,373.

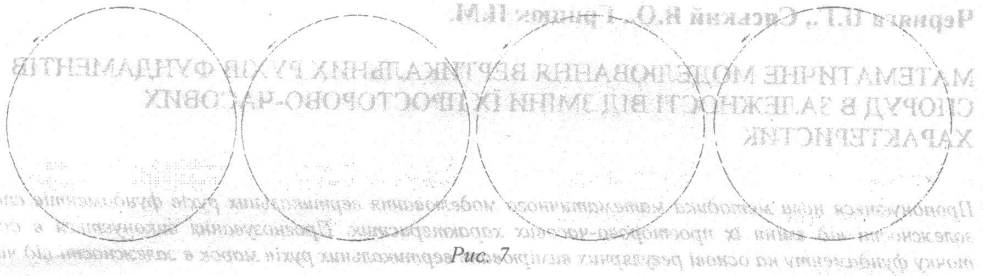


Рис. 7

На рис. 7 представлені картини розвитку циркуляційної течії при  $R_0 = 1125$ ,

$F_0 = 3,06$  та  $\chi = 0,3$  для моментів 0, 0,57, 1,13 та 1,70.

1. Gavish J., Chadwick R.S., Gutfinger C. Viscous flow in a partially filled rotating horizontal cylinder // Israel J. of Technology. - 1978. - 16, № 5-6. - P. 264-272.
2. Haji-Sheikh A., Lakshmanarayanan R., Lou D.Y.S., Ryan P.J. Confined flow in partially-filled rotating horizontal cylinder // Trans. of the ASME, J. of Fluids Engng. - 1984. - 106, № 3. - P. 270-278.
3. Трусов С.А., Паницкий В.И., Вачевский В.В., Филлимонова Л.К. Моделирование течения в горизонтальном вращающемся цилиндре // Реология, процессы и аппараты хим. технологии. - Волгоград. - 1989. - С. 71-77.
4. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Мат. моделирование. - 1992. - 4, № 10. - С. 62-70.
5. Phillips O.M. Centrifugal waves // J. Fluid Mech. - 1960. - 7, P.3. - P. 340-352.
6. Deiber J.A., Cerro R.L. Viscous flow with a free surface inside a horizontal rotating drum. I. Hydrodynamics // Industrial and Engng Chem., Fundam. - 1976. - 15, № 2. - P. 102-110.
7. Greenspan H.P. On a rotational flow disturbed by gravity // J. Fluid Mech. - 1976. - 74, P. 2. - P. 335-351.
8. Ruschak K. J., Scriven L. E. Rimming flow of liquid in a rotation horizontal cylinder // J. Fluid Mech. - 1976. - 76, P. 1. - P. 113-125.
9. Orr F. M., Scriven L. E. Rimming flow: numerical simulation of steady, viscous, free-surface flow with surface tension // J. Fluid Mech. - 1978. - 84, P.1. - P.145-165.
10. Gans R. F. On the flow around a buoyant cylinder withing a rapidly rotating horizontal cylindrical container // J. Fluid Mech. - 1979. - 93, P.3. - P.529-548.
11. Ждан Д.А. Задача о движении вязкой жидкости в вращающемся круге в поле силы тяжести // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I, Математика и механика. - 1987. - № 1. - С. 86-89.
12. Науменко Ю.В. Застосування методу "маркерів і комірок" для чисельного моделювання обертальних течій // Волин. мат. вісн. - 1997. - Вип. 4. - С. 110-113.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

**Науменко Ю.В. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ** // Рассматривается численное моделирование двумерного неустановившегося движения жидкости со свободной поверхностью в горизонтальном стационарно вращающемся цилиндре. Используется метод "маркеров и ячеек" в полярной системе координат. Приведены результаты численных расчетов двух режимов течения.

**Naumenko Yu.V. NUMERICAL SIMULATION OF FREE-SURFACE FLOW IN ROTATING HORIZONTAL CYLINDER** // The numerical simulation of two-dimensional, time-dependent, free-surface flow in stationary rotating horizontal cylinder is considered. The Marker-and-Cell method in polar coordinates is used. The results of numerical simulation of two flow conditions are represented.