

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**Випуск 9**

**2002**

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the mathematics, informatics and mechanics. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

**Редакційна колегія :**

Барановський С.В. (*секретар*)  
Бейко І. В.  
Боднар Д. І.  
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)  
Бурак Я. Й.  
Войтович М. М.  
Гаращенко Ф. Г.  
Горбачук М.Л.  
Дейнека В.С.  
Задерей П. В.  
Каштан С. С. (*технічний секретар*)  
Кратко М. І.  
Ляшко І.І.  
Мельник В. С.  
Попов Б. О.  
Прикарпатський А. К.  
Пташник Б. Й.  
Савула Я. Г.  
Скопєцький В. В. (*головний редактор*)  
Сяський А. О.  
Чикрій А.О.  
Шевчук І.О.  
Шинкаренко Г. А.  
Янчук П. С.  
Ясній П. В.

**Editorial board :**

Baranovsky S.V. (*secretary*)  
Beyko I. V.  
Bodnar D. I.  
Bomba A. Ya. (*editor*)  
Burak Ya. Y.  
Voytovych M. M.  
Garashchenko F. G.  
Gorbachuk M.L.  
Deyneka V.S.  
Zaderej P. V.  
Kashtan S. S. (*secretary*)  
Kratko M. I.  
Lyashko I.I.  
Melnyk V. S.  
Popov B. O.  
Prykarpatsky A. K.  
Ptashnyk B. Y.  
Savula Ya. G.  
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)  
Syasky A. O.  
Chikriy A.O.  
Shevchuk I.O.  
Shynkarenko G. A.  
Yanchuk P. S.  
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

**Адреса редакції :** 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

## Зміст

<b>Батишкіна Ю.В., Сяський А.О.</b> ЧАСТКОВЕ ПІДКРІПЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕНІЙ ПЛАСТИНЦІ ТОНКИМ ПРУЖНИМ СТЕРЖНЕМ .....	4
<b>Бомба А.Я.</b> ЧИСЕЛЬНО-АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТИПУ “ФІЛЬТРАЦІЯ-ДИФУЗІЯ” ЗА УМОВ ВЗАЄМОВПЛИВУ ГРАДІЄНТІВ ПОТЕНЦІАЛУ ТА КОЕФІЦІЄНТА ПРОВІДНОСТІ СЕРЕДОВИЩА .....	12
<b>Возняк О.Г.</b> ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ .....	20
<b>Кацман С.С.</b> ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯ ШВИДКОСТІ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА УМОВ ВЗАЄМОВПЛИВУ ГРАДІЄНТА ПОТЕНЦІАЛУ І ХАРАКТЕРИСТИК АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА .....	32
<b>Комбель С.М., Сяський А.О.</b> КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕНІЙ ПЛАСТИНЦІ І ЖОРСТКОГО ДИСКА З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ .....	41
<b>Кондрат В.Ф., Боднарчук Г.Я.</b> ОСЕРЕДНЕНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ СИЛОВОМУ ЗБУРЕННІ НЕЛІНІЙНИХ МАГНІТОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ .....	48
<b>Кузьменко А.П., Гладка О.М.</b> ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІСІ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДІВЕРГЕНТНОГО ТИПУ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ПЕРІОДИЧНІСТЮ В КРАЙОВИХ УМОВАХ .....	55
<b>Пригорницький Д.О.</b> ПРО МОДИФІКАЦІЮ АЛГОРИТМУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ДВОЗВ'ЯЗНИХ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ .....	60
<b>Савула Н.Я.</b> ЗБІЖНІСТЬ ЗА ШТРАФОМ РОЗВ'ЯЗКУ ГЕТЕРОГЕННОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ .....	67
<b>Хриптун М. Д.</b> ПРО ДЕЯКІ РЯДИ ЗА ОДНИМ УЗАГАЛЬНЕННЯМ ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ .....	75
<b>Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.</b> КОНТАКТНО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ В ШАРІ З ВЕРТИКАЛЬНО ПЕРІОДИЧНОЮ СТРУКТУРОЮ .....	81
<b>Ядзак М.С.</b> ДЕЯКІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГОРИТМІВ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ .....	90
<b>НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ</b>	
<b>Бомба А.Я.</b> ВСЕВОЛОД МИХАЛЬЧУК (16.03.1931 – 20.05.2002) .....	100
<b>Коренков М.Є.</b> В.Й.ГОРБАЙЧУК – ВЧЕНИЙ І ПЕДАГОГ .....	103
<b>ЛИСТ В РЕДАКЦІЮ</b>	
<b>Дейнека О.Ю.</b> ВИПРАВЛЕННЯ ДО СТАТТІ .....	105

УДК 519.632.4.001.57+517.54

Каштан С.С.

## ПРО ПОБУДОВУ ПОЛЯ ШВИДКОСТІ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА УМОВ ВЗАЄМВПЛИВУ ГРАДІЄНТА ПОТЕНЦІАЛУ І ХАРАКТЕРИСТИК АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

*Розроблено новий алгоритм чисельного розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах схильних до деформацій під дією градієнтів квазіпотенціалу – криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквікватипотенціальними лініями. Чисельно побудовано відображення областей складної геометричної форми на канонічні області типу параметричного прямокутника за умов взаємовпливу градієнту квазіпотенціалу і характеристик анізотропного середовища. В криволінійній чотирикутній області одержано динамічну сітку та розраховано поле швидкості фільтрації.*

**Вступ.** В роботах [1] – [5] побудовані алгоритми чисельного обернення розв'язків нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в одно- та многов'язних областях, обмежених лініями течії та еквікватипотенціальними лініями, а саме математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок і т.ін. в однорідних і неоднорідних, ізотропних та анізотропних середовищах. Зокрема, у роботі [2] подається розв'язання задач про моделювання відповідних процесів у середовищах, схильних до деформацій, де компоненти тензора провідності (зокрема фільтрації) брались залежними не лише від координат біжучої точки області, але й від шуканих функцій течії та квазіпотенціалу. Запропонований підхід дозволяє паралельно знаходити характеристичну функцію течії, квазікомплексний квазіпотенціал, повну витрату, будувати в заданій області динамічну сітку та розрахувати поле швидкості фільтрації.

На даний час актуальними і мало вивченими є задачі моделювання впливу градієнтів квазіпотенціалу (зокрема, великих, що перевищують критичні їх значення) на вихідні характеристики середовища (в першу чергу на коефіцієнт провідності). У роботі [3] подається розв'язання однієї з таких задач у криволінійних чотирикутних областях. Перевищення діючими градієнтами деякого їх критичного значення у придренній (чи присвердловинній) зоні зумовлюють втрату фільтраційної міцності ґрунту за рахунок переміщення дрібних його частинок (суфозії), що викликають зміни коефіцієнта фільтрації. У роботах [6], [7] проведено математичне моделювання нелінійних процесів осесиметричної фільтрації з урахуванням суфозійних явищ. Зокрема, отримані розв'язки відповідних нелінійних задач з післядією руху води до дрени (свердловини) та із зволожувача в ґрунт, а також аналітичні вирази для знаходження фільтраційної витрати, встановлено співвідношення між характеристиками недеформованого середовища та середовища, що деформується в залежності від гідродинамічної дії фільтраційного потоку та конструктивних параметрів дренажу; розв'язана задача фільтрації у випадку формування збурених зон змінним коефіцієнтом фільтрації із врахуванням нерівномірного заповнення порового простору суфозійними частинками у випадку осесиметричної фільтрації. У цій роботі йдеться про розробку ще одного підходу до розв'язання окреслених вище класів задач та розрахунок поля швидкості фільтрації.

**Постановка задачі.** Розглянемо в деякій однозв'язній криволінійній чотирикутній області (неоднорідному анізотропному пористому пласті, що піддається деформації)  $G_z = ABCD$  ( $z = x + iy$ ), обмеженій чотирма гладкими кривими  $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$ ,  $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$ ,  $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$ ,  $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$ , процес руху частинок (зокрема, фільтрації в пористому пласті, руху заряджених частинок у провідній пластинці, і т.п.), який описується рівнянням руху  $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$  (закон Дарсі чи закон Ома) та рівнянням нерозривності  $\text{div } \vec{v} = 0$  [8] – [12], де  $\vec{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$  – швидкість руху частинок,

$\kappa = \kappa(\text{grad}\varphi)$  – обмежена неперервно-диференційована в області  $G_z$  функція, що характеризує провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформації,  $\varphi = \varphi(x, y)$  – квазіпотенціал поля, такий, що  $\varphi|_{AB} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{CD} = \varphi^*$ ,  $\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0$ ,  $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$ ,  $n$  – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області.

Аналогічно до [1] – [5], ввівши функцію течії  $\psi = \psi(x, y)$  (квазікомплексно спряжену до  $\varphi = \varphi(x, y)$ ), приходимо [13] до більш загальної задачі на квазіконформне (конформне, у випадку  $\kappa = 1$ ) відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  даної області  $G_z$  на відповідну область квазікомплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  з невідомим параметром –

$$\text{повною витратою } Q = \int_{M \in AD}^{N \in BC} -v_y dx + v_x dy:$$

$$\kappa(\text{grad}\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(\text{grad}\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \quad (2)$$

В роботах [6], [7] розглядаються окремі види залежностей  $\kappa = \kappa(\text{grad}\varphi)$ , що є наслідком моделювання вимиву частинок (суфозії) в осесиметричному випадку. У роботі [3] розглядається більш загальний випадок  $\kappa(\text{grad}\varphi) = \kappa(\varphi_x, \varphi_y)$  у криволінійних чотирикутних

областях. В даній роботі подамо випадок, коли  $\kappa(\text{grad}\varphi) = \begin{pmatrix} \kappa(\varphi_x) \\ \kappa(\varphi_y) \end{pmatrix}$ , не конкретизуючи про фізичний зміст. У цьому випадку, обернену до (1) – (2) задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому  $Q$ , аналогічно до [1] – [5], запишемо у вигляді:

$$\kappa \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa \left( -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases} \quad (4)$$

При цьому, відповідні рівняння другого порядку для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  та уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частин функції течії  $z = z(\omega)$  в дивергентній формі запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \kappa^{-1} \left( -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \left( -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \kappa^{-1} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де  $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi}$  – якобіан даного відображення.

З метою забезпечення гладкості відображення у кутових точках  $M$  на функції  $f_i(x, y)$ ,  $i=1,4$  накладемо умови [1], [2]:

$$\Theta_M + \tilde{\Theta}_M = \frac{\pi}{2}, \quad M = A, B, C, D, \quad (6)$$

де 
$$\cos\Theta_M = \frac{f'_{i-1x}(M)f'_{ix}(M) + f'_{i-1y}(M)f'_{iy}(M)}{\sqrt{f'^2_{i-1x}(M) + f'^2_{i-1y}(M)}\sqrt{f'^2_{ix}(M) + f'^2_{iy}(M)}},$$

$$\cos\tilde{\Theta}_M = \frac{\kappa(\varphi_x)f'^2_{jx}(M) + \kappa(\varphi_y)f'^2_{jy}(M)}{\sqrt{f'^2_{jx}(M) + f'^2_{jy}(M)}\sqrt{(\kappa(\varphi_x)f'_{jx}(M))^2 + (\kappa(\varphi_y)f'_{jy}(M))^2}},$$

$f'_0(M) = f'_4(M)$ ,  $j=1$  при  $i=1,2$  та  $j=3$  при  $i=3,4$  (дотичні до граничних ліній течії повинні настільки відхилитись від нормалей до відповідних еквікватипотенціальних ліній, наскільки анізотропія відхиляє вектор швидкості від даних нормалей). Це, зокрема, досягається, якщо покласти  $\angle M=90^\circ$ ,  $\kappa(\varphi_x)|_M = \kappa(\varphi_y)|_M$ .

Врахувавши при цьому, що косинус кута  $\tilde{\Theta}$  відхилення вектора швидкості  $\vec{v}$  від градієнта квазіпотенціалу  $\text{grad}\varphi$  в довільній внутрішній точці  $z=x+iy$  обчислюється за формулою

$$\cos\tilde{\Theta} = \frac{\kappa(\varphi_x)\varphi_x^2 + \kappa(\varphi_y)\varphi_y^2}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}\sqrt{(\kappa(\varphi_x)\varphi_x)^2 + (\kappa(\varphi_y)\varphi_y)^2}}, \quad (7)$$

приходимо до відповідних аналогів умов ортогональності [1] – [5] в околах ділянок границі області  $G_z$ :

$$-f'_{kx}(x,y)y_\varphi + f'_{ky}(x,y)x_\varphi = \sqrt{f'^2_{kx}(x,y) + f'^2_{ky}(x,y)}\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}\sqrt{1 - \cos^2\Theta_k},$$

$$\cos\Theta_k = \frac{\kappa(\varphi_x)f'^2_{kx} + \kappa(\varphi_y)f'^2_{ky}}{\sqrt{f'^2_{kx} + f'^2_{ky}}\sqrt{(\kappa(\varphi_x)f'_{kx})^2 + (\kappa(\varphi_y)f'_{ky})^2}}, \quad k=1,3, \quad (8)$$

$$f'_{lx}(x,y)y_\psi - f'_{ly}(x,y)x_\psi = \sqrt{f'^2_{lx}(x,y) + f'^2_{ly}(x,y)}\sqrt{x_\psi^2 + y_\psi^2}\sqrt{1 - \cos^2\Theta_l},$$

$$\cos\Theta_l = \frac{\kappa(\varphi_x)f'^2_{lx} + \kappa(\varphi_y)f'^2_{ly}}{\sqrt{f'^2_{lx} + f'^2_{ly}}\sqrt{(\kappa(\varphi_x)f'_{lx})^2 + (\kappa(\varphi_y)f'_{ly})^2}}, \quad l=2,4.$$

**Алгоритм чисельного розв'язання** поставленої задачі побудуємо аналогічно до [1] – [3], а саме, різницеві аналоги рівнянь (5) та крайових умов (4) у відповідній рівномірній сітковій

області  $G_\omega^y = \{(\varphi_j, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = \overline{0, n+1}; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \Delta\psi = \frac{Q}{n+1},$

$\gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, m, n \in \mathbf{N}\}$  запишемо, згідно з [14], [15], у вигляді:

$$x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{2} \left( \gamma \bar{\kappa}_{i,j} \bar{\kappa}'_{\psi_{i,j}} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) - \frac{\bar{\kappa}'_{\varphi_{i,j}}}{\bar{\kappa}_{i,j}} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \right) + \gamma^2 \bar{\kappa}_{i,j} \bar{\kappa}'_{i,j} \times$$

$$\times (x_{i,j-1} - 2x_{i,j} + x_{i,j+1}) = 0, \quad y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2 \bar{\kappa}_{i,j} \bar{\kappa}'_{i,j} (y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}) +$$

$$+\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\overline{\kappa}_{i,j}\overline{\kappa}'_{\psi,i,j}(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})-\frac{\overline{\kappa}'_{\varphi,i,j}}{\overline{\kappa}_{i,j}}(y_{i+1,j}-y_{i-1,j})\right)=0, \quad i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n} \quad (9)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j})=0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})=0, & j=\overline{0,n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})=0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0})=0, & i=\overline{0,m+1}. \end{cases} \quad (10)$$

Приграничні аналоги умов ортогональності (8), що є додатковими рівняннями, які дозволяють граничним вузлам “плавати” по заданому профілю границі із збереженням умов гладкості (6), у сітковій області  $G_{\omega}^{\gamma}$  запишемо у вигляді [1], [2]:

$$\begin{aligned} & -f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j}-y_{0,j})+f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j}-x_{0,j})=\sqrt{(x_{1,j}-x_{0,j})^2+(y_{1,j}-y_{0,j})^2} \times \\ & \times \left| \frac{(\overline{\kappa}_{0,j}-\overline{\kappa}_{0,j})f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})}{\sqrt{(\overline{\kappa}_{0,j}f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j}))^2+(\overline{\kappa}_{0,j}f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j}))^2}}, \right. \\ & f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n}-y_{i,n+1})-f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n}-x_{i,n+1})=\sqrt{(x_{i,n}-x_{i,n+1})^2+(y_{i,n}-y_{i,n+1})^2} \times \\ & \times \left| \frac{(\overline{\kappa}_{i,n+1}-\overline{\kappa}_{i,n+1})f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})}{\sqrt{(\overline{\kappa}_{i,n+1}f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}))^2+(\overline{\kappa}_{i,n+1}f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}))^2}}, \right. \\ & -f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j}-y_{m+1,j})+f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j}-x_{m+1,j})= \\ & =\sqrt{(x_{m+1,j}-x_{m,j})^2+(y_{m+1,j}-y_{m,j})^2} \left| \frac{(\overline{\kappa}_{m+1,j}-\overline{\kappa}_{m+1,j})f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})}{\sqrt{(\overline{\kappa}_{m+1,j}f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}))^2+(\overline{\kappa}_{m+1,j}f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}))^2}}, \right. \\ & f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1}-y_{i,0})-f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1}-x_{i,0})=\sqrt{(x_{i,1}-x_{i,0})^2+(y_{i,1}-y_{i,0})^2} \times \\ & \times \left| \frac{(\overline{\kappa}_{i,0}-\overline{\kappa}_{i,0})f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})}{\sqrt{(\overline{\kappa}_{i,0}f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0}))^2+(\overline{\kappa}_{i,0}f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0}))^2}}, \right. \\ & \quad i=\overline{0,m+1}, \quad j=\overline{0,n+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Відношення сторін параметричного прямокутника  $G_{\omega}$  є конформним інваріантом  $\gamma$  криволінійного чотирикутника  $G_z$ , який наперед не відомий і визначається в процесі розрахунку. Формулу для знаходження величини  $\gamma$  одержимо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” [1] – [5], [13] відповідних чотирикутників (прямокутників) двох областей:

$$\gamma=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i,j=0}^{m,n}\frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2+(y_{i+1,j}-y_{i,j})^2}+\sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2+(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{a_{i,j}+a_{i+1,j}}, \quad (12)$$

$$\text{де } a_{i,j}=\sqrt{(\overline{\kappa}_{i,j+0.5}(y_{i,j+1}-y_{i,j}))^2+(\overline{\kappa}_{i,j+0.5}(x_{i,j+1}-x_{i,j}))^2}.$$

Тут:  $x_{i,j}=\mathcal{X}(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j}=\mathcal{Y}(\varphi_i, \psi_j)$ ,

$$\overline{\kappa}_{i,j}=\kappa\left(\frac{2\Delta\varphi(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})}{J_{i,j}}\right), \quad \overline{\kappa}_{i,j}=\kappa\left(\frac{2\Delta\varphi(x_{i,j-1}-x_{i,j+1})}{J_{i,j}}\right),$$

$$b_{i,j}=(x_{i+1,j+1}+x_{i-1,j-1}-x_{i+1,j-1}-x_{i-1,j+1})(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})- \\ -(y_{i+1,j+1}+y_{i-1,j-1}-y_{i+1,j-1}-y_{i-1,j+1})(x_{i,j+1}-x_{i,j-1}),$$

$$c_{i,j}=(x_{i+1,j}-2x_{i,j}+x_{i-1,j})(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})-(y_{i+1,j}-2y_{i,j}+y_{i-1,j})(x_{i,j+1}-x_{i,j-1}),$$

$$\begin{aligned}
 d_{i,j} &= (x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}), \\
 \bar{k}'_{\varphi_{i,j}} &= \bar{k}'_{i,j} \left( (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})b_{i,j} - 4(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})c_{i,j} \right) / J_{i,j}^2, \\
 \bar{\bar{k}}'_{\varphi_{i,j}} &= \bar{\bar{k}}'_{i,j} \left( (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})b_{i,j} - 4(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})c_{i,j} \right) / J_{i,j}^2, \\
 \bar{k}'_{\psi_{i,j}} &= \bar{k}'_{i,j} \left( 4(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})d_{i,j} - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})b_{i,j} \right) / J_{i,j}^2, \\
 \bar{\bar{k}}'_{\psi_{i,j}} &= \bar{\bar{k}}'_{i,j} \left( 4(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})d_{i,j} - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})b_{i,j} \right) / J_{i,j}^2, \\
 J_{i,j} &= (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \\
 k' & - \text{похідна функції } k \text{ по аргументу.}
 \end{aligned}$$

Відповідний алгоритм наближення розв'язку цієї задачі в загальному випадку будемо шляхом поетапної параметризації величини  $\gamma$  (або витрати  $Q$ ), граничних та внутрішніх вузлів сітки  $G_Z^\gamma$  [1] – [3] з використанням ідей методу блочної ітерації (див., напр., [16]) для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме, задавши кількість вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega$   $m$  та  $n$ , параметр  $\varepsilon$ , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі (3), (4), початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,m+1}^{(0)}, y_{i,m+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$  (так, щоб виконувались умови (10)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ ,  $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$  (наприклад, як значення координат внутрішніх вузлів відповідної задачі на конформне відображення), знаходимо початкове наближення  $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$  невідомої величини  $\gamma$  за формулою (12).

Уточнення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$  ( $k=0,1,\dots$  – крок ітерації) проводимо ітераційно за допомогою різницевої схеми типу “хрест” (в загальному випадку – схеми типу “ящик” з використанням масових операторів) шляхом розв'язання (9) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$  [15]. При цьому необхідні значення градієнту квазіпотенціалу та коефіцієнту провідності у вузлах сітки  $G_\omega^\gamma$  обчислюємо через значення  $x_{i,j}, y_{i,j}$  з попереднього кроку ітерації.

Нові наближення величин  $\gamma$  та  $Q$  знаходимо за формулами (12) та  $Q = \Delta\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}$ . Далі, як і в [1] – [3], підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь (10), (11), наприклад, методом Ньютона [14] та перевіряємо виконання умов:

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_Z} \left( \left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon, \quad \left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad \left| D^{(k+1)} - D^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad (13)$$

де  $D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j})^2}}$  – усереднене відношення довжин

діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області  $G_Z^\gamma$ .

Уточнення координат внутрішніх вузлів проводимо доти, поки не виконуються умови (13), після чого обчислюємо нев'язку “квазіконформності” отриманої сітки за формулою

$$\varepsilon_* = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}, \quad \text{де } \varepsilon_x, \varepsilon_y - \text{нев'язки апроксимацій рівнянь (3):}$$



$$\begin{cases} \varepsilon_x = \max_{i,j=1}^{m,n} |x_{i+1,j} - x_{i-1,j} - \gamma \bar{\kappa}_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \\ \varepsilon_y = \max_{i,j=1}^{m,n} |y_{i+1,j} - y_{i-1,j} + \gamma \bar{\kappa}_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|. \end{cases}$$

Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку  $\varepsilon_*$ ), то збільшуємо  $m$  і  $n$  та розв'язуємо різницеву задачу заново (оптимальність співвідношення між  $m$  та  $n$  досягається аналогічно до [1] – [3], [17], [18] шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

Значимо, що тут замість “прямокутників в малому” в сітковій області  $G_Z^y$  тепер фігуруватимуть малі паралелограми, причому порушується подібність “паралелограмів в малому” сіткової області  $G_Z^y$ . Шляхом переходу в (7) від змінних області  $G_Z$  до змінних відповідної області квазікомплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  одержимо формулу для знаходження косинусів кутів даних паралелограмів:

$$\cos \tilde{\Theta} = \frac{\kappa(y_\psi/J)y_\psi^2 + \kappa(-x_\psi/J)x_\psi^2}{\sqrt{y_\psi^2 + x_\psi^2} \sqrt{(\kappa(y_\psi/J)y_\psi)^2 + (\kappa(-x_\psi/J)x_\psi)^2}}.$$

Провівши розрахунки за вказаною методикою, на основі закону Дарсі (рівняння руху)  $\vec{v} = \kappa \text{grad} \varphi$  та умов квазі Коші-Рімана (3), знаходимо величину швидкості у внутрішніх вузлах сіткової області  $G_\omega^y$  за формулою:

$$v_{i,j} = 2 \frac{\Delta \Psi}{J_{i,j}} \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2}.$$

Аналогічно знаходиться величина швидкості і у граничних вузлах та вершинах.

**Комп'ютерна реалізація алгоритму та чисельні приклади.** Описаний нами вище алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді пакету програм для ПК IBM PC/AT. Його збіжність та точність перевірялися за допомогою тестових прикладів.

Тестування розробленого алгоритму проводилось для фізичної області  $G_Z$ , обмеженої

чотирма гладкими кривими  $f_1(x,y) = x$ ,  $f_2(x,y) = y - 25 + 7 \cos \frac{x}{5}$ ,  $f_3(x,y) = x - 10\pi$ ,

$f_4(x,y) = y - 3 - 3 \cos \frac{x}{5}$ , коли коефіцієнт фільтрації середовища приймався модельною

залежністю  $\kappa(t) = 1 + \mu t$  при  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 10$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ . У припущенні, що середовище не деформується, а саме, коли  $\mu = 0$  (відображення конформне),  $m = n = 24$ , за  $k = 1222$  кроків ітераційного процесу знайдено повну витрату  $Q_0 = 5.53839$  та динамічну сітку з максимальною нев'язкою  $\varepsilon_* = 1.8E-03$ . Врахування ж взаємовпливу градієнта квазіпотенціалу та коефіцієнта фільтрації за вище вказаним законом при  $\mu = 0.1$  викликало збільшення шуканої витрати  $Q$  до 5.680742 за максимальної нев'язки  $\varepsilon_* = 1.2E-02$ , що має місце в околі деякого граничного вузла, де криволінійні елементарні чотирикутники найбільше відхиляються від паралелограмів (див. рядок №3 таблиці 1). На рисунку 1 зображена відповідна цьому випадку динамічна сітка. Зауважимо при цьому, що, навіть, і при порівняно малих значеннях  $m$  і  $n$  побудований програмний комплекс дозволяє виділити ділянки допустимих нев'язок  $\varepsilon_*$ .

У таблиці 1 наведені результати розрахунків в області  $G_Z$ , де окрім заданих параметрів розбиття  $m \times n$  та шуканої витрати  $Q$  фігурує необхідна кількість кроків ітерацій  $k_M$ ,  $k_Q$ ,  $k_D$

для виконання умов закінчення процесу (13) (відповідно) та нев'язка "квазіконформності" отриманої динамічної сітки  $\epsilon_*$ . Зазначимо, що в якості початкового наближення шуканого квазіконформного відображення  $G_{\omega} \rightarrow G_Z$  нами приймався наближений розв'язок відповідної задачі на конформне відображення.

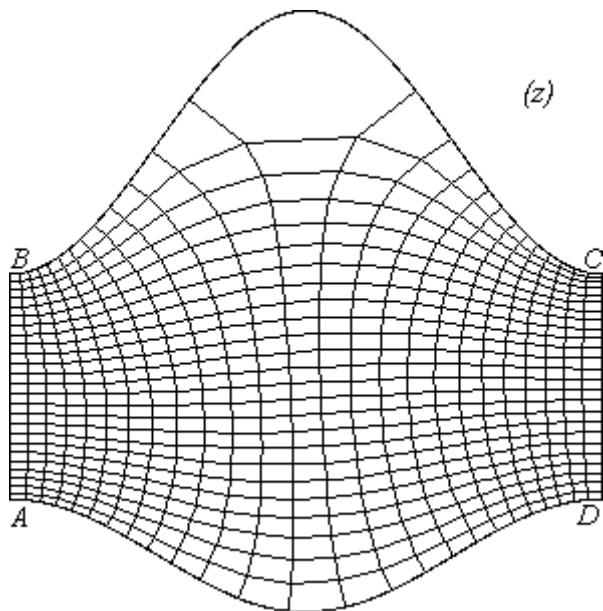


Рис. 1. Динамічна сітка у середовищі, що піддається деформації під впливом градієнтів квазіпотенціалу.

Табл. 1. Результати розрахунків.

№	$m \times n$	$k_M$	$k_Q$	$k_D$	$Q$	$\epsilon_*$
1	$10 \times 10$	216	42	18	5.669107	8.6E-04
2	$17 \times 17$	622	117	56	5.689900	2.4E-03
3	$24 \times 24$	1222	307	108	5.680742	1.2E-02

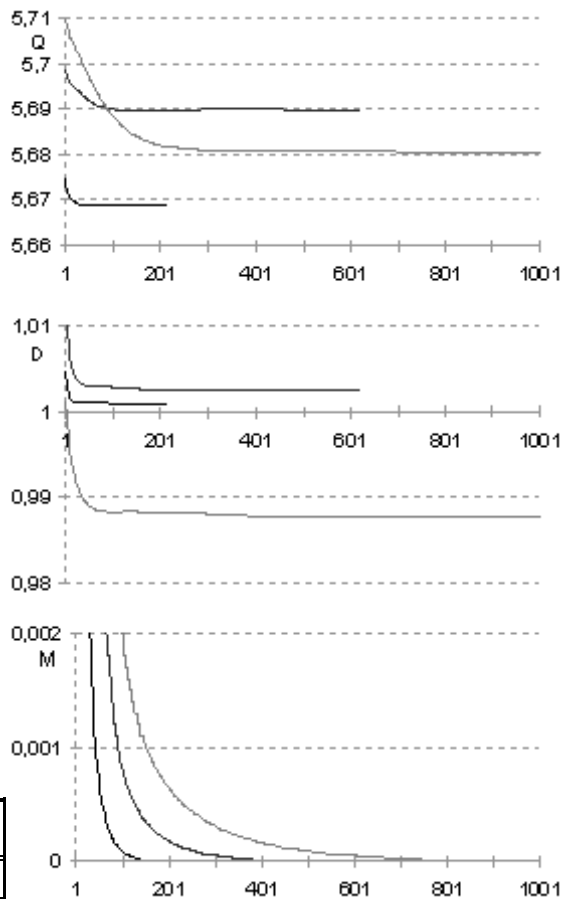


Рис. 2. Стабілізація параметрів збіжності.

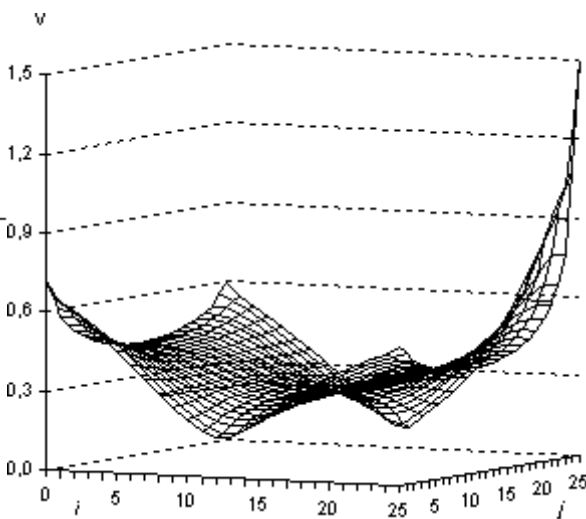
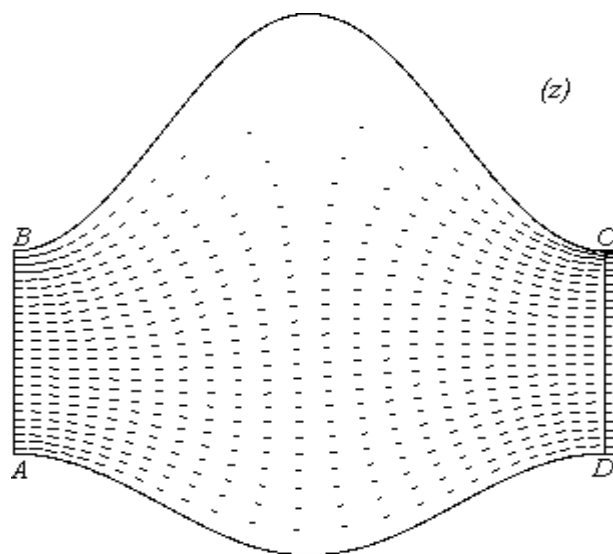


Рис. 3. Поле та величина швидкості фільтрації в області, що піддається деформації під впливом градієнтів квазіпотенціалу.

На рисунку 2 зображено стабілізацію значення витрати ( $Q$ ), відношення діагоналей ( $D$ ) та максимальної похибки наближень граничних вузлів ( $M$ ) відносно кроку ітерації, що демонструє збіжність алгоритму. На рисунку 3 зображено величину та поле швидкості фільтрації в даній області  $G_z$ , а в таблиці 2 подано значення величини швидкості фільтрації вздовж деяких ліній течії та еквіквзіпотенціальних ліній.

Табл. 2. Значення величини швидкості фільтрації при фіксованих  $i, j$ .

	$i=0$	$i=5$	$i=10$	$i=15$	$i=20$	$i=25$
$j=0$	0,7170	0,4642	0,2153	0,2214	0,3973	0,5261
$j=5$	0,4859	0,4056	0,2617	0,2567	0,3649	0,4221
$j=10$	0,4303	0,3808	0,2856	0,2782	0,3550	0,3996
$j=15$	0,4267	0,3762	0,2779	0,2715	0,3645	0,4242
$j=20$	0,4625	0,3815	0,2331	0,2330	0,4063	0,5383
$j=25$	0,5968	0,3941	0,1760	0,1691	0,4932	1,5053

**Зауваження, висновки.** У випадку, коли ділянки  $AB$  та  $CD$  границі фізичної області  $G_z$  не є еквіквзіпотенціальними лініями (наприклад, коли  $\varphi = \varphi(N)$ , де  $N$  – біжуча точка відповідного контура,  $\varphi(N)$  – мало змінна неперервно-диференційована функція), безпосередньо скористатись перевагами запропонованого нами підходу не можна. В цьому випадку можливим є комбінований підхід із використанням методу скінчених елементів [19] та методу мажорантних областей Г.М.Положого [20].

Проведені чисельні експерименти підтверджують факт, що врахування впливу великих градієнтів квазіпотенціалу на провідність середовища приводить збільшення розрахункової величини швидкості фільтраційної течії на ділянках її виходу із даної області. На вході ж в дану область, де мають місце як вимивання, так і осідання суфозійних частинок, має місце більш складна (ніж монотонно зростаюча) залежність приросту швидкості (повної витрати) та коефіцієнта фільтрації від додаткового впливу величин градієнтів квазіпотенціалу.

1. Бомба А.Я., Кацтан С.С. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник.- 2001.- Вип. 8.- С.9-22.
2. Бомба А.Я., Кацтан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки.- 2001, №4.- С.182-195.
3. Бомба А.Я., Кацтан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів напору на процес фільтрації // Математичні методи та фізико-механічні поля.- 2002.- 45, №2. - С.15-22.
4. Бомба А.Я., Кацтан С.С. Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1999.- Вип.6.- С.25-36.
5. Бомба А.Я., Кацтан С.С. Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многузв'язних областях // Вісник Львівського національного університету. Серія: Прикладна математика.- 2000.- Вип. 2.- С.3-15.
6. Бомба А.Я., Хлапук М.М., Сидорчук Б.П. Про моделювання і розв'язання одного класу локально збурених нелінійних задач // Волинський математичний вісник.- 1995.- Вип.2.- С.22-25.
7. Бомба А.Я., Хлапук М.М., Сидорчук Б.П. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням малих деформацій середовища // Актуальні проблеми водного господарства.- Рівне: Вид-во УДАВГ, 1997.- Т.1.- С.11-15.
8. Darcy H. Les fontains publiques de la ville de Dijon.- Paris, 1856.
9. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.- М.: ГИТТЛ, 1953.- 616с.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод.- М.: Гостехиздат, 1952.- 676с.
11. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. Полубариновой-

- Кочиной П.Я.- Москва: Наука, 1969.- 546с.
12. Слезкин Н.А. О дифференциальных уравнениях фильтрации // Докл. АН СССР.- 1951.- Т.79.- №5.- С.755-758.
  13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного.- Москва: Наука, 1973.- 736с.
  14. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- Киев: Наукова думка, 1980.- 334с.
  15. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем.- Москва: Наука, 1971.- 552с.
  16. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.- Москва: Мир, 1975.- 558с.
  17. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими" узлами.- Киев, 1989.- 55с.- (Препринт АН УССР. Ин-т математики, 89.79).
  18. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 1972.- 12, №2.- С.429-440.
  19. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах.- Киев: Наукова думка, 1991.- 432с.
  20. Ляшко И.И., Великощаненко И.М., Лаврик В.И., Мистецкий Г.Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации.- Киев: Наукова думка, 1974.- 200с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне  
E-mail: Kashtan@rdgu.rv.ua

Надійшла 27.02.2002

**Каштан С.С.** О ПОСТРОЕНИИ ПОЛЯ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ УСЛОВИЯХ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ ГРАДИЕНТА ПОТЕНЦИАЛА И ХАРАКТЕРИСТИК АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ // *Разработано новый алгоритм численного решения обратных нелинейных краевых задач на квазиконформные отображения в анизотропных средах склонных к деформациям под действием градиентов квазипотенциала – криволинейных четырехугольных областях, ограниченных линиями течения та эквивалентными линиями. Численно построено отображения областей сложной геометрической формы на канонические области типа параметрического прямоугольника при условиях взаимовлияния градиента квазипотенциала и характеристик анизотропной среды. В криволинейной четырехугольной области получено динамическую сетку и рассчитано поле скорости фильтрации.*

**Kashtan S.S.** ABOUT CONSTRUCTION OF THE FIELD OF SPEED OF THE FILTRATION UNDER CONDITIONS OF INTERFERENCE OF THE GRADIENT OF POTENTIAL AND CHARACTERISTICS OF THE ANISOTROPIC ENVIRONMENT // *It is developed new algorithm of numerical solution of return nonlinear boundary value problems on quasiconformal mappings in the anisotropic environments inclined to deformations under operation of gradients of a potential - the curvilinear quadrangular areas limited to lines of current those by equipotential lines. Numerically it is constructed of mapping of areas of the difficult geometrical form on canonical areas such as a parametric rectangle under conditions of interference of a gradient of a potential and characteristics of the anisotropic environment. In curvilinear quadrangular area it is obtained a dynamic grid and the field of speed of filtering is calculated.*

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

---

**Редакційна колегія :**

**Зовнішня (м.Львів – м.Київ)**

Бейко І. В.  
Боднар Д. І.  
Бурак Я. Й.  
Войтович М. М.  
Гаращенко Ф. Г.  
Горбачук М.Л.  
Дейнека В.С.  
Задерей П. В.  
Ляшенко І.М.  
Мельник В. С.  
Прикарпатський А. К.  
Пташник Б. Й.  
Савула Я. Г.  
Скопецький В. В. (головний редактор)  
Чикрій А.О.  
Шевчук І.О.  
Шинкаренко Г. А.

**Місцева (м.Рівне – м.Луцьк)**

Барановський С.В. (секретар) – канд.наук  
(01.05.02 – мат.модел. обч.мет.), доц.  
Бомба А. Я. (відповідальний редактор) – к.ф.-м.н.,  
доц., докторант (наук.кер. Скопецький В.В.)  
Власюк А. П. – д.т.н., проф., зав.каф.  
прикл.матем. УДУВГіП  
Гарбарчук В. І. – д.т.н., проф. (техн. кіберн.,  
теор. ін форм.), зав.каф. прикл.матем.  
Джунь В. Й. – д.ф.-м.н., проф., зав.каф.  
матем.моделюв.  
Каштан С. С. (технічний секретар) – аспірант  
(наук.кер. Бомба А.Я.)  
Кратко М. І. – д.ф.-м.н., проф.  
Кузьменко А. П. – к.ф.-м.н., доц., зав.каф.  
прикл.матем.  
Кундрат М. М. – к.ф.-м.н., доц., пошукувач  
Миронюк П. Й. – к.ф.-м.н., доц., пошукувач  
Петрівський Б. П. – к.ф.-м.н., проф., зав.каф.  
вищої матем.  
Свідзинський А. В. – д.ф.-м.н., проф., зав.каф.  
матем. та теор.фіз.  
Сяський А. О. – д.т.н., проф., прор. з  
наук.роб.  
Турбал Ю. В. – к.ф.-м.н., доц., зав.каф.  
інформатики, пошукувач  
Харкевич Ю. І. – к.ф.-м.н., доц., зав.каф.  
Шваб'юк В. М. – д.т.н., проф., прор. з  
наук.роб.  
Янчук П. С. – к.ф.-м.н., доц., докторант

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Міжнародного університету "Рівненський економіко-гуманітарний інститут" ім. С.Дем'янчука, Волинського державного університету ім. Л.Українки Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С. Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

**Адреса редакції :** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

Наукове видання  
"Волинський математичний вісник"  
Випуск 9, 2002

Відповідальний за випуск Бомба А.Я.

Здано до друку . .200 р. Підписано до друку . .200 р.  
Формат 1/8 Папір друк. 30×21 Ум. друк. арк. 4,38  
Наклад 300 прим. Замовлення № –

---

Віддруковано в інформаційно-видавничому відділі  
Рівненського державного гуманітарного університету  
Україна, 33000, м. Рівне, вул. С.Бандери, 15