Волинський математичний вісник

Випуск 6

1999

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики та інформатики. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

The **"Volyn Mathematical Bulletin"** publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics and informatics. Recommended for research workers, teachers of higher schools, post graduates and senior year students.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті
при сприянні Українського математичного товариства,
Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова,
Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
Кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 260-444.

ISBN 966 - 7281 - 02 - 8

Зміст

Застосування математичних методів

Короткі повідомлення

УДК 517.944

Петрівський Б.П., Петрівський Я.Б., Хома Н.Г.

УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Встановлено умови існування єдиного розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі для інтегро-диференціального рівняння другого порядку гіперболічного типу.

Розглядається крайова періодична задача

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,u,u_t,u_x,v[u]), \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ u(x,t+T)=u(x,t),\ (x,t)\in R^2, \tag{2}$$

де $v[u](x,t)=\displaystyle\int_0^{h(x,t)}\varphi(x,t,u(x,s),u_t(x,s),u_x(x,s))ds.$

Відомо [1], що крайова періодична задача вигляду

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x,t), \tag{3}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad u(x,t+T)=u(x,t),\quad (x,t)\in R^2, \tag{4}$$

має єдиний класичний розв'язок щонайменше в трьох просторах функцій, які визначаються наступним чином:

$$B_1=\{g:g(x,t)=-g(-x,t)=g(\pi-x,t)=g(x,t+T_1)\};$$

$$B_2=\left\{g:g(x,t)=-g(-x,t)=g(2\pi+x,t)=g(\pi-x,t+\frac{T_2}{2})=g(x,t+T_2)\right\};$$

$$B_3=\left\{g:g(x,t)=-g(-x,t)=g(2\pi+x,t)=-g(x,t+\frac{T_3}{2})\right\},$$

для таких періодів –

$$T_1=\frac{(2p-1)\cdot\pi}{q},\quad T_2=\frac{2\cdot\pi\cdot(2p-1)}{2\cdot s-1},\quad T_3=\frac{4\cdot\pi\cdot k}{2\cdot s-1},$$ де p, s, k – натуральні числа.

Більше того, справедливим є таке твердження в [2, 3].

Теорема 1. Функція

$$u_i(x,t)=(P_ig)(x,t,b_i)=\int_0^{b_i}Q(\tau)d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}g(\xi,\tau)d\xi, \tag{5}$$

де $Q(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<\tau\le t\\ -\frac{1}{4}, & t<\tau\le b_i\end{cases}$, $b_i=(2\cdot p-1)\cdot\pi$, $i=1,2$, $b_3=2\cdot\pi\cdot k$, $g\in G_x\cap B_i$, G_x – простір неперервних і обмежених на R^2 разом з похідною по x функцій, є єдиною функцією з простору $C^{2,2}\cap B_i$, яка задовольняє умови (3), (4), причому справджуються наступні оцінки

$$\|u\|_C \le \frac{b_i^2}{4}\|g(x,t)\|_C,\ \ \|u_l(x,t)\|_C \le \frac{b_i}{2}\|g(x,t)\|_C,\ \ l=t,x, \tag{6}$$

$$\|g(x,t)\|_C = \sup(|g(x,t)|;(x,t)\in R^2), \tag{7}$$

де C-простір неперервних і обмежених на R^2 функцій двох змінних x, t, $C^{2,2}$ – простір неперервних і обмежених на R^2 разом із другими похідними по змінних x, t функцій.

За аналогією з розв'язком (5) задачі (3), (4) утворимо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} u_i(x,t) = \displaystyle\int_0^{b_i} Q(\tau)d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[u,u_t,u_x](\xi,\tau)d\xi, \\ \dfrac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = \displaystyle\int_0^{b_i} Q(\tau)\sum_{k=0}^{1} F[u,u_t,u_x](x+(-1)^k(t-\tau),\tau)d\tau, \\ \dfrac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} = \displaystyle\int_0^{b_i} Q(\tau)\sum_{k=0}^{1}(-1)^k F[u,u_t,u_x](x+(-1)^k(t-\tau),\tau)\,d\tau, \quad i=1,2,3, \end{cases} \tag{8}$$

де $F[u,u_t,u_x,v[u]](x,t) = f(x,t,u(x,t),u_t(x,t),u_x(x,t),v[u](x,t))$.

Означення. Неперервний розв'язок $(u_i,\frac{\partial u_i}{\partial t},\frac{\partial u_i}{\partial x})$, $u_i\in B_i$, $i=1,2,3$, системи інтегральних рівнянь (8) будемо називати гладким розв'язком крайової періодичної задачі (1), (2).

Використовуючи інтегральне зображення розв'язку (5) лінійної крайової періодичної задачі (3), (4), на основі теореми 1 переконуємось у справедливості наступного твердження.

Теорема 2. Нехай $g\in B_i\cap C(R^2)$. Тоді лінійна задача (3), (4) має єдиний гладкий розв'язок, визначений формулою (5), для якого справедливі оцінки (6), (7).

Аналогічний результат справедливий і для квазілінійної задачі (1)–(2).

Теорема 3. Нехай скалярні функції $F[u,u_t,u_x,v[u]](x,t)$ і $v[u](x,t)$ задовольняють такі умови:

1) $F[u,u_t,u_x,v[u]](x,t)\in C(R^2\times\|u\|_C<\infty\times\|u_t\|_C<\infty\times\|u_x\|_C<\infty\times\|v\|_C<\infty)$;

2) $0<\|F[0,0,0,v[0]](x,t)\|_C = M<\infty$;

3) $$\begin{aligned}&|F[u'',u_t'',u_x'',v[u'']](x,t)-F[u',u_t',u_x',v[u']](x,t)|\le N_1|u''(x,t)-u'(x,t)|+\\&+N_2|u_t''(x,t)-u_t'(x,t)|+N_3|u_x''(x,t)-u_x'(x,t)|+N_4|v[u''](x,t)-v[u'](x,t)|;\end{aligned}$$

4) $F[0,0,0,v[0]](x,t)\in B_i$, $i=1,2,3$;

5) $\forall u\in B_i\cap C^{1,1}$: $F[u,u_t,u_x,v[u]](x,t)\in B_i\cap C(R^2)$, $i=1,2,3$;

6) $v[u](x,t)\in C(R^2\times\|u\|_C<\infty\times\|u_t\|_C<\infty\times\|u_x\|_C<\infty)$;

7) $$\begin{aligned}&|\varphi(x,t,u'',u_t'',u_x'')-\varphi(x,t,u',u_t',u_x')|\le K_1|u''(x,t)-u'(x,t)|+\\&+K_2|u_t''(x,t)-u_t'(x,t)|+K_3|u_x''(x,t)-u_x'(x,t)|;\end{aligned}$$

8) $|\varphi(x,t)|\le N$.

Тоді, при виконанні умови

$$\frac{(T_i q)^2}{4}(N_1 + NN_4 K_1) + \frac{T_i q}{2}(N_2 + N_3 + NN_4(K_2 + K_3)) \le 1, \ i = 1,2,3,$$

задача (1), (2) має єдиний гладкий розв'язок.

1. *Хома Г.П., Петрівський Я.Б.* Розв'язність однієї крайової періодичної задачі // Укр. мат. журн.- 1997.- Т.49, №2.- С.296-301.
2. *Хома Г.П., Петрівський Б.П., Петрівський Я.Б.* Крайова періодична задача для інтегро-диференціального рівняння другого порядку // Волинський математичний вісник.- 1997.- №4.- С.170-172.
3. *Хома Н.Г., Семчук А.Я.* Розв'язок крайової періодичної задачі // Волинський математичний вісник.- 1997.- №4.- С.173-174.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
Тернопільська державна фінансово-економічна академія, Тернопіль

Петривський Б.П., Петривський Я.Б., Хома Н.Г. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА // *Установлены условия существования решения квазилинейной краевой периодической задачи для гиперболического уравнения.*

Petrivskiy B.P., Petrivskiy Ya.B., Khoma N.G. GENERALIZED SOLUTIONS OF QUASILINEAR INTEGRAL AND DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER HYPERBOLIC TYPE // *Conditions for existense of the solution for quasilinear boundary-value periodical problem for hyperbolic equation are established.*