Волинський математичний вісник

Випуск 6

1999

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі теоретичної і прикладної математики та інформатики. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

The **"Volyn Mathematical Bulletin"** publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics and informatics. Recommended for research workers, teachers of higher schools, post graduates and senior year students.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті
при сприянні Українського математичного товариства,
Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова,
Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
Кафедра інформатики та прикладної математики.
Тел.: (8+0362) 260-444.

ISBN 966 - 7281 - 02 - 8

Зміст

Антонова Т.М. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ 3

Бабак П.П. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ НАВАНТАЖЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ З МАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДИФУЗІЇ ТА ПОРИСТОСТІ 9

Баран О.Є., Боднар Д.І. РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ 15

Боднар Д.І. АЛГОРИТМ РОЗВИНЕННЯ КРАТНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ У ВІДПОВІДНИЙ БАГАТОВИМІРНИЙ С-ДРІБ 21

Бомба А.Я., Каштан С.С. ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ 25

Ворошик Н.Й. ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ ГРАНИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЇХ ГАРМОНІЙНИМ ЗОВНІ ЕЛІПСА ПРОДОВЖЕННЯМ 37

Гембарська С.Б. ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ З ОБМЕЖЕНОЮ ВАРІАЦІЄЮ 41

Григорків В.С. ОПТИМІЗАЦІЙНА МОДЕЛЬ З НЕЛІНІЙНИМ ДИНАМІЧНИМ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИМ МІЖГАЛУЗЕВИМ БАЛАНСОМ 47

Грищенко О.Ю. ДС-РІЗНИЦЕВІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСУ З ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ, ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ ВІД РОЗВ'ЯЗКУ 53

Дейнека В.С. СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФУЗІЇ ІЗ ЗБУРЕНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ 57

Жигалло К.М., Харкевич Ю.І. ТОЧНІ ОЦІНКИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСУ КВАЗІГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ЇХ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА В РІВНОМІРНІЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИКАХ 64

Іващук Я.Г., Ковтунець В.В. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА НАЙКРАЩОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЕЛЕМЕНТАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КЛАСУ 69

Ільїна В.В. ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ 76

Карабин О.О. ДО ПОНЯТТЯ БАЗИ З ПІДПРОСТОРІВ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ 81

Клюшин Д.А. ОПТИМІЗАЦІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ВПЛИВОМ 85

Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У НЕСКІНЧЕННИХ СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ОБЛАСТЯХ 89

Кундрат М.М. ВТОМНЕ ВІДШАРУВАННЯ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ 93

Ляшко С.И., Войцеховский С.А., Номировский Д.А., Семенов В.В. ЧИСЛЕННАЯ

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ.............97

Нгуен Суан Тхао БАЗИСНЫЙ АНАЛОГ *L*-ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ......................102

Попов Б.О., Лаушник О.І. ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОБЕРНЕНОЇ ДО ІНТЕГРАЛУ ЙМОВІРНОСТІ 107

Скасків О.Б., Півкач М.Г. ОЦІНКА ЗНИЗУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ПОКАЗНИКАМИ, ЩО МАЮТЬ ДОДАТНІЙ КРОК, ЗОВНІ СИСТЕМИ МАЛИХ КРУГІВ...113

Столярчук В.К., Мартинюк П.М. АСИМПТОТИЧНО НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ І СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ 118

Сяський А.О. ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ЖОРСТКОГО ДИСКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕННОЇ ПЛАСТИНКИ 122

Сяський В.А. ВПЛИВ ТЕРТЯ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ ПРИ КОНТАКТІ ГЛАДКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ І ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ...............127

Турбал Ю.В. ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СУМІСНОСТІ ДЕЯКИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ..135

Цимбал В.М. ВИРОДЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ У ГІПЕРБОЛІЧНЕ.........139

Янчук П.С. КВАЗІСПЕКТРАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ ТА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ 143

Застосування математичних методів

Науменко Ю.В. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОБЕРТОВОМУ ЦИЛІНДРІ...........................160

Черняга П.Г., Сяський В.О., Грицюк П.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ РУХІВ ФУНДАМЕНТІВ СПОРУД В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ЗМІНИ ЇХ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК..164

Короткі повідомлення

Вірченко Н.О. ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ (ЗА РАЙТОМ) ГАМА-ФУНКЦІЮ 168

Петрівський Б.П., Петрівський Я.Б., Хома Н.Г. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ...171

Рубльов Б.В. ВИКОРИСТАННЯ ГЛАДКОЇ МЕТРИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТИЗОВАНИХ ЗОБРАЖЕНЬ...174

Савич В.О. ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ ДВОЗНАЧНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ФУНКЦІЙ З ВРАХУВАННЯМ МНОЖИН *А*-ТОЧОК...177

УДК 519.6

Янчук П.С.

КВАЗІСПЕКТРАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ ТА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

Досліджуються питання про побудову обчислювальних схем, призначених для машинного розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Для їх побудови використано так звані квазіспектральні многочлени (К-многочлени) і квадратурні формули Лобатто. Основними агрегатами наближення є алгебраїчні многочлени і сплайни. В роботі вивчаються проблеми апроксимації і стійкості, а також сформульовані алгоритми, призначені для практичних обчислень.

1.Вступ. Історія проблеми.

Напевно, ще не в достатній мірі оцінено значення апроксимаційного та апроксимаційно-ітераційного методів Дзядика для чисельного розв'язування звичайних диференціальних рівнянь довільних порядків та їх систем. Одержана (В.Дзядик, [1], стр.102-110) за допомогою апроксимаційно-ітераційного методу чисельна схема для задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь є фактично неявною схемою Рунге-Кутта (РК). Неявні методи РК деякою мірою еквівалентні коллокаційним методам ([5], стр.220). Апроксимаційно-ітераційний метод Дзядика в такому розумінні теж можна розглядати як коллокаційний метод. У випадку задачі Коші для нелінійного диференціального рівняння першого порядку при побудові обчислювальних схем В.Дзядик використав многочлени Чебишева другого роду, що еквівалентно використанню квадратурних формул, вузлами яких служать корені цих многочленів, доповнені кінцями проміжку, на якому вони ортогональні. В [6, 7] розглядаються, в першу чергу, методи, що грунтуються на квадратурних формулах Гаусса-Лежандра, Радо і Лобатто.

Крім апроксимаційно-ітераційного методу В.Дзядик розробив так званий α-метод для наближеного розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з многочленними коефіцієнтами. Характерними рисами обох методів є зведення диференціальних рівнянь до інтегральних, подання розв'язків у вигляді многочленів та використання класичних ортогональних многочленів, насамперед, Чебишева, з огляду на їх мінімаксні властивості. За словами автора цих методів [1], головна ідея в процесі їх розробки і розвитку полягала в побудові такого наближеного розв'язку, який якомога точніше задовольняв би апроксимаційній теоремі Чебишева про характеризацію многочлена найкращого наближення. Для цілого ряду інтегральних і диференціальних рівнянь та їх систем В.Дзядик разом із своїми учнями отримав многочлени, що здійснюють асимптотично найкраще рівномірне наближення (тобто, найкраще з точністю до множника $(1+\varepsilon_n)$, де $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$)([1], стор.143). Апроксимаційний метод В.Дзядика використано автором для побудови так званих К-многочленів [3].

Метою даної роботи є побудова чисельних схем для крайових задач, які б зберегли основні риси, що в певній мірі характерні для неявних методів Рунге-Кутта, коллокаційних, апроксимаційно-ітераційних та апроксимаційних. Ми не досліджуємо детально важливі питання взаємозв'язків цих методів, проте відмітимо що всі вони грунтуються на досягненнях теорії апроксимації. Наприклад, що стосується схем, розглянутих в даній роботі, то можна сказати, що вони грунтуються на квадратурній формулі Лобатто в такій же мірі, що й аналогічні методи Рунге-Кутта для задачі Коші і, напевно, тому в такій же мірі є точними.

Значна частина роботи присвячена поширенню апроксимаційно-ітераційного методу на випадок крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, отриманню відповідних оцінок для наближення точного розв'язку і його похідних в квадратичній метриці . При цьому наближення здійснюється за допомогою многочленів і сплайнів.

2.Квазіспектральні многочлени.

Розглянемо такі многочлени для фіксованого парного натурального N. Квазіспектральні многочлени $\dot{K}_i = \dot{K}_i(x)$ однозначно визначаються співвідношеннями вигляду

$$-\frac{d^2}{dx^2}\dot{K}_i(x)=\bar{\lambda}_i\dot{K}_i(x)+\bar{\tau}_i\bar{P}'_{N+\pi(i)}(x)\,, \tag{1}$$

$$\dot{K}_i(-1)=\dot{K}_i(+1)=0\,, \tag{2}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\dot{K}_i(x)\right]^2dx=1, i=1,\ldots,N\,, \tag{3}$$

де $\pi(i)=1$ при непарному i та $\pi(i)=2$ при парному i. Тут $\bar{P}'_m=\bar{P}'_m(x)=\frac{d}{dx}\bar{P}_m(x)$ похідні многочленів Лежандра $\bar{P}_m=\bar{P}_m(x)$ степеня m, які задовольняють умову

$$\int_{-1}^{1}\left[\bar{P}'_m(x)\right]^2dx=1, m=1,2,\ldots. \tag{4}$$

Відомо [3], що парним i відповідають непарні многочлени $\dot{K}_i$, а парним – непарні многочлени K_i.

Многочленам $\dot{K}_i$ поставимо у відповідність многочлени

$$K_i=K_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{d}{dx}\dot{K}_i(x)\ \Rightarrow \dot{K}_i(x)=\sqrt{\lambda_i}\int_{-1}^{x}K_i(x_1)dx_1, i=1,\ldots,N\,, \tag{5}$$

які задовольнятимуть співвідношення

$$-\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{x_1}K_i(x_2)dx=\lambda_iK_i(x)+\tau_iP_{N+\pi(i)}(x), \tag{6}$$

$$\int_{-1}^{1}K_idx=0,\ \int_{-1}^{1}\left[K_i\right]^2dx=1, \tag{7}$$

де $P_m=P_m(x)$ стандартизовані многочлени Лежандра, які задовольняють умові $P_m(1)=1$.

Тут парним i відповідають парні многочлени K_i, а непарним – непарні многочлени K_i.

Щоб встановити зв'язок між рівностями (1) та (6), спочатку встановимо співвідношення між многочленами Лежандра, що нормуються за допомогою (4) та стандартизованими многочленами Лежандра. Інтегруючи за частинами в (4), отримаємо

$$\bar{P}'_m(x)\bar{P}_m(x)\Big|_{x=-1}^{x=1}=1,$$

звідки

$$2\bar{P}'_m(1)\bar{P}_m(1)=1 \tag{8}$$

З іншої сторони для довільних многочленів Лежандра має місце формула

$$\bar{P}'_m(1)=\frac{(m+1)m}{2}\bar{P}_m(1). \tag{9}$$

Із отриманих співвідношень (8),(9) слідує, що

$$\left[\bar{P}'_m(1)\right]^2=\frac{(m+1)(m)}{4}, \tag{10}$$

$$\left[\bar{P}_m(1)\right]^2=\frac{1}{(m+1)m}. \tag{11}$$

Із співвідношення (11) отримуємо важливе співвідношення між многочленами Лежандра, нормованими умовою (4) і стандартизованими многочленами Лежандра

$$\overline{P}_m(x)=\frac{1}{\sqrt{(m+1)m}}P_m(x). \tag{12}$$

В співвідношенні (6) замінимо x_2 на x_3, x_1 на x_2, x на x_1, проінтегруємо обидві частини отриманої рівності по x_1 в межах від -1 до x, після цього двічі продиференціюємо по x і отримаємо рівність

$$-\int_{-1}^{x} K_i(x_1)dx_1 = \lambda_i \frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{x} K_i(x_1)dx_1 + \tau_i \frac{d}{dx}P_{N+\pi(i)}(x).$$

На підставі означення (5) многочленів K_i та рівності (12) з останньої рівності отримаємо (1), де

$$\overline{\lambda}_i = \lambda_i^{-1}, \overline{\tau}_i = \sqrt{\overline{\lambda}_i^3 (N+\pi(i)+1)(N+\pi(i))}\tau_i. \tag{13}$$

Цим самим встановлена повна еквівалентність задач (1) – (3) та (6), (7). Першою задачею визначаються квазіспектральні многочлени диференціального оператора, а іншою - інтегрального оператора. Друга із цих задач вивчалася і, зокрема, в роботі [3].

3. Ряди Фур'є за квазіспектральними многочленами (К-ряди Фур'є).

Через $\dot{M}^N[-1,1]$ позначимо простір многочленів, які перетворюються в нуль в кінцях проміжку $[-1,1]$ і степінь яких не перевищує $N+1$. Квазіспектральні многочлени $\dot{K}_i$ є ортонормованим базисом цього простору відносно $L_2[-1,1]$ – метрики, точніше

$$\int_{-1}^{1}\dot{K}_i\dot{K}_j dx=\delta_{ij}, \tag{14}$$

де $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$ і $\delta_{ij}=1$ при $i=j$. Більше того, мають місце рівності

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}\dot{K}_i\right)\left(\frac{d}{dx}\dot{K}_j\right)dx=\overline{\lambda}_i\delta_{ij}. \tag{15}$$

Співвідношення (14), (15) виражають факт ортогональності квазіспектральних многочленів разом з їхніми похідними.

Через $M^N[-1,1]$ позначимо простір всіх многочленів від однієї змінної, степінь яких не перевищує $N+1$. Ортонормований базис цього простору, з однієї сторони утворюють многочлени Лежандра, а з іншої – многочлени

$$\dot{K}_1,\dot{K}_2,\ldots,\dot{K}_N,\overline{P}'_{N+1},\overline{P}'_{N+2}. \tag{16}$$

Простір, породжений двома останніми многочленами із (16) позначимо через $\hat{M}^N[-1,1]$ і таким чином подамо $M^N[-1,1]$ у вигляді прямої суми його підпросторів:

$$M^N[-1,1]=\dot{M}^N[-1,1]\otimes\hat{M}^N[-1,1].$$

Через $\widetilde{M}^N[-1,1]$ позначимо простір многочленів, ортонормований базис в якому утворюють многочлени $K_1, K_2, \ldots, K_N$.

Через $\dot{\pi}^N : L_2[-1,1]\to\dot{M}^N[-1,1]$ та $\widetilde{\pi}^N : L_2[-1,1]\to\widetilde{M}^N$ позначимо ортогональні проекції.

Із ортонормованості базису (16) слідує, що кожний алгебраїчний многочлен, степінь якого не перевищує $N+1$, може бути поданий у вигляді

$$u=\sum_{1\le i\le N}c_i\dot{K}_i(x)+\sum_{1\le s\le 2}a_s\overline{P}'_{N+s}(x), \tag{17}$$

де

$$c_i = \int_{-1}^{1} u\dot{K}_i(x)dx, a_s = \int_{-1}^{1} u\overline{P}'_{N+s}(x)dx \,. \tag{18}$$

Для обчислення інтегралів в (18) використаємо квадратурну формулу Лобатто, яку можна записати у вигляді

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \sum_{i=0}^{m+1} w_i g(\alpha_i), \tag{19}$$

де $\alpha_0 = -1, \alpha_{m+1} = 1, \alpha_i - i$-ий нуль похідної многочлена Лежандра $P'_{m+1}(x)$ при $1 \le i \le m$,

$$w_0 = w_{m+1} = 2/(m+1)/(m+2),$$

$$w_i = \frac{2}{(m+1)(m+2)[P_{m+1}(\alpha_i)]^2} \,. \tag{20}$$

Квадратурна формула Лобатто (19) є точною для многочленів $2m+1$ степеня, а тому при $m = N+1$ і степені $\le N+1$ алгебраїчного многочлена u інтеграли (18) можна обчислити точно за допомогою квадратурних формул. Отже,

$$c_i = \sum_{0 \le r \le N+2} w_r \dot{K}_{ir} u_r, \tag{21}$$

де $\dot{K}_{ir} = \dot{K}_i(\alpha_r), u_r = u(\alpha_r)$.

Аналогічно,

$$a_s = \sum_{0 \le r \le N+2} w_r \overline{P}'_{N+s,r} u_r \,, \tag{22}$$

де $\overline{P}'_{m,r} = \overline{P}'_m(\alpha_r) = D_x P_m(\alpha_r)$.

Оскільки, $\overline{P}'_{N+2,r} = 0$ при $1 \le r \le N+1$, то

$$a_2 = w_0(\overline{P}'_{N+2,0}u_{N+2} + \overline{P}'_{N+2,N+2}u_{N+2}) \,. \tag{23}$$

В припущенні, що многочлен u має степінь не вищу за N ми аналогічно до (23) отримаємо

$$a_1 = \overline{w}_0(\overline{P}'_{N+1,0}u_0 + \overline{P}'_{N+1,N+2}u_{N+2}), \tag{24}$$

де $\overline{w}_0 = 2/(N+1)/(N+2)$.

Насправді, формула (24) має місце і для многочленів $N+1$ степеня. Для цього зауважимо, що вона виконується окремо для парних, степінь яких не перевищує N і окремо для непарних многочленів, степінь яких не перевищує $N+1$. Останнє слідує із парності многочлена P'_{N+1}.

Враховуючи, що $\dot{K}_{ir} = 0$ при $r = 0$ та $r = N+2$, перепишемо співвідношення (21), (23), (24) у вигляді

$$c_i = \sum_{1 \le r \le N+1} w_r \dot{K}_{ir} u_r \,,$$

$$a_2 = w_0(P'_{N+2,0}u_{N+2} + P'_{N+2,N+2}u_{N+2}),$$

$$a_1 = \overline{w}_0(P'_{N+1,0}u_0 + P'_{N+1,N+2}u_{N+2}) \,. \tag{25}$$

Звідси можна отримати

Твердження 1. Якщо функція u є многочленом, степінь якого не перевищує $N+1$, то коефіцієнти Фур'є (18) можна обчислити за формулами вигляду

$$c_i = \sum_{1 \le r \le N+1} Y_{ir} u_r, Y_{ir} = w_r \dot{K}_{ir} \,,$$

$$a_1 = (u_{N+2} - u_0)/\sqrt{(N+2)(N+3)},$$

$$a_2 = (u_{N+2} + u_0)/\sqrt{(N+1)(N+2)} \,. \tag{26}$$

Доведення. Покажемо, що із формул (25) можна отримати формули (26). Справді, із (10) з врахуванням властивостей парності-непарності отримуємо

$$\overline{P}'_{N+2,0} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(N+3)(N+2)}, \overline{P}'_{N+2,N+2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(N+3)(N+2)},$$

$$\overline{P}'_{N+1,0} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(N+2)(N+1)}, \overline{P}'_{N+1,N+2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(N+2)(N+1)} \tag{27}$$

Аналогічно, із (11) отримаємо

$$\overline{P}_{N+2,0} = \frac{1}{\sqrt{(N+3)(N+2)}}, \overline{P}_{N+2,N+2} = \frac{1}{\sqrt{(N+3)(N+2)}},$$

$$\overline{P}_{N+1,0} = -\frac{1}{\sqrt{(N+2)(N+1)}}, \overline{P}_{N+1,N+2} = \frac{1}{\sqrt{(N+2)(N+1)}}. \tag{28}$$

Підставимо (27) і формули для вагових коефіцієнтів (20) в (25) і отримаємо (26). Отримані формули (28) є корисними при практичних обчисленнях.

Значення формул (26) полягає в тому, що два коефіцієнти Фур'є $a_s, s = 1,2$ функції u, у випадку, коли вона є многочленом степеня $\le N+1$, знаходяться через крайові умови. При цьому всі інші можна буде знайти, наприклад, із диференціального рівняння, що ми і покажемо в наступному пункті.

Означення 1. Відрізок ряду Фур'є, який визначається формулами (17), (18), називатимемо К-рядом Фур'є функції u у просторі $L_2[-1,1]$.

Означення 2. Відрізок ряду Фур'є, який визначається формулами (17), (26), будемо називати дискретним К-рядом Фур'є функції u у просторі $L_2[-1,1]$.

Зауваження. 1. К-ряд Фур'є визначається для довільної сумовної з квадратом функції u, а не тільки для многочлена.

2. У випадку довільної функції u, визначеної на відрізку $[-1,1]$, дискретний ряд Фур'є, взагалі кажучи, не є інтерполяційним многочленом, але інтерполює її в кінцевих точках цього відрізка. В цілому ж можна сказати, що дискретний К-ряд є алгебраїчним многочленом степеня $\le N+1$ середньо квадратичного наближення деякої функції u відносно $N+3$ вузлів квадратурної формули Лобатто, або, просто, вузлів Лобатто.

3. Вище ми показали, що коли функція u є многочленом степеня $\le N+1$, то К-ряд Фур'є і дискретний К-ряд Фур'є співпадають із цією функцією.

4. Явне подання наближених розв'язків модельної крайової задачі за допомогою К-рядів Фур'є.

Тепер перейдемо до розгляду модельної крайової задачі вигляду

$$-\frac{d^2}{dx^2}\bar{u} = \bar{f}(x), \tag{29}$$

$$\bar{u}\Big|_{x=-1} = u^-, \bar{u}\Big|_{x=1} = u^+. \tag{30}$$

Подамо праву частину рівняння (29) у вигляді дискретного К-ряду Фур'є

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i^f \dot{K}_i(x) + \sum_{s=1}^{2} \bar{c}_s^f \overline{P}'_{N+s}(x) + R_N(f), \tag{31}$$

де $R_N(f)$ залишковий член,

$$c_i^f = \int_{-1}^{1} f(x)\dot{K}_i(x)dx,\ \bar{c}_i^f = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{P}'_{N+s}(x)dx. \tag{32}$$

Наближений розв'язок крайової задачі (29), (30) подамо у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} \dot{c}_i^u \dot{K}_i(x) + \frac{u^+ - u^-}{2}x + \frac{u^+ + u^-}{2}. \tag{33}$$

Відразу зазначимо, що многочлен (33) задовольняє крайові умови (30). Тому, числа $\dot{c}_i^u$ виберемо із необхідності задовольнити наближено рівняння (29).

Підставимо (31) і (33) в (29) і отримаємо співвідношення вигляду

$$-\partial_{xx}\sum_{i=1}^{N}\dot{c}_i^u \dot{K}_i(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i^f \dot{K}_i(x)+\sum_{s=1}^{2}\bar{c}_s^f\,\overline{P}_{N+s}'(x)+R_N(f). \tag{34}$$

Тепер скористаємось основною властивістю квазіспектральних многочленів (1) і отримаємо

$$\sum_{i=1}^{N}\overline{\lambda}_i\dot{c}_i^u \dot{K}_i(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i^f \dot{K}_i(x)+\varepsilon_N\,, \tag{35}$$

де

$$\varepsilon_N=\varepsilon_N(x)=\sum_{s=1}^{2}\bar{c}_i^f\,\overline{P}_{N+s}'(x)+R_N(f). \tag{36}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових многочленах в (35) і ігноруючи нев'язку ε_N отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\overline{\lambda}_i c_i^u=c_i^f\,,i=1,\ldots,N\,. \tag{37}$$

Таким чином, числа $\dot{c}_i^u$ визначені нами через відомі числа c_i^f і отже, многочлен (33) ми визначили повністю.

Сформулюємо отриманий результат.

Твердження 2. Якщо, права частина рівняння (29) має подання (31), то для многочлена

$$u_N(x)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i c_i^f \dot{K}_i(x)+\frac{u^{+}-u^{-}}{2}x+\frac{u^{+}+u^{-}}{2} \tag{38}$$

нев'язка (різниця між лівою і правою частинами рівняння (29)) подається у вигляді (36).

Припустимо, що крайові умови (30) однорідні, тобто $u^{-}=u^{+}=0$. В цьому випадку (38) зведеться до вигляду

$$u(x)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i c_i^f \dot{K}_i(x). \tag{39}$$

Інтегруючи за частинами і використовуючи рівняння (29), отримаємо

$$c_i^f=\int_{-1}^{1}f(x)\dot{K}_i(x)dx=-\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{dx^2}u\dot{K}_i(x)dx=$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}u\right)\left(\frac{d}{dx}\dot{K}_i(x)\right)dx=-\int_{-1}^{1}u\frac{d^2}{dx^2}\dot{K}_i(x)dx \tag{40}$$

Використавши основну рівність для квазіспектральних многочленів (1), отримаємо

$$c_i^f=\int_{-1}^{1}u\left(\overline{\lambda}_i\dot{K}_i+\overline{\tau}_i\overline{P}_{N+s}'\right)dx=\overline{\lambda}_i c_i^u+\overline{\tau}_i\bar{c}_s^u \tag{41}$$

де

$$c_i^u=\int_{-1}^{1}u(x)\dot{K}_i(x)dx,\bar{c}_i^u=\int_{-1}^{1}u(x)\overline{P}_{N+s}'(x)dx\,, \tag{42}$$

$s=1$ при непарних i та $s=2$ при парних i.

Враховуючи, що u задовольняє однорідні крайові умови, отримаємо

$$\bar{c}_s^u = \int_{-1}^{1} u(x)\bar{P}'_{N+s}(x)dx = -\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}u\bar{P}_{N+s}(x)dx =$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(N+s)(N+s+1)}}\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}uP_{N+s}(x)dx. \quad (43)$$

Враховуючи, що коефіцієнти ряду Фур'є-Лежандра функції $u'=\partial_x u$ дорівнюють

$$c_j^{u'} = \sqrt{\frac{2j+1}{2}}\int_{-1}^{1}u'P_j(x)dx,\ j=1,2,\ldots \quad (44)$$

із співвідношення (43) отримаємо

$$\bar{c}_s^u = -\sqrt{\frac{2}{(N+s)(N+s+1)(2(N+s+1)+1)}}c_{N+s}^{u'}. \quad (45)$$

Підставляючи (41) в (39) будемо мати

$$u(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i^u\dot{K}_i(x)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\bar{\tau}_i\bar{c}_{\pi(i)}^u\dot{K}_i(x) \quad (46)$$

Із (46) маємо, що якщо u є многочленом, який перетворюється в нуль на кінцях проміжка $[-1,1]$ і степінь якого не перевищує $N+1$, то коефіцієнти (44) дорівнюють нулеві. Тому, для такого u другий доданок в (46) дорівнюватиме нулеві. А, якщо врахувати першу формулу в (42), то отримаємо, що в цьому випадку (46) є відрізком ряду Фур'є за многочленами $\{\dot{K}_i\}$. Звідси отримуємо

Твердження 3. Якщо точний розв'язок задачі (29), (30) є многочленом степеня не вище $N+1$, то він співпадає з наближеним розв'язком (38).

Значення цього твердження полягає в тому, що на основі його можна точно відновити многочлен за його відрізком К-ряду Фур'є другої похідної і крайовими умовами першого роду. Зазначимо, що при цьому використовуються не всі члени К-ряду Фур'є функції $\frac{d^2}{dx^2}u$, так як коефіцієнти $\bar{c}_s^f$ не використовуються. Якщо точний розв'язок задачі (29),(30) не є многочленом, то формулу (38) можна розглядати як наближену. Якість апроксимації за допомогою цієї формули буде роглянуто нижче (п. 7).

Із (46) і (42) слідує, що наближений розв'язок (38) у випадку однорідних умов, взагалі кажучи, не є відрізком ряду Фур'є-Лежандра точного розв'язку $\bar{u}$ задачі (29),(30), розглядуваного як елемент простору $L_2[-1,1]$, проте є відрізком ряду Фур'є в деякому іншому гільбертовому просторі (див. п.6).

А зараз зупинимося на питаннях стійкості наближених розв'язків.

5. Стійкість розв'язків дискретної задачі.

Розглянемо оператор

$$\dot{\partial}_{xx}^N : \dot{\mathrm{M}}^N[-1,1] \to \dot{\mathrm{M}}^N[-1,1], \quad (47)$$

що є добутком операторів $\dot{\partial}_{xx}^N = \dot{\pi}^N \frac{d^2}{dx^2}$, де

$$\dot{\pi}^N : \mathrm{M}^N[-1,1] \to \dot{\mathrm{M}}^N[-1,1] \quad (48)$$

ортогональний проектор. Із співвідношення (1) слідує, що

$$\dot{\partial}_{xx}^N\dot{K}_i = \bar{\lambda}_i\dot{K}_i. \quad (49)$$

Із (1) легко знаходимо норму оператора (47). Вона дорівнює

$$\left\|\dot{\partial}_{xx}^N\right\| = \max_{p\in\dot{\mathrm{M}}^N[-1,1]}\frac{\left(\dot{\partial}_{xx}^N p,p\right)}{(p,p)} = \max_i\sqrt{\bar{\lambda}_i} = \sqrt{\bar{\lambda}_N}, \quad (50)$$

вважаючи, що власні числа оператора (47) розміщені по зростанню.

Обернений до (47) оператор позначимо через j_{xx}^N. Його норма дорівнює

$$\left\| j_{xx}^N \right\| = \max_i \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\overline{\lambda}_1}}, \tag{51}$$

враховуючи (13).

Тепер розглянемо рівняння

$$-\dot{\partial}_{xx}^N \dot{u} = \dot{f}\left(\dot{u}, \dot{f} \in \dot{M}^N[-1,1]\right). \tag{52}$$

Його розв'язок задовольняє нерівність вигляду

$$\|\dot{u}\| \le \sqrt{\lambda_1}\left\|\dot{f}\right\|. \tag{53}$$

Зауваження. Нерівність (53) гарантує стійкість розв'язків дискретної задачі (52), тобто неперервну залежність розв'язків рівняння (52) від правої частини цього ж рівняння відносно L_2-норми.

6. К-ряди Фур'є в просторах функцій.

Через $\dot{C}^m[a,b]$ позначимо простір m раз неперервно диференційованих функцій, які перетворюються в нуль на кінцях проміжку $[a,b]$. Для довільних двох функцій цього простору визначимо скалярний добуток за формулою

$$[u,v] = \int_a^b \frac{d}{dx}u(x)\frac{d}{dx}v(x)dx. \tag{54}$$

Поповнюючи стандартним чином даний простір, наприклад, при $m=1$, відносно метрики $[.]=\sqrt{[.,.]}$ отримаємо соболевський простір $\dot{W}_2^1[a,b]$ із скалярним добутком (54).

Через $\dot{W}_2^m = \dot{W}_2^m[a,b]$ позначимо повний нормований простір, норма в якому визначається за формулою

$$\|u\|_{\dot{W}_2^m}^2 = \int_a^b \left(\frac{d^m}{dx^m}u\right)^2 dx.$$

Твердження 4. Для довільної функції $g = g(x) \in \dot{W}_2^1[-1,1]$ відрізок ряду Фур'є відносно скалярного добутку (54) за квазіспектральними многочленами $\dot{K}_i$ має вигляд

$$\dot{S}_N(g) = g_N = \sum_{i=1}^N \overline{\lambda}_i^{-1} c_i^g \dot{K}_i, \; c_i^g = \left[g, \dot{K}_i\right], \tag{55}$$

відповідний відрізок ряду Фур'є в просторі $L_2[-1,1]$ за квазіспектральними многочленами K_i першої похідної цієї функції має вигляд

$$\overline{S}_N(\partial_x g) = \frac{d}{dx}\dot{S}_N(g) = \frac{d}{dx}g_N = \sum_{i=1}^N \overline{\lambda}_i^{-\frac{1}{2}} c_i^g K_i, \tag{56}$$

тобто многочлен (56) отримується шляхом диференціювання многочлена (55), і, нарешті, відрізок ряду Фур'є в просторі $L_2[-1,1]$ за квазіспектральними многочленами $\dot{K}_i$ другої похідної цієї функції дорівнює

$$S_N\left(\frac{d^2}{dx^2}g\right) = -\sum_{i=1}^N c_i^g \dot{K}_i. \tag{57}$$

Доведення. Використовуючи формули (5), отримаємо рівності

$$\sqrt{\overline{\lambda}_i}\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}g(x)K_i(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}\dot{K}_i(x)dx = -\int_{-1}^1 \frac{d^2}{dx^2}g(x)\dot{K}_i(x)dx. \tag{58}$$

При отриманні другої рівності в (58) ми використали інтегрування за частинами. Щоб отримати подання (55)-(57) скористаємося означенням коефіцієнтів Фур'є.

Зауваження. Отримане твердження дозволяє зводити проблеми наближення за допомогою одного з рядів Фур'є до таких же проблем для іншого ряду Фур'є, що буде нижче продемонстровано. З практичної точки зору надзвичайно важливим є те, що знаючи один з цих відрізків ряду Фур'є, можна знайти інший. Так наприклад, якщо відома друга похідна функції, що перетворюється в нуль на кінцях проміжку, то можна знайти відрізок ряду Фур'є (57), а потім відрізок ряду Фур'є (55) для самої функції. Іншими словами, таким чином можна знайти розв'язок крайової задачі (29), (30) у випадку однорідних крайових умов і його дає формула (39).

Твердження 5. Для довільного многочлена $u \in M^N$ мають місце подання вигляду.

$$u = \dot{S}_N(u) + \frac{u(1) - u(-1)}{2}x + \frac{u(1) + (-1)}{2}, \qquad (59)$$

$$\frac{d}{dx}u = \bar{S}_N\left(\frac{d}{dx}u\right) + \frac{u(1) - u(-1)}{2}. \qquad (60)$$

причому,

$$\frac{d}{dx}\dot{S}_N(u) = \bar{S}_N(\frac{d}{dx}u). \qquad (61)$$

Доведення. Многочлен $\frac{d}{dx}u$ можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dx}u = \sum_{i=0}^{N} c_i K_i = c_0 K_0 + \bar{S}_N u .$$

Інтегруючи це подання в межах від -1 до 1, отримаємо вигляд другого доданка в формулі (60). Для отримання формули (59) потрібно замінити x на x_1 в (60), проінтегрувати отриману рівність по x_1 в межах від -1 до x і скористатись попереднім твердженням.

Із твердження 5 слідує

Наслідок. Якщо функція $u = u(x), x \in [-1,1]$ лінійна, то $\dot{S}_N(u) = 0$.

7. Порядок апроксимації розв'язків модельної крайової задачі К-рядами Фур'є.

Твердження 6. Для норми невизначеного інтеграла від довільної функції $p \in L_2[-1,1]$, яку можна подати у вигляді

$$p = \sum_{i=n+1}^{\infty} \tilde{p}_i P_i(x), n = 0,1,\dots, \qquad (61)$$

має місце нерівність вигляду

$$\left\|\int_{-1}^{x} p(x_1)dx_1\right\|_{L_2[-1,1]} \le \sqrt{\frac{4}{(2n+1)(2n+5)}}\|p\|_{L_2[-1,1]}. \qquad (62)$$

Доведення. Із формул інтегрування многочленів Лежандра слідують нерівності

$$\left\|\int_{-1}^{x} p(x_1)dx_1\right\| = \left\|\int_{-1}^{x}(\sum_{i=n+1}^{\infty}\tilde{p}_i P_i(x))dx_1\right\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\tilde{p}_i\int_{-1}^{x}P_i(x_1)dx_1\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\tilde{p}_i\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2i+1}\right\| = \left\|\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{\tilde{p}_{i-1}}{2i-1} - \frac{\tilde{p}_{i+1}}{2i+3}\right)P_i\right\| = \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty}\frac{2}{2i+1}\left(\frac{\tilde{p}_{i-1}}{2i-1} - \frac{\tilde{p}_{i+1}}{2i+3}\right)^2}$$

Тут покладено $\tilde{p}_n = 0$. Застосувавши елементарну нерівність $(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$ отримаємо, що

$$\left\|\int_{-1}^{x} p(x_1)dx_1\right\|^2 \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{8}{(2i-1)(2i+1)(2i+3)}(\tilde{p}_i)^2 \le$$

$$\frac{4}{(2n+1)(2n+5)}\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{2i+1}(p_i)^2 = \frac{4}{(2n+1)(2n+5)}\|p\|^2.$$

Твердження 7. Для довільної функції $u \in W_2^m$, $m \ge 1$ має місце нерівність вигляду

$$E_n(u) \le \frac{1}{(n+1)} E_{n-1}\left(\frac{d}{dx}u\right), \tag{63}$$

де $E_n(u) = \min\limits_{p \in \mathrm{M}^n} \|u - p\|_{L_2[-1,1]}$.

Доведення. Через q позначимо многочлен найкращого наближення функції $\frac{d}{dx}u$, тобто такий, що $E_n\left(\frac{d}{dx}u\right) = \left\|\frac{d}{dx}u - q\right\|$. Цей многочлен є частковою сумою ряду Фур'є-Лежандра і для нього залишок $p = \frac{d}{dx}u - q$ запишеться у вигляді (61). Тоді, на підставі попереднього твердження

$$\left\|u - \left(u(-1) + \int_{-1}^{x} q(s)ds\right)\right\| \le \left\|\int_{-1}^{x}\left(\frac{d}{dx}u - q\right)(s)ds\right\| \le \frac{1}{(n+1)}\left\|\frac{d}{dx}u - q\right\|.$$

З останньої нерівності слідує дане твердження.

Твердження. 8. Нехай $u \in W^m[-1,1]$. Якщо $n > m$, то для найкращого многочленного наближення в просторі $L_2[-1,1]$ має місце оцінка

$$E_n(u) \le C_m \frac{1}{(n+1)^m}\left\|\frac{d^m}{dx^m}u\right\|, \tag{64}$$

де $C_m = m^m / m!$.

Доведення. Шляхом послідовного застосування нерівності (61) отримаємо нерівність вигляду $E_n(u) \le \frac{1}{(n+1)n\cdots(n-m+2)} E_{n-m}\left(\frac{d^m}{dx^m}u\right)$. Використаємо елементарну нерівність $\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-m+1)} \le \frac{m^m}{m!}\frac{1}{n^m}$, а також очевидну нерівність $E_{n-m}\left(\frac{d^m}{dx^m}u\right) \le \left\|\frac{d^m}{dx^m}u\right\|$. і, отримаємо дане твердження.

Твердження 9. Якщо $u \in W_2^n[-1,1]$, то для найкращого многочленного наближення в просторі $L_2[-1,1]$ має місце оцінка

$$E_n(u) \le \frac{1}{(n+1)!}\left\|\frac{d^m}{dx^m}u\right\|. \tag{65}$$

Доведення. Дане твердження отримується аналогічно до попереднього.

Отримані твердження шляхом лінійної заміни легко переносяться на довільний проміжок $[a,b]$. Зокрема, має місце твердження.

Твердження 10. Нехай $u \in W_2^m[a,b]$. Якщо $n+1 \ge m$, то для найкращого многочленного наближення в просторі $L_2[a,b]$ має місце оцінка

$$E_n(u) \le \frac{(b-a)^m}{(n+1)n\cdots(n-m+2)2^m}\left\|\frac{d^m}{dx^m}u\right\|, \tag{66}$$

і, зокрема, при $m=n+1$

$$E_n(u) \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}}\left\|\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u\right\|. \tag{67}$$

Зауваження. Можна розглядати оцінки (66), (67) як похибки для часткових сум ряду Фур'є-Лежандра. Вважаємо за потрібне відмітити, що останні оцінки дають порядок похибки при наближенні диференційованих функцій як відносно довжини даного проміжку, так і відносно степеня многочленів, якими ми наближаємо. При цьому вказано конкретні значення констант. Відмітимо також, що у випадку розглядуваних задач часто $m=2$.

Твердження 11. Нехай $\bar{u}_N \in \mathrm{M}^N[a,b]$ многочлен степеня $\le N+1$, який інтерполює функцію u в кінцевих точках відрізка $[-1,1]$, а $\dot{u}_N = \dot{S}_N(u-\bar{u}_N) \in \dot{\mathrm{M}}^N[a,b]$ відрізок ряду Фур'є за квазіспектральними многочленами $\dot{K}_i$ функції $u-\bar{u}_N \in \dot{W}_2^m[a,b]$ відносно скалярного добутку (56). Для відхилення многочлена $u_N = \bar{u}_N + \dot{u}_N$ від функції u має місце оцінка

$$\|u-u_N\| \le \frac{(b-a)^m}{(N+2)(N+1)\cdots(N-m+3)2^m}\left\|\frac{d^m}{dx^m}u\right\|, \tag{68}$$

$$E_N\left(\frac{d}{dx}u\right) = \left\|\frac{d}{dx}u - \frac{d}{dx}u_N\right\| \le \frac{(b-a)^{m-1}}{(N+1)\cdots(N-m+2)2^{m+1}}\left\|\frac{d^m}{dx^m}u\right\|. \tag{69}$$

Доведення. Доведення проведемо для стандартного відрізка $[-1,1]$. З умови теореми слідує, що функцію $u-u_N$ можна подати у вигляді

$$u-u_N = u-\bar{u}_N - \dot{S}_N(u-\bar{u}_N). \tag{70}$$

На підставі твердження 5 диференціюючи попередню рівність отримаємо

$$\partial_x(u-u_N) = \partial_x(u-\bar{u}_N) - \bar{S}_N(u-\bar{u}_N), \partial_x = \frac{d}{dx},$$

причому функція $\partial_x(u-u_N)$ є ортогональною одиниці.

Оскільки, функція $u-u_N$ перетворюється в нуль в кінцях проміжка $[-1,1]$, то звідси отримуємо рівність

$$u-u_N = \int_{-1}^{x}\left[\partial_s(u-\bar{u}_N) - \bar{S}_N(\partial_s(u-\bar{u}_N))\right](s)ds = \int_{-1}^{x}\left[\pi\partial_s u - \bar{S}_N\partial_s u\right](s)ds, \partial_s = \frac{d}{ds}, \tag{71}$$

де $(\pi f)(x) = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx$. При отриманні останньої рівності ми врахували, що оператор $\bar{S}_N$ взяття часткових сум Фур'є-Лежандра є ортогональним проектором у відповідних просторах функцій.

На підставі твердження 5 із рівності (71) отримуємо нерівність $\|u-u_N\| \le \frac{1}{N+2}E_N(\partial_x u)$. А з останньої і твердження 8 слідує нерівність (68). Попутно ми отримали і оцінку (69).

Твердження 12. Нехай для довільної функції $f \in L_2[-1,1]$ відомо її К-ряд Фур'є, який подається формулами (31), (32), а для функції u, що є розв'язком крайової задачі (29), (30),- її значення в точках $x=\pm 1$. Тоді, для многочлена (38) мають місце нерівності (68), (69).

Доведення. Многочлен u_N поданий формулою із (38) можна подати у вигляді

$$u_N = \dot{u}_N + \bar{u}_N,\ де\ \dot{u}_N = \dot{S}_N(u-\bar{u}_N), \tag{72}$$

а $\bar{u}_N$ многочлен першого степеня, що інтерполює u в точках $x\pm 1$. Для многочлена (72) ми тільки що довели твердження 9. Нам потрібно лише показати, що многочлен (38) є лише явним записом многочлена (72). Із наслідку до твердження 5 слідує, що $\dot{S}_N(\bar{u}_N)=0$. Тоді, підставі твердження 4 многочлен $\dot{u}_n$ співпадає з першим доданком в (38)(див. зауваження до цього твердження). $\bar{u}_N$ співпадає із сумою двох інших доданків в (38), тобто є тією (лінійною) функцією, що інтерполює u в кінцевих точках сегмента $[-1,1]$. Таким чином ми справді довели, що (72) є іншим записом многочлена (38).

Зауваження. Доведене твердження 10 показує, що похідну точного розв'зку задачі (29), (30) ми наближаємо похідною многочлена (33) найкращим чином в квадратичній метриці, а сам розв'язок многочленом (33) майже найкращим чином, особливо з огляду на порядок наближення відносно степеня многочленів чи відносно довжини проміжку.

8. Апроксимація K-сплайнами даних функцій та розв'язків крайових задач.

Введемо рівномірну сітку $x_k=a+kh, h=\dfrac{b-a}{m}, k=0,\ldots,m$ на проміжку $[a,b]$ і назвемо її основною. Для кожного з проміжків $[x_k,x_{k+1}]$ визначимо сітку $x_{kj}=x_k+\dfrac{1+\alpha_j}{2}h$, яку називатимемо допоміжною. При цьому вузли, які не співпадають з вузлами основної сітки, назвемо внутрішніми допоміжної сітки. Значення функції $u\in W_2^r[a,b]$ в вузлах основної і допоміжної сіток будемо позначати через $u_k=u(x_k), u_{kj}=u(x_{kj})$.

Через $p=p(x)$ позначимо сплайн, яким будемо наближати функцію u, а через $z_k=p(x_k)$ його значення в узлах допоміжної сітки. На кожному з проміжків $[x_k,x_{k+1}]$ функцію u будемо наближати за допомогою многочлена вигляду

$$p_k=p_k(s)=\dot{p}_k(s)+\hat{\alpha}(z_{k+1}+z_k)P'_{2n+1}(s)+\hat{\beta}(z_{k+1}-z_k)P'_{2n+2}(s), \tag{73}$$

де

$$s=-1+\frac{2(x-x_k)}{h}, \tag{74}$$

$$\dot{p}_k=\dot{p}_k(s)=\sum_{i=1}^{2n}a_{ki}\dot{K}_i(s), \tag{75}$$

$$\bar{\alpha}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}, \bar{\beta}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}, \tag{76}$$

$$a_k=\dot{Y}\dot{u}_k, a_k=(a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{k,2n}), \dot{u}_k=(u_{k1},u_{k2},\ldots,u_{k,2n+1}). \tag{77}$$

Матрицю $\dot{Y}=\{\dot{Y}_{iq}\}_{i,q=1}^{2n+1}$ ми визначили в (26) і таким чином многочлен (75) є визначеним повністю. Для визначення многочлена (73) залишилось знайти значення $z_k=p(x_k)$ сплайна в вузлах основної сітки. Ці значення ми знайдемо із умов гладкості, які ми запишемо у вигляді

$$Dp_k(-1)-Dp_{k-1}(1)=0, D=\frac{d}{dx}, k=1,\ldots,m-1. \tag{78}$$

Підставимо (73) в (78) і отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Az=(\beta-\alpha)z_{k+1}-2(\alpha+\beta)z_k+(\beta-\alpha)z_{k-1}=-D\dot{p}_k(-1)+D\dot{p}_{k-1}(1), k=1,\ldots,m-1, \tag{79}$$

$$\alpha=\bar{\alpha}P''_{2n+1}(1)=\frac{2n(2n+3)}{8}, \beta=\bar{\beta}P''_{2n+2}(1)=\frac{(2n+1)(2n+4)}{8}. \tag{80}$$

Для простоти, будемо вважати, що значення функції u в крайніх точках відомі (крайові умови) і рівні відповідним значенням сплайна, тобто

$$u(a)=z_0=u_a, u(b)=z_m=u_b. \tag{81}$$

Коли задані значення похідних в кінцевих точках, або крайові умови третього роду, то схема в принципі залишається такою ж. Для оператора заданого в лівій частині (79) у випадку однорідних крайових умов (81) відомі власні числа і власні значення. Так, власні числа дорівнюють

$$\mu_k = -\left(2n^2+4n+1\right)+(n+1)\cos\frac{k\pi}{m}, k=1,\ldots,m-1. \tag{82}$$

Із останнього можна отримати, що розв'язок системи (79) неперервно залежить від правої частини і її можна розв'язувати методом Гауса без вибору ведучого елемента, методом прогонки, дискретним методом Фур'є, використовуючи при цьому метод швидкого перетворення Фур'є. Крім того, звідси і твердження 11 , можна отримати, що побудований сплайн, значення якого обчислюється за формулами (73) дає порядок похибки наближення в метриці $L_2[a,b]$ вигляду

$$\frac{1}{(2n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-r+3)}h^r, \tag{83}$$

якщо функція $u \in W_2^r, r \le 2n+1$.

Тепер покажемо, що многочлени $\dot{p}_k$ можна обчислювати не через значення функції u у внутрішніх вузлах допоміжної сітки, а через значення її другої похідної. З цією метою введемо многочлени $Q_{2n+s} = Q_{2n+s}(x)$ степеня $\le 2n+1$, що визначаються рівностями

$$-\partial_{xx}^N Q_{2n+s} = 0, Q_{2n+s}(-1) = P'_{2n+s}(-1), Q_{2n+s}(1) = P'_{2n+s}(1), s=1,2. \tag{84}$$

Подання (73) перепишемо у вигляді

$$p_k = p_k(s) = \dot{p}_k(s) + \alpha\left(z_{k+1}+z_k\right)Q_{2n+1}(s) + \beta\left(z_{k+1}-z_k\right)Q_{2n+2}(s), \tag{85}$$

де

$$\dot{p}_k = \acute{Y} j_{xx}^N u_k''. \tag{86}$$

а $u_k'' = (u_{k,1}'',\ldots,u_{k,2n}''), u_{k,j}'' = D_{xx}u(x_j)$.

Операція j_{xx}^N означає знаходження наближеного значення функції в вузлах Лобатто за значеннями її другої похідної при однорідних крайових умовах і реалізована з допомогою алгоритму 2 (див. нижче).

Відразу зауважимо, що хоча формула (86) наближена, її точність у даному випадку висока і практично ми отримаємо не гірший результат, порівняно з попереднім випадком. За цією формулою відновлюємо значення функції u в вузлах допоміжної сітки. Для знаходження значень сплайна в вузлах основної сітки (які приблизно дорівнюватимуть відповідним значенням u) отримуємо як і вище систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Bz = (\delta-\chi)z_{k+1} - 2(\delta+\chi)z_k + (\delta-\chi)z_{k-1} = -D\dot{p}_k(-1) + D\dot{p}_{k-1}(1), k=1,\ldots,m-1, \tag{87}$$

де

$$\chi = \overline{\alpha}DQ_{2n+1}(1), \delta = \overline{\beta}DQ_{2n+2}(1). \tag{88}$$

Розв'язавши систему (87), наприклад методом швидкого перетворення Фур'є, ми зможемо на довільному з відрізків $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ відновити функцію $u \in W_2^r[a,b]$ за формулою (85) з найбільш можливою відносно порядку по n, h точністю в квадратичній метриці.

Виявляється, що отриманими результатами можна скористатися для побудови особливо ефективних схем чисельного диференціювання і інтегрування функцій, взявши за основу нерівномірну, але достатньо регулярну сітку, побудовану на основі вузлів, що використовуються в формулі Лобатто. Більше того, можна будувати чисельні схеми для розв'язування диференціальних рівнянь і їх систем, які мають точність 10-го і вищих порядків, аналогічно, як це має місце для схем Рунге-Кутта 10-го і вищих порядків. Подібно до ряду схем Рунге-Кутта, наприклад коллокаційного типу, дані методи відновлюють абсолютно точно многочленні розв'язки до достатньо високого степеня. На наш погляд це не єдині спільні риси цих методів.

9. К-чисельні алгоритми.

9.1. Формули чисельного диференціювання на основі квазіспектральних многочленів.

Покладемо,

$$M_{2i}=\dot{K}_{2i-1}, M_{2i-1}=\dot{K}_{2i}, M_{2n+2}=\overline{P}'_{2n+1}, M_{2n+1}=\overline{P}'_{2n+2}$$

Будемо вважати, що обчислені матриці, елементи яких виражаються за формулами

$$\partial A_{sr}=w_r\sum_{i=1}^{n+1}M_{2i-1,n+r+1}M'_{2i-1,n+s+1},$$

$$\partial B_{sr}=w_r\sum_{i=1}^{n+1}M_{2i,n+r+1}M'_{2i,n+s+1}$$

Алгоритм 1. Для того, щоб обчислити значення першої похідної $\partial u_i=\partial_x u(\alpha_i)$ в вузлах Лоббато, коли відомо значення функції $u_i=u(\alpha_i)$ в цих же вузлах, належить виконати дії

$$u_s^1=\sum_{r=1}^{n+1}\partial A_{sr}(u_{n+r+1}-u_{n-r+1}),\qquad u_s^2=\sum_{r=0}^{n+1}\partial B_{sr}(u_{n+r+1}+u_{n-r+1}),$$

$$\partial u_{n+s+1}=u_s^1+u_s^2, s=0,\dots,n+1,\qquad \partial u_{n-s+1}=u_s^1-u_s^2, s=1,\dots,n+1.$$

Цей результат записуватимемо у вигляді $\partial u=d_{xx}^N u$, де $u=\{u_i\}, \partial u=\{\partial u_i\}, N=2n$.

Даний алгоритм є точним для всіх многочленів, степінь яких не перевищує $2n+1$, і потребує $2(n+1)^2$ операцій множення для знаходження похідної відразу в усіх вузлах. Цю схему називатимемо схемою К-чисельного диференціювання порядку $2n+1$.

9.2. Формули чисельного інтегрування (знаходження первісної).

Будемо вважати, що є відомими слідуючі константи

$$\dot{A}_{sr}=-w_r\sum_{i=1}^{n}\lambda_{2i}\dot{K}_{2i,n+r+1}\dot{K}_{2i,n+s+1},$$

$$\dot{B}_{sr}=-w_r\sum_{i=1}^{n}\lambda_{2i-1}\dot{K}_{2i-1,n-r+1}\dot{K}_{2i-1,n-s+1}.$$

Алгоритм 2. Для того, щоб обчислити значення функції, що перетворюється в кінцях проміжку $[-1,1]$ в нуль, за відомими значеннями другої похідної в цих же вузлах, належить виконати дії

$$u_s^1=\sum_{r=1}^{n}\dot{A}_{sr}(f_{n+r+1}-f_{n-r+1}), s=1,\dots,n, u_s^2=\sum_{r=0}^{n}\dot{B}_{sr}(f_{n+r+1}+f_{n-r+1}), s=0,\dots,n$$

$$u_{n+s+1}=u_s^1+u_s^2, s=0,\dots,n, u_{n-s+1}=-u_s^1+u_s^2, s=1,\dots,n.$$

Цей результат записуватимемо у вигляді $u=j_{xx}^N f$, де $u=\{u_i\}, f=\{f_i\}, N=2n$.

Даний алгоритм є точним для всіх многочленів, степінь яких не перевищує $2n+1$, Тобто

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(j_{xx}^N f\right)\overset{\omega}{=}f, f\in \mathrm{M}^N[-1,1], \qquad (*)$$

де рівність має місце у внутрішніх вузлах, що і позначається значком $\overset{\omega}{=}$. Зауважимо ще раз, що многочлени, степеня не вище $2n+1$, своїми значеннями в вузлах Лобатто визначаються однозначно. Тому, рівність (*) можна розуміти як рівність двох многочленів, а оператор j_{xx}^N розглядати, як такий, що визначений в просторі многочленів. Надалі в таких випадках ми будемо, як правило, опускати знак дискретної рівності.

Алгоритм потребує $(n+1)^2+n^2$ операцій множення для знаходження первісної відразу в усіх вузлах. Цю схему ми називатимемо К-методом чисельного інтегрування порядку $2n+1$. На відміну від класичних схем тут похідна знаходиться відразу в усіх вузлах сітки Лобатто.

Зазначимо, що многочлен (84) визначається також рівністю

$$Q_{2n+1}(x)\overset{\omega}{=}P'_{N+s}(x)-j_{xx}^{N}\frac{d^2}{dx^2}P'_{N+s}(x),$$

оскільки многочлен своїми значеннями в вузлах Лобатто визначається повністю.

9.3. Обчислення похідної від первісної.

Знову вважаємо, що відомі слідуючі абсолютні константи

$$\dot{A}_{sr}^{1}=-w_r\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_{2i}}\dot{K}_{2i,n+r+1}K_{2i,n+s+1},$$

$$\dot{B}_{sr}^{1}=-w_r\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_{2i-1}}\dot{K}_{2i-1,n-r+1}K_{2i-1,n-s+1}.$$

Алгоритм 3. Для того, щоб обчислити значення похідної функції, що перетворюється в кінцях проміжку $[-1,1]$ в нуль, за відомими значеннями її другої похідної, належить виконати дії

$$u_s^1=\sum_{r=1}^{n+1}\dot{A}_{sr}^{1}(f_{n+r+1}-f_{n-r+1}),s=1,\ldots,n+1,\quad u_s^2=\sum_{r=0}^{n+1}\dot{B}_{sr}^{1}(f_{n+r+1}+f_{n-r+1}),s=0,\ldots,n+1,$$

$$u_{n+s+1}=u_s^1+u_s^2,s=0,\ldots,n+1,\qquad u_{n-s+1}=u_s^1-u_s^2,s=1,\ldots,n+1.$$

Цей результат записуватимемо у вигляді $u=\partial j_{xx}^{N}f$, де $u=\{u_i\},f=\{f_i\},N=2n$.

Даний алгоритм є точним для всіх многочленів, степінь яких не перевищує $2n+1$, і потребує $(n+1)^2+(n+2)^2$ операцій множення для знаходження похідної первісної 2-го порядку відразу в усіх вузлах. Цю схему ми називатимемо К-методом чисельного знаходження похідної первісної порядку $2n+1$ і позначатимемо через ∂j_{xx}^{N}.

9.4. Комбіноване обчислення первісної та її похідної.

Алгоритм 4. Нехай функція $u=u(x),x\in[-1,1]$ перетворюється в нуль в кінцевих точках проміжку $[-1,1]$. Для того, щоб обчислити значення функції $u_i=u(\alpha_i),i=1,\ldots,2n+1$ у внутрішніх вузлах, а її похідних $u_0=D_xu(-1),u_{2n+2}=D_xu(1)$ в крайніх вузлах Лобатто за відомими значеннями другої похідної в цих же вузлах, належить виконати дії

$$u_s^1=\sum_{r=1}^{n}A_{sr}(f_{n+r+1}-f_{n-r+1}),s=1,\ldots,n,\ u_s^2=\sum_{r=0}^{n}B_{sr}(f_{n+r+1}+f_{n-r+1}),s=0,\ldots,n$$

$$u_{n+1}^1=\sum_{r=1}^{n+1}\dot{A}_{n+1,r}^{1}(f_{n+r+1}-f_{n-r+1}),u_{n+1}^2=\sum_{r=0}^{n+1}\dot{B}_{n+1,r}^{1}(f_{n+r+1}+f_{n-r+1})$$

$$u_{n+s+1}=u_s^1+u_s^2,s=0,\ldots,n+1,u_{n-s+1}=-u_s^1+u_s^2,s=1,\ldots,n,\ u_0=u_{n+1}^1-u_{n+1}^2$$

Цей результат записуватимемо у вигляді $u=\tilde{j}_{xx}^{N}f$, де $u=\{u_i\},f=\{f_i\},N=2n$.

Даний алгоритм є точним для всіх многочленів, степінь яких не перевищує $2n+1$, і потребує $2(n+1)^2+2$ операцій інтегрування. Цю схему ми називатимемо схемою $\tilde{j}_{xx}^{N}$ інтегрування порядку $2n+1$.

10. К-чисельні схеми для крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь.

Покажемо, як отримані чисельні схеми можна застосувати до розв'язування крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь і систем таких рівнянь.

Розглянемо крайову задачу

$$-\frac{d^2}{dx^2}u = f(x,u,\frac{d}{dx}u), u(a) = u_a, u(b) = u_b, u = u(x), x \in [a,b], \tag{89}$$

і припустимо, що вона має єдиний розв'язок.

Алгоритм 5. Щоб знайти наближені значення $z_i = u(x_i)$ точного розв'язку в вузлах основної сітки $x_i = a+ih, h=(b-a)/m, i=0,\ldots,m$ належить виконати дії

$$(1).\ f_k^{\nu} = \left\{f_{kj}^{\nu}\right\} = \left\{f\left(x_{kj}, u_{kj}^{\nu-1}, \partial u_{kj}^{\nu-1}\right)\right\}_{j=1}^{2n+1}, k=0,\ldots,m-1, \tag{90}$$

$$(2).\ u_k^{\nu} = -\bar{j}_{xx}^{N} f_k^{\nu}, u_k^{\nu} = (u_{k,0}^{\nu}, \dot{u}_k^{\nu}, u_{k,2n+2}^{\nu}), k=0,\ldots,m-1, \tag{91}$$

$$(3).\ b_k^{\nu} = u_{k,0}^{\nu} - u_{k-1,2n+2}^{\nu}, k=1,\ldots,m-1, \tag{92}$$

$$(4).\ Bz^{\nu} = b^{\nu}, z^{\nu} = \left\{z_k^{\nu}\right\}_{k=0}^{m}, z_0^{\nu} = u_a, z_m^{\nu} = u_b,, \tag{93}$$

$$(5).\ \begin{array}{l} u_{k,j}^{\nu} = \dot{u}_{k,j}^{\nu} + \overline{\alpha}(z_{k+1}^{\nu} + z_k^{\nu})Q_{2n,j} + \overline{\beta}(z_{k+1}^{\nu} - z_k^{\nu})Q_{2n+1,j}, \\ j=1,\ldots,2n+1, k=0,\ldots,m-1 \end{array} \tag{94}$$

$$(6).\ \partial u_k^{\nu} = d_{xx}^{N} u_k^{\nu}, \partial u_k^{\nu} = \left\{\partial u_{k,j}^{\nu}\right\}_{j=0}^{2n+2}, k=0,\ldots,m-1 \tag{95}$$

для $\nu=1,2,\ldots$ Процес (91)-(96) слід завершувати після досягнення потрібної точності $\varepsilon>0$ і покласти $z_k = z_k^{\nu}, k=1,\ldots,m-1$, якщо, наприклад, $d = \max_k \left|z_k^{\nu} - z_k^{\nu-1}\right| < \varepsilon$. Через $J_{N,m}$ позначимо одну ітерацію даного алгориму, тобто

$$(u^{\nu}, \partial u^{\nu}) = J_{N,m}(u^{\nu-1}, \partial u^{\nu-1}), N=2n. \tag{96}$$

Зробимо пояснення до кожного пункту даного алгоритму.

(1). На основі наближених значень розв'язку і його похідної в вузлах допоміжної сітки обчислюється права частина рівняння (89) в $(N+3)m$ точках допоміжної сітки.

(2). Застосовується алгоритм 4 чисельного інтегрування, що вимагає $(N+2)^2/2$ операцій множення.

(3). Формується права частина системи лінійних алгебраїчних рівнянь (87).

(4). Методом прогонки, або швидкого перетворення Фур'є розв'язується система із $m-1$ лінійних алгебраїчних рівнянь (87) з тридіагональною матрицею і знаходяться наближені значення невідомого розв'язку в вузлах основної сітки на ν-ій ітерації.

(5). Обчислюються наближені значення розв'язку крайової задачі в узлах допоміжної сітки на ν-ій ітерації.

(6). Обчислюються значення першої похідної розв'язку крайової задачі в узлах допоміжної сітки на ν-ій ітерації, користуючись алгоритмом К-чисельного диференціювання. Після цього, якщо необхідна точність не є досягнута, то повертаємось до пункту (1) алгоритму.

11. Висновки.

Зауважимо, що використовуючи алгоритм 5 можна легко побудувати К-сплайн (85), для чого потрібно мати значення функції, що наближається, в узлах допоміжної сітки.

Незначними уточненнями алгоритм 5 легко модифікується таким чином, щоб за його допомогою можна було розв'язувати крайові задачі з крайовими умовами другого і навіть третього роду. В цьому випадку практично зміниться лише перше і останнє рівняння лінійної системи алгебраїчних рівнянь (87).

Зазначимо, що схему алгоритму 5 можна застосовувати для розв'язування крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. В роботах [4-5] подібні алгоритми застосовуються для розв'язування задачі Діріхле для еліптичних рівнянь.

З практичної точки зору важливим є те, що незначними зусиллями алгоритм 5 легко перенести на випадок крайових задач вигляду

$$-\frac{d^2}{dx^2}u + cu = f(x,u), u(a) = u_a, u(b) = u_b, u = u(x), \tag{97}$$

де c деяке число і навіть більше того, на випадок, коли $c = c(x)$ є функцією змінної x, що значно розширить сферу застосування даного алгоритму.

В даній роботі продемонстровано використання одного класу спеціальних функцій, що є многочленами, які ортогональні разом із своїми похідними, з метою многочленного і кусково-многочленного наближення розв'язків крайових задач. При цьому, встановлено ряд важливих оцінок для многочленного наближення розв'язків рядами Фур'є за квазіспектральними многочленами та показано як отримуються схеми обчислення на нерегулярних сітках, породжених квадратурами Лобатто.

1. *Дзядык В.К.* Апроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнсний.- Киев: Наукова думка, 1998.- 350с.
2. *Янчук П.С.* Аппроксимационный метод для эллиптических и параболических уравнений // Тр. Мат. Ин-та АН СССР.- 1987.- 180.- С.237-238.
3. *Янчук П.С.* Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов.- Киев: Ин-т математики.- 1989.- С.112-121.
4. *Янчук П.С.* Многочленно-сітковий спосіб наближеного розв'язування крайових задач // Волинський математичний вісник.- Вип. 3.- 1996.- С.139-145.
5. *Янчук П.С.* Апроксимаційно-ітеративні схеми кусково-многочленного наближення // Волинський математичний вісник.- Вип. 2.- 1995.- С.184.-187.
6. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.- М.: Мир, 1990.- 512 с.
7. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений.- М.: Мир, 1988.- 334 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Янчук П.С. КВАЗИСПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ // *Исследуется вопрос о построении вычислительных схем, предназначенных для машинного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для их построения использованы так называемые квазиспектральные многочлены (К-многочлены) и квадратурные формулы Лобатто. Основными агрегатами приближения являются алгебраические многочлены и сплайны. В работе изучаются проблемы аппроксимации и стойкости, а также сформулированы алгоритмы, предназначенные для реализации построенных вычислительных схем.*

Janchuk P.S. QUASISPECTRAL POLYNOMIALS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS // *The problem of the construction of the computing schemes intended for a machine solution of boundary value problems for the ordinary differential equations is investigated. For their construction so-called quasispectral polynomials (K-polynomial) and quadrature formulas Lobatto are used. Basic aggregates of an approximation are the algebraic polynomials and splines. In the paper the problems of approximation and stability are studied, and also the algorithms intended for the realization of the constructed computing schemes are formulated.*