

МО України
Рівненський державний педагогічний інститут

Рівненське відділення АН ВШ України

Рівненська та Волинська регіональні організації
Українського математичного товариства

Волинський математичний вісник

(Матеріали школи-семінару “Прикладні проблеми
математики та інформатики”,
1-4 лютого 1996 р., м. Рівне)

ВИП. 2

Рівне 1995

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної і прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

Редакційна колегія:

В. Ю. Слюсарчук (головний редактор),
А. Я. Бомба (відповідальний за випуск),
В. О. Вальковський, М. М. Войтович,
В. Й. Горбайчук, В. В. Ковтунець,
І. В. Коробчук, А. О. Сяський, Г. П. Хома.

Видається один раз у рік з 1994р. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.95р. Засновники: А. Я. Бомба (голова Рівненського регіонального відділення Українського математичного товариства), В. В. Ковтунець (член правління Українського математичного товариства), В. Ю. Слюсарчук (головний редактор "Волинського математичного вісника").

При виданні матеріалів школи-семінару редакція вирішила не брати на себе право істотного редагування підготовлених авторами текстів.

Редакція приймає статті лише після оголошення математичним товариством чергового набору вісника. Контактні телефони:
26-04-44, 26-26-97.

с Українське математичне товариство (Рівненська регіональна організація).

Зміст

| | |
|---|----|
| 1. Антонова Т. М. Один одновимірний аналог теореми про рівномірну просту параболічну область збіжності ланцюгових дробів. | 6 |
| 2. Бартіш М. Я., Чипурко А. І. Про один метод розв'язування задачі про найменші квадрати. | 9 |
| 3. Бернакевич І. Є. Чисельне розв'язування початково-крайових задач акустики. | 12 |
| 4. Боднар Д. І., Дубиняк О. С. Розвинення відношення функції Аппеля в гіллясті ланцюгові дроби. | 15 |
| 5. Бомба А. Я., Каштан С. С., Михальчук В. В. Про наближений метод конформних відображень розв'язування одного класу крайових задач. | 18 |
| 6. Бомба А. Я., Хлапук М. М., Сидорчук Б. П. Про моделювання і розв'язання одного класу локально збурених нелінійних задач. | 22 |
| 7. Бомба А. Я., Щодро О. Є., Барановський С. В. Про моделювання і дослідження сингулярно збурених дифузійних процесів в контрастних середовищах. | 25 |
| 8. Вагін П. П., Пука Є. О., Шинкаренко Г. А. Підсистема накопичення інформації для ведення моніторингу земельних ресурсів. | 28 |
| 9. Вальковський В. О., Курбацький О. М., Фарід Т. М. Формалізація і оптимізація процесів документообігу засобами схем потоків даних. | 31 |
| 10. Вальковський В. О., Зербіно Д. Д. Організація асинхронного управління процесом розподіленої обробки інформації. | 34 |
| 11. Вальковський В. О. Аксиоматика і синтез програм для одного класу систем реального часу. | 38 |
| 12. Вовк В. Д., Голуб В. М., Дубовик А. В., Копитко М. Ф. Інформаційна система "Землевласники і землекористувачі Львівщини". | 40 |
| 13. Герасимик Т. М., Данько О. І., Малашнік О. П., Шинкаренко Г. А. Чисельне розв'язування варіаційних задач п'єзоелектрики. | 43 |
| 14. Герасименко В. І., Сташенко М. О. Кінетична границя рівноважних станів. | 46 |
| 15. Гоєнко Н. П. Алгоритм розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли в гіллястий ланцюговий дріб. | 49 |
| 16. Горбайчук В. Я., Піддубний О. М. Теореми типу Харді-Літтлвуда при додаткових умовах на задані величини. Граничні властивості. | 52 |
| 17. Городецький В. В., Готинчан Т. І. Властивість локалізації для лінійних методів сумування формальних рядів Фур'є-Ерміта та Фур'є-Лагерра. | 55 |
| 18. Готинчан Г. І., Ясинський В. К. Теорема існування та єдиності розв'язку для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь. | 58 |
| 19. Дейнека О. Ю. Обмежені розв'язки крайових задач для систем гіперболічних рівнянь. | 61 |
| 20. Демчик І. І. Узагальнена математична модель процесів магнітного фільтрування та її розв'язки. | 64 |
| 21. Дияк І. І., Головач Н. П. Застосування прямого методу граничних елементів для чисельного дослідження деяких прикладних задач. | 67 |
| 22. Дияк І. І., Макар В. М. Чисельне дослідження динамічної за- | |

| | |
|---|-----|
| дачі теорії пружності для анізотропних тіл. | 70 |
| 23. Іванова Н. В. Дослідження пружної рівноваги пластинок складної форми методом довільних кривих. | 73 |
| 24. Івасишєв С. Д., Дронь В. С. Деякі властивості фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. | 76 |
| 25. Івасишин А. М. Про властивості класичних розв'язків одного класу загальних еліптичних систем рівнянь. | 79 |
| 26. Іваськевич М. І. Розв'язування одного варіанту задачі нестационарних коливань. | 82 |
| 27. Зербіно Д. Д. Ралізація двійкової арифметики засобами клітинних автоматів. | 84 |
| 28. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Сохан П. А. Задача Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними безмежного порядку. | 87 |
| 29. Ковтунець В. В., Лотюк Ю. Г. Побудова многочлена найкращого рівномірного наближення розв'язку одного диференціального рівняння. | 90 |
| 30. Козаревська Ю. С., Шинкаренко Г. А. Скінченно-елементні апроксимації Ерміта для одновимірних задач міграції домішок. | 93 |
| 31. Койфман Ч. Н. Математична модель взаємодії середовищ з тонкими прошарками. | 96 |
| 32. Колупаєв Б. С., Борджік М. А., Гусаковський С. М. Математичне моделювання процесів перенесення теплової енергії в гетерогенних системах на основі лінійних аморфних полімерів. | 99 |
| 33. Конєт І. М., Ленюк М. П. Нестационарні температурні поля в кусковооднорідних парашутних просторах. | 104 |
| 34. Крайчук О. В. Групи з умовою мінімальності для підгруп нескінченного індексу. | 107 |
| 35. Кузьменко А. П., Бомба А. Я., Савчук Я. Р., Ковальчук О. В. Про метод Р-трансформації розв'язання одного класу крайових задач з розривними коефіцієнтами. | 110 |
| 36. Кузьменко А. П., Гладка О. М. Розв'язок крайових задач для рівняння дивергентного типу із розривними коефіцієнтами у кільці. | 113 |
| 37. Кундрат М. М. Дослідження локального руйнування композиції з включенням. | 116 |
| 38. Ленюк М. П. Підсумовування однієї групи функціональних рядів. | 119 |
| 39. Олійник Т. М., Остудін Б. А. Чисельне розв'язування деяких початково-крайових задач теплопровідності методом інтегральних рівнянь. | 122 |
| 40. Петрівський Я. Б., Ковальчук О. Р., Хома Г. П. Єдиність крайової періодичної задачі для інтегро-диференціального рівняння другого порядку гіперболічного типу. | 125 |
| 41. Петрівський Я. Б. Гладкі розв'язки квазілінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку гіперболічного типу. | 127 |
| 42. Петрик М. Р. Осесиметрична квазілінійна математична модель фільтрації та відтиску неоднорідних високодисперсних середовищ у гвинтових конічних фільтрувальних апаратах. | 130 |
| 43. Пізир Я. В., Попов Б. О. Побудова многочленних ермітово-Чебишевських сплайнів третього степеня. | 134 |
| 44. Савула Я. Г., Дяконюк Л. М. Чисельне моделювання тепло-масопереносу у середовищі з тонким покриттям. | 137 |
| 45. Слосарчук В. Ю. Оборотність лінійних автономних диференці- | |

| | |
|--|-----|
| ально-різнених операторів | 140 |
| 46. Слюсарчук В. Ю. Нелінійні диференціальні рівняння з асимптотично стійкими розв'язками. | 143 |
| 47. Слюсарчук В. К., Мартинюк П. Н. Про асимптотичне найкраще рівномірне наближення дробово-раціональними функціями деяких спеціальних і елементарних функцій. | 146 |
| 48. Сяський А. О. Контакт жорсткого штампa з криволінійним отвором нескінченної пластинки. | 149 |
| 49. Сяський В. А., Мартинович Т. Л. Пружна рівновага пластинки з криволінійним отвором та включенням при частковому контактуванні границь. | 152 |
| 50. Талесів П. О. Основна система диференціальних рівнянь точкової відповідності між гіперрозподілами просторів проєктивної зв'язності. | 155 |
| 51. Тарангул О. В., Матіючук М. І. Про одну нелокальну параболічну крайову задачу. | 159 |
| 52. Тарасюк Р. І. Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами. | 162 |
| 53. Танія Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Нахолок Б. Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра. | 165 |
| 54. Тополок Ю. П. Проблеми розв'язування задач синтезу за заданою амплітудною діаграмою напрямленості. | 168 |
| 55. Турбал Ю. В. Оцінка параметрів моделі радіоактивного забруднення методом моментів. | 171 |
| 56. Каркевич Ю. І. Про наближення функцій класу C_n операторами, що породжуються прямокутними - методами підсумовування інтегралів. | 174 |
| 57. Хома Г. П., Вотьок А. О., Цинайко П. В. Узагальнений розв'язок однієї мішаної задачі. | 177 |
| 58. Хома А. Г., Хома Н. Г., Петрівський Я. Б. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі. | 179 |
| 59. Шеремета М. М., Воднар Р. Д. Рациональна апроксимація на $[0, 1]$ аналітичних в крузі функцій. | 181 |
| 60. Янчук П. С. Апроксимаційно-ітеративні схеми кусково-многочленного наближення. | 184 |
| 61. Янчук П. С., Демчук О. В., Возняк П. В. Апроксимаційно-ітеративний метод на основі ортогональних многочленів Якобі. | 188 |
| 62. Янчук П. С., Шпортько О. В. Кусково-многочленне наближення розв'язків задачі Дірікле в L -подібних областях. | 191 |
| 63. Ясинський В. К., Юрченко І. В. Теорема існування та єдиності для стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими функціоналами. | 194 |
| 64. Ясинський І. В., Ясинський І. В. Властивості розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з нескінченною післядією. | 197 |
| Анотації | 200 |

УДК 541.64:536.6

Е.С. Колупаєв, докт. хім. наук (Рівне, педінститут)

М.А. Бордюк, канд. фіз.-мат. наук (Рівне, педінститут)

С.М. Гусаковський, аспірант (Рівне, педінститут)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛОЇ ЕНЕРГІЇ В ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВІ ЛІНІЙНИХ АМОРФНИХ ПОЛІМЕРІВ.

Аналіз рівняння теплопровідності, з використанням граничних умов та перетворень Лапласа дозволив отримати залежність для обчислення коефіцієнта теплопровідності вздовж довжини структурного елемента полімера. Врахування дисипації енергії і розв'язок одновимірної задачі в циліндричній системі координат дає змогу оцінити величину теплового потоку, що йде через бічну поверхню макромолекули.

Експериментальні дослідження теплофізичних властивостей полімерних систем показують, що енергообмін в них залежить від структури будови молекули і особливостей протікання молекулярно-кінетичних процесів на різних рівнях структурної організації [1,2]. Тому важливим є питання математичного моделювання процесів перенесення теплової енергії в гетерогенних системах [3]. При цьому будемо вважати, що теплоперенос зумовлений перенесенням енергії за ланцюгом головних валентностей макромолекул і обміном енергії між атомами чи групами атомів бокових відгалужень, а також між сусідніми макромолекулами [4]. Для аналізу енергообміну в гетерогенних полімерних системах використовуємо закон збереження енергії, згідно якого кількість теплоти ΔQ введеної в елементарний об'єм полімера за час dt внаслідок теплопровідності, рівне зміні внутрішньої енергії ΔQ_i і дисипації енергії ΔQ_d .

Вважатимемо, що поперечний переріз структурної підсистеми полімера є незмінним вздовж всієї довжини. За направляючу вісь довжини системи виберемо вісь Oz і запишемо рівняння теплопровідності:

$$\lambda \nabla^2 T_i = C \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1)$$

Накладемо наступні граничні умови: в площині xOy тангенціальна складова теплового потоку перетворюється в нуль, а температура підсистеми в усіх точках має певне значення $T(z,0,0)=f(z)$. Нехай в початковий момент часу кінець

підсистеми має температуру T_k . Знайдемо розподіл температур за довжиною елемента в будь-який момент часу. Для цього розв'яжемо диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial T(z, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(z, \tau)}{\partial z^2}; \quad (\tau > 0; 0 < z < \infty) \quad (2)$$

при крайових умовах: $T(z, 0, 0) = f(z)$; $T(0, 0, \tau) = T_k = const$; $\frac{\partial T(+\infty, \tau)}{\partial z} = 0$.

Застосуємо перетворення Лапласа до диференціального рівняння (1)

$$L\left[\frac{\partial T(z, \tau)}{\partial \tau}\right] = L\left[a \frac{\partial^2 T(z, \tau)}{\partial z^2}\right], \quad (3)$$

де

$$L[T(z, \tau)] = \int_0^{\infty} T(z, \tau) e^{-s\tau} d\tau = T_L(z, s). \quad (4)$$

Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння (2) отримаємо:

$$sT_L(z, s) - f(z) = a \frac{d^2 T_L(z, s)}{dz^2}. \quad (5)$$

Врахувавши, що $f(z) = T_0 = const$ будемо мати

$$T_L'(z, s) - \frac{s}{a} \left[T_L(z, s) - \frac{T_0}{s} \right] = 0. \quad (6)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння для зображення запишемо у вигляді:

$$T_L(z, s) - \frac{T_0}{s} = A_1 e^{\sqrt{s/a}z} + B_1 e^{-\sqrt{s/a}z}, \quad (7)$$

де A_1 і B_1 - сталі. Для їх визначення використаємо перетворення Лапласа до граничних умов і одержимо що: $A_1 = 0$, а $B_1 = -(T_0 - T_k)/s$. Тоді розв'язок для зображення має вид:

$$\frac{T_0}{s} - T_L(z, s) = \frac{T_0 - T_k}{s} e^{-\sqrt{s/a}z}. \quad (8)$$

Застосувавши обернене перетворення Лапласа, отримаємо:

$$T_0 - T(z, \tau) = (T_0 - T_k) \cdot \text{erf}(z/2\sqrt{a\tau}). \quad (9)$$

Визначимо втрати тепла на кінці елемента:

$$dQ_x = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} d\tau = -\lambda (T_0 - T_k) \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\text{erf}(z/2\sqrt{a\tau}) \right] \right\}_{z=0} \quad (10)$$

оскільки $\frac{\partial}{\partial z} \left[\operatorname{erf} \left(z / 2\sqrt{az} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi az}} e^{-z^2/4az}$.

При $z=0$; $e^{-z^2/4az} = 1$. Тоді кількість тепла, яка віддається кінцем підсистеми і площа якої з рівне

$$\Delta Q_1 = \frac{2\sqrt{\lambda_1 C_v \rho}}{\sqrt{\pi}} (T_0 - T_k) S \sqrt{\tau}. \quad (11)$$

З другої сторони:

$$\Delta Q_1 = C_v \rho V (\bar{T} - T_0), \quad (12)$$

$$\text{де } \bar{T}(\tau) = \frac{1}{V} \int_{(v)} T(z, \tau) d\tau = \frac{1}{Rhl} \int_{-R-h-l}^R \int_{-h-l}^h \int_{-l}^l T(z, \tau) dx dy dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^l T(z, \tau) dz.$$

Значення ефективного коефіцієнта теплопровідності структурного елементу полімера знайдемо з співвідношення:

$$C_v \rho V = \frac{2\sqrt{\lambda_1 C_v \rho}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau} \cdot S, \quad (13)$$

звідки

$$\lambda_1 = \frac{\pi C_v \rho}{4\tau} l^2. \quad (14)$$

Враховавши, що $\frac{l}{\tau} = v_1$ - швидкість поширення поздовжніх фронтів і переходячи від підсистеми до системи, отримаємо:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{12} C_v \rho v_1 \cdot l. \quad (15)$$

Для визначення ΔQ_1 розглянемо підсистему у вигляді циліндра ефективного поперечного перерізу d , що утворюється витягнутими ланцюгами макромолекул. В циліндричній системі координат для одновірної задачі з врахуванням, що $v_r = v_\varphi = 0$ і $v_z \neq 0$, отримаємо

$$\rho v \frac{dH}{dz} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (r \cdot q_r) + \frac{dq_z}{dz}, \quad (16)$$

де $q_r = \lambda_1 \frac{dT}{dr}$; $q_z = \lambda_2 \frac{dT}{dz}$; $H = CT$.

Вважаючи, що швидкість дисипативного теплового потоку за перерізом (r) підсистеми розподіляється за параболою, тобто $v = v_{\max} (1 - \xi^2)$, де $\xi = r/d$, рівняння (16) можна записати так:

$$\rho v_{\max} C d^2 (1 - \xi^2) \frac{dT}{dz} = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\lambda \xi \frac{dT}{d\xi} \right) + a^2 \lambda \frac{d^2 T}{dz^2} \quad (17)$$

Розв'язавши рівняння (17) для двох основних граничних умов, коли $\frac{dT}{dz} = \text{const}$ і температура бокової поверхні змінюється стрибком потрібно $T = Az + q(\xi)$, отримаємо, що

$$B \xi (1 - \xi^2) = \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dq(\xi)}{d\xi} \right), \quad (18)$$

де $B = A \rho v_{\max} C d^2 / \lambda$.

Розв'язок рівняння (18), що задовільняє умові $q = 0$ при $\xi = 1$, можна записати у вигляді:

$$\xi \frac{dq(\xi)}{d\xi} = B \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{4} \right). \quad (19)$$

Тоді тепловий потік, що йде через поверхню підсистеми, буде виражатися як

$$q_i = \lambda_i \frac{dT}{dv} \Big|_{v=0} = \frac{\lambda_i}{d} \frac{dT}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{\lambda_i}{d} \frac{dq(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{A \rho v C_v d}{8}, \quad (20)$$

де $v = v_i$ - швидкість поширення поперечних фононів в підсистемі.

З співвідношення (20) отримаємо, що

$$\lambda_i = \rho \frac{v_i C_v d}{8}. \quad (21)$$

З співвідношення (15) і (21) для коефіцієнта теплопровідності гетерогенних полімерних систем будемо мати, що

$$\lambda = \rho C_v \left(\frac{\pi}{12} v_i \cdot l + \frac{dv_i}{8} \right). \quad (22)$$

Аналіз співвідношення (22) показує, що у випадку $v_i = v_i = v$ і $l = d$ (ізотропна періодична структура) отримаємо $\lambda \approx 0,38 \cdot C_v \cdot \rho \cdot l$ близьке до співвідношення Дебая для коефіцієнта теплопровідності [5].

Для лінійних аморфних полімерів l - це відстань рівня С-С зв'язку ($1,5 \text{ \AA}$), а d - міжмолекулярному зв'язку (порядку $1,40 \text{ \AA}$). Як показують співвідношення теоретичних значень з експериментальними [6-10] розходження між ними 2-6%. При цьому теоретична залежність адекватно відтворює хід експериментальних залежностей.

Таким чином, використання методів математичного моделювання процесів теплопереносу в гетерогенних полімерних системах дозволяє отримати аналітичні співставлення, використання яких дає можливість прогнозувати їх теплофізичні властивості.

1. B.S.Kolupaev, Yu.S.Lipatov, V.I.Nikitchuk, N.A.Borduyk, O.M.Voloshin. Composite materials with negative Poisson ratio.// Доповіді АН України. №12, 1993, с.130-134.
2. B.S.Kolupaev, N.A.Borduyk, O.M.Voloshin, Yu.S.Lipatov. The Frequency Spectrum of the Structure Elements of Filled Poly(vinylchloride).// J.Polym.Mater. №12, 1995, p.143-149.
3. Френкель С.Я., Цыгельный И.М., Колупаев Б.С. Молекулярная кибернетика. - Львов: Світ, 1990, 168с.
4. Бордюк Н.А., Бестюк Ю.М., Никитчук В.И., Колупаев Б.С. Структурно-механические и теплофизические свойства модифицированного поливинилхлорида.// ИФЖ, т.60, №6, 1991, с.987-994.
5. Дебай П. Избранные труды. -Л.: Наука, 1987, 559с.
6. Бордюк Н.А., Никитчук В.И., Волошин О.М., Липатов Ю.С., Колупаев Б.С. Влияние ангармоничных эффектов на структурно-механические и теплофизические свойства наполненных полимерных систем.// ИФЖ, т.68, №1, 1995, с.44-50.
7. Бордюк Н.А., Волошин О.М., Демьянюк Б.П., Липатов Ю.С., Колупаев Б.С. Теплофизические свойства модифицированного поливинилхлорида.// Высокомолек. соед. т.32, №6, 1990, с.1232-1237.
8. Бордюк М.А., Колупаев Б.С., Волошин О.М., Левчук В.В. Акустичні властивості і структурні параметри наповненого полівинілхлориду.// УФЖ, т.41, №1, 1996, с.115-118.
9. Колупаев Б.С., Бордюк Н.А., Исследование теплопроводности межфазного слоя в наполненном поливинилхлориде и поливинилбутирале.// Высокомолек. соед. т.23, №7, 1987, с.1499-1504.
10. Колупаев Б.С., Липатов Ю.С., Исследование тепловой энергии в линейных полимерах и композициях на их основе в зависимости от микроскопических свойств тела.// Высокомолек. соед. т.28, №8, 1986, с.1706-1711.