# Волинський математичний вісник

Випуск 9

2002

**"Волинський математичний вісник"** публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The **"Volyn Mathematical Bulletin"** publishes the rezults of investigation of the mathematics, informatics and mechanics. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

---



Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

**Адреса редакції :** 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

ISBN 966 - 7281 - 02 – 8

## *Зміст*

УДК 539.3

**Комбель С.М., Сяський А.О.**

# КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНЦІ І ЖОРСТКОГО ДИСКА З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

*Побудована система двох інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами задачі про передачу крутного моменту від жорсткого диска з кутовими точками, запресованого в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки. Методом колокації досліджується вплив на напружений стан пластинки форми отвору, величини зони запресовки, тертя між пластинкою і диском. Визначається мінімальний натяг запресовки, кут повороту диска і точка початкового розмикання зони контакту.*

Нехай середня поверхня нескінченної ізотропної пластинки товщиною $2h$ з гладким криволінійним отвором у формі правильного $N$–кутника з закругленими кутами співпадає з комплексною площиною $z = x + iy$. Початок системи координат розміщений в центрі отвору.

Функція [1]

$$z = x + iy = \omega(\xi) = R\left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}}\right) \tag{1}$$

здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола $\gamma$ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка в площині $z$. Тут $\varepsilon$ – параметр, що визначає форму отвору, $R$ – характерний розмір отвору. Для спрощення викладок приймаємо $R = 1$.

Допустимо, що в отвір пластинки запресовано з натягом $\Delta > 0$ абсолютно жорсткий диск. Величина $\Delta$ має порядок пружних зміщень. Диск має $N$ симетричних рівномірно розміщених по контуру вирізів, які розділяють зону контакту (рис.1). В центрі диска прикладено пару сил з моментом $M_0$. Розв'язок задачі полягає в знаходженні контактних зусиль в зоні запресовки.

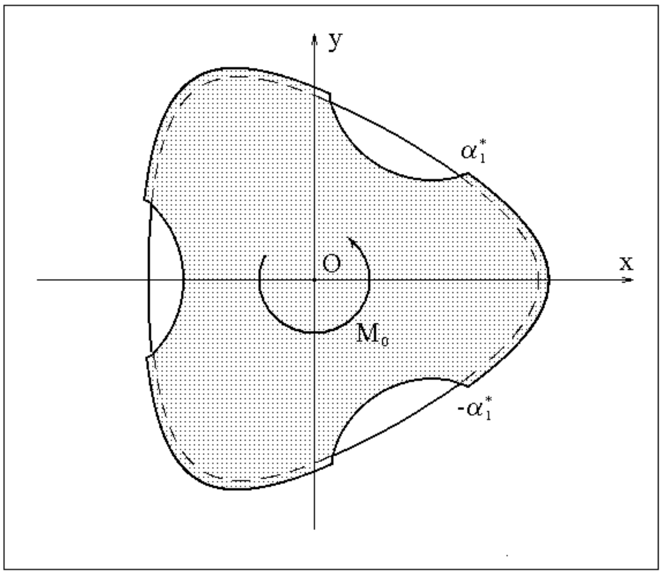


*Рис.1*

В залежності від величини $\Delta$ можна виділити окремі випадки задачі: якщо $\Delta > \Delta_{\min}$, то зона контакту охоплює всю зону запресовки; при $0 \le \Delta \le \Delta_{\min}$ крім зони контакту наявна зона відставання диска від пластинки; величина $\Delta_{\min}$ визначає мінімальний натяг, при якому контакт між пластинкою і диском розмикається лише в одній точці.

Розглянемо випадок $\Delta \geq \Delta_{\min}$. Тоді зона контакту $\Gamma_1$ визначається проміжками

$$\Gamma_1 \equiv \left[-\alpha_1^*; \alpha_1^*\right] \cup \left[\frac{2\pi}{N} - \alpha_1^*; \frac{2\pi}{N} + \alpha_1^*\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{2\pi(N-1)}{N} - \alpha_1^*; \frac{2\pi(N-1)}{N} + \alpha_1^*\right],$$

а зона $\Gamma_2$, вільна від зусиль, –

$$\Gamma_2 \equiv \left[\alpha_1^*; \frac{2\pi}{N} - \alpha_1^*\right] \cup \left[\frac{2\pi}{N} + \alpha_1^*; \frac{4\pi}{N} - \alpha_1^*\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{2\pi(N-1)}{N} + \alpha_1^*; 2\pi - \alpha_1^*\right].$$

Граничні умови задачі при наявності в зоні запресовки сил тертя, заданих законом Кулона, вибрані у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска

$$u_n^{пл} = u_n^{д}, \quad S_{\rho\lambda} = fT_\rho, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad S_{\rho\lambda} = T_\rho = 0, \quad \lambda \in \gamma_2, \tag{2}$$

де $T_\rho$, $S_{\rho\lambda}$ – нормальні і дотичні зусилля в зоні контакту; $f$ – коефіцієнт тертя між пластинкою і диском; $\gamma_1$, $\gamma_2$ - образ $\Gamma_1$ і $\Gamma_2$ відповідно при відображенні [1].

Компоненти вектора зміщення контура $\Gamma$ в пластинці для даної задачі визначаються за формулами [2]

$$2Eh(u+iv) = (1-\nu)(f_1 + if_2) - \frac{i}{\pi}\oint_\gamma (f_1 + if_2)\, ctg\frac{\lambda - t}{2}dt + (\tilde{c}_1 + i\tilde{c}_2), \tag{3}$$

$$f_1 + if_2 = i\int_0^\lambda \left(T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*\right)e^{it}dt, \qquad T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = \left(T_\rho + iS_{\rho\lambda}\right)\omega'(\sigma); \qquad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \text{ - дійсні сталі.}$$

Враховуючи умови періодичності

$$u_n(\lambda) + iu_s(\lambda) = u_n\left(\lambda + \frac{2\pi}{N}\right) + iu_s\left(\lambda + \frac{2\pi}{N}\right) \tag{4}$$

і властивості функцій $f_1$, $f_2$

$$f_1\left(\lambda + \frac{2\pi k}{N}\right) + if_2\left(\lambda + \frac{2\pi k}{N}\right) = \left[f_1(\alpha_1) + if_2(\alpha_1)\right]\sum_{m=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi im}{N}} + \left[f_1(\lambda) + if_2(\lambda)\right]e^{\frac{2\pi ik}{N}}, \tag{5}$$

$$\lambda \in \left[-\alpha_1, \alpha_1\right], \; k = \overline{1, N-1}, \quad \left[-\alpha_1, \alpha_1\right] = \omega\left(\left[-\alpha_1^*, \alpha_1^*\right]\right),$$

співвідношення (3) запишуться у вигляді

$$u + iv = \frac{1}{2Eh}\left\{(1-\nu)\left[\left(f_1(\alpha_1) + if_2(\alpha_1)\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}ctg\frac{\pi}{N}\right) + \int_{\alpha_1}^{\lambda}\left(f_1'(t) + if_2'(t)\right)dt\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{2i}{\pi}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\left(f_1'(t) + if_2'(t)\right)\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2k\pi i}{N}} \ln\left|\sin\frac{\lambda - t}{2} - \frac{k\pi}{N}\right| dt\right\}. \tag{6}$$

Згідно з [3], нормальне зміщення контура пластинки знаходимо із співвідношення

$$u_n^{пл} = \frac{a(\lambda)u + b(\lambda)v}{\left|\omega'(\sigma)\right|}, \tag{7}$$

де $a(\lambda) = \cos\lambda - \varepsilon(N-1)\cos(N-1)\lambda; \quad b(\lambda) = \sin\lambda + \varepsilon(N-1)\sin(N-1)\lambda.$

Нормальне зміщення $u_n^{д}$ контура диска визначається за формулою [4]

$$u_n^{д} = \frac{\Delta\left[1 - \varepsilon^2(N-1) - \varepsilon(N-2)\cos N\lambda\right] + (1+\Delta)\left[N\varepsilon\sin\alpha_0\sin N\lambda\right]}{\left|\omega'(\sigma)\right|}. \tag{8}$$

Тут $\alpha_0$ – кут повороту диска.

Підстановка (6)-(8) в граничні умови (2) і заміна змінних

$$tg\frac{\lambda}{2}=a_0x\,;\quad tg\frac{t}{2}=a_0s\,;\quad a_0=tg\frac{\alpha_1}{2}\,;\qquad \lambda,t\in[-\alpha_1;\alpha_1]$$

приводить до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для знаходження $\Phi_1$, $\Phi_2$

$$a(\lambda)\left[(1-\nu)\left(\int_{-1}^{1}\Phi_1(s)ds+\int_{1}^{x}\Phi_1(s)ds+\frac{1}{2}ctg\frac{\pi}{N}\int_{-1}^{1}\Phi_2(s)ds\right)+\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\Phi_2(s)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|ds+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\Phi_1(s)\sin\frac{2\pi k}{N}+\Phi_2(s)\cos\frac{2\pi k}{N}\right)\ln\left|\sin\left(\frac{\lambda-t}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)\right|ds\right]+$$
$$+b(\lambda)\left[(1-\nu)\left(\int_{-1}^{1}\Phi_2(s)ds+\int_{1}^{x}\Phi_2(s)ds-\frac{1}{2}ctg\frac{\pi}{N}\int_{-1}^{1}\Phi_1(s)ds\right)-\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\Phi_1(s)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|ds-\right.\tag{9}$$
$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\Phi_1(s)\cos\frac{2\pi k}{N}-\Phi_2(s)\sin\frac{2\pi k}{N}\right)\ln\left|\sin\left(\frac{\lambda-t}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)\right|ds\right]=$$
$$=2Eh\left(\Delta\left[1-\varepsilon^2(N-1)-\varepsilon(N-2)\cos N\lambda\right]+(1+\Delta)\left[N\varepsilon\sin\alpha_0\,\sin N\lambda\right]\right),$$

$$\Phi_1(\lambda)\left[a(\lambda)-f\,b(\lambda)\right]+\Phi_2(\lambda)\left[b(\lambda)+f\,a(\lambda)\right]=0\,,\quad \lambda,t\in[-\alpha_1,\alpha_1],\quad x\in[-1,1].$$

Тут введено позначення

$$\Phi_j(s)=\frac{a_0f_j'(s)}{1+a_0^2s^2}\,;\; j=1,2\,.$$

Крім системи (9) повинна виконуватися моментна умова рівноваги диска

$$M_0=-N\left(\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}S^*_{\rho\lambda}(t)dt+\varepsilon\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\left[T^*_\rho(t)\sin Nt+S^*_{\rho\lambda}(t)\cos Nt\right]dt\right),\tag{10}$$

яка служить для визначення кута його повороту.

Знаходження точного розв'язку системи (9)-(10) пов'язане із значними математичними труднощами, тому шукатимемо його наближено. На підставі [3] наближений розв'язок цієї системи можна подати у вигляді

$$\Phi_j(s)=\frac{\Phi_j^0(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,;\; j=1,2\,;\;\; s\in[-1,1].$$

Заміною змінних $s=\cos\varphi$ проміжок $[-1,1]$ можна відобразити на проміжок $[0,\pi]$. Тоді

$$\Phi_j(s)=\frac{1}{\sin\varphi}\Phi_j^0(\varphi);\quad j=1,2\,;\;\varphi\in[0,\pi].$$

Для функцій $\Phi_1^0(s)$, $\Phi_2^0(s)$ побудуємо інтерполяційні поліноми Лагранжа, вибравши за вузли інтерполяції корені поліномів Чебишева другого роду порядку $M$ [5].

$$\left\{\Phi_1^0(\varphi),\Phi_2^0(\varphi)\right\}=\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}\{A_n,B_n\}\left[1+2\sum_{m=1}^{M-1}\cos m\varphi_n\cos m\varphi\right],\quad \varphi_n=\frac{2n-1}{2M}\pi\,.\tag{11}$$

Підставляючи (11) в (9)-(10) і надаючи $\varphi$ послідовно значення $\varphi_1,...,\varphi_M$, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих $A_n$, $B_n$.

Квадратурні формули для обчислення сингулярних інтегралів із (9)-(10) наведені в [3]. Для обчислення регулярних інтегралів використовуються квадратурні формули Гауса [5].

Для ілюстрації методу колокації проведено чисельні розрахунки мінімального натягу $\Delta_{\min}$, кута розмикання $\lambda_*$ і відповідного йому полярного кута

$\alpha_* = arctg\dfrac{\sin\lambda_* - \varepsilon\sin(N-1)\lambda_*}{\cos\lambda_* + \varepsilon\cos(N-1)\lambda_*}$, кута повороту диска $\alpha_0$ для криволінійного отвору у вигляді еліпса $(N=2;\,\varepsilon=\pm 0.4)$, трикутника $(N=3;\,\varepsilon=\pm 0.15)$, чотирикутника $(N=4;\,\varepsilon=\pm 0.1)$. Значення розрахункових величин при $M_0=1$, $\nu=0.3$, $f=0;\,0.2;\,0.4$ подані в таблиці 1 і ілюструються на рис. 2-7. Суцільні лінії відповідають $f=0$ (тертя відсутнє), штрихові – $f=0.2$, штрихпунктирні – $f=0.4$.

Всі розрахунки проведені для різних значень $M$ до $M=72$ включно і практично не змінюються, починаючи з $M=48$. Це свідчить про добру збіжність методу.

*Таблиця 1*

| | $\varepsilon$ | $f$ | $\Delta_{\min} * 2Eh$ | $\alpha_1$ *(град)* | $\lambda_*$ *(град)* | $\alpha_*$ *(град)* | $\alpha_0$ *(град)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N=2$ | 0.40 | 0 | 0.56052 | 60 | -39.7 | -19.6 | 0.823 |
| | | 0.2 | 0.38336 | 60 | -43.5 | -22.2 | 0.594 |
| | | 0.4 | 0.28658 | 60 | -46.9 | -24.6 | 0.475 |
| | $-0.40$ | 0 | 0.97383 | 60 | 31.0 | 54.5 | 0.901 |
| | | 0.2 | 0.71741 | 60 | 28.6 | 51.9 | 0.629 |
| | | 0.4 | 0.57326 | 60 | 26.2 | 48.9 | 0.482 |
| $N=3$ | 0.15 | 0 | 0.90163 | 40 | -25.7 | -17.6 | 1.412 |
| | | 0.2 | 0.50241 | 40 | -27.0 | -18.8 | 0.848 |
| | | 0.4 | 0.34302 | 40 | -29.5 | -21.0 | 0.628 |
| | $-0.15$ | 0 | 1.04623 | 40 | 25.7 | 34.3 | 1.529 |
| | | 0.2 | 0.61589 | 40 | 24.3 | 32.8 | 0.908 |
| | | 0.4 | 0.43839 | 40 | 22.9 | 31.3 | 0.656 |
| $N=4$ | 0.10 | 0 | 0.98516 | 30 | -19.0 | -13.6 | 1.270 |
| | | 0.2 | 0.52173 | 30 | -20.0 | -14.5 | 0.742 |
| | | 0.4 | 0.34927 | 30 | -21.0 | -15.4 | 0.550 |
| | $-0.10$ | 0 | 1.05757 | 30 | 20.0 | 25.8 | 1.382 |
| | | 0.2 | 0.58488 | 30 | 19.0 | 24.7 | 0.801 |
| | | 0.4 | 0.40320 | 30 | 18.0 | 23.6 | 0.581 |

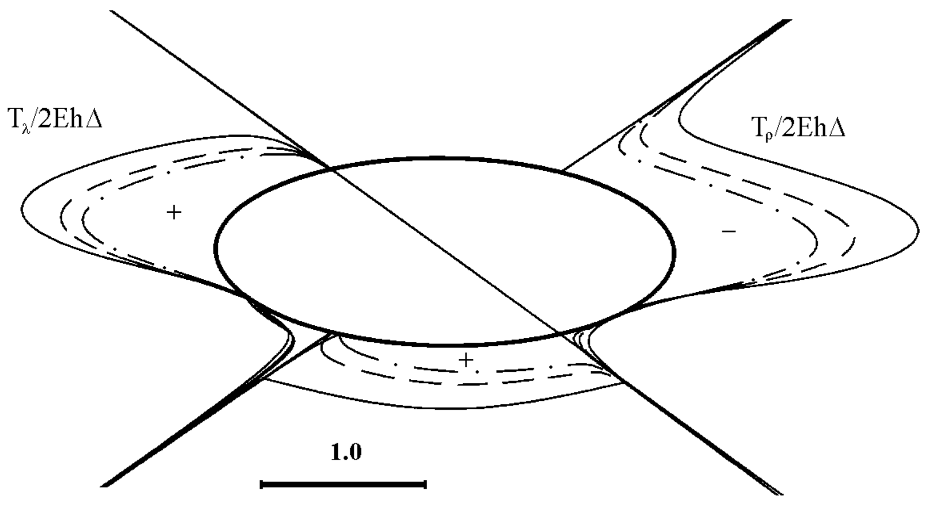


*Рис.2*

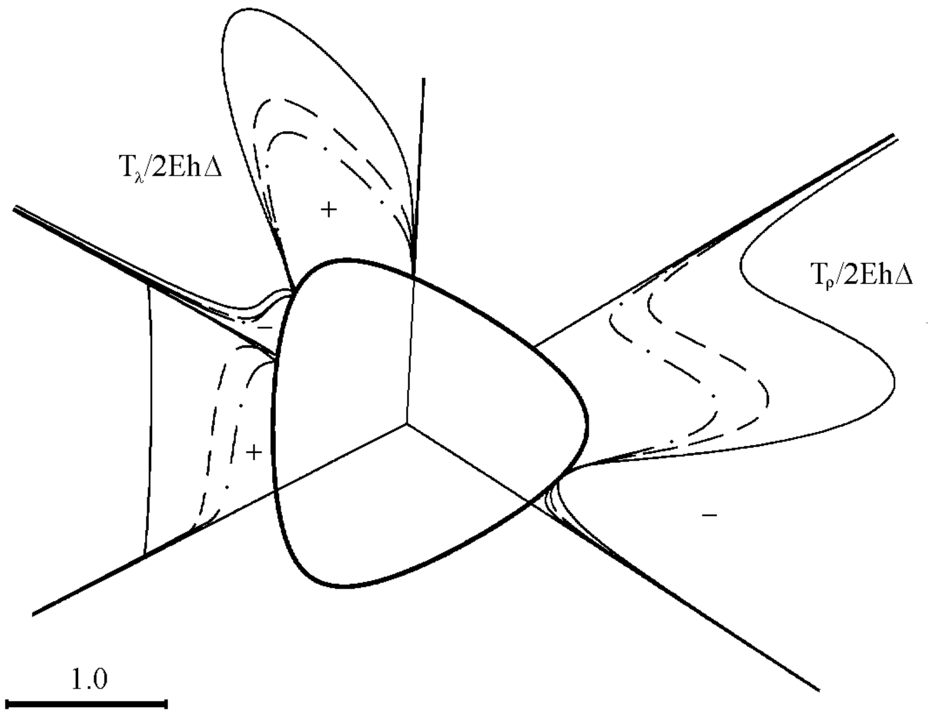
$T_\lambda/2Eh\Delta$
$T_\rho/2Eh\Delta$
+
−
+
−
1.0

*Рис.3*

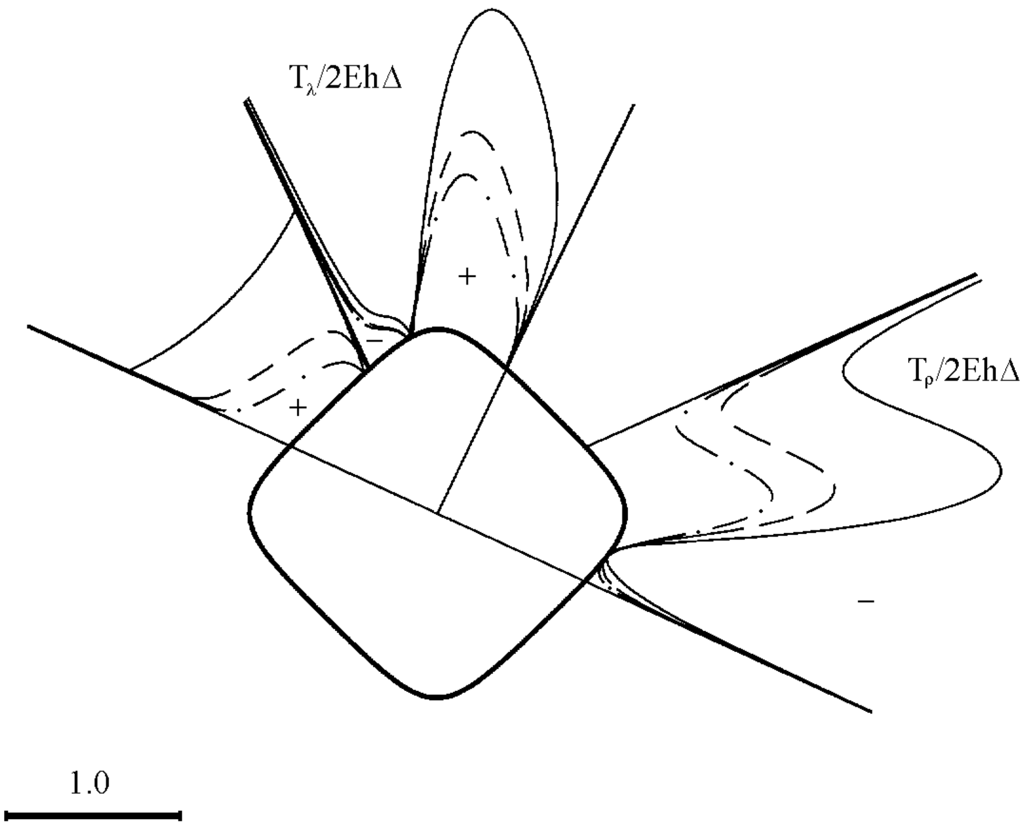
$T_\lambda/2Eh\Delta$
$T_\rho/2Eh\Delta$
+
−
+
−
1.0

*Рис.4*

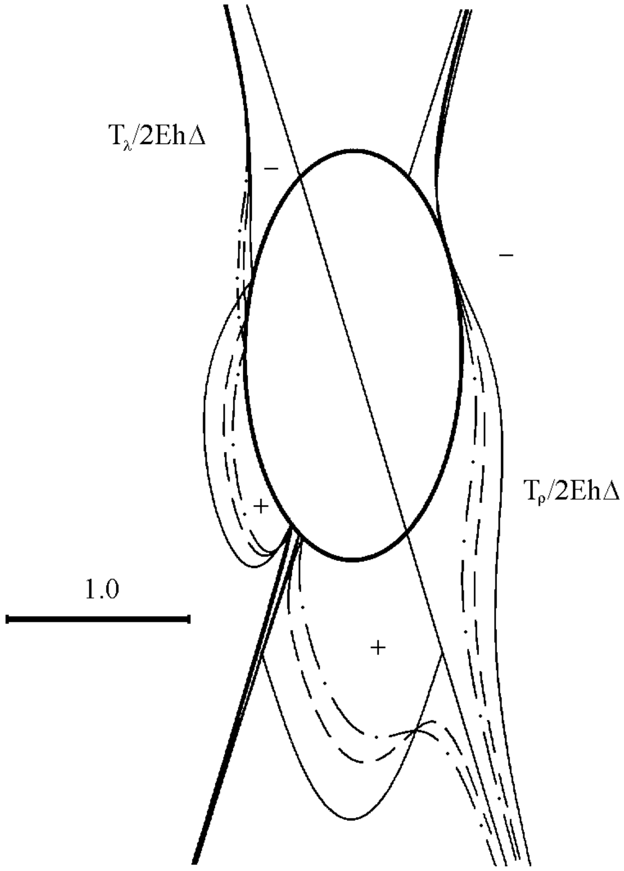
$T_\lambda/2Eh\Delta$
–
–
$T_\rho/2Eh\Delta$
+
1.0
+

*Рис. 5*

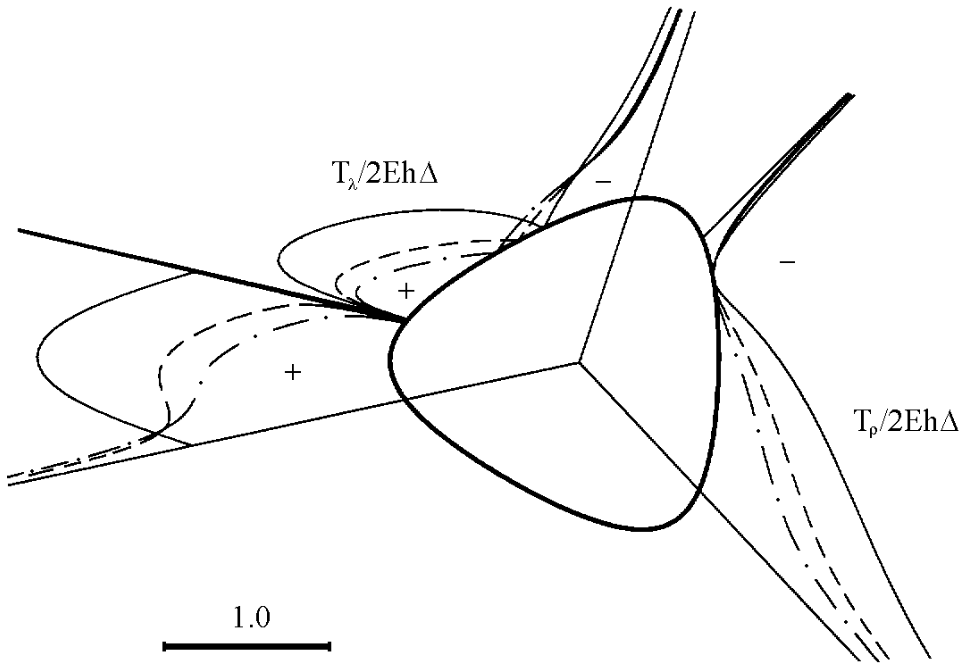
$T_\lambda/2Eh\Delta$
–
–
+
+
$T_\rho/2Eh\Delta$
1.0

*Рис. 6*

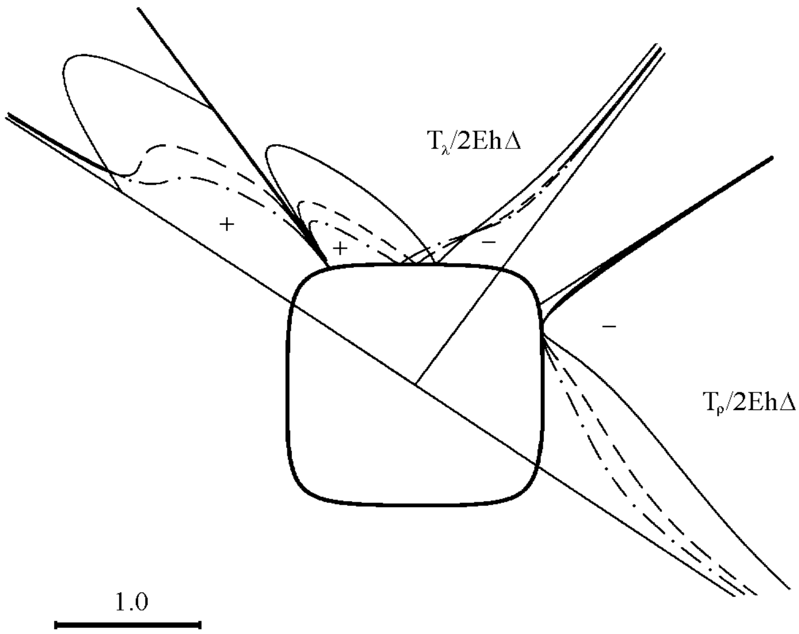


*Рис.7*

В наведених прикладах збільшення тертя приводить до зміщення кута розмикання в бік, протилежний до напрямку дії момента $M_0$; зменшення контактних зусиль; зменшення кута повороту диска.


1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966.-708с.
2. *Андрій Сяський, Володимир Сяський* Контакт двозв'язного штампа з кутовими точками і криволінійного отвору нескінченної пластинки. // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. В 2-х т.- Львів, 2000. – Т2. – С.122-125.
3. *Сяський В.А.* Вплив тертя на розподіл напружень при контакті гладких циліндричних тіл і штампів з кутовими точками // Волинський математичний вісник.- 1999.- Випуск 6.- С.127-134.
4. *Сяський А.О., Комбель С.М.* Граничні умови контактних задач для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска. // Волинський математичний вісник.- 2001.- Випуск 8.- С.93-97.
5. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости.– М.: Наука, 1973.– 304с.


Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
*E-mail:* Kombel@rdgu.rv.ua

*Надійшла 27.10.2002*

**Комбель С.М., Сяський А.О.** КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ОТВЕРСТИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ И ЖЕСТКОГО ДИСКА С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ // *Построена система двух интегральных уравнений с логарифмическими ядрами задачи о передаче крутящего момента от жесткого диска с угловыми точками, запрессованного в криволинейное отверстие бесконечной изотропной пластинки. Методом коллокации исследуется влияние на напряженное состояние пластинки формы отверстия, величины зоны запрессовки, трения между пластинкой и диском. Определяется минимальное натяжение запрессовки, угол поворота диска и точка начального размыкания зоны контакта.*

**Kombel S.M., Syasky A.O.** A CONTACT INTERACTION OF THE CURVILINEAR APERTURE IN THE ENDLESS PLATE AND THE HARD DISK WITH ANGULAR POINTS // *A system of the integrated equations with the logarithmic nucleuses of the task about a transfer of the twisting moment from the hard disk with an angular points, which is pressed in a curvilinear aperture of the endless isotropic plate was constructed. The influence of the form of the aperture, the size of a zone of pressing, the friction between the plate and the disk on the stressed state of plate is investigated by the method of the collocation. The minimal tension of the pressing, the angle of the turn of the disk and the point of the initial breaking of the contact zone are defined.*

**"Волинський математичний вісник"** публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

---




Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Міжнародного університету "Рівненський економіко-гуманітарний інститут" ім. С.Дем'янчука, Волинського державного університету ім. Л.України Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С. Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.



**Адреса редакції :** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua



ISBN 966 - 7281 - 02 – 8

Наукове видання
"Волинський математичний вісник"
Випуск 9, 2002

Відповідальний за випуск Бомба А.Я.

Здано до друку . .200 р. Підписано до друку . .200 р.
Формат 1/8 Папір друк. 30×21 Ум. друк. арк. 4,38
Наклад 300 прим. Замовлення № –

Віддруковано в інформаційно-видавничому відділі
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, 33000, м. Рівне, вул. С.Бандери, 15