Волинський математичний вісник

Випуск 9

2002

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The **"Volyn Mathematical Bulletin"** publishes the rezults of investigation of the mathematics, informatics and mechanics. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

ISBN 966 - 7281 - 02 – 8

Зміст

Батишкіна Ю.В., Сяський А.О. *ЧАСТКОВЕ ПІДКРІПЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНЦІ ТОНКИМ ПРУЖНИМ СТЕРЖНЕМ* 4

Бомба А.Я. *ЧИСЕЛЬНО-АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТИПУ "ФІЛЬТРАЦІЯ-ДИФУЗІЯ" ЗА УМОВ ВЗАЄМОВПЛИВУ ГРАДІЄНТІВ ПОТЕНЦІАЛУ ТА КОЕФІЦІЄНТА ПРОВІДНОСТІ СЕРЕДОВИЩА* 12

Возняк О.Г. *ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ* 20

Каштан С.С. *ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯ ШВИДКОСТІ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА УМОВ ВЗАЄМОВПЛИВУ ГРАДІЄНТА ПОТЕНЦІАЛУ І ХАРАКТЕРИСТИК АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА* 32

Комбель С.М., Сяський А.О. *КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНЦІ І ЖОРСТКОГО ДИСКА З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ* 41

Кондрат В.Ф., Боднарчук Г.Я. *ОСЕРЕДНЕНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ СИЛОВОМУ ЗБУРЕННІ НЕЛІНІЙНИХ МАГНІТОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ* 48

Кузьменко А.П., Гладка О.М. *ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДІВЕРГЕНТНОГО ТИПУ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ПЕРІОДИЧНІСТЮ В КРАЙОВИХ УМОВАХ* 55

Пригорницький Д.О. *ПРО МОДИФІКАЦІЮ АЛГОРИТМУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ДВОЗВ'ЯЗНИХ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ* 60

Савула Н.Я. *ЗБІЖНІСТЬ ЗА ШТРАФОМ РОЗВ`ЯЗКУ ГЕТЕРОГЕННОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ* 67

Хриптун М. Д. *ПРО ДЕЯКІ РЯДИ ЗА ОДНИМ УЗАГАЛЬНЕННЯМ ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ* 75

Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. *КОНТАКТНО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ В ШАРІ З ВЕРТИКАЛЬНО ПЕРІОДИЧНОЮ СТРУКТУРОЮ* 81

Яджак М.С. *ДЕЯКІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГОРИТМІВ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ* 90

НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ

Бомба А.Я. *ВСЕВОЛОД МИХАЛЬЧУК (16.03.1931 – 20.05.2002)* 100

Коренков М.Є. *В.Й.ГОРБАЙЧУК – ВЧЕНИЙ І ПЕДАГОГ* 103

ЛИСТ В РЕДАКЦІЮ

Дейнека О.Ю. *ВИПРАВЛЕННЯ ДО СТАТТІ* 105

УДК 519.632.4.001.57+517.54

Пригорницький Д.О.

МОДИФІКАЦІЯ АЛГОРИТМУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ДВОЗВ'ЯЗНИХ ДЕФОРМІВНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розроблений алгоритм чисельного розв'язання модельних нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в обмежених еквіпотенціальними лініями двозв'язних неоднорідних анізотропних деформівних середовищах перенесено на випадок, коли за відомою інтегральною характеристикою розв'язку (повною витратою) разом із динамічною сіткою знаходиться один з граничних потенціалів.

Вступ. У роботі [1] запропоновано алгоритм чисельного розв'язання нелінійних модельних крайових задач на побудову динамічної сітки в обмеженій еквіпотенціальними лініями двозв'язній області та знаходження невідомої витрати рідини Q за заданими значеннями граничних потенціалів φ_* та φ^*. Не менш важливими для практичного застосування є задачі на знаходження одного з граничних потенціалів при відомій витраті. До них зводяться, наприклад, модельні задачі на розрахунки процесів фільтрації в пластах при відомих заборах із свердловини чи подачах рідини у пласт. Їх чисельний розв'язок безпосередньо може бути одержаний шляхом розв'язання низки задач на знаходження Q за заданими φ_* та φ^* розробленим в [1] методом. В даній роботі, на основі модифікації описаного в [1] алгоритму, пропонується економніший (з огляду на можливі витрати машинного часу) підхід до розв'язання такого типу задач в неоднорідних анізотропних деформівних [2-3] середовищах.

Загальна постановка задачі. Розглянемо в деякій двозв'язній криволінійній області G_z ($z=x+iy$), обмеженій двома замкненими гладкими контурами $L_*=\{z\colon f_*(x,y)=0\}$ (або $L_*=\{x+iy\colon x=x_*(t),\ y=y_*(t), 0\le t<2\pi\}$) – внутрішній, $L^*=\{z\colon f^*(x,y)=0\}$ (або $L^*=\{x+iy\colon x=x^*(t),\ y=y^*(t), 0\le t<2\pi\}$) – зовнішній, процес руху частинок (зокрема, фільтрації в пористому пласті, руху заряджених частинок у провідній пластинці, і т.п.), який описується за допомогою рівняння руху $\vec{\upsilon}=\kappa\cdot\operatorname{grad}\varphi$ (закон Дарсі чи закон Ома) та рівняння нерозривності $\operatorname{div}\vec{\upsilon}=0$, де $\vec{\upsilon}=(\upsilon_x(x,y)+i\cdot\upsilon_y(x,y))$ – швидкість руху частинок, $\kappa=\left(\kappa^{rs}(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\right)_{2\times2}$ – тензор провідності (фільтрації, електричної провідності, і.т.п.), $\varphi=\varphi(x,y)$ – квазіпотенціал поля ($\varphi\big|_{L_*}=\varphi_*$, $\varphi\big|_{L^*}=\varphi^*$, $-\infty<\varphi_*<\varphi^*<+\infty$) при відомій кількісній мірі речовини, що виходить із фізичної області за одиницю часу (повній витраті $Q=\oint\limits_{L^*}-\upsilon_y dx+\upsilon_x dy$).

Аналогічно до [1], ввівши функцію течії $\psi=\psi(x,y)$ (квазікомплексно спряжену до $\varphi=\varphi(x,y)$), зафіксувавши на внутрішньому контурі деяку точку A та здійснивши умовний розріз Γ вздовж відповідної лінії течії (через AD та BC на рис.1 та рис.2 позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення $\omega=\omega(z)$, утвореної при цьому, однозв'язної області $G_z^0=G_z/\Gamma$ на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega=\{\omega=\varphi+i\psi:\ \varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ 0<\psi<Q\}$ з невідомим потенціалом φ^*:

$$\begin{cases}\kappa^{11}(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\varphi_x+\kappa^{12}(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\varphi_y=\psi_y,\ \varphi|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi|_{CD}=\varphi^*,\\ \kappa^{21}(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\varphi_x+\kappa^{22}(x,y,\varphi_x,\varphi_y)\varphi_y=-\psi_x,\ \psi|_{AD}=0,\ \psi|_{BC}=Q.\end{cases}\tag{1}$$

Відповідна їй обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z=z(\omega)=x(\varphi,\psi)+iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x=x(\varphi,\psi)$ і уявної $y=y(\varphi,\psi)$ частин функції течії $z=z(\omega)$ аналогічно до [1] запишуться у вигляді:

$$\begin{cases}\kappa^{11}(x,y,\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi},-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi})\frac{\partial y}{\partial\psi}-\kappa^{12}(x,y,\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi},-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi})\frac{\partial x}{\partial\psi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi},\\ \kappa^{21}(x,y,\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi},-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi})\frac{\partial y}{\partial\psi}-\kappa^{22}(x,y,\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi},-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi})\frac{\partial x}{\partial\psi}=\frac{\partial y}{\partial\varphi},\end{cases}\quad \begin{matrix}(\varphi,\psi)\in G_\omega,\\ J=x_\varphi y_\psi-x_\psi y_\varphi,\end{matrix}\tag{2}$$

$$\begin{cases}f_*\,(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi))=0,\ f^*(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi))=0,\ 0\le\psi\le Q,\\ \qquad x(\varphi,0)=x(\varphi,Q),\ y(\varphi,0)=y(\varphi,Q),\ \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*,\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\kappa^{11}}(x_\varphi+\kappa^{12}x_\psi)\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\kappa^{11}}(\kappa\cdot x_\psi-\kappa^{21}x_\varphi)\right)=0,\\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\kappa^{22}}(y_\varphi-\kappa^{21}y_\psi)\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\kappa^{22}}(\kappa\cdot_\psi+\kappa^{12}y_\varphi)\right)=0.\end{cases}\quad \kappa=\kappa^{11}\kappa^{22}-\kappa^{12}\kappa^{21},\tag{4}$$

Алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі побудуємо аналогічно до [1]. Різницеві аналоги рівнянь (4) та крайових умов (3) у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma=\left\{(\varphi_i,\psi_j):\ \varphi_i=\varphi_*+i\cdot\Delta\varphi,\ i=\overline{0,n};\ \psi_j=j\cdot\Delta\psi,\ j=\overline{0,m};\ \Delta\varphi=\frac{\varphi^*-\varphi_*}{n},\ \Delta\psi=\frac{Q}{m},\ \gamma=\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi}\right\}$ запишемо згідно з [4,5] у вигляді:

$$\gamma^2\left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i,j}}{\kappa^{11}_{i+1/2,j}}-\frac{x_{i,j}-x_{i-1,j}}{\kappa^{11}_{i-1/2,j}}\right)+\frac{\gamma}{4}\left(\frac{\kappa^{12}_{i+1/2,j}}{\kappa^{11}_{i+1/2,j}}(x_{i,j+1}+x_{i+1,j+1}-x_{i,j-1}-x_{i+1,j-1})-\right.$$

$$-\frac{\kappa^{12}_{i-1/2,j}}{\kappa^{11}_{i-1/2,j}}(x_{i,j+1}+x_{i-1,j+1}-x_{i,j-1}-x_{i-1,j-1})+\frac{\kappa^{21}_{i,j-1/2}}{\kappa^{11}_{i,j-1/2}}(x_{i+1,j}+x_{i+1,j-1}-x_{i-1,j}-$$

$$\left.-x_{i-1,j-1})-\frac{\kappa^{21}_{i,j+1/2}}{\kappa^{11}_{i,j+1/2}}(x_{i+1,j}+x_{i+1,j+1}-x_{i-1,j}-x_{i-1,j+1})\right)+\frac{\kappa_{i,j+1/2}}{\kappa^{11}_{i,j+1/2}}(x_{i,j+1}-x_{i,j})-$$

$$-\frac{\kappa_{i,j-1/2}}{\kappa^{11}_{i,j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})=0,\quad \gamma^2\left(\frac{y_{i+1,j}-y_{i,j}}{\kappa^{22}_{i+1/2,j}}-\frac{y_{i,j}-y_{i-1,j}}{\kappa^{22}_{i-1/2,j}}\right)+\frac{\gamma}{4}\left(\frac{\kappa^{21}_{i-1/2,j}}{\kappa^{22}_{i-1/2,j}}\times\right.\tag{5}$$

$$\times(y_{i,j+1}+y_{i-1,j+1}-y_{i,j-1}-y_{i-1,j-1})-\frac{\kappa^{21}_{i+1/2,j}}{\kappa^{22}_{i+1/2,j}}(y_{i,j+1}+y_{i+1,j+1}-y_{i,j-1}-$$

$$-y_{i+1,j-1})+\frac{\kappa^{12}_{i,j+1/2}}{\kappa^{22}_{i,j+1/2}}(y_{i+1,j}+y_{i+1,j+1}-y_{i-1,j}-y_{i-1,j+1})-\frac{\kappa^{12}_{i,j-1/2}}{\kappa^{22}_{i,j-1/2}}(y_{i+1,j}+$$

$$+y_{i+1,j-1}-y_{i-1,j}-y_{i-1,j-1})\Bigg)+\frac{\kappa_{i,j+1/2}}{\kappa^{22}_{i,j+1/2}}(y_{i,j+1}-y_{i,j})-\frac{\kappa_{i,j-1/2}}{\kappa^{22}_{i,j-1/2}}(y_{i,j}-y_{i,j-1})=0,$$

де
$$\kappa^{rs}_{i+1/2,j}=\kappa^{rs}\left(\frac{x_{i+1,j}+x_{i,j}}{2},\frac{y_{i+1,j}+y_{i,j}}{2},\frac{y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j-1}-y_{i,j-1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i+1/2,j}},\right.$$

$$\left.\frac{x_{i+1,j-1}+x_{i,j-1}-x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i+1/2,j}}\right),\ \kappa^{rs}_{i-1/2,j}=\kappa^{rs}\left(\frac{x_{i-1,j}+x_{i,j}}{2},\frac{y_{i-1,j}+y_{i,j}}{2},\right.$$

$$\left.\frac{y_{i-1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i-1,j-1}-y_{i,j-1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i-1/2,j}},\frac{x_{i-1,j-1}+x_{i,j-1}-x_{i-1,j+1}-x_{i,j+1}}{4\Delta\psi\cdot J_{i-1/2,j}}\right),$$

$$\kappa^{rs}_{i,j+1/2}=\kappa^{rs}\left(\frac{x_{i,j+1}+x_{i,j}}{2},\frac{y_{i,j+1}+y_{i,j}}{2},\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j+1/2}},\frac{x_{i,j}-x_{i,j+1}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j+1/2}}\right),$$

$$\kappa^{rs}_{i,j-1/2}=\kappa^{rs}\left(\frac{x_{i,j-1}+x_{i,j}}{2},\frac{y_{i,j-1}+y_{i,j}}{2},\frac{y_{i,j}-y_{i,j-1}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j-1/2}},\frac{x_{i,j-1}-x_{i,j}}{\Delta\psi\cdot J_{i,j-1/2}}\right),$$

$$J_{i+1/2,j}=\frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((x_{i+1,j}-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j-1}-y_{i,j-1})-(y_{i+1,j}-y_{i,j})\times$$

$$\times(x_{i+1,j+1}+x_{i,j+1}-x_{i+1,j-1}-x_{i,j-1}))\,,\ J_{i-1/2,j}=\frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((x_{i,j}-x_{i-1,j})(y_{i-1,j+1}+$$

$$+y_{i,j+1}-y_{i-1,j-1}-y_{i,j-1})-(y_{i,j}-y_{i-1,j})(x_{i-1,j+1}+x_{i,j+1}-x_{i-1,j-1}-x_{i,j-1}))\,,$$

$$J_{i,j+1/2}=\frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((y_{i,j+1}-y_{i,j})(x_{i+1,j+1}+x_{i+1,j}-x_{i-1,j+1}-x_{i-1,j})-(x_{i,j+1}-$$

$$-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i+1,j}-y_{i-1,j}-y_{i-1,j+1})\,,\ J_{i,j-1/2}=\frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((y_{i,j}-y_{i,j-1})(x_{i+1,j-1}+$$

$$+x_{i+1,j}-x_{i-1,j-1}-x_{i-1,j})-(x_{i,j}-x_{i,j-1})(y_{i+1,j-1}+y_{i+1,j}-y_{i-1,j}-y_{i-1,j+1}))\,,$$

та відповідно:

$$\begin{cases} f_*\,(x_{0,j},y_{0,j})=0,\ f^*(x_{n,j},y_{n,j})=0,\ j=\overline{0,m}, \\ \qquad x_{i,0}=x_{i,m},\ y_{i,0}=y_{i,m},\ i=\overline{0,n}. \end{cases} \tag{6}$$

Додаткові умови для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності у випадку конформного відображення) у сітковій області G^{γ}_{ω} записуються у вигляді [1,6]:

$$(4x_{1,j}-3x_{0,j}-x_{2,j})(\kappa_{0,j}^{22}(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})-\kappa_{0,j}^{21}(y_{0,j+1}-y_{0,j-1}))+(4y_{1,j}-3y_{0,j}-$$
$$-y_{2,j})(\kappa_{0,j}^{11}(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})-\kappa_{0,j}^{12}(x_{0,j+1}-x_{0,j-1}))=0,\ j=\overline{1,m-1},$$
$$(3x_{n,j}+x_{n-2,j}-4x_{n-1,j})(\kappa_{n,j}^{22}(x_{n,j+1}-x_{n,j-1})-\kappa_{n,j}^{21}(y_{n,j+1}-y_{n,j-1}))+(3y_{n,j}+y_{n-2,j}-$$
$$-4y_{n-1,j})(\kappa_{n,j}^{11}(y_{n,j+1}-y_{n,j-1})-\kappa_{n,j}^{12}(x_{n,j+1}-x_{n,j-1}))=0,\ j=\overline{0,m}, \tag{7}$$

де $\kappa_{i,j}^{rs}=\kappa^{rs}\left(x_{i,j},y_{i,j},\dfrac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta\psi\cdot J_{i,j}},\dfrac{x_{i,j-1}-x_{i,j+1}}{2\Delta\psi\cdot J_{i,j}}\right)$, $J_{0,j}=\dfrac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}((4x_{1,j}-3x_{0,j}-$

$-x_{2,j})(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})-(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})(4y_{1,j}-3y_{0,j}-y_{2,j}))$, $J_{n,j}=\dfrac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}\times$

$\times((3x_{n,j}+x_{n-2,j}-4x_{n-1,j})(y_{n,j+1}-y_{n,j-1})-(x_{n,j+1}-x_{n,j-1})(3y_{n,j}+y_{n-2,j}-4y_{n-1,j}))$.

Формулу для знаходження величини γ одержимо на підставі умови "квазіконформної подібності" елементарних чотирикутників [1] двох областей:

$$\gamma=\frac{1}{nm}\sum_{i,j=0}^{n-1,m-1}\frac{a_{i,j}+a_{i+1,j}}{\sqrt{\left(x_{i+1,j}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1}\right)^2}},$$
$$a_{i,j}=\sqrt{\left(\bar{\kappa}_{i,j}^{11}\left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)-\bar{\kappa}_{i,j}^{12}\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)\right)^2+\left(\bar{\kappa}_{i,j}^{21}\left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)-\bar{\kappa}_{i,j}^{22}\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)\right)^2}, \tag{8}$$

де $\bar{\kappa}_{i,j}^{rs}=\kappa^{rs}\left(\dfrac{x_{i,j}+x_{i+1,j}+x_{i,j+1}+x_{i+1,j+1}}{4},\dfrac{y_{i,j}+y_{i+1,j}+y_{i,j+1}+y_{i+1,j+1}}{4},\right.$

$\left.\dfrac{y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j}-y_{i,j}}{2\Delta\psi\cdot\bar{J}_{i,j}},\dfrac{x_{i+1,j}+x_{i,j}-x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}}{2\Delta\psi\cdot\bar{J}_{i,j}}\right)$, $\bar{J}_{i,j}=\dfrac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}\times$

$\times((x_{i+1,j}+x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i,j+1}-y_{i+1,j}-y_{i,j})-(x_{i,j+1}+x_{i+1,j+1}-$

$-x_{i+1,j}-x_{i,j})(y_{i+1,j+1}+y_{i+1,j}-y_{i,j+1}-y_{i,j}))$.

Задавши кількість вузлів розбиття області G_ω n та m, параметри ε_1, ε_2, ε_3, що характеризують точність наближеного розв'язку відповідної (2)-(3) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{n,j}^{(0)}$, $y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (6)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)},y_{i,j}^{(0)})$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{0,m}$ (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках $(x_{0,j}^{(0)},y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)},y_{n,j}^{(0)})$), знаходимо за формулою (8) початкове наближення $\gamma^{(0)}=\gamma(x_{i,j}^{(0)},y_{i,j}^{(0)})$ величини γ та $\varphi_*^{(0)}=\varphi^*-n\cdot\Delta\psi/\gamma^{(0)}$. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)},y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем типу "хрест", отриманих шляхом розв'язання (5) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому, необхідні значення градієнту напору та функцій κ^{rs} у вузлах сітки G_ω^γ обчислюються через значення

$x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації.

Після цього, як і в [1], "підправляємо" граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (7), наприклад, методом Ньютона. Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену k-ту загальну ітерацію $S=\max\limits_{i,j}\sqrt{\left(x_{i,j}^{(k)}-x_{i,j}^{(k-1)}\right)^2+\left(y_{i,j}^{(k)}-y_{i,j}^{(k-1)}\right)^2}$ ((i,j) – індекси координат граничних вузлів) більша за ε_2, то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення $\varphi_*^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин φ_* і γ за формулою (8) та умовою зв'язку між ними: $\varphi_*=\varphi^*-n\cdot\Delta\psi/\gamma$. Якщо зміна невідомого потенціалу $\left|\varphi_*^{(L)}-\varphi_*^{(L-1)}\right|$ більша за ε_3, то знову повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев'язку "квазіконформності" отриманої сітки $\delta=\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}$, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (2):

$$\begin{cases}\delta_1=\max\limits_{i,j=1}^{n-1,m-1}\left|\gamma(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})-\kappa_{i,j}^{11}\cdot(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})+\kappa_{i,j}^{12}\cdot(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})\right|,\\ \delta_2=\max\limits_{i,j=1}^{n-1,m-1}\left|\gamma(y_{i+1,j}-y_{i-1,j})-\kappa_{i,j}^{21}\cdot(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})+\kappa_{i,j}^{22}\cdot(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})\right|,\end{cases}$$

де $$\kappa_{i,j}^{rs}=\kappa^{rs}\left(x_{i,j},y_{i,j},\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta\psi\cdot J_{i,j}},\frac{x_{i,j-1}-x_{i,j+1}}{2\Delta\psi\cdot J_{i,j}}\right),\ J_{i,j}=\frac{1}{4\Delta\psi\cdot\Delta\varphi}\,((x_{i+1,j}-x_{i-1,j})\times$$

$$\times(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})-(x_{i,j+1}-x_{i,j-1})(y_{i+1,j}-y_{i-1,j}))\,.$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку δ), збільшуємо n і m та розв'язуємо задачу повторно (оптимальність співвідношення між n та m досягається аналогічно до [6,7] шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

Комп'ютерна реалізація алгоритму та чисельні приклади. Описаний вище алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді пакету програм для ПК IBM PC/AT. Перевірка його збіжності та точності проводилась за наступною схемою. Спочатку за алгоритмом типу [1] чисельно розв'язувалися задачі на знаходження повної витрати Q за потенціалами $\varphi_*=0$ та $\varphi^*=1$, заданими на внутрішньому та зовнішньому контурах даної області, при різних параметрах розбиття області n та m. Отримані наближені значення повної витрати Q разом із заданим значенням $\varphi^*=1$ приймались як вхідні параметри при розв'язанні поставлених задач на знаходження φ_* за відомими φ^* та Q. На рис.1 та у табл.1 наведені результати чисельного розв'язання задачі фільтрації в ізотропному деформівному пласті ($\kappa^{12}=\kappa^{21}=0$, $\kappa^{11}=\kappa^{22}=1+0.5\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}$, $x^*(t)=10(\cos t+0.25\cdot\cos 2t)$, $y^*(t)=10(\sin t$- -$0.25\cdot\sin 2t)$, $x_*(t)=\cos t$, $y_*(t)=\sin t$). Результати чисельного розв'язання задачі у випадку анізотропії деформівного середовища ($\kappa^{12}=\kappa^{21}=0$, $\kappa^{rr}=1+0.25r\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}$, $r=\overline{1,2}$, $x^*(t)=10(\cos t+0.2\cdot\sin 5t)$, $y^*(t)=10(\sin t+0.1\cdot\cos 2t)$, $x_*(t)=\cos t$, $y_*(t)=\sin t$)

відображені на рис.2 та у табл.2. Як видно з таблиць 1 та 2, із збільшенням параметрів розбиття сітки n і m знайдені наближення потенціалу внутрішнього контура $\widetilde{\varphi}_*$ наближаються до свого точного значення $\varphi_*=0$, а нев'язка "квазіконформності" δ отриманої динамічної сітки зменшується, що підтверджує збіжність побудованого алгоритму. Пунктирними лініями на рис.1 та рис.2 відокремлені зони найбільших за абсолютною величиною нев'язок $\delta_{i,j}$ (так звані "застійні" зони).

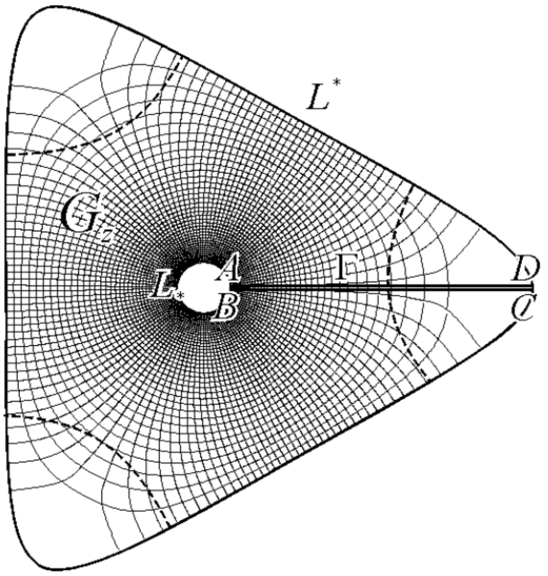

Рис. 1. Свердловина в ізотропному деформівному трикутному пласті із заокругленими кутами.

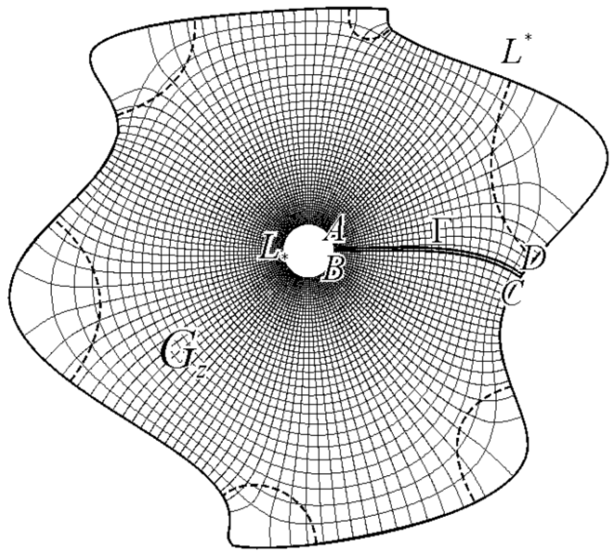

Рис. 2. Свердловина в криволінійному анізотропному деформівному пласті.

Табл.1.

n	m	Q	$\widetilde{\varphi}_*$	δ
30	87	3,2279	0,0041	3,161
40	116	3,2222	0,0030	2,716
60	174	3,2159	0,0011	2,067
80	232	3,2134	0,0004	1,611

Табл.2.

n	m	Q	$\widetilde{\varphi}_*$	δ
30	84	2,9904	0,0017	2,221
40	112	2,9857	0,0002	1,936
60	168	2,9848	0,0001	1,478
80	224	2,9853	0,0001	1,307

Запропонований в роботі алгоритм із незначними змінами може бути застосований для розв'язання задач на знаходження невідомого потенціалу φ^* за відомою повною витратою Q та заданим на внутрішньому контурі потенціалом φ_* (для цього вирази $\varphi_*^{(0)}=\varphi^*-n\cdot\Delta\psi/\gamma^{(0)}$, $\varphi_*=\varphi^*-n\cdot\Delta\psi/\gamma$ та $\varphi_*^{(L)}$ необхідно змінити на $\varphi^{*(0)}=\varphi_*+n\cdot\Delta\psi/\gamma^{(0)}$, $\varphi^*=\varphi_*+n\cdot\Delta\psi/\gamma$ та $\varphi^{*(L)}$ відповідно) та ряду квазістаціонарних задач.

1. *Бомба А.Я., Пригорницький Д.О.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в двозв'язних областях // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки. – 2001. – Вип. 3. – С. 188-195.
2. *Бомба А.Я., Хлапук М.М., Сидорчук Б.П.* Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням малих деформацій середовища // Актуальні проблеми водного господарства. Т.1. Вид- во УДАВГ. – Рівне, 1997. – С. 11-15.

3. *Хлапук М.М., Бомба А.Я., Сидорчук Б.П.* Про моделювання взаємовпливу фільтрації та механічної суфозії // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Вісник УДАВГ. – Рівне, 1998. – С. 157-166.
4. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – Киев: Наукова думка, 1980. – 334 с.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
6. *Власюк А.П., Михальчук В.Г.* Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей. – Киев, 1991. – 56 с. – (Препринт АН Украины. Ин-т математики, 91.57).
7. *Годунов О.К., Прокопов Г.П.* О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7. – № 5. – С. 1031-1059.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
E-mail: u4f@ukr.net

Надійшла 14.03.2002

Пригорницкий Д.А. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ДВУСВЯЗНЫХ ДЕФОРМИРУЮЩИХСЯ СРЕДАХ // *Разработанный алгоритм численного решения модельных нелинейных краевых задач на квазиконформные отображения в ограниченных двумя еквипотенциальными линиями двусвязных неоднородных анизотропных деформирующихся средах перенесен на случай, когда за известной интегральной характеристикой решения (полным расходом) вместе с динамической сеткой находится один из граничных потенциалов.*

Prigornitsky D.O. MODIFICATION OF ALGORITHM OF NUMERICAL SOLUTION OF ONE CLASS NONLINEAR MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON QUASICONFORMAL MAPPINGS IN DOUBLY-CONNECTED WARPED MEDIUMS // *Developed algorithm of numerical solution of model nonlinear boundary value problems on quasiconformal mappings in doubly-connected inhomogeneous anisotropic areas, bounded by two lines of equal potential, modified for finding one of the boundary potentials by known integral attribute of solution (full charge).*

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Міжнародного університету "Рівненський економіко-гуманітарний інститут" ім. С.Дем'янчука, Волинського державного університету ім. Л.Українки Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С. Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції : 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

ISBN 966 - 7281 - 02 – 8

Наукове видання
"Волинський математичний вісник"
Випуск 9, 2002

Відповідальний за випуск Бомба А.Я.

Здано до друку . .200 р. Підписано до друку . .200 р.
Формат 1/8 Папір друк. 30×21 Ум. друк. арк. 4,38
Наклад 300 прим. Замовлення № –

Віддруковано в інформаційно-видавничому відділі
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, 33000, м. Рівне, вул. С.Бандери, 15