МО України
Рівненський державний педагогічний інститут

Рівненське відділення АН ВШ України

Рівненська та Волинська регіональні організації
Українського математичного товариства

Волинський математичний вісник

(Матеріали школи-семінару **"Прикладні проблеми математики та інформатики"**,
1-4 лютого 1996 р., м. Рівне)

ВИП. 2

Рівне 1995

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної і прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

Видається один раз у рік з 1994р. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N148 від 11.04.95р. Засновники: А. Я. Бомба (голова Рівненського регіонального відділення Українського математичного товариства), В. В. Ковтунець (член правління Українського математичного товариства), В. Ю. Слюсарчук (головний редактор "Волинського математичного вісника").

При виданні матеріалів школи-семінару редакція вирішила не брати на себе право істотнього редагування підготовлених авторами текстів.

Редакція приймає статті лише після оголошення математичним товариством чергового набору вісника. Контактні телефони:
26-04-44, 26-26-97.

Зміст

УДК 519.41/47

О.В.Крайчук, канд.фіз.-мат.наук (Рівне, Педінститут)

ГРУПИ З УМОВОЮ МІНІМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП НЕСКІНЧЕННОГО ІНДЕКСУ

Описані локально майже розв'язні групи з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу

Група G називається групою з умовою мінімальності для підгруп / для абелевих підгруп /, якщо не існує ні одного нескінченно спадного ланцюжка її підгруп /її абелевих підгруп/. Відомо [1], [2], що довільна локально розв'язна та довільна локально скінченна групи з умовою мінімальності для абелевих підгруп є черніковською групою. Оскільки кожна нескінченна нециклічна група G містить відмінну від одиниці підгрупу нескінченного індексу [3], то умову мінімальності можна накладати на різні системи підгруп нескінченного індексу групи G.

Означення 1. Група G називається групою з умовою мінімальності для підгруп нескінченного індексу, якщо не існує ні одного нескінченно спадного ланцюжка її підгруп нескінченного індексу.

Означення 2. Група G називається групою з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу, якщо не існує ні одного нескінченно спадного ланцюжка її абелевих підгруп нескінченного індексу.

Лема 1. Неперіодичні групи з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу вичерпуються групами таких типів:

1. G - центральне розширення нескінченної циклічної групи за допомогою скінченної групи;
2. G - розширення скінченної групи за допомогою нескінченної групи діедра.

Доведення. Достатність тут очевидна. Доведемо необхідність. Нехай G -неперіодична група з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу та g - її довільний елемент нескінченного порядку. Якщо $|G:\langle g\rangle| = \infty$, то

$$\langle g\rangle > \langle g^2\rangle > \langle g^4\rangle > \ldots > \langle g^{2^n}\rangle > \ldots, (n=1,2,\ldots)$$

нескінченно спадний ланцюжок абелевих підгруп нескінченного індексу і група G не задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу, що неможливо. Отже, $|G:\langle g\rangle| < \infty$ і тому G є скінченним розширенням нескінченної циклічної групи.

Нехай G - довільна група такого роду і H - її інваріантна нескінченна циклічна підгрупа. Централізатор $C_G(H)$ підгрупи H

в G інваріантний у групі G та має в ній індекс I або 2. У першому випадку група G є центральним розширенням нескінченної циклічної групи за допомогою скінченної групи. У цьому випадку неперіодична група G є скінченним розширенням свого центра і тому її елементи скінченного порядку утворять підгрупу інваріантну в G, фактор-група групи G по якій є групою без кручення / [I], наслідок 3.II./. Оскільки група, що розглядається, не має нескінченних підгруп нескінченного індексу, то ця підгрупа скінченна, а факторгрупа групи G по ній циклічна.

У другому випадку централізатор $C_G(H)$ має в G індекс 2 і його будова описана вище, тому в цьому випадку група G є, очевидно, розширенням скінченної групи за допомогою нескінченної групи діедра. Лема доведена.

Лема 2. Локально скінченна група тоді і тільки тоді є групою з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу, коли вона є черніковською групою.

Доведення. Достатність очевидна. Доведемо необхідність методом від супротивного. Нехай локально скінченна група G є групою з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу і не є черніковською групою. Тоді [2], група G не є групою з умовою мінімальності для абелевих підгруп і тому містить підгрупу

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots$$

де $A_i \ (i = 1, 2, \ldots)$ - циклічна група простого порядку. Але тоді

$$A^1 > A^2 > A^3 > \ldots > A^n > \ldots$$

де $A^i = A_{2i} \times A_{2i+2} \times \ldots \times A_{2i+k}$,

$i = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 2, 4, 6, \ldots$ нескінченно спадний ряд абелевих підгруп нескінченного індексу групи G. Отже, група G не є групою з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу, що суперечить умові леми.

Таким чином, наше припущення не вірне і G є черніковською групою. Лема доведена.

Теорема I. Локально майже розв'язні групи з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу вичерпуються групами таких типів :

I. G - центральне розширення нескінченної циклічної групи за допомогою скінченної групи.

2. G - розширення скінченної групи за допомогою нескінченної групи діедра.

3. G - черніковська група.

Доведення. Достатність тут очевидна. Доведемо необхідність. Якщо група G неперіодична або локально скінченна, то необхідність випливає безпосередньо із лем I та 2. Нехай G - періодична локально майже розв'язна не локально скінченна група з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу. Так як група G не локально скінченна, то деяка скінченна множина її елементів M породжує нескінченну групу $\langle M \rangle$, яка містить розв'язну підгрупу H скінченного індексу. Оскільки H періодична локально розв'язна група, то вона локально скінченна /[I], твердження I.I/ і тому за лемою 2 є черніковською групою. Але тоді нескінченна група $\langle M \rangle$ є скінченним розширенням черніковської групи H і тому сама - черніковська. А це неможливо, оскільки група $\langle M \rangle$ нескінченна і має скінченне число твірних елементів. Одержали протиріччя.

Таким чином, періодична локально майже розв'язна група G з умовою мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу є локально скінченною і тому за лемою 2 є черніковською групою. Теорема доведена.

Зауваження. Для довільної локально майже розв'язної групи наступні твердження рівносильні

I. Група G задовольняє умову мінімальності для підгруп нескінченного індексу.

2. Група G задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп нескінченного індексу.

Дійсно, очевидно, що із I випливає 2. Неважко переконатися, що всі типи груп із теореми I є групами з умовою мінімальності для підгруп нескінченного індексу, тому, із 2 випливає I.

I. Черников С.Н. группы с заданными свойствами системы подгрупп.- М.: Наука, I980.-384с.
2. Шунков В.П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп.- Алгебра и логика, I970, т.9, № 5, С.579-6I5.
3. Федоров Ю.Г. О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс.- Успехи мат.наук, I95I, т.6, № I, С.I87-I89.