МО України
Рівненський державний педагогічний інститут

Рівненське відділення АН ВШ України

Рівненська та Волинська регіональні організації
Українського математичного товариства

Волинський математичний вісник

(Матеріали школи-семінару **"Прикладні проблеми математики та інформатики"**,
1-4 лютого 1996 р., м. Рівне)

ВИП. 2

Рівне 1995

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної і прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

Видається один раз у рік з 1994р. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N148 від 11.04.95р. Засновники: А. Я. Бомба(голова Рівненського регіонального відділення Українського математичного товариства), В. В. Ковтунець(член правління Українського математичного товариства), В. Ю. Слюсарчук(головний редактор "Волинського математичного вісника").

При виданні матеріалів школи-семінару редакція вирішила не брати на себе право істотнього редагування підготовлених авторами текстів.

Редакція приймає статті лише після оголошення математичним товариством чергового набору вісника. Контактні телефони: 26-04-44, 26-26-97.

Зміст

УДК 539.3

А.О. Сяський, докт. техн. наук /Рівне, педінститут/

КОНТАКТ ЖОРСТКОГО ШТАМПА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ

Задача про тиск жорсткого штампа з кутовими точками на поверхню криволінійного отвору нескінченої пластинки зведена до системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з ядрами Гільберта. Встановлена структура розв'язку системи. Досліджений вплив форми отвору і величини зони контакту на напружений стан пластинки.

Розглянемо пружну нескінчену пластинку з гладким криволінійним отвором у вигляді правильного N -кутника /$N=2,3$ / із закругленими кутами, в який без тертя втискується силою P_0 жорсткий штамп з кутовими точками. Не зменшуючи загальності вважаємо, що отвір в пластинці симетричний відносно лінії дії сили, а кривини штампа і отвору в зоні контакту однакові.

Середню поверхню пластинки віднесемо до декартової системи координат /x, y / з початком в центрі отвору, а вісь абсцис направимо вздовж осі його симетрії. Нехай $z=\omega(\xi)=R_0\left(\xi+\frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}}\right)$ - функція, яка відображає область пластинки на зовнішність одиничного кола в комплексній площині $\xi=\rho e^{i\lambda}$, де /ρ, λ / - ортогональна полярна система координат; R_0 - характерний розмір отвору; ε - величина, що характеризує відхилення отвору в пластинці від кругового. Решта позначень в роботі загальноприйняті.

Напружений стан пластинки визначається функцією [I]

$$\varphi_0(\xi)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f_0(\tau)d\tau}{\tau-\xi}+\frac{P_0(N-2)}{2\pi(\varkappa+1)}\cdot\frac{1}{\xi^{N-1}}, \qquad /1/$$

де

$$f_0(\sigma)=i\int_{-\alpha_0}^{\lambda}\left(T_\rho^*+iS_{\rho\lambda}^*\right)e^{it}dt+\frac{P_0}{2\pi}\ln\sigma;$$

$$T_\rho^*+iS_{\rho\lambda}^*=\left(T_\rho+iS_{\rho\lambda}\right)\omega'(\sigma);\ \sigma=e^{i\lambda};\ \tau=e^{it}; \qquad /2/$$

$T_\rho, S_{\rho\lambda}$ - контактні зусилля під штампом; $\pm\alpha_0$ - образи кутових точок зоні контакту при відображенні $\omega(\xi)$.

Зміщення контура отвору в зоні контакту визначаються за формулою [I]

$$2G(u+iv)=(\varkappa+1)\varphi_0(\sigma)-f_0(\sigma)-\frac{1}{2\pi}\oint\left[\int_{-\alpha_0}^{\lambda}(T_\rho^*\sin t+S_{\rho\lambda}^*\cos t)\,dt\right]d\lambda \qquad /3/$$

Розділяючи в /3/ дійсні і уявні частини, знаходимо після певних [2] перетворень

$$u=\frac{1}{2Eh}\left\{(1-\nu)\left[f_1(\lambda)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}f_1(t)\,dt\right]+\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}f_2(t)\,\mathrm{ctg}\frac{\lambda-t}{2}\,dt-\right.$$

$$-\frac{2P_0}{\pi\alpha_0}\left[\frac{\alpha_0+\lambda}{2}\ln\left|\sin\frac{\alpha_0+\lambda}{2}\right|+\frac{\alpha_0-\lambda}{2}\ln\left|\sin\frac{\alpha_0-\lambda}{2}\right|\right]+$$

$$+\frac{P_0}{2\pi}\ln\left|\cos\frac{\lambda}{2}\right|-\frac{2P_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k+1)!}\left[\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi-\lambda}{2}\right)^{2k+1}+\right.\right. \qquad /4/$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\pi+\lambda}{2}\right)^{2k+1}\right]-\frac{1}{\alpha_0}\left[\left(\frac{\alpha_0-\lambda}{2}\right)^{2k+1}+\left(\frac{\alpha_0+\lambda}{2}\right)^{2k+1}\right]\right]+$$

$$\left.+\frac{P_0(1-\nu)(N-2)}{2\pi}\cos(N-2)\lambda\right\}; \qquad v=\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)f_2(\lambda)-\right.$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}f_1(t)\,\mathrm{ctg}\frac{\lambda-t}{2}\,dt+\frac{P_0(1+\nu)(N-2)}{2\pi}\sin(N-2)\lambda+$$

$$\left.+\frac{P_0(1-\nu)(\alpha_0-\pi)}{2\pi\alpha_0}\lambda\right]; \qquad \lambda\in[-\alpha_0;\alpha_0].$$

Тут введені позначення

$$f_1+if_2=i\int_{-\alpha_0}^{\lambda}(T_\rho^*+iS_{\rho\lambda}^*)e^{it}\,dt+i\frac{P_0}{2}\left(\frac{\lambda}{\alpha_0}+1\right);$$

B_{2k} – числа Бернуллі, причому

$$f_1(-\alpha_0)=f_1(\alpha_0)=f_2(-\alpha_0)=f_2(\alpha_0)=0.$$

Граничні умови задачі виберемо у вигляді рівності нормальних зміщень контурів пластинки і штампа. При відсутності тертя в зоні контакту ці умови приймають вигляд

$$(u-u_0)(\alpha\cos\lambda-\beta\sin\lambda)-v(\alpha\sin\lambda+\beta\cos\lambda)=0\ ;$$

$$f_1'(\lambda)(\alpha\cos\lambda-\beta\sin\lambda)+\left[f_2'(\lambda)-\frac{P_0}{2\alpha_0}\right](\alpha\sin\lambda+\beta\cos\lambda)=0, \qquad /5/$$

де $u_0=u(0)$ – зміщення штампа в напрямку дії сили; $\alpha+i\beta=\omega'(\sigma)$. Підстановка /4/ в /5/ приводить до системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з ядрами Гільберта відносно функцій $f_1(\lambda)$ і $f_2(\lambda)$. Проблема розв'язку таких систем в класі функцій обмежених на кінцях проміжку інтегрування методом колокації в задачах для гладких штампів вирішена в [2,3]. Для визначення постійної u_0 використовується умова рівноваги штампа [2]

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}(T_\rho^*\cos t-S_{\rho\lambda}^*\sin t)\,dt=-P_0\ . \qquad /6/$$

Якщо функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ будуть відомі, то компоненти напруженого стану на контурі отвору пластинки визначаються за формулами [3]

$$T_\rho=\frac{\left(f_2'-\frac{P_0}{2\alpha_0}\right)(\alpha\cos\lambda-\beta\sin\lambda)-f_1'(\alpha\sin\lambda+\beta\cos\lambda)}{\alpha^2+\beta^2}\ ;$$

$$T_\lambda=-T_\rho+4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(\sigma)/\omega'(\sigma)\right]\ ;\quad S_{\rho\lambda}=0\ . \qquad /7/$$

Для еліптичного отвору досліджено вплив на напружений стан пластинки форми отвору і величини зони контакту. Без особливих труднощів запропонований метод може бути перенесений на анізотропні пластинки з еліптичними отворами.

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
2. Сяський А.А. Проблемы контакта жесткого диска с криволинейным вырезом в бесконечной пластинке. – Ровно. 1993. – 12 с.– Деп в Укр ИНТЭИ 22.02.93, №227 – Ук 93.
3. Сяський А.А., Демчик С.П. О контакте цилиндрических тел с криволинейными границами. – Ровно, 1989. – 9с. Деп. в Укр НИИНТИ 20.09.89 №2057 – Ук 89.

УДК 539.3

В.А.Сяський, аспірант (Рівне, педінститут)
Т.Л.Мартинович, докт. фіз.-мат. наук (Львів, ЛДУ)

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ ТА ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ЧАСТКОВОМУ КОНТАКТУВАННІ ГРАНИЦЬ

Задача про контактну взаємодію криволінійного отвору нескінченої пластинки із жорстким диском зведена до системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з ядрами Гільберта відносно шуканих контактних напружень на контурі отвору. Встановлена структура розв'язку системи. Досліджено вплив форми отвору та зовнішнього навантаження на величину зони контакту та розподіл контактних напружень.

Розглянемо кусково-однорідну систему, що складається із безмежної ізотропної пластинки із гладким криволінійним отвором у вигляді N-кутника із закругленими кутами типу гіпотрохоїди, в який вставлено без зазору жорсткий криволінійний диск такої ж форми. Серединні площини пластинки і диска займають відповідно зовнішність S^- та внутрішність S^+ простого замкнутого контура L в комплексній площині $z=x+iy$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що вся система симетрична відносно осі Ox і знаходиться під дією однорідного напруженого стану "на нескінченності", який заданий головними напруженнями $N_1=N_1^\infty$ і $N_2=N_2^\infty$. Внаслідок дії зовнішнього навантаження пластинка і диск приходять в гладкий контакт на деяких невідомих ділянках L1 і L2 при наявності зон відставання. Зовнішнє навантаження на лінії контактування і на вільних берегах відсутнє.

Нехай функція $z=\omega(\zeta)=R_0\left(\zeta+\frac{\varepsilon}{\zeta^{N-1}}\right)$ (1)

здійснює конформне відображення зовнішності одиничного круга $|\zeta|>1$ в комплексній площині $\zeta=\rho e^{i\theta}$ на область S^-, тут R_0 – характерний розмір отвору; ε і N – параметри, які визначають форму отвору. [illegible] позначимо через [illegible], вважатимемо, що похідна $\omega'(\zeta)$ ніде не перетворюється в нуль в області $|\zeta|\geq 1$. Нехай L1+L2 є образом дійсного контура [illegible]. Деформований стан пластинки на контурі отвору визначається формулами [3]

$$U^* = \frac{1}{2i\mu}\Big[[illegible] - \frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1} [illegible] \, dt - \frac{1}{\pi}\int_{\gamma_2} [illegible](t)\,dt + P_1(A)\Big]; \quad (2)$$

$$V^* = \frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)S^*_{\rho\lambda} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_*} T^*_\rho(t)\,ctg\frac{\lambda-t}{2}dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_*} S^*_{\rho\lambda}(t)dt + P_2(\lambda)\right]; \qquad (3)$$

тут $T^*_\rho + iS^*_{\rho\lambda} = \left[T^-_\rho + iS^-_{\rho\lambda}\right]\omega'(\sigma)$; (4)

$$U^* + iV^* = \left[U + iV\right]\omega'(\sigma) \; ; \qquad (5)$$

$$U+iV=\left[\frac{u_n}{\tilde{\rho}} + \frac{du_\tau}{ds}\right] + i\left[\frac{u_\tau}{\tilde{\rho}} - \frac{du_n}{ds}\right] , \qquad (6)$$

де T^-_ρ і $S^-_{\rho\lambda}$ – контактні нормальні і дотичні відповідно зусилля, що діють на контурі отвору; P_1 і P_2 – деякі дійсні регулярні функції, які визначаються формою отвору та прикладеним зовнішнім навантаженням ; u_n і u_τ – пружні переміщення точок контура отвору по нормалі і дотичній відповідно ; $\tilde{\rho}$ – радіус кривизни контура L₁+L₂.

Граничні умови задачі при відсутності тертя на ділянці контакту можна записати у вигляді

$$S^-_{\rho\lambda} = 0 \; ; \qquad k^-(s) = k^+(s) \; , \qquad (7) \; ; \; (8)$$

де $k^-(s)$ і $k^+(s)$ – кривизни границь відповідно пластинки та диска; s – афіна точки на контурі L₁+L₂.

Оскільки криволінійний диск є жорстким та прийнявши до уваги відомі співвідношення для отворів виду (1)

$$dS = |\omega'(\sigma)|d\lambda = \tilde{\rho}(s)d\theta \; ; \qquad (9)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{(1-N)(\alpha^2+\beta^2) + N\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \; ; \qquad (10)$$

$$\alpha + i\beta = \omega'(\sigma) \; , \qquad (11)$$

отримаємо остаточний вигляд граничних умов

$$S^-_{\rho\lambda} = 0 \; ; \qquad \Delta k^-(s) = \frac{U}{\tilde{\rho}(s)} - \frac{dV}{ds} - \frac{V}{\tilde{\rho}(s)}\cdot\frac{d\tilde{\rho}}{ds} = 0 \; , \qquad (7') \; ; \; (12)$$

де $\Delta k^-(s)$ – зміна кривизни контура пластинки на ділянці контакту внаслідок деформації.

Підставивши (2), (3) із врахуванням (4), (5), (6) у (12) отримаємо систему двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь для визначення невідомих контактних зусиль

$$\begin{cases} \left[(1-\nu)T^*_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_*} S^*_{\rho\lambda}(t)\,ctg\frac{\lambda-t}{2}dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_*} T^*_\rho(t)dt + P_1(\lambda)\right]D_1 + \left[(1-\nu)S^*_{\rho\lambda}(\lambda) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_*} T^*_\rho(t)\,ctg\frac{\lambda-t}{2}dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_*} S^*_{\rho\lambda}(t)dt + P_2(\lambda)\right]D_2 + \frac{d}{d\lambda}\left[(1-\nu)T^*_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_*} S^*_{\rho\lambda}(t)\cdot\right. \\ \left. \cdot ctg\frac{\lambda-t}{2}dt + P_1(\lambda)\right]D_3 + \frac{d}{d\lambda}\left[-(1-\nu)S^*_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_*} T^*_\rho(t)\,ctg\frac{\lambda-t}{2}dt - P_2(\lambda)\right]D_4 = 0 \; ; \end{cases}$$

$$\left. T^*_\rho(\lambda)\beta(\lambda) = S^*_{\rho\lambda}(\lambda)\alpha(\lambda)\ ,\ \lambda\in\gamma_*\ , \right. \qquad (13)\ ;\ (14)$$

де D_1, D_2, D_3, D_4 – деякі дійсні функції від λ, які визначаються формою отвору; $\gamma^*=[-\alpha_0;\alpha_0]\cup[\pi-\beta_0;\pi+\beta_0]$; $\pm\alpha_0$, $\pm\beta_0$ – значення полярного кута точок контура γ^*, що відповідають кінцям ділянок контакту L_1 і L_2.

Для знаходження величини невідомих ділянок контактування границь приймаємо, що переміщення точок контура, які відповідають кутам $\theta=0$ та $\theta=\pi$, дорівнюють нулю. Використавши розв'язки першої і другої основних граничних задач [2], визначаємо

$$u_n(0)=\frac{1}{8\mu\pi}\left[(1-æ)\int_{\gamma_*}F^*_1(t)dt-(1+æ)\int_{\gamma_*}F^*_2(t)\mathrm{ctg}\frac{t}{2}\,dt\right]+\frac{1}{4\mu}\left[2G^*_1(0)-F^*_1(0)\right] \qquad (15)$$

$$u_n(\pi)=\frac{1}{8\mu\pi}\left[(1-æ)\int_{\gamma_*}F^*_1(t)dt+(1+æ)\int_{\gamma_*}F^*_2(t)\mathrm{tg}\frac{t}{2}\,dt\right]+\frac{1}{4\mu}\left[2G^*_1(\pi)-F^*_1(\pi)\right] \qquad (16)$$

тут
$$F^*_1(\lambda) = -\int_{-\alpha_0}^{\lambda} T_\rho(t)(\beta\cos t+\alpha\sin t)dt - (1+\varepsilon)N_2\cos\lambda\ ; \qquad (17)$$

$$F^*_2(\lambda) = \int_{-\alpha_0}^{\lambda} T_\rho(t)(\alpha\cos t-\beta\sin t)dt - (1-\varepsilon)N_1\sin\lambda\ ; \qquad (18)$$

$$G^*_1(\lambda) = \left[\frac{1}{4}(N_1+N_2)(æ-1) + \frac{1}{2}(N_1-N_2)\right](1+\varepsilon)\cos\lambda\ . \qquad (19)$$

Співвідношення (13),(14),(15) і (16) складають повну систему рівнянь для визначення зони контакту і напружень на лінії розмежування матеріалів.

В якості прикладу у випадку симетричного напруженого стану пластинки методом граничної коллокації Мультоппа - Каландія [1] знайдено величину ділянки контакту границь та визначені контактні зусилля на контурі L_1+L_2. Зона контакту визначається способом послідовних наближень. Досліджено вплив форми отвору та зовнішнього навантаження на напружений стан пластинки.

1. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. - М.: Наука, 1973. - 304 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической упругости. - М.: Наука, 1966. - 708 с.
3. Панасюк В.В, Теплий М.И. Деякі контактні задачі теорії пружності. - К.:Наук. думка, 1975. - 196 с.