

МО України
Рівненський державний педагогічний інститут

Рівненське відділення АН ВШ України

Рівненська та Волинська регіональні організації
Українського математичного товариства

Волинський математичний вісник

(Матеріали школи-семінару “Прикладні проблеми
математики та інформатики”,
1-4 лютого 1996 р., м. Рівне)

ВИП. 2

Рівне 1995

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної і прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

Редакційна колегія:

В. Ю. Слюсарчук (головний редактор),
А. Я. Бомба (відповідальний за випуск),
В. О. Вальковський, М. М. Войтович,
В. Й. Горбайчук, В. В. Ковтунець,
І. В. Коробчук, А. О. Сяський, Г. П. Хома.

Видається один раз у рік з 1994р. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.95р. Засновники: А. Я. Бомба (голова Рівненського регіонального відділення Українського математичного товариства), В. В. Ковтунець (член правління Українського математичного товариства), В. Ю. Слюсарчук (головний редактор "Волинського математичного вісника").

При виданні матеріалів школи-семінару редакція вирішила не брати на себе право істотного редагування підготовлених авторами текстів.

Редакція приймає статті лише після оголошення математичним товариством чергового набору вісника. Контактні телефони:
26-04-44, 26-26-97.

с Українське математичне товариство (Рівненська регіональна організація).

Зміст

1. Антонова Т. М. Один одновимірний аналог теореми про рівномірну просту параболічну область збіжності ланцюгових дробів.	6
2. Бартіш М. Я., Чипурко А. І. Про один метод розв'язування задачі про найменші квадрати.	9
3. Бернакевич І. Є. Чисельне розв'язування початково-крайових задач акустики.	12
4. Боднар Д. І., Дубиняк О. С. Розвинення відношення функції Аппеля в гіллясті ланцюгові дроби.	15
5. Бомба А. Я., Каштан С. С., Михальчук В. В. Про наближений метод конформних відображень розв'язування одного класу крайових задач.	18
6. Бомба А. Я., Хлапук М. М., Сидорчук Б. П. Про моделювання і розв'язання одного класу локально збурених нелінійних задач.	22
7. Бомба А. Я., Щодро О. Є., Барановський С. В. Про моделювання і дослідження сингулярно збурених дифузійних процесів в контрастних середовищах.	25
8. Вагін П. П., Пука Є. О., Шинкаренко Г. А. Підсистема накопичення інформації для ведення моніторингу земельних ресурсів.	28
9. Вальковський В. О., Курбацький О. М., Фарід Т. М. Формалізація і оптимізація процесів документообігу засобами схем потоків даних.	31
10. Вальковський В. О., Зербіно Д. Д. Організація асинхронного управління процесом розподіленої обробки інформації.	34
11. Вальковський В. О. Аксиоматика і синтез програм для одного класу систем реального часу.	38
12. Вовк В. Д., Голуб В. М., Дубовик А. В., Копитко М. Ф. Інформаційна система "Землевласники і землекористувачі Львівщини".	40
13. Герасимик Т. М., Данько О. І., Малашнік О. П., Шинкаренко Г. А. Чисельне розв'язування варіаційних задач п'єзоелектрики.	43
14. Герасименко В. І., Сташенко М. О. Кінетична границя рівноважних станів.	46
15. Гоєнко Н. П. Алгоритм розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли в гіллястий ланцюговий дріб.	49
16. Горбайчук В. Я., Піддубний О. М. Теореми типу Харді-Літтлвуда при додаткових умовах на задані величини. Граничні властивості.	52
17. Городецький В. В., Готинчан Т. І. Властивість локалізації для лінійних методів сумування формальних рядів Фур'є-Ерміта та Фур'є-Лагерра.	55
18. Готинчан Г. І., Ясинський В. К. Теорема існування та єдиності розв'язку для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь.	58
19. Дейнека О. Ю. Обмежені розв'язки крайових задач для систем гіперболічних рівнянь.	61
20. Демчик І. І. Узагальнена математична модель процесів магнітного фільтрування та її розв'язки.	64
21. Дияк І. І., Головач Н. П. Застосування прямого методу граничних елементів для чисельного дослідження деяких прикладних задач.	67
22. Дияк І. І., Макар В. М. Чисельне дослідження динамічної за-	

дачі теорії пружності для анізотропних тіл.	70
23. Іванова Н. В. Дослідження пружної рівноваги пластинок складної форми методом довільних кривих.	73
24. Івасишєв С. Д., Дронь В. С. Деякі властивості фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова.	76
25. Івасишин А. М. Про властивості класичних розв'язків одного класу загальних еліптичних систем рівнянь.	79
26. Іваськевич М. І. Розв'язування одного варіанту задачі нестационарних коливань.	82
27. Зєрбіно Д. Д. Ралізація двійкової арифметики засобами клітинних автоматів.	84
28. Каленюк П. І., Нитребиц З. М., Сохан П. А. Задача Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними безмежного порядку.	87
29. Ковтунєць В. В., Лотюк Ю. Г. Побудова многочлена найкращого рівномірного наближення розв'язку одного диференціального рівняння.	90
30. Козарєвська Ю. С., Шинкаренко Г. А. Скінченно-елементні апроксимації Ерміта для одновимірних задач міграції домішок.	93
31. Койфман Ч. Н. Математична модель взаємодії середовищ з тонкими прошарками.	96
32. Колупаєв Б. С., Борджік М. А., Гусаковський С. М. Математичне моделювання процесів перенесення теплової енергії в гетерогенних системах на основі лінійних аморфних полімерів.	99
33. Конєт І. М., Ленюк М. П. Нестационарні температурні поля в кусковооднорідних парашутних просторах.	104
34. Крайчук О. В. Групи з умовою мінімальності для підгруп нескінченного індексу.	107
35. Кузьменко А. П., Бомба А. Я., Савчук Я. Р., Ковальчук О. В. Про метод Р-трансформації розв'язання одного класу крайових задач з розривними коефіцієнтами.	110
36. Кузьменко А. П., Гладка О. М. Розв'язок крайових задач для рівняння дивергентного типу із розривними коефіцієнтами у кільці.	113
37. Кундрат М. М. Дослідження локального руйнування композиції з включенням.	116
38. Ленюк М. П. Підсумовування однієї групи функціональних рядів.	119
39. Олійник Т. М., Остудін Б. А. Чисельне розв'язування деяких початково-крайових задач теплопровідності методом інтегральних рівнянь.	122
40. Петрівський Я. Б., Ковальчук О. Р., Хома Г. П. Єдність крайової періодичної задачі для інтегро-диференціального рівняння другого порядку гіперболічного типу.	125
41. Петрівський Я. Б. Гладкі розв'язки квазілінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку гіперболічного типу.	127
42. Петрик М. Р. Осесиметрична квазілінійна математична модель фільтрації та відтиску неоднорідних високодисперсних середовищ у гвинтових конічних фільтрувальних апаратах.	130
43. Пізир Я. В., Попов Б. О. Побудова многочленних ермітово-Чебишевських сплайнів третього степеня.	134
44. Савула Я. Г., Дяконюк Л. М. Чисельне моделювання тепло-масопереносу у середовищі з тонким покриттям.	137
45. Слосарчук В. Ю. Оборотність лінійних автономних диференці-	

ально-різнених операторів	140
46. Слюсарчук В. Ю. Нелінійні диференціальні рівняння з асимптотично стійкими розв'язками.	143
47. Слюсарчук В. К., Мартинюк П. Н. Про асимптотичне найкраще рівномірне наближення дробово-раціональними функціями деяких спеціальних і елементарних функцій.	146
48. Сяський А. О. Контакт жорсткого штампа з криволінійним отвором нескінченної пластинки.	149
49. Сяський В. А., Мартинович Т. Л. Пружна рівновага пластинки з криволінійним отвором та включенням при частковому контактуванні границь.	152
50. Талесів П. О. Основна система диференціальних рівнянь точкової відповідності між гіперрозподілами просторів проєктивної зв'язності.	155
51. Тарангул О. В., Матіючук М. І. Про одну нелокальну параболічну крайову задачу.	159
52. Тарасюк Р. І. Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами.	162
53. Танія Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Нахолок Б. Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра.	165
54. Тополок Ю. П. Проблеми розв'язування задач синтезу за заданою амплітудною діаграмою напрямленості.	168
55. Турбал Ю. В. Оцінка параметрів моделі радіоактивного забруднення методом моментів.	171
56. Каркевич Ю. І. Про наближення функцій класу C_n операторами, що породжуються прямокутними - методами підсумовування інтегралів.	174
57. Хома Г. П., Вотьок А. О., Цинайко П. В. Узагальнений розв'язок однієї мішаної задачі.	177
58. Хома А. Г., Хома Н. Г., Петрівський Я. Б. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі.	179
59. Шеремета М. М., Воднар Р. Д. Рациональна апроксимація на $[0, 1]$ аналітичних в крузі функцій.	181
60. Янчук П. С. Апроксимаційно-ітеративні схеми кусково-многочленного наближення.	184
61. Янчук П. С., Демчук О. В., Возняк П. В. Апроксимаційно-ітеративний метод на основі ортогональних многочленів Якобі.	188
62. Янчук П. С., Шпортько О. В. Кусково-многочленне наближення розв'язків задачі Дірікле в L -подібних областях.	191
63. Ясинський В. К., Юрченко І. В. Теорема існування та єдиності для стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими функціоналами.	194
64. Ясинський І. В., Ясинський І. В. Властивості розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з нескінченною післядією.	197
Анотації	200

УДК 539.3

А.О. Сяський, докт. техн. наук /Рівне, педінститут/

КОНТАКТ ЖОРСТКОГО ШТАМПА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ
НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ

Задача про тиск жорсткого штампа з кутовими точками на поверхню криволінійного отвору нескінченної пластинки зведена до системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з ядрами Гільберта. Встановлена структура розв'язку системи. Досліджений вплив форми отвору і величини зони контакту на напружений стан пластинки.

Розглянемо пружну нескінчену пластинку з гладким криволінійним отвором у вигляді правильного N -кутника ($N=2,3$) із закругленими кутами, в якій без тертя втискується силою P_0 жорсткий штамп з кутовими точками. Не зменшуючи загальності вважаємо, що отвір в пластинці симетричний відносно лінії дії сили, а кривини штампа і отвору в зоні контакту однакові.

Середню поверхню пластинки віднесемо до декартової системи координат (x, y) з початком в центрі отвору, а вісь абсцис направимо вздовж осі його симетрії. Нехай $z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\xi}{\xi^{N-1}} \right)$ - функція, яка відображає область пластинки на зовнішність одиничного кола в комплексній площині $\xi = \rho e^{i\alpha}$, де (ρ, α) - ортогональна полярна система координат; R_0 - характерний розмір отвору; ϵ - величина, що характеризує відхилення отвору в пластинці від кругового. Решта позначень в роботі загальноприйняті.

Напружений стан пластинки визначається функцією [1]

$$\varphi_0(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f_0(\tau) d\tau}{\tau - \xi} + \frac{P_0(N-2)}{2\pi(N+1)} \cdot \frac{1}{\xi^{N-1}}, \quad (1)$$

де

$$f_0(\sigma) = i \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (T_p^* + i S_{p\alpha}^*) e^{it} dt + \frac{P_0}{2\pi} \ln \sigma;$$

$$T_p^* + i S_{p\alpha}^* = (T_p + i S_{p\alpha}) \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\alpha}; \quad \tau = e^{it}; \quad (2)$$

$T_p, S_{p\alpha}$ - контактні зусилля під штампом; $\pm \alpha_0$ - образи кутів

вих точок зони контакту при відображенні $\omega(\xi)$.

Зміщення контура отвору в зоні контакту визначаються за формулою [1]

$$2G(u+iV) = (\alpha+1)\varphi_0(\sigma) - f_0(\sigma) - \frac{1}{2\pi} \oint_{-\alpha_0}^{\alpha} \left[(T_p^* \sin t + S_{p\lambda}^* \cos t) dt \right] d\lambda \quad /3/$$

Розділяючи в /3/ дійсні і уявні частини, знаходимо після певних [2] перетворень

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2Eh} \left\{ (1-\nu) \left[f_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1(t) dt \right] + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2(t) \operatorname{ctg} \frac{\alpha-t}{2} dt - \right. \\ & - \frac{2P_0}{\pi \alpha_0} \left[\frac{\alpha_0+\lambda}{2} \ln \left| \sin \frac{\alpha_0+\lambda}{2} \right| + \frac{\alpha_0-\lambda}{2} \ln \left| \sin \frac{\alpha_0-\lambda}{2} \right| \right] + \\ & + \frac{P_0}{2\pi} \ln \left| \cos \frac{\lambda}{2} \right| - \frac{2P_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k+1)!} \left[\frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\pi-\lambda}{2} \right)^{2k+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\pi+\lambda}{2} \right)^{2k+1} \right] - \frac{1}{\alpha_0} \left[\left(\frac{\alpha_0-\lambda}{2} \right)^{2k+1} + \left(\frac{\alpha_0+\lambda}{2} \right)^{2k+1} \right] \right] + \\ & + \frac{P_0(1-\nu)(N-2)}{2\pi} \cos(N-2)\lambda \left. \right\}; \quad V = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) f_2(\alpha) - \right. \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1(t) \operatorname{ctg} \frac{\alpha-t}{2} dt + \frac{P_0(1+\nu)(N-2)}{2\pi} \sin(N-2)\lambda + \\ & \left. + \frac{P_0(1-\nu)(\alpha_0-\pi)}{2\pi \alpha_0} \lambda \right]; \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]. \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$f_1 + i f_2 = i \int_{-\alpha_0}^{\alpha} (T_p^* + i S_{p\lambda}^*) e^{it} dt + i \frac{P_0}{2} \left(\frac{\lambda}{\alpha_0} + 1 \right);$$

B_{2k} - числа Бернуллі, причому

$$f_1(-\alpha_0) = f_1(\alpha_0) = f_2(-\alpha_0) = f_2(\alpha_0) = 0.$$

Граничні умови задачі висеремо у вигляді рівності нормальних зміщень контурів пластинки і штампа. При відсутності

тертя в зоні контакту ці умови приймають вигляд

$$(u-u_0)(\alpha \cos \lambda - \beta \sin \lambda) - V(\alpha \sin \lambda + \beta \cos \lambda) = 0; \quad /5/$$

$$f_1'(\lambda)(\alpha \cos \lambda - \beta \sin \lambda) + [f_2'(\lambda) - \frac{P_0}{2\alpha_0}](\alpha \sin \lambda + \beta \cos \lambda) = 0,$$

де $u_0 = u(0)$ - зміщення штампів в напрямку дії сили; $\alpha + i\beta = \omega'(\sigma)$. Підстановка /4/ в /5/ приводить до системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з ядрами Гільберта відносно функцій $f_1(\lambda)$ і $f_2(\lambda)$. Проблема розв'язку таких систем в класі функцій обмежених на кінцях проміжку інтегрування методом колокації в задачах для гладких штампів вирішена в [2,3]. Для визначення постійної U_0 використовується умова рівноваги штампів [2]

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (T_p^* \cos t - S_{p\lambda}^* \sin t) dt = -P_0. \quad /6/$$

Якщо функції $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ будуть відомі, то компоненти напруженого стану на контурі отвору пластинки визначаються за формулами [3]

$$T_p = \frac{(f_2' - \frac{P_0}{2\alpha_0})(\alpha \cos \lambda - \beta \sin \lambda) - f_1'(\alpha \sin \lambda + \beta \cos \lambda)}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad /7/$$

$$T_\lambda = -T_p + 4 \operatorname{Re}[\psi'(\sigma)/\omega'(\sigma)]; \quad S_{p\lambda} = 0.$$

Для еліптичного отвору досліджено вплив на напружений стан пластинки форми отвору і величини зони контакту. Без особливих труднощів зазначений метод може бути перенесений на анізотропні пластинки з еліптичними отворами.

1. Мусхелішвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1968. - 708 с.
2. Сяський А.А. Проблемы контакта жесткого диска с криволинейным вырезом в бесконечной пластинке. - Ровно, 1993. - 12 с. Деп. в Укр. ИНТЭИ 22.02.93, №227 - Ук 93.
3. Сяський А.А., Демчик С.П. О контакте цилиндрических тел с криволинейными границами. - Ровно, 1989. - 9с. Деп. в Укр. НИИИТИ 20.09.89 №2057 - Ук 89.

УДК 539.3

В.А.Сявський, аспірант (Рівне, педінститут)

Т.І.Мартинюк, докт. фіз.-мат. наук (Львів, ЛІІ)

СТРУЖКА РІВНОВАГА ПЛАСТИКИ В КРИВОЛІНІЙНОМУ ОТВОРОМ ТА ВИКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ЧАСТКОВОМУ КОНТАКТУВАННІ ГРАНИЦЬ

Задача про контактну взаємодію криволінійного отвору нескінченної пластинки із жорстким диском зведена до системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з ядрами Гільберта відносно шуканих контактних напружень на контурі отвору. Встановлено структуру розв'язку системи. Досліджено вплив форми отвору та зовнішнього навантаження на величину сили контакту та розподіл контактних напружень.

Розглянемо кусково-однорідну систему, що складається із склеєної частинної пластинки із гладким криволінійним отвором у вигляді N -кутника із закругленими кутами типу випостроєди, в який вставлено без зазору жорсткий криволінійний диск такої ж форми. Серединні площини пластинки і диска займають відповідно зовнішність E^+ та внутрішність E^- простого зв'язного контуру L в комплексній площині $z=x+iy$. Не обмежуючи загальності, вважимо, що дана система симетрична відносно осі Ox і знаходиться під дією однорідного напруженого стану "чи незміцненості", який заданий головними напруженнями $N_1=N_1^{(0)}$ і $N_2=N_2^{(0)}$. Внаслідок дії зовнішнього навантаження пластинка і диск утворюють в гладкій частині на деяких розділках ділянках L_1 і L_2 при взаємності кон'тактування. Зовнішнє навантаження на лінії контактування і на ядрах контакту відсутнє.

$$\text{Нехай функція } \varphi = z - \alpha_0 + i\alpha_1 \left(\frac{z}{\rho} + \frac{\bar{z}}{\bar{\rho}} \right) \quad (1)$$

відображає контурне відображення зовнішності одностовп'ятого круга $|z| > 1$ в комплексній площині $z = x + iy$ на область E^+ , тут R_0 - характерний радіус отвору; α_0 і α_1 - параметри, які визначають форму отвору. Залежність $\varphi(z)$ позначимо через φ . Значитимемо, що прихідна по z функція $\varphi'(z)$ відображається в нуль в області E^+ . Нехай L_1 і L_2 є образом деякого контуру γ' . Мероморфною стан пластинки на контурі отвору визначається формулами (2)

$$U^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} (Q^+ - Q^-) dz + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma'} \frac{N_1^{(0)} + N_2^{(0)}}{z} dz + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma'} \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{z} dz + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma'} \frac{Q_1^{(0)}(t) dt + P_1(\lambda)}{z} dz \quad (2)$$

$$V^* = \frac{1}{2\pi\beta} \left[(1-\nu) S_{\rho\lambda}^* - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_+} T_{\rho}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_+} S_{\rho\lambda}^*(t) dt + P_2(\lambda) \right]; \quad (3)$$

$$\text{тут } T_{\rho}^* + i S_{\rho\lambda}^* = \left[T_{\rho}^- + i S_{\rho\lambda}^- \right] \omega'(\sigma); \quad (4)$$

$$U^* + iV^* = [U + iV] \omega'(\sigma); \quad (5)$$

$$U + iV = \left[\frac{u_n}{\beta} + \frac{du_n}{ds} \right] + i \left[\frac{u_c}{\beta} - \frac{du_n}{ds} \right], \quad (6)$$

де T_{ρ}^- і $S_{\rho\lambda}^-$ - контактні нормальні і дотичні відповідно зусилля, що діють на контурі отвору; P_1 ; P_2 - деякі дійсні регулярні функції, які визначаються формою отвору та прикладеним зовнішнім навантаженням; u_n ; u_c - дужки переміщення точок контура отвору по нормалі і дотичній відповідно; β - радіус кривизни контура L_1+L_2 .

Граничні умови задачі при відсутності тертя на ділянці контакту можна записати у вигляді

$$S_{\rho\lambda}^- = 0; \quad K^-(s) = K^+(s), \quad (7); (8)$$

де $K^-(s)$ і $K^+(s)$ - кривими границь відповідно пластинки та диска; s - афінс точки на контурі L_1+L_2 .

Оскільки криволінійний диск є жорстким, то прийнявши до уваги відомі співвідношення для отворів виду (1)

$$ds = |\omega'(\sigma)| d\lambda = \beta(s) d\theta; \quad (9)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{(1-N)(\alpha^2 + \beta^2) + N\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad (10)$$

$$\alpha + i\beta = \omega'(\sigma), \quad (11)$$

отримаємо остаточний вигляд граничних умов

$$S_{\rho\lambda}^- = 0; \quad \Delta K^-(s) = \frac{U}{\beta(s)} - \frac{dV}{ds} - \frac{V}{\beta(s)} \frac{d\beta}{ds} = 0, \quad (7'); (12)$$

де $\Delta K^-(s)$ - зміна кривизни контура пластинки на ділянці контакту внаслідок деформації.

Підставивши (2), (3) та врахувавши (4), (5), (6) у (12) отримаємо систему двох лінійних інтегро-диференціальних рівнянь для визначення невідомих контактних зусиль

$$\left[\begin{aligned} & \left[(1-\nu) T_{\rho}^*(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_+} S_{\rho\lambda}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_+} T_{\rho}^*(t) dt + P_1(\lambda) \right] D_1 + \left[(1-\nu) S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_+} T_{\rho}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_+} S_{\rho\lambda}^*(t) dt + P_2(\lambda) \right] D_2 + \frac{d}{d\lambda} \left[(1-\nu) T_{\rho}^*(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_+} S_{\rho\lambda}^*(t) \right. \\ & \left. \cdot \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_1(\lambda) \right] D_3 + \frac{d}{d\lambda} \left[(1-\nu) S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_+} T_{\rho}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - P_2(\lambda) \right] D_4 = 0; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_{\rho}^*(\lambda)\beta(\lambda) &= S_{\rho\lambda}^*(\lambda)\alpha(\lambda), \quad \lambda \in \gamma^*, \end{aligned} \right. \quad (13); (14)$$

де D_1, D_2, D_3, D_4 - деякі дійсні функції від λ , які визначаються формою отвору; $\gamma^* = [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$; $\pm\alpha_0, \pm\beta_0$ - значення полярного кута точок контура γ^* , що відповідають кінцям ділянок контакту L_1 і L_2 .

Для знаходження величини невідомих ділянок контактування границь приймаємо, що переміщення точок контура, які відповідають кутам $\theta=0$ та $\theta=\pi$, дорівнюють нулю. Використавши розв'язки першої і другої основних граничних задач [2], визначимо

$$u_n(0) = \frac{1}{8\mu\pi} \left[(1-\varepsilon) \int_{\gamma^*} F_1^*(t) dt - (1+\varepsilon) \int_{\gamma^*} F_2^*(t) t g_2^{\pm} dt \right] + \frac{1}{4\mu} [2G_1^*(0) - F_1^*(0)] \quad (15)$$

$$u_n(\pi) = \frac{1}{8\mu\pi} \left[(1-\varepsilon) \int_{\gamma^*} F_1^*(t) dt + (1+\varepsilon) \int_{\gamma^*} F_2^*(t) t g_2^{\pm} dt \right] + \frac{1}{4\mu} [2G_1^*(\pi) - F_1^*(\pi)] \quad (16)$$

$$\text{тут } F_1^*(\lambda) = - \int_{-\alpha_0}^{\lambda} T_{\rho}(t) (\beta \cos t + \alpha \sin t) dt - (1+\varepsilon) N_2 \cos \lambda; \quad (17)$$

$$F_2^*(\lambda) = \int_{-\alpha_0}^{\lambda} T_{\rho}(t) (\alpha \cos t - \beta \sin t) dt - (1-\varepsilon) N_1 \sin \lambda; \quad (18)$$

$$G_1^*(\lambda) = \left[\frac{1}{4} (N_1 + N_2) (\varepsilon - 1) + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \right] (1 + \varepsilon) \cos \lambda. \quad (19)$$

Співвідношення (13), (14), (15) і (16) складають повну систему рівнянь для визначення зони контакту і напружень на лінії розмежування матеріалів.

В якості прикладу у випадку симетричного напруженого стану пластинки методом граничної коллокації Мультиппа - Каландія [1] знайдено величину ділянки контакту границь та визначені контактні зусилля на контурі $L_1 + L_2$. Зона контакту визначається способом послідовних наближень. Досліджено вплив форми отвору та зовнішнього навантаження на напружений стан пластинки.

1. Каландія А.И. Математические методы двумерной упругости. - М.: Наука, 1973. - 304 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической упругости. - М.: Наука, 1966. - 708 с.
3. Панесик В.В, Тейлор М.И. Деякі контакті задачі теорії пружності. - К.:Наук. думка, 1975. - 196 с.