МО України
Рівненський державний педагогічний інститут

Рівненське відділення АН ВШ України

Рівненська та Волинська регіональні організації
Українського математичного товариства

# Волинський математичний вісник

(Матеріали школи-семінару **"Прикладні проблеми математики та інформатики"**,
1-4 лютого 1996 р., м. Рівне)

ВИП. 2

Рівне 1995

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної і прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.



Видається один раз у рік з 1994р. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N148 від 11.04.95р. Засновники: А. Я. Бомба(голова Рівненського регіонального відділення Українського математичного товариства), В. В. Ковтунець(член правління Українського математичного товариства), В. Ю. Слюсарчук(головний редактор "Волинського математичного вісника").

При виданні матеріалів школи-семінару редакція вирішила не брати на себе право істотнього редагування підготовлених авторами текстів.

Редакція приймає статті лише після оголошення математичним товариством чергового набору вісника. Контактні телефони:
26-04-44, 26-26-97.

## Зміст

УДК 519.6

Н.С. Янчук, канд.фіз.-мат.наук (Рівне,педінститут)
О.В.Шпортько, студент (Рівне,педінститут)

# Кусково - многочленне наближення розв'язків задачі Діріхле в L-подібних областях.

**В даній роботі описано схему кусково - многочленного наближення розв'язків задачі Діріхле для рівняння Пуассона і їх похідних. Отримані результати є оптимальними за порядком. Обчислювальні схеми були побудовані на основі многочленів 5-го,7-го та 9-го степенів.**

Розглянемо область, що складається з квадратів однакових розмірів. Припустимо, що ці квадрати утворені двома сімействами прямих $x=x_i h$, $i=0,1,...,M$ та $y=y_j h$, $j=0,1,...,N$. Точки перетину цих прямих назвемо вузлами сітки, а їх сукупність - сіткою. Вузол назвемо внутрішнім, якщо він належить внутрішності даної області G і граничним, якщо він належить границі цієї області. Околом внутрішнього вузла $(x_i,y_j)$ назвемо квадрат $\Pi_{ij}=(x_i-h,x_i+h)*(y_j-h,y_j+h)$ і вважатимемо, що окіл кожного внутрішнього вузла належить області G. Крім того припустимо, що область G є зв'язною, тобто будь-які два внутрішні вузли можна сполучити ламаною з вершинами лише у внутрішніх вузлах сітки.

В описаній області будемо розв'язувати задачу Діріхле:

$$-\Delta U=f(x,y),\ (x,y)\in G, \tag{1}$$

$$U(x,y)=g(x,y),\ (x,y)\in \Gamma, \tag{2}$$

де $\Gamma$-границя області G. Алгоритм наближеного розв'язання цієї задачі належить першому з авторів, створення програмного комплексу і чисельний експеримент - другому.

Запропонований алгоритм, як за способом реалізації, так і за способом отримання оцінок відрізняється від усіх відомих авторам методів . Метод характеризується спосіб оптимальними по-порядку оцінками та економним представленням розв'язків.

Для прикладу ми розглянемо кусково-многочленне наближення на основі многочленів 5-го степеня. В околі довільного вузла $(x_k, y_l)$ наближений розв'язок будемо записувати у вигляді

$$U^{(k,l)}(x, y) = \sum_{p,q=0}^{5} U_{pq}^{kl} (x - x_k)^p (y - y_l)^q . \qquad (3)$$

Кожному внутрішньому вузлу $(x_k, y_l)$ області G поставимо у відповідність сукупність невідомих $\xi^{kl} = \left(\xi_0^{kl}, \ldots, \xi_5^{kl}\right)$ та $\eta^{kl} = \left(\eta_0^{kl}, \ldots, \eta_5^{pl}\right)$ і стільки ж лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\bar{\xi}^{kl} = \bar{F}_3^{kl} + \bar{G}\,\frac{\bar{\xi}^{k,l+1} + \bar{\xi}^{k,l-1}}{2} + \bar{H}\,\frac{\bar{\bar{\eta}}^{k+1,l} - \bar{\bar{\eta}}^{k-1,l}}{2},$$

$$\bar{\bar{\xi}}^{kl} = F_2^{kl} + G\,\frac{\bar{\bar{\xi}}^{k,l+1} + \bar{\bar{\xi}}^{k,l-1}}{2} + H\,\frac{\bar{\bar{\eta}}^{k+1,l} + \bar{\bar{\eta}}^{k-1,l}}{2}, \qquad (4)$$

$$\bar{\eta}^{kl} = F_1^{kl} + \bar{H}\,\frac{\bar{\bar{\xi}}^{k,l+1} - \bar{\bar{\xi}}^{k,l-1}}{2} + \bar{G}\,\frac{\bar{\eta}^{k+1,l} + \bar{\eta}^{k-1,l}}{2},$$

$$\bar{\bar{\eta}}^{kl} = F_2^{kl} + H\,\frac{\bar{\bar{\xi}}^{k,l+1} + \bar{\bar{\xi}}^{k,l-1}}{2} + G\,\frac{\bar{\bar{\eta}}^{k+1,l} + \bar{\bar{\eta}}^{k-1,l}}{2},$$

де $\bar{\xi}^{kl} = \left(\xi_1^{kl}, \xi_3^{kl}, \xi_5^{kl}\right)^T$, $\bar{\bar{\xi}}^{kl} = \left(\xi_0^{kl}, \xi_2^{kl}, \xi_4^{kl}\right)^T$,

$\bar{\eta}^{kl} = \left(\eta_1^{kl}, \eta_3^{kl}, \eta_5^{kl}\right)^T$, $\bar{\bar{\eta}}^{kl} = \left(\eta_0^{kl}, \eta_2^{kl}, \eta_4^{kl}\right)^T$.

Тут T означає транспонування вектора. Кожна з матриць $G$, $H$, $\bar{G}$, $\bar{H}$ має структуру вигляду $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$, не залежить ні від правої частини рівняння ,ні від крайових умов, обчислюється один раз і може зберігатись у вигляді таблиць, або у комп'ютерному файлі.

Праву частину в околі вузла $(x_k,y_l)$ представляємо у вигляді

$$f^{(k,l)}(x, y) = \sum_{i,j=0}^{3} f_{ij}^{kl} (x - x_k)^i (y - y_l)^j . \quad (5)$$

Числа $F_i^{pl}$ визначаються , як лінійні комбінації $f_{ij}^{kl}$. Після чого, наприклад, методом простих ітерацій розв'язується система (4) для всіх (k,l) таких , що $(x_k,y_l)$ пробігає всі внутрішні вузли. Якщо $\xi^{kl}$ , або $\eta^{kl}$ відповідає граничному вузлу, то вони обчислюються на основі крайових умов. Після обчислення всіх $\xi^{kl}$ та $\eta^{kl}$, знаходяться числа $U_{pq}^{kl}$ на основі формул вигляду $U^{kl} = Cf^{kl} + A\,\eta^{kl} + B\,\xi^{kl}$ ,де C,A,B- деякі фіксовані матриці, що не залежать ні від крайових умов, ні від правої частини. Тут $U^{kl}$ вектор коефіцієнтів розв'язку (3),а $f^{kl}$ вектор коефіцієнтів правої частини в (5). Має місце наступна

**Теорема.** Якщо розв'язок U=U(x,y) задачі (1),(2) належить простору $C^{(6)}(D)$ - 6 раз неперервно диференційованих в (D) функцій, то для наближеного розв'язку (3) має місце оцінка

$$\max_{\Pi_{ij}} \left| D^{\alpha} \left( U(x, y) - U^{kl}(x, y) \right) \right| \le K\, h^{6-|\alpha|} , \; |\alpha| < 5,$$

де K - число, не залежне ні від h , ні від x та y.

Аналогічні схеми побудовані для кусково - многочленного наближення 7-го та 9-го степенів . Проте , у випадку не більше 18 значущих цифр многочлени 11-го і вищих степенів виграшу при наближеному розв'язуванні задачі Діріхле не давали.Як і слід було чекати, чим більшою була гладкість розв'язків , тим ефективнішими були схеми, побудовані на основі многочленів більш високих степенів.

1.В.К.Дзядык. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.-К.: Наукова думка, 1986.

2.Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики.-М.: Наука, 1980.